# 软定理与树图散射振幅

JHEP 03(2023)021， JHEP 03(2024)081， arxiv:2406.03034， arxiv:2406.03784

扬州大学引力与宇宙学中心 周 康

合作者： 杜一剑（武汉大学）、 胡畅（国科大杭高院博士后）、 韦方星辰（扬州大学研究生）

2024年8月14日 青岛

# 目 录

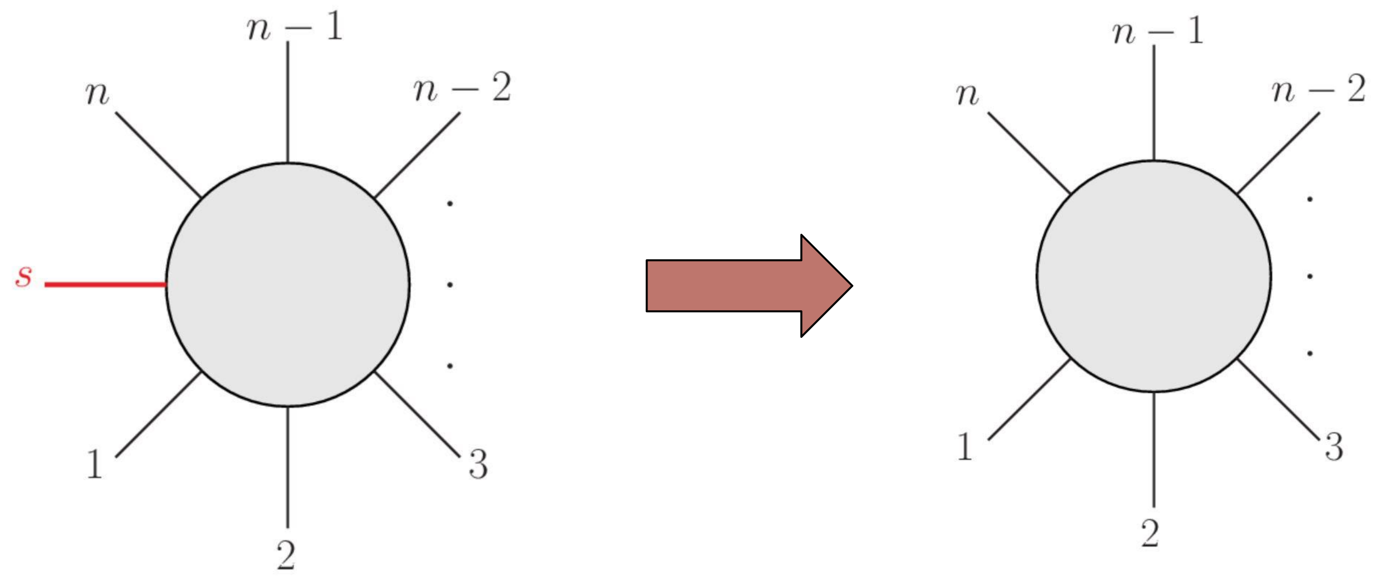
Contents

# 目录

Contents

# 1. 软定理

$$k^2 = 0 \qquad\qquad k^\mu \to \tau k^\mu, \quad \tau \to 0$$




$$\mathcal{A}_{n+1} \to \left(\tau^{-1}\, S_h^{(0)_s} + \tau^0\, S_h^{(1)_s} + \tau^1\, S_h^{(2)_s}\right) \mathcal{A}_n + \cdots$$

$$S_h^{(0)_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \cdot \varepsilon_s \cdot k_i}{k_i \cdot k_s}, \qquad S_h^{(1)_s} = \cdots, \qquad S_h^{(2)_s} = \cdots$$

