

非定域量子多体波动方程*

石磊磊^{1)2)†}, 郭新帅^{1)†#}, 魏玖长^{1)#}, 张伟^{2#}, 汪秉宏^{3#}

- 1) 中国科学技术大学管理学院, 安徽合肥, 邮政编码 230026; 2) 北京友仁闲谭科技有限责任公司, 北京海淀区知春路 56 号友仁居, 邮政编码 100080;
3) 中国科学技术大学近代物理系, 安徽合肥, 邮政编码 230026

(2024 年 9 月 22 日)

摘要

物理实验揭示了量子行为偏离牛顿定律的预测, 确认了量子的贝尔不等式违背和非定域性。因此, 需要定义量子的非定域动量力, 建立非定域波动方程, 揭示复杂量子纠缠的非高斯分布形成机制。作者从复杂系统科学角度定义了一维非定域量子动量力是单位时间内的累计观测量, 发现了非定域量子多体波动方程, 通过解析数学表达式合理解释了相互作用相干非高斯分布纠缠现象。由此预测该纠缠超越传统制备的态叠加纠缠, 是一种高质量纠缠资源。

关键词: 复杂系统, 非定域量子, 相互作用相干纠缠判据, 贝塞尔分布纠缠

PACS: 89.75.-k (Complex Systems); 03.65.Ud (Entanglement and Nonlocality); 89.65.Gh

***基金:** 国家自然科学基金(批准号: 71874172, 72293573)资助的课题。

同等贡献作者贡献一半的研究工作, 石磊磊贡献另外一半的研究工作。

† 通信作者石磊磊和郭新帅. E-mail: Shileilei8@163.com guoxs@ustc.edu.cn

“我认为下个世纪（二十一世纪）是复杂性科学的世纪。”——霍金^[1]

1 引言

复杂系统是由许多相互作用的个体或粒子构成，其相互作用的整体在演化过程中涌现出一些复杂的结构或分布，出现在从自然科学到社会科学的各个领域^[2]。例如，金融交易市场^[3-6]，大脑神经元的活动^[7]以及从原子尺度复杂量子多体波函数^[8]到行星尺度物理系统中的无序和涨落的相互作用^[9]。上个世纪九十年代，计算机科学家通过大规模平行计算提出了人工智能复杂适应性系统（Complex Adaptive Systems, CAS）的可视化模拟器模拟复杂系统^[10]。复杂适应性系统从复杂系统中凝练出一些共同特征，强调相互作用群体或多体与环境在演化过程中的适应性行为，主体与客体在反馈系统中的互为因果关系以及由此涌现出多层次的复杂结构或分布特征^{[11][12]}。最近，一些科学家基于对复杂适应性系统的深入理解，探索普适的复杂适应性理论^[13]。本文从复杂系统科学的角度发现了非定域量子多体波动方程，试图揭示复杂量子纠缠的非高斯分布形成的底层机制。

量子纠缠是一种“鬼魅行为”^{[14][15]}，多种判据证实了它以不同的形式存在（参见图 1）^[8]。如今，量子纠缠已经成为量子技术（例如量子通信、量子计算和量子测量）的重要资源^[16]。实验物理学家已经能够通过各种方法制备出量子纠缠态，并且开始寻找具有应用前景的复杂量子多体纠缠态（参见图 2）^[17-19]。

量子纠缠在数学上被定义为不可分的直积态，其中纠缠对的 A 和 B 两部分通过相互作用纠缠在一起，是非定域的和互为因果关系的^[20-22]。无论将纠缠对中的 A 和 B 两部分在空间上分离的多么遥远，它们之间的测量始终保持着强相关性，因而能够通过测量 A 的状态预测 B 的状态，反之亦然。总之，在纠缠对 A 和 B

中，纠缠中的一方 A 或 B 能够瞬时“知道”另外一方 B 或 A 的变化，并且据此做出适应性的“智能”补偿，维持纠缠状态不变（参见图 2）。目前，理论物理学界还无法合理地解释这种看似反科学常识的“智能”行为！

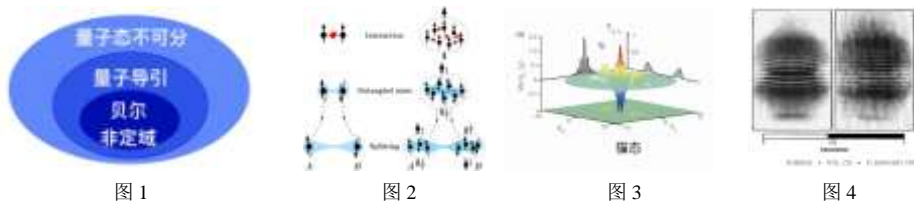


图 1: 纠缠态分类^[8]; 图 2: 双粒子（左）和多粒子（右）通过相互作用形成纠缠态^[19]; 图 3: 复杂量子纠缠的非高斯分布猫态^[8]; 图 4: BEC (Bose-Einstein Condensate)干涉条纹^[23]。

Fig. 1. Entanglement classification^[8]; Fig. 2. Schematic of an EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) experiment through interactions with two particles(left) and with two many-particle systems (right), where the spin degree of freedom is considered^[19]; Fig. 3. Non-Gauss distribution (cat state) in complex quantum entanglement^[8]; Fig. 4. Interference pattern in BEC (Bose-Einstein Condensate)^[23].

由 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 佯谬引发的量子纠缠已被争论了整整 90 年，但其形成机制至今仍困扰着理论物理学界，尚未得到真正的解决。量子物理实验揭示了量子贝尔不等式违背，确认了量子的非定域特性^[20-22]，再一次证明了量子行为显著地偏离牛顿第二定律的预测和量子多体的复杂性。因此，量子力学需要定义复杂量子多体系统的非定域动量力，寻找非定域量子多体波动方程，以揭示复杂量子纠缠和波色-爱因斯坦凝聚态 (Bose-Einstein condensates, BEC) 干涉^[23]的非高斯分布形成的底层机制（参见图 3 和图 4）并找到该方程与薛定谔波动方程的统一范式。

薛定谔波动方程正确地预测了氢原子的能级跃迁^[24]，并用概率波函数描述粒子的分布结构和不确定性^[25]。然而，当原子核序数增加，且围绕原子核的电子数量越来越多时，薛定谔方程的预测就出现了较大的偏差。目前，学术界主要采取两种方法来解决量子多体所导致的偏差：1) 量子场论的重整化^[26-28]；2) 在薛定谔波动方程中重新定义哈密顿量，增加相互作用项^[29]。例如，理论物理学家在 Bose-Einstein Condensate (BEC) 干涉的非线性效应模拟和分布结构成因方面已经取得了一些进展。Liu 等^[30]假设一维非线性薛定谔方程或 Gross-Pitaevskii 方程中的非线性项代表纠缠态，使用该方程的精确解研究 BEC 干涉中的非线性效应。利用逆散射方法，用凝聚态的初始密度分布来刻画势能，将干涉图形研究转化为线性薛定谔方程的散射问题。该理论为一维情况的定量预测提供了一个分析框架，便于直观地理解实验和数值模拟观察到的干涉图形。最近，Zhang 等^[31]报道了在两个频率驱动下，BEC 原子相互作用形成的密度结构具有二重 (D2)、四重 (D4) 和六重 (D6) 对称性，显示出频率是形成量子密度分布的敏感变量，可以用于调节量子系统的波函数和分布结构。然而，发现非定域量子多体波动方程，揭示复杂量子纠缠的非高斯分布形成机制以及建立它与薛定谔波动方程的统一范式，需要采用复杂系统科学关于开放系统和非定域性的整体思维，扬弃经典力学定义的质点动量和动量力，是一种全新的探索和研究思路，面临着许多挑战！

开放的量子多体系统由许多相互作用的粒子(例如电子、离子或光子)构成，其相互作用在演化过程中涌现出一些分布结构，是典型的复杂适应性系统^[1]，与金融交易复杂适应性系统存在着某种共性^{[12][32][33]}，都可以用概率波函数描述累计观测量的不确定性和分布结构，用本征值确定复杂系统的定态行为。受我国科学工作者在本世纪初发现的金融市场非定域交易量-价概率波方程的启发^{[3][4]}，本文

从复杂系统科学的角度出发,定义了一维非定域量子系统的动量力是单位时间内的累计观测量,发现了在敏感变量坐标系中的非定域量子多体波动方程,得到了两组与实验结果一致的观测量强度在敏感变量(例如电场、磁场或光场频率)区间分布的解析解和分布形成机制的解析数学表达式,合理地解释了相互作用相干纠缠的非高斯分布现象。

如果量子多体的相互作用相干是纠缠的,那么该纠缠对的 A 和 B 两部分是相互作用相干或守恒的,会表现出强相关、互为因果和适应性“智能”属性。由此,可以进一步预测相互作用相干纠缠比叠加纠缠的保真度高,抗退相干能力强且具有自我修复能力,是一种高质量的纠缠资源。对其深入研究将为大规模、产业化生产高质量纠缠资源提供理论判据和技术指引。

本文的创新之处包括: 1) 从复杂性科学角度出发,发现了非定域量子多体波动方程以及它与薛定谔波动方程的统一范式; 2) 为复杂量子纠缠的非高斯贝塞尔分布和 BEC 干涉条纹提供了一种可检验的理论解释。

2 非定域量子多体波动方程

2.1 线性中心势与非定域密度动量和密度动量力

量子力学用薛定谔波动方程来描述微观粒子在势能约束环境下的动态行为,用波函数描述微观物理世界累计观测量的分布结构,用能量本征值确定动态均衡的状态(定态),用能级跃迁测量光谱的吸收与辐射。

根据势能与势能力的数学表达式,线性势能的中心力(吸引力)是非定域的,它的方向始终指向中心点或定态均衡点。该力的大小与敏感变量的位置、位移,位移变化的速度和加速度无关。因此线性中心势函数适合描述量子的非定域行为,它的量纲与非定域量子的能量量纲是一致的。

能量、动量、坐标（又称之为敏感变量）和单位时间内的累计观测量是量子力学的基本物理量。如果假设单位时间内的累计观测量的大小代表非定域量子系统的动量和动量力的大小，那么，非定域量子系统的能量等于敏感变量与单位时间内累计观察量的乘积，与线性中心势能的量纲一致。



图 5：密度代表动量和动量力的大小

注：图 5（a）磁力线密度越大代表磁力越大；图 5（b）累计交易量越大，交易动量和动量力越大（横坐标是价格，纵坐标是累计交易量）。

Fig. 5. Density represents the magnitude of momentum and momentum force

Note: (a) The higher the density of magnetic field lines, the greater the magnetic force; (b)(right above) The larger the cumulative trading volume, the greater the trading momentum and momentum force (horizontal coordinate represents price, and vertical coordinate is cumulative trading volume).

在物理学中，用单位时间内累计观测量的密度代表力的大小是有先例的。譬如，磁力线密度越大的地方代表磁场或磁力越强；反之，磁力线密度越稀疏的地方代表该处的磁场或磁力越小（参见图 5a）。类似地，在复杂金融市场，单日刻度内的累计交易量在敏感变量价格区间分布的概率越大，那么由动量交易导致价格偏离均衡价格方向的动量和动量力也越大（参见图 5b）^{[3][34]}。由此，我们引入

非定域量子密度动量力的概念。在开放的复杂量子系统中，单位时间内累计观测量或密度在敏感变量（例如电场、磁场或光场频率）区间分布的概率越大，它的动量和动量力也越大；反之，累计观测量或密度在敏感变量区间分布的概率越小，它的动量和动量力也越小。