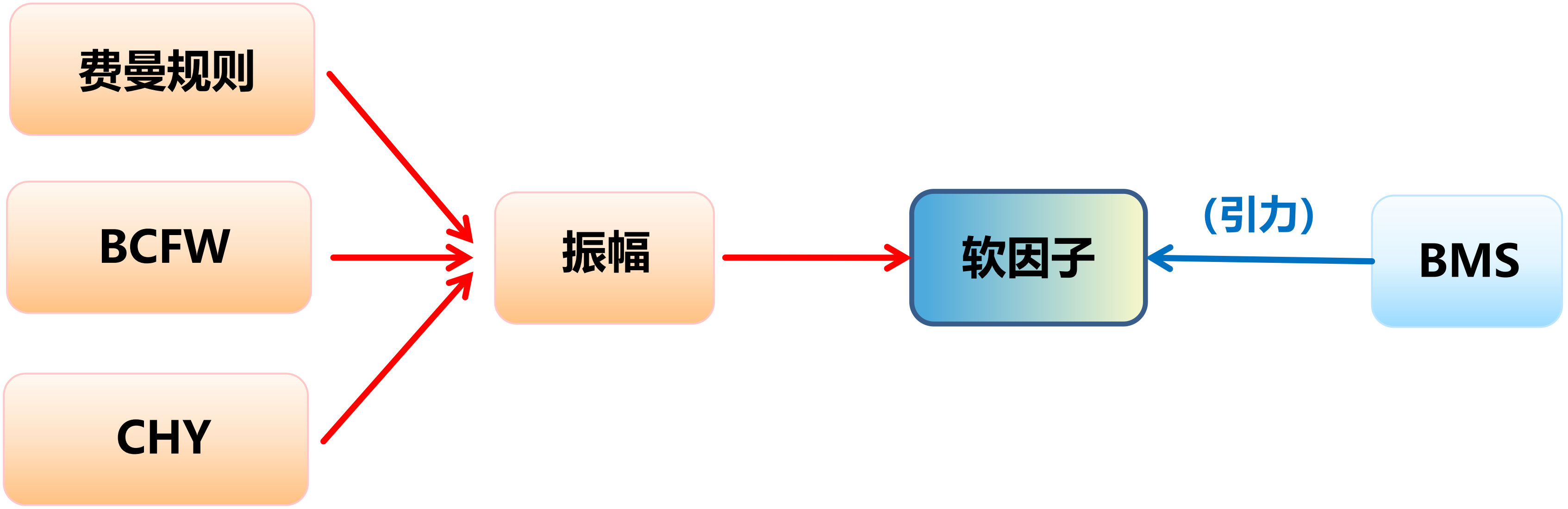
# 2. 软定理 vs 振幅

## 软定理→振幅

1. 逆用软定理；

2. 假设软因子为已知。

## 振幅→软因子



# 3. 动机

问题：

振幅 ⇄ 软因子

软定理

软因子的普遍性

? → 振幅

# 4. 我们的方法

在壳：
避免费曼规则的规范冗余度

不假设软因子形式为已知：
避免逻辑混乱

我们的方法

将振幅表达为对适当基的展开：
给出任意点树图振幅的普遍表达式

假设：
洛伦兹不变性、量纲、自旋等一般性条件，以及软因子的普遍性

# 目录

Contents

# 1. 含一个外线胶子的Yang-Mills-scalar振幅

3点YM

$$\mathcal{A}_{\rm YM}(1,2,3) \propto (\epsilon_1\cdot\epsilon_2)\,(\epsilon_3\cdot k_1) + \text{cyclic}$$

3点YMS

维数约化

$$\mathcal{A}_{\rm YMS}(1,2;3||1,2,3) \propto \epsilon_3\cdot k_1$$

假设 bi-adjoint scalar (BAS) 软因子的普遍性

$$\mathcal{A}_{\rm YMS}(\underline{1,2};p||\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{A}_{\rm YMS}(\underline{1,2,3};p||\boldsymbol{\sigma}) \to \cdots \to \mathcal{A}_{\rm YMS}(\underline{1,\cdots,n};p||\boldsymbol{\sigma})$$

## 2. 胶子的软因子

### 单胶子YMS→软因子

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1,\cdots,n;p||\boldsymbol{\sigma}) = \left(S_g^{(0)_p} + S_g^{(1)_p}\right)\mathcal{A}_{\mathrm{BAS}}(1,\cdots,n||\boldsymbol{\sigma}\setminus p) + \cdots$$

$$S_g^{(1)_p} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_{ip}}{s_{ip}}k_i\cdot f_p\cdot\frac{\partial}{\partial k_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_{ip}\left(\epsilon_p\cdot J_i\cdot k_p\right)}{s_{ip}}$$

$$S_g^{(0)_p} = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_{ip}\left(\epsilon_p\cdot k_i\right)}{s_{ip}}$$