2.2 基本假设前提与数学表达式

考虑到 2.1 节讨论的非定域量子密度动量力，我们对非定域量子系统变量作出以下三个前提假设：

前提假设 I：非定域量子密度动量 Q 在敏感变量 q 区间任意一点的大小等于单位时间内累计观测量的大小，由方程（1）表示；

前提假设 II：非定域量子密度动量力 F 在敏感变量 q 区间任意一点的大小等于单位时间 t 内的密度动量 Q ，由方程（2）表示；

前提假设 III：非定域量子密度能量 E 等于单位时间内非定域量子密度动量力 F 与敏感变量 q 的乘积，用方程（3）表示。

$$Q \equiv \frac{\partial S(q,t)}{\partial q} = \frac{m}{t} = m_t, \quad (1)$$

$$F \equiv \frac{Q(q,t)}{t} = \frac{m_t}{t} = \frac{m}{t^2} = m_{tt}, \quad (2)$$

$$E(q,t) = F * q = q m_{tt} = q \frac{m}{t^2} = q \frac{m_t}{t}, \quad (3)$$

其中，方程（1）中的 $S(q,t)$ 是系统在单位时间 t 内的作用量， q 是敏感变量（例如电场、磁场或光场频率）， m 是单位时间 t 内在敏感变量 q 处的累计观测量； m_t 是非定域密度动量，它等于单位时间 t 内的累计观测量 m ； m_{tt} 是非定域密度动量力（或排斥力） F ，是单位时间 t 内的密度动量 m_t ； t 是单位时间间隔，为了方便通常取值为 1； $E(q,t)$ 是非定域量子在敏感变量 q 处的密度能量，等于非定域密度动量力 F 与敏感变量 q 的乘积。

2.3 非定域量子能量互为因果关系的数学表达式

开放多体量子系统是典型的复杂系统，也是非保守的。它们由许多相互作用的粒子（例如电子、离子或光子）构成，在相互作用的演化过程中由于势能的约束涌现出一些分布结构。

鉴于反馈回路，开放复杂系统在敏感变量坐标系中的输入量与输出量之间存在着互为因果关系。索罗斯把复杂系统中的这种互为因果关系称为“反身性”（reflexivity）^[35]。Shi^[3]明确定义了开放复杂金融交易系统互为因果关系的能量恒等式，建立了复杂系统累计输入量与累计输出量之间关系的数学表达式。它同样适用于开放复杂的量子系统，其数学表达式如下：

$$E(q, t) \equiv PE(q, t) + (1 - P)E(q, t) = I(q, t) + U(q - q_0), \quad (4)$$

和

$$P = \frac{m}{M}, \quad (5)$$

其中， q 是非定域量子的敏感变量， q_0 是线性中心势能 U 的零点或均衡点（奇异点）， m 是单位时间 t 内在敏感变量 q 处的累计观测量， M 是单位时间 t 内在敏感变量区间所有累计观测量之和； P 是在敏感变量 q 处的观测量概率；该复杂系统的输入量是单位时间内在敏感变量 q 处的非定域量子能量 $E(q, t)$ ；输出量包括：1）单位时间内的相互作用能量 $I(q, t)$ （交叉能量 $PE(q, t)$ ）；2）线性中心势能 $U(q)$ ，即剩余量 $(1-P)E(q, t)$ 。

将方程（3）和（5）代入方程（4）右端，我们有

$$E(q, t) = \frac{m}{M} \left(q \frac{m}{t^2} \right) + U(q - q_0) = \frac{1}{M} q \left(\frac{m}{t} \right)^2 + U(q - q_0), \quad (6)$$

由此得到，

$$-E(q, t) + q \frac{m_i^2}{M} + U(q - q_0) = 0. \quad (7)$$

方程 (7) 是非定域量子多体复杂系统服从的能量互为因果关系的数学表达式。

定义线性中心势能 $U(q)$ 和中心力 F_{Att} 的数学表达式如下：

$$U(q) = A_{tt}(q - q_0), \quad (8)$$

和

$$F_{Att} = -\frac{d}{dq}U(q) = -A_{tt}, \quad (9)$$

其中， q 是敏感变量， q_0 是线性中心势能 $U(q)$ 的零点位置或奇异点； $-A_{tt}$ 代表中心力（吸引力），可以是也可以不是常数，与敏感变量 q 无关，是非定域性的，负号表示该力的方向始终指向线性中心势能的零点 q_0 。

将方程 (3) 和方程 (8) 代入方程 (6)，然后两边同时对 q 微分，得到

$$-m_{tt} + \frac{m}{M}m_{tt} + A_{tt} = 0. \quad (10)$$

其中， m_{tt} 是密度动量力（或排斥力）； $\frac{m}{M}m_{tt}$ 是交叉密度动量力或相互作用力； $-A_{tt}$ 是线性势中心力（或吸引力），负号表示该力的方向始终指向势能零点 q_0 。

2.4 非定域量子多体波动方程

假设非定域量子多体的待定波函数 $\psi(q, t)$ 的数学表达式如下^{[3] [36-38]}：

$$\psi(q, t) = Re^{iS(q, t)/B}, \quad (11)$$

其中， q 是敏感变量坐标， t 是时间间隔， R 是振幅；函数 $S(q, t)$ 是作用量，二阶可导，是哈密顿量主函数； B 是一带量纲的常数，保持相位 $S(q, t)/B$ 是无量纲的； i 是虚数并且 $i^2 = -1$ ； $\psi(q, t)$ 是待定波函数。

由方程 (11) 可得：

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} = -\frac{iB}{\psi(q, t)} \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial q}. \quad (12)$$

假设非定域粒子在敏感坐标系中遵守哈密顿-雅克比方程如下^[35-37]：

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0, \quad (13)$$

其中， q 是敏感变量坐标， $S(q,t)$ 是作用量， t 是时间间隔， $H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)$ 是哈密顿量。

根据方程（7），定义一个非定域量子多体系统的哈密顿量为数。

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = q \frac{m_t^2}{M} + U(q - q_0). \quad (14)$$

哈密顿-雅克比方程（13）只适用于能量守恒的保守系统，不适用于耗散系统。我们假设方程（13）适用于开放复杂的量子多体系统，原因主要有以下三个：首先，非定域量子多体能量方程（6）或（7）源于互为因果能量恒等式方程（4），因此系统无论是否保守都是成立的；其次，如果 $q_0 \gg q - q_0$ 同时 $M \gg m$ ，那么 E 或 $U \gg p \frac{v_t^2}{v}$ ，即能量 E 可以近似地视为无穷大或常数，即能量是守恒的；最后，在科学探索的试错中，如果得到的非定域量子多体波动方程能够正确地描述非定域量子多体波动行为，揭示非高斯分布形成机制，那么假设前提方程（13）是可以接受的；反之，则是不可接受的。

分离变量，我们将方程（13）写成如下形式，

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t} = E, \quad (15)$$

这样，我们有

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = E, \quad (16)$$

以及

$$q \frac{m_t^2}{M} + U(q - q_0) = E. \quad (17)$$

由方程（16），我们有

$$S(q, t) = S_1(q) - Et. \quad (18)$$

在方程（18）中， $S_1(q)$ 、 Et 和 qm_t 的量纲是一致的，因此可以得到方程（16）的一个特解如下，

$$S(q, t) = \alpha(qm_t) - Et + \beta \equiv qm_t - Et, \quad (19)$$

其中 α 和 β 是任意常数，为了方便起见，我们定义它们都等于1。

从方程（19）的定义中，可知密度动量 Q 和动量力 F 的数学表达式如下，

$$Q \equiv \frac{\partial S}{\partial q} = m_t, \quad (20)$$

和

$$F \equiv \frac{Q}{t} = m_{tt}. \quad (21)$$

在2.2节中，前提假设 I 中的方程（1）和前提假设 II 中的方程（2）就是方程（20）和（21），表明了前提假设的合理性与自洽。

将方程（20）代入方程（17），整理后的表达式是

$$-E + \frac{q}{M} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + U(q - q_0) = 0. \quad (22)$$

将方程（12）代入方程（22）并且利用共轭函数的性质，构造拉格朗日泛函 $L(q, \psi)$ 如下：

$$L(q, \psi) \equiv \varepsilon = (U - E)\psi^*\psi + \frac{B^2}{M} p \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} \right). \quad (23)$$

通过变分法（对 ψ^* ）

$$\delta \int L(q, \psi) dq = 0, \quad (24)$$

可以得到不含时的在敏感变量 q 坐标系中的非定域量子波动方程如下，

$$\frac{B^2}{M} \left(q \frac{d^2 \psi}{dq^2} + \frac{d\psi}{dq} \right) + [E - U(q - q_0)]\psi = 0, \quad (25)$$

并且满足归一化条件，

$$\int |\psi(q)|^2 dq = 1 \text{ or } \sum_i |\psi_i(q_i)|^2 = 1 \quad (26)$$

其中 $|\psi(q)|^2$ 代表单位时间内在敏感变量 q 处的累计观测量概率。

3 结果

3.1 定态波函数以及形成机制的数学表达式

将线性中心势函数方程（8）代入一维非定域量子多体波动方程（25），选择 $B^2/M=1$ 自然单位以及自然边界条件，我们有，

$$q \frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{d\psi}{dq} + [E - A(q - q_0)]\psi = 0, \quad (27)$$

$$\begin{cases} \psi(+\infty) \rightarrow 0 \\ \psi(q_0) < \infty \text{ 有限,} \\ \psi(-\infty) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (28)$$

其中， q 是敏感变量， q_0 是线性中心势的零点、均衡点或方程的奇异点， E 是能量， $-A_{tt}$ 是中心力（吸引力），负号代表该力的方向总是指向线性中心势能的零点；归一化 $|\psi(q)|^2$ 是非定域量子在敏感变量坐标系 q 处累计观测量出现的概率。

于是，可以得到两组解析分布函数以及形成机制的数学表达式：1）能量本征值波函数；2）相互作用相干本征值波函数。

3.1.1 能量本征值波函数与形成机制

如果非定域量子波动方程（27）中的能量 E 在敏感坐标系中是常数（能量守恒），那么可以得到一组多阶解析解，它的数学表达式如下^[5]：

$$\psi_{n,i}(q_i) = C_n e^{-\sqrt{A_{tt,n}}|q_i - q_0|} \cdot F(-n, 1, 2, \sqrt{A_{tt,n}}|q_i - q_0|), \quad (n, i = 0, 1, 2 \dots) \quad (29)$$

或

$$|\psi_{n,i}(q_i)|^2 = C_n e^{-2\sqrt{A_{tt,n}}|q_i - q_0|} \cdot |F(-n, 1, 2, \sqrt{A_{tt,n}}|q_i - q_0|)|^2, \quad (n, i = 0, 1, 2 \dots) \quad (30)$$

并且中心力（吸引力）本征值 A_{tt} 满足条件如下，

$$\sqrt{A_{tt,n}} = \frac{E_n}{1+2n} = \text{常数} > 0, \quad (n = 0,1,2 \dots) \quad (31)$$

或能量满足量子化条件如下,

$$E_n = (1 + 2n)\sqrt{A_{tt,n}} = (1 + 2n)\omega_n \sim (1 + 2n)\hbar\nu_n = \text{常数} > 0$$

$$(n = 0,1,2 \dots) \quad (32)$$

其中, $|\psi_{n,i}(q_i)|^2$ 是非定域量子在敏感变量坐标系 q_i 处的累计观察量概率, $-A_{tt}$ 是系统的中心力 (吸引力), 负号代表该力的方向总是指向线性中心势原点 q_0 , q_0 也是累计观测量的对称中心或最大观测量对应敏感量数值; $\omega_n^2 = A_n$ ($\omega_n > 0$) 是波函数方程 (29) 或 (30) 的频率。

方程 (32) 表明, 本征波函数方程 (30) 的能量是量子化的; C_n 是归一化常数, $n = 0,1,2,3 \dots$ 是多阶函数的阶数, $i = 0,1,2,3 \dots$ 代表测量样板中的第 i 个点, $F(-n, 1, 2\sqrt{A_n}|q_i - q_0|)$ 是 n -阶超合流本征函数 (confluent hypergeometric eigenfunctions), 即第一种 Kummer's 函数 $F(\alpha, \gamma, \xi)$ 。它的表达式如下:

$$F(\alpha, \gamma, \xi) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\xi + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}\xi^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\xi^3 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!(\gamma)_k} \xi^k, \quad (33)$$

其中, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1),$ (34)

$$(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+k-1), \quad (35)$$

这里 $F(\alpha, \gamma, \xi)$ 有意义的充分必要条件是 $\gamma \neq 0, \alpha = -n$ ($n = 0,1,2 \dots$)。