$$f_p^{\mu\nu} \equiv k_p^{\mu}\epsilon_p^{\nu} - \epsilon_p^{\mu}k_p^{\nu}$$

# 3. 递推关系

$$\mathcal{A}^{(0)_q}_{\mathrm{YMS}}(1,\cdots,n;p,q||\boldsymbol{\sigma}) = S_g^{(1)_q}\,\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1,\cdots,n;p||\boldsymbol{\sigma}\setminus q)$$
$$= S_g^{(1)_q}\left(\underline{(\epsilon_p\cdot Y_p)}\,\underline{\mathcal{A}_{\mathrm{BAS}}(1,\{2,\cdots,n-1\}\shuffle p,n||\boldsymbol{\sigma}\setminus q)}\right)$$

$$\mathcal{A}^{(1)_q}_{\mathrm{YMS}}(1,\cdots,n;p,q||\boldsymbol{\sigma}) = \underline{(\epsilon_p\cdot Y_p)\,\mathcal{A}^{(1)_q}_{\mathrm{YMS}}(1,\{2,\cdots,n-1\}\shuffle p,n;q||\boldsymbol{\sigma})}$$
$$\underline{+\,\tau\,(\epsilon_p\cdot f_q\cdot Y_q)\,\mathcal{A}^{(0)_q}_{\mathrm{BAS}}(1,\{2,\cdots,n-1\}\shuffle\{q,p\},n||\boldsymbol{\sigma})}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1,\cdots,n;p,q||\boldsymbol{\sigma}) = (\epsilon_p\cdot Y_p)\,\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1,\{2,\cdots,n-1\}\shuffle p,n;q||\boldsymbol{\sigma})$$
$$+\,(\epsilon_p\cdot f_q\cdot Y_q)\,\mathcal{A}_{\mathrm{BAS}}(1,\{2,\cdots,n-1\}\shuffle\{q,p\},n||\boldsymbol{\sigma})$$

# 4. 一般Yang-Mills-scalar与Yang-Mills振幅

## 任意的YMS振幅

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1,\cdots,n;\{g\}_k||\boldsymbol{\sigma})$$
$$=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}\left(\epsilon_p\cdot F_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot Y_{\boldsymbol{\alpha}}\right)\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1,\{2,\cdots,n-1\}\shuffle\{\boldsymbol{\alpha},p\},n;\{g\}_k\setminus\{p\cup\alpha\}||\boldsymbol{\sigma})$$

$$F_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mu\nu}\equiv\left(f_{\alpha_\ell}\cdot f_{\alpha_{\ell-1}}\cdots f_{\alpha_2}\cdot f_{\alpha_1}\right)^{\mu\nu}\qquad\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots\alpha_\ell\}$$