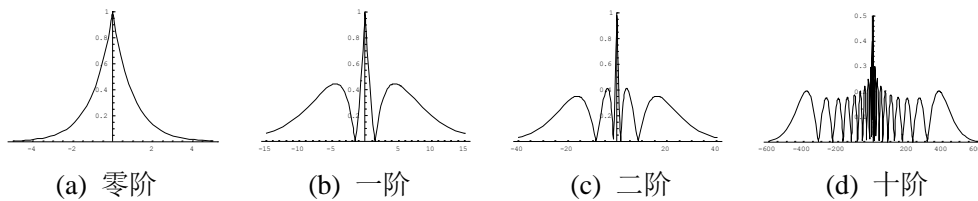


图6: 能量守恒条件下累计观测量的分布

注：横坐标代表敏感变量，纵坐标代表累计观察量，原点是定态均衡点

Fig. 6. The distribution of cumulative observables in a conservative energy system

Note: Horizontal coordinate is a sensitive variable, vertical coordinate represents cumulative observable distribution, and origin is a stationary point.

方程 (31) 或 (32) 是定态波函数方程 (29) 或 (30) 形成机制的数学表达式。图6是波函数 $|\psi_{n,i}(q_i)|^2$ 方程 (30) 当阶数 n 分别取0, 1, 2和10时的示意图。

3.1.2 相互作用相干本征值波函数与形成机制

如果能量是可分离的, $E_i = q_i m_{tt,i}$, 并且利用方程 (10), 可以得到另一组相互作用相干本征值波函数如下:

$$\psi_{n,i}(q_i) = C_n J_{0,i}[\omega_n(q_i - q_0)], \quad (n = 0, 1 \dots), (i = 1, 2 \dots) \quad (36)$$

或

$$|\psi_{n,i}(q_i)|^2 = C_n |J_{0,i}[\omega_n(q_i - q_0)]|^2, \quad (n = 0, 1 \dots), (i = 1, 2 \dots) \quad (37)$$

并且, 相互作用相干本征值满足条件如下,

$$\omega_n^2 = \frac{m_{t,n,i}^2}{M} = \frac{m_{n,i}}{M} m_{tt,n,i} = m_{tt,n,i} - A_{tt,n,i} = const. \quad (n = 0, 1, \dots), (i = 1, 2 \dots) \quad (38)$$

其中, $J_{0,i}[\omega_n(q_i - q_0)]$ 是带相互作用相干本征值频率 $\omega_n > 0$ 的零阶贝塞尔函数, $m_{tt,n,i}$ 是密度动量力 (排斥力), $-A_{tt,n,i}$ 是中心力 (吸引力), $\frac{m_{n,i}}{M} m_{tt,n,i}$ 是交叉密度动量力或相互作用力, q_i 是敏感变量, q_0 是线性中心势零点, C_n 是归一化常数, n 代表第 n 个状态, i 代表观测样本中的第 i 个观测点, 归一化波函数 $|\psi(q_i)|^2$ 代表在敏感变量 q_i 值处的累计观测量概率。

方程 (38) 是相互作用相干波函数方程 (36) 或 (37) 形成机制的数学表达

式。图 7 是波函数方程 (37) 的简图。

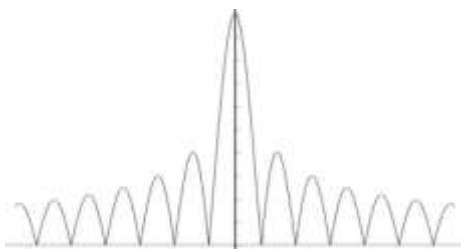


图 7: 相互作用相干本征值波函数

注: 横坐标是敏感变量, 纵坐标是累计观测量强度分布, 坐标原点是定态均衡点

Fig. 7. The interactively coherent wave eigenfunctions

Note: The horizontal coordinate represents a sensitive variable, the vertical coordinate represents cumulative observable probability in a time interval, and the origin is a singular point or a stationary point.

4 讨论

4.1 非定域量子波动方程与薛定谔波动方程的统一范式

受德布罗意“波粒二象性”假说启发^[39], 薛定谔基于经典力学能量守恒和哈密顿-雅克比方程, 发现了薛定谔波动方程。薛定谔方程用概率波函数描述微观量子的不确定性和分布结构, 用能量本征值确定它的运动状态(定态)并且用能级跃迁来计算光谱的吸收与辐射, 正确地预测了氢原子的能级跃迁。

物理实验证明了量子的贝尔不等式违背, 是非定域的, 复杂量子系统的动量力无法用牛顿第二定律计算。本文探索了复杂量子系统的非定域多体波动方程。现在, 进一步讨论该方程与薛定谔波动方程之间的内在逻辑关系和统一的理论框架。

图8显示，如果系统的动量力 $F=ma=m(x/t^2)$ 遵循牛顿第二定律，便可得到薛定谔波动方程（参见图8左列）。如果系统的动量力 F 是非定域密度动量力 $F=m_{tt}=m/t^2$ ，那么就得到非定域量子多体波动方程（25）（参见图8右列）。

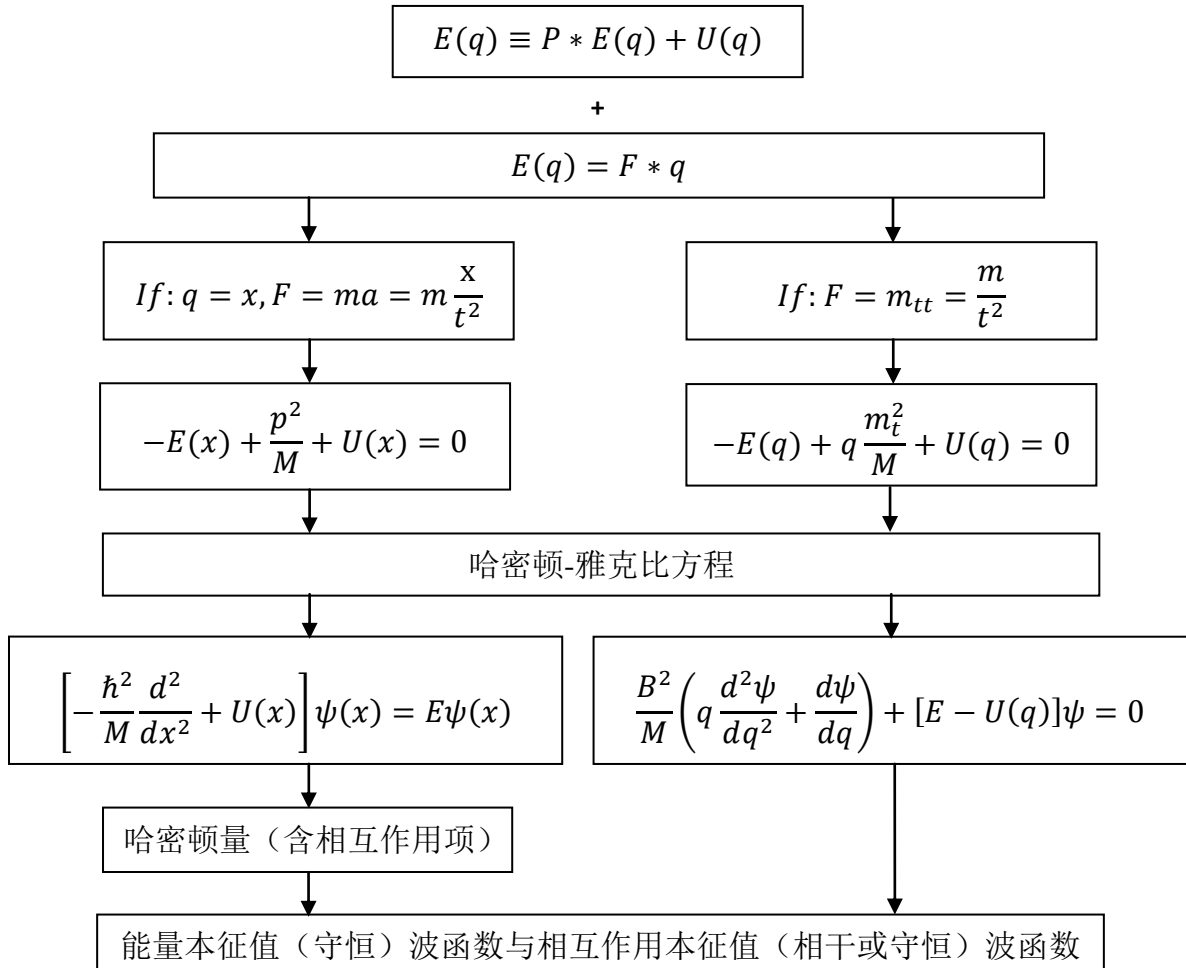


图 8 薛定谔波动方程与非定域量子多体波动方程的统一范式

注：1) 左列是薛定谔波动方程；2) 右列是非定域量子多体波动方程

Fig. 8. A unified paradigm

Note: 1) Schrödinger's wave equation in left column; 2) Nonlocal quantum many-body wave equation in right column.

4.2 非定域量子多体波动方程的意义

在量子力学中，人们一般都是用能量本征值的量子化波函数来计算量子的能级跃迁。对于相互作用相干波函数，主要是通过态叠加原理和引入线性代数矩阵计算，不断近似地寻找量子态在希尔伯特空间与实验结果一致的量子波函数。由于代数矩阵算法中含有大量的未知参数，因此，无法发现相互作用的行为机制，无法进一步解释复杂量子系统中的异常现象。

开放系统中的非定域量子多体波动方程有两组解析的定态波函数和不同形成机制的数学表达式：能量本征值定态波函数和相互作用相干本征值定态波函数。薛定谔波动方程已经对量子的能量本征值定态及其分布波函数有比较全面的描述，但是至今没有量子系统相互作用相干状态的解析波函数。非定域量子多体波动方程通过相互作用相干本征值状态和定态波函数，能够测量出复杂量子多体系统的相互作用相干数值大小和分布结构，揭示了相互作用相干形成的底层机制，为研究复杂量子多体的相互作用提供了一种测量方法和理论工具，弥补了现有量子力学理论的不足之处（参见方程（37）、（38）和图7）。

4.3 相互作用相干纠缠形成的机制和预测

复杂量子多体波函数 $\psi(q)$ 可以用相互作用相干本征值波函数的线性叠加表述。由于相互作用相干本征值波函数在希尔伯特空间是正交的，因此该波函数 $\psi(q)$ 可以用以下对角矩阵表示，

$$\psi(q) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vdots \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{0,0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{n-1,k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{0,0} \\ \vdots \\ \psi_{n-1,k-1} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

其中， $\psi_0(q), \psi_1(q), \dots, \psi_{n-1}(q)$ 是不同的相互作用本征值波函数，它们在敏感变量 q 的希尔伯特空间是正交的； $c_{0,0}^2, c_{1,1}^2, \dots, c_{n-1,k-1}^2$ 是对应的相互作用本征值状态波函数 $\psi_0(q), \psi_1(q), \dots, \psi_{n-1}(q)$ 出现的概率。

相互作用相干形成机制的数学表达式是方程 (38)。密度动量力变量（排斥力） m_{tt} 与中心力变量（吸引力） A_{tt} 之间的相互作用是相干或守恒的，是同时存在的。由此可以预测：1) 如果相互作用相干定态是纠缠的，那么纠缠对中 A 和 B 两部同时存在着相反的两种状态，无论在空间上将它们分离多么遥远，它们都保持着在敏感变量坐标系上相互作用相干本征值状态 $\omega_n^2 = \left(\frac{m}{M}\right) m_{tt,n,l}$ 不变或守恒，维持着纠缠态。也就是说，在纠缠对 A 和 B 中，纠缠中的一方 A 或 B 能够瞬时“知道”另外一方 B 或 A 的变化，并且据此做出适应性的“智能”补偿或自我修复，维持纠缠状态不变，具有适应性“智能”属性 (adaptive “intelligence-like” property); 2) 如果相互作用相干定态是纠缠的，那么它比叠加态纠缠更加稳定，抗退相干的性能更强，具有适应性自我修复能力，是一种高质量纠缠态资源，也是今后制备纠缠资源的重点方向。