## 纯YM振幅

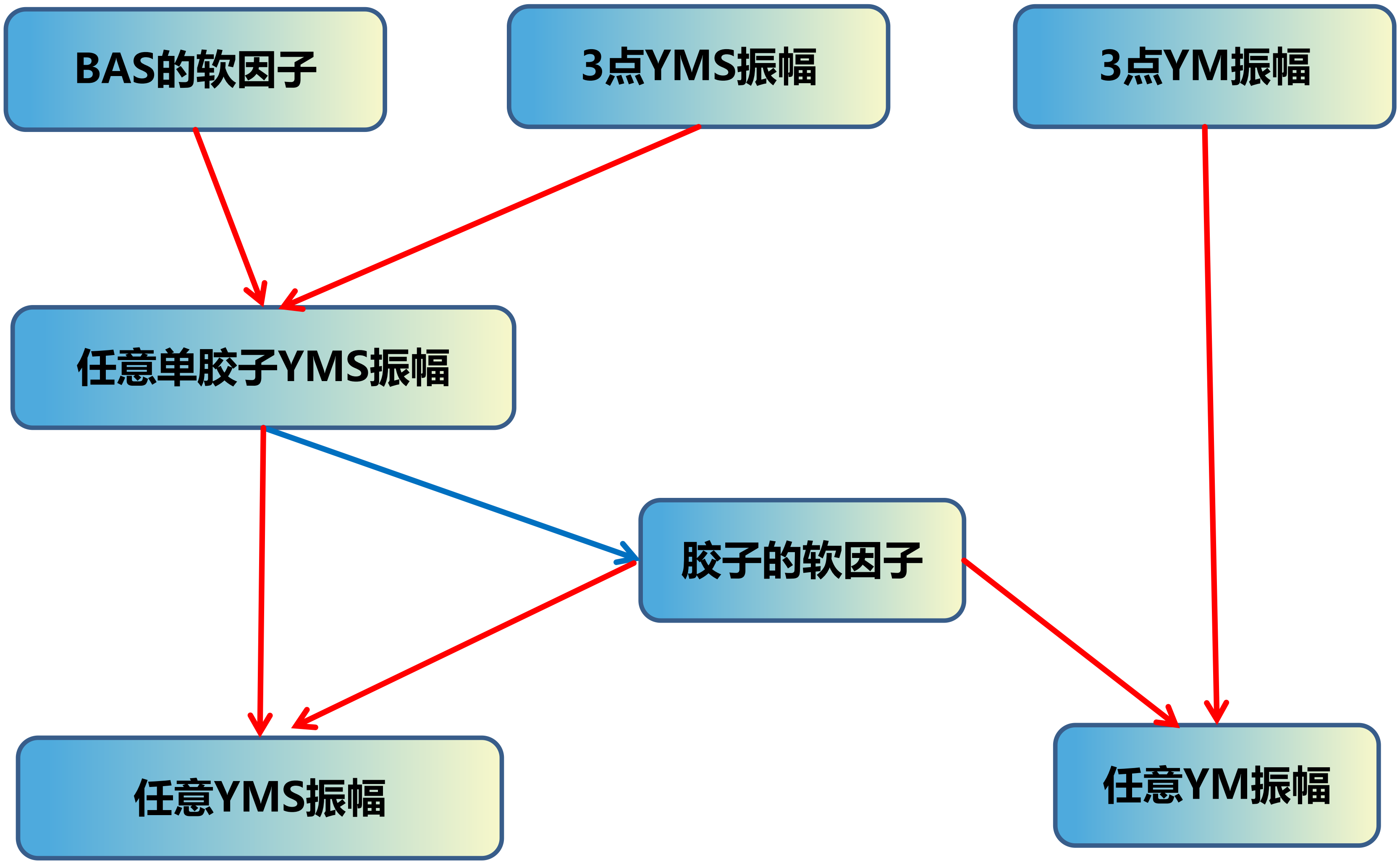
$$\mathcal{A}_{\mathrm{YM}}(\boldsymbol{\sigma}_3)$$

$$\Downarrow\ \text{插入外线胶子}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YM}}(\boldsymbol{\sigma}_n)=\sum_{\boldsymbol{\alpha}}\left(\epsilon_n\cdot F_{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\epsilon_1\right)\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1,\boldsymbol{\alpha},n;\{2,\cdots,n-1\}\setminus\alpha||\boldsymbol{\sigma}_n)$$

# 5. 逻辑回顾

## 假设：软因子的普遍性 + 量纲、自旋。。。



# 6. 含高阶导数相互作用的胶子振幅

## 3点振幅

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YM}+2}(1,2,3) \propto (\epsilon_1 \cdot k_2)(\epsilon_2 \cdot k_3)(\epsilon_3 \cdot k_1)$$

## 含一个$F^3$顶点的胶子振幅

插入胶子

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YM}+2}(\boldsymbol{\sigma}_n) = \sum_{\boldsymbol{\rho}} \mathrm{tr}(F_{\boldsymbol{\rho}})\, \mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(\boldsymbol{\rho}; \{g\}_n \setminus \rho || \boldsymbol{\sigma}_n)$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YMS}+2}(1, \cdots, n; \{g\}_m || \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\boldsymbol{\gamma}} \mathrm{tr}(F_{\boldsymbol{\gamma}})\, \mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(1, \cdots, n | \boldsymbol{\gamma}; \{g\}_m \setminus \gamma || \boldsymbol{\sigma})$$

## 量纲更高的胶子振幅（猜想）

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YM}+2\mathrm{h}}(\boldsymbol{\sigma}_n) = \frac{1}{h} \sum_{\boldsymbol{\rho}, \rho \subset \{g\}_n} \mathrm{tr}(F_{\boldsymbol{\rho}}) \left( \mathcal{T}[\boldsymbol{\rho}]\, \mathcal{A}_{\mathrm{YM}+2(\mathrm{h}-1)}(\boldsymbol{\sigma}_n) \right)$$

$$= \frac{1}{h!} \sum_{\substack{\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}_h \\ \rho_a \cap \rho_b = \emptyset}} \left( \prod_{j=1}^{h} \mathrm{tr}(F_{\boldsymbol{\rho}_j}) \right) \mathcal{A}_{\mathrm{YMS}}(\boldsymbol{\rho}_1 | \cdots | \boldsymbol{\rho}_h; \{g\}_n \setminus \{\rho_1 \cup \cdots \cup \rho_h\} || \boldsymbol{\sigma}_n)$$