5 结论

非定域量子多体波动方程与薛定谔波动方程之间存在着内在的统一关系。如果粒子的动量力遵循牛顿定律，我们在统一的框架下得到了薛定谔波动方程。它很好地描述了粒子的波动行为，正确地预测了氢原子的能级跃迁。如果开放的复杂量子多体系统的动量力是密度动量力，那么我们在这个统一的框架下得到了非定域量子多体波动方程。该方程在敏感变量坐标系中存在着两组定态解析波函数和不同的形成机制：1) 能量（或非定域中心力）本征值定态波函数和它的形成机制；2) 相互作用相干本征值定态波函数和它的形成机制。

非定域相互作用相干纠缠服从带相互作用本征值的零阶贝塞尔函数的平方分布，具有不可分的两种相反的状态，并且纠缠对中的 A 和 B 双方在敏感变量坐标系中具有适应性“智能”属性 (adaptive “intelligence-like” property)。该纠

缠系统在空间上分离后，纠缠对的 A 和 B 两部分在敏感变量坐标系中的密度动量力（排斥力变量） m_{tt} 与线性势中心力（吸引力变量） A_{tt} 之间的相互作用相干频率 $\omega_n^2 = m_{tt,n,t}m/M$ 是守恒的。也就是说，在纠缠对 A 和 B 中，纠缠中的一方 A 或 B 能够瞬时“知道”另外一方 B 或 A 的变化，并且据此做出适应性的“智能”补偿或自我修复，维持 A 与 B 之间互为强相关和纠缠状态。

此外，相互作用相干本征波函数的矩阵在希尔伯特空间是正交的。由此可以推测：如果相互作用相干定态是纠缠的，那么它比叠加态纠缠更稳定，抗退相干的性能更强，具有适应性自我修复能力，是一种高质量纠缠态资源，可为今后产业化生产高质量纠缠资源提供理论判据和技术指引。

作者感谢刘伍明，陈徐宗，何琼毅，周正威，林海青，李传锋，郑志刚，吕琳媛，范天龙，陆军，蔡爱华，张立军，段亚凡，付海翔，项玉，马荣，王美红，张超，敖平，刘泽飞，卢征天，张元，修晓明，王明锋，赵义博，王怀玉，丁泽军，叶如钢，石皓天，张文成，张英华，叶一火，王忠，陈嵩，Hanns-Christoph Nägerl, Stanisław Drożdż, Everett X. Wang 等有益的批评、指正和讨论！感谢参加以下国内和国际会议学者们的交流与讨论，例如《第二十一届全国量子光学学术会议，福州，2024.8》，《2024 量子信息技术学术交流大会，太原，2024.7》，《第十届冷原子物理国际学术研讨会（ISCAP-X），上海，2024.6》，《第七届物理，数学与统计国际学术会议ICPMS2024，宜昌，2024.5》，《第八届中国系统科学大会，芜湖，2024.5》，《第二届中国社会物理论坛（北大-武汉人工智能研究院），武汉，2023.11》，《ArtInHCI 2023 人工智能与人机交互国际会议（线上），2023.10》，《经济物理国际会议，上海，2023.6》，《第七届中国系统科学大会，重庆，2023.5》。作者同时非常感谢在中国科学技术大学网络空间安全学院、公共事务学院和管理学院国际金融研究院等学术交流会参与者的讨论。作者承担文中的任何遗漏或错误。

参考文献

1. Barabási, Albert-László (2016): *Network Science*, Cambridge: Cambridge

University Press.

2. Popular information (2021): “They Found Hidden Patterns in the Climate and in Other Complex Phenomena,” *The Nobel Prize in Physics 2021*, NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach AB 2024. Tue. February 6, 2024.
<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/popular-information/>
3. Shi, Leilei (2006): “Does Security Transaction Volume-Price Behavior Resemble a Probability Wave?” *Physica A*, **366**, 419-436.
4. Shi, Leilei, Xinshuai Guo, Andrea Fenu, and Bing-Hong Wang (2023): “The Underlying Coherent Behavior in Intraday Dynamic Market Equilibrium,” *China Finance Review International*, **13** (4), 568-598.
5. Lo, Andrew W. (2017): *Adaptive Markets: Financial Evolution at the Speed of Thought*, Princeton, and Oxford: Princeton University Press.
6. Gharbi, Oumayma, Yousra Trichilli, Mouna Boujelbéne (2023): “Risk Spillovers Connectness between the US Fintech Industry VaR behavioral Biases and Macroeconomic Instability Factors: COVID-19 Implications.” *China Finance Review International*, **13** (3), 410-443.
7. Liu, Zefei, Yong-Cong Chen, and Ping Ao (2024): “Entangled Biphoton, Generation in the Myelin Sheath,” *Physical Review E*, **110**, 024402.
8. 何琼毅 (2024): “复杂量子纠缠检测及其应用研究,” 《复旦大学理论物理报告会》以及《第二十一届全国量子光学学术会议》邀请报告, 蔻享视频, DOI 链接: <https://dx.doi.org/10.12351/ks.2404.0009>
9. 陈晓松, 樊京芳 (2022): “复杂性科学的机遇: 2021年诺贝尔物理学奖解读,” *物理*, **51** (1), 1-9.
10. Holland, John H. (1992): “Complex Adaptive Systems,” *Daedalus*, **121** (1), A New Era in Computation (Winter, 1992), 17-30.

11. Holland, John H. (1995): *Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity*, Reading, Massachusetts; Menlo Park, California; New York: Addison-Wesley.
12. Carmichael, Ted, and Mirsad Hadžikadić (2019): “The Fundamentals of Complex Adaptive Systems,” In Ted Carmichael, Andrew J. Collins, and Mirsad Hadžikadić (eds.) *Complex Adaptive Systems, Views from the Physical, Natural, and Social Sciences*, Cham (Switzerland): Springer Nature Switzerland AG, 1-16.
13. Shi, Leilei, Xinshuai Guo, Jiuchang Wei, Wei Zhang, Guocheng Wang, Bing-Hong Wang (2024): “A Theory of Complex Adaptive Learning in Complex Adaptive Systems,” *Working Paper (v12)*, Available at <https://arxiv.org/abs/2306.15554>
14. Einstein, Albert, Boris Podolsky, and Nathan Rosen (1935): “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” *Physical Review*, **47** (May 15), 777–780.
15. Schrödinger, Erwin (1935): “Discussion of Probability Relations between Separated Systems,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **31**(4), 555-563.
16. Popular information (2022): “How Entanglement Has Become a Powerful Tool,” *The Nobel Prize in Physics 2022*, NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach AB 2024. Sat. February 17, 2024.
17. Aspect, Alain 著，陈徐宗和陈佐尧译，俞旭东校（2022）：“贝尔定理：一位实验学家的朴素观点，” *物理*，**51**（12），827-843.
18. 葛惟昆（2022）：“2022年诺贝尔物理学奖的科学内涵辨识，” *物理*，**51**（12），821-826.
19. Colciaghi, Paolo, Yifan Li, Philipp Treutlein, and Tilman Zibold (2023): “Einstein-Podolsky-Rosen Experiment with Two Bose-Einstein Condensates,”

- Physical Review X*, **13**, 021031.
20. Bell, John S. (1964): “On the Einstein, Podolsky, Rosen Paradox,” *Physics*, **1**, 195.
 21. 崔廉相, 许康, 张芑, 孙昌璞 (2023): “贝尔不等式的量子违背及其实验检验——兼议2022年诺贝尔物理学奖,” *物理*, **52** (1), 1017.
 22. 施郁 (2022): “量子纠缠之路: 从爱因斯坦到2022年诺贝尔物理学奖,” *自然杂志*, **44** (6), 455-465.
 23. Andrews, M. R., C. G. Townsend, H. J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle (1997): “Observation of Interference between Two Bose Condensates,” *Science*, **275**, 637-641.
 24. Schrödinger, Erwin (1928): *Collected Papers on Wave Mechanics (translated from the second German Edition)*, London and Glasgow: Blackie, 1–12.
 25. Born, Max (1926): “Quantenmechanik der Stoßvorgänge” *Zeitschrift für Physik*, **38** (11-12), 803-827.
 26. 孙昌璞 (2023): *高等量子力学公开课*, 中国工程物理研究院研究生院主办, 蔻享视频网址: <https://www.koushare.com/live/details/22759>.
 27. 石康杰, 杨文力, 杨战营编著 (2022): *量子场论与重整化导论 (第7次印刷)*, 北京: 科学出版社.
 28. 文小刚著, 胡滨译 (2004): *量子多体理论 (2023年第5次印刷)*, 北京: 高等教育出版社.
 29. 吉尔伯特·格林贝格 (法), 艾伦·爱斯派克特 (法) 和克劳德·法布尔 (法) 著, 乔从丰, 李军利和杜琨译 (2020): *量子光学*, 合肥: 中国科学技术大学出版社, 53-65.
 30. Liu, Wu-Ming, Biao Wu, and Qian Niu (2000): “Nonlinear Effects in Interference

- of Bose-Einstein Condensates,” *Physical Review Letters*, **84** (11), 2294-2297.
31. Zhang, Zhendong, Kai-Xuan Yao, Lei Feng, Jiazhong Hu, and Cheng Chin (2020): “Pattern Formation in a Driven Bose-Einstein Condensate,” *Nature Physics*, **16**, 652-656.
32. Tao, Terence (2012): “E Pluribus Unum: From Complexity, Universality,” *Daedalus*, **141** (3), 23-34.
33. 狄增如 (2023): “从唯象到机制: 社会物理学的开普勒时代,” 北大-武汉人工智能研究院第二届社会物理学会议主旨演讲.
34. Shi, Leilei, Binghong (Bing-Hong) Wang, Xinshuai Guo, and Honggan Li (2021): “A Price Dynamic Equilibrium Model with Trading Volume Weights Based on a Price-Volume Probability Wave Differential Equation”, *International Review of Financial Analysis*, **74** (March), 101603.
35. Soros, George (1994): *The Alchemy of Finance*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 41-45.
36. Derbes, D. (1996): “Feynman’s Derivation of the Schrödinger Equation,” *American Journal of Physics*, **64**, 881–884.
37. 曾谨言 (2014): *量子力学卷II* (第五版), 北京: 科学出版社, 42-47.
38. Greenwood, Donald T. (1977): *Classical Dynamics*, Englewood Cliffs, N.J. USA: Prentice-Hall, Inc., 187-213.
39. De Broglie, Louis (1923): “Waves and Quanta,” *Nature*, **112** (2815), 540.

A Nonlocal Quantum Many-Body Wave Equation

Leilei Shi^{1)2)†}, Xinshuai Guo^{1)†#}, Jiuchang Wei^{1)#}, Wei Zhang^{2)#}, Bing-Hong Wang^{3)#}

1) (School of Management, University of Science and Technology of China (USTC), Hefei 230026, P. R. China)

- 2) (Department of Academic Research, Beijing YourenXiantan Science & Technology Co., Ltd.,
Beijing 100080, P. R. China)
- 3) (Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China (USTC), Hefei
230026, P. R. China)

Abstract

Physical experiments have revealed quantum behavioral deviation far from the prediction of Newton's laws, established the quantum violation of Bell's inequality, and confirmed the quantum non-locality. It is necessary to define the nonlocal quantum momentum force, establish a nonlocal quantum wave equation, and reveal the mechanism of non-Gaussian distribution formation in complex quantum entanglement. From the perspective of complex systems science, the author defines one-dimensional nonlocal quantum momentum force as the cumulative observables in a time interval, discovers the nonlocal quantum many-body wave equation, and justifies interactively coherent entanglement with the non-Gaussian distribution by explicit mathematical expressions. The theory predicts that interactively coherent entanglement is a high-quality resource, surpassing the superposition entanglement generated by traditional preparation.

Keywords: Nonlocal quantum many-body, complex systems, interactively coherent entanglement criterion, Bessel distribution entanglement

PACS: 89.75.-k (Complex Systems); 03.65.Ud (Entanglement and Nonlocality); 89.65.Gh (Economics, Econophysics, Financial Markets, Business and Management)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 71874172, 72293573).

These authors contributed equally to one half of the research, and Shi contributed to the other half.

† Corresponding author. E-mail: Shileilei8@163.com
The first author. E-mail: Shileilei8@163.com