# 目 录

# Contents

# 1. 从双迹4点振幅到双软因子

$$\mathcal{A}_{\rm YMS}(\mathbf{1}|\mathbf{2}|\cdots|\boldsymbol{m};\{g\}_k||\boldsymbol{\sigma})$$

**双迹4点振幅**

4点YM $\xrightarrow{\text{维数约化}}$

$$\mathcal{A}_{\rm YMS}(\mathbf{1}|\mathbf{2}||\boldsymbol{\sigma})$$

$$\mathbf{1}=\{1,2\}\qquad \mathbf{2}=\{a,b\}$$

**1号迹含更多BAS标量粒子**

往1号迹插入BAS标量粒子

$$\mathcal{A}_{\rm YMS}(\mathbf{1}|\mathbf{2}||\boldsymbol{\sigma})\quad \mathbf{1}=\{1,\cdots,n\}\qquad \mathbf{2}=\{a,b\}$$

**双软因子**

$$\mathcal{A}^{(0)ab}_{\rm YMS}(\mathbf{1}|\mathbf{2}||\boldsymbol{\sigma})=S^{(0)ab}_s\,\mathcal{A}_{\rm BAS}(\mathbf{1}||\boldsymbol{\sigma}\setminus\mathbf{2})$$

$$\mathcal{A}^{(1)ab}_{\rm YMS}(\mathbf{1}|\mathbf{2}||\boldsymbol{\sigma})=S^{(1)ab}_s\,\mathcal{A}_{\rm BAS}(\mathbf{1}||\boldsymbol{\sigma}\setminus\mathbf{2})$$

# 2. 从双软因子到一般多迹YMS

**更多双粒子迹**

$$|\boldsymbol{\ell}| = 2\,, \quad \forall \ell \in \{1, \cdots, m\}$$

$$\mathcal{A}_{\rm YMS}(\underline{\mathbf{1}|\mathbf{2}}||\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{A}_{\rm YMS}(\underline{\mathbf{1}|\mathbf{2}|\mathbf{3}}||\boldsymbol{\sigma}) \to \cdots \to \mathcal{A}_{\rm YMS}(\underline{\mathbf{1}|\mathbf{2}|\cdots|\boldsymbol{m}}||\boldsymbol{\sigma})$$

插入BAS标量粒子

**每个迹含更多BAS标量粒子**

$$|\boldsymbol{\ell}| \geq 2\,, \quad \forall \ell \in \{1, \cdots, m\} \longrightarrow \mathcal{A}_{\rm YMS}(\mathbf{1}|\cdots|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{\sigma})$$

插入胶子

**含有外线胶子**

$$\mathcal{A}_{\rm YMS}(\mathbf{1}|\mathbf{2}|\cdots|\boldsymbol{m};\{g\}_k||\boldsymbol{\sigma})$$

# 目 录

Contents

# 1. 4点NLSM振幅与双软因子

## 4点振幅

$$\mathcal{A}_{\rm N}(1,2,3,4)=s+u\,,\qquad \mathcal{A}_{\rm N}(1,3,2,4)=t+u\,,\qquad \mathcal{A}_{\rm N}(1,2,4,3)=s+t$$

## 含2个外线Pion的NLSM-BAS

插入BAS标量粒子

$$\mathcal{A}_{\rm N\oplus B}(1,\cdots,n;\{a,b\}||\boldsymbol{\sigma})$$

## 双软因子

$$\mathcal{A}^{(0)ab}_{\rm N\oplus B}(1,\cdots,n;\{a,b\}||\boldsymbol{\sigma})\;=\;S^{(0)ab}\,\mathcal{A}_{\rm BAS}(1,\cdots,n||\boldsymbol{\sigma}\setminus\{a,b\})$$

$$\mathcal{A}^{(1)ab}_{\rm N\oplus B}(1,\cdots,n;\{a,b\}||\boldsymbol{\sigma})\;=\;S^{(1)ab}\,\mathcal{A}_{\rm BAS}(1,\cdots,n||\boldsymbol{\sigma}\setminus\{a,b\})$$

## 2. NLSM振幅与含高阶导数相互作用的pion振幅

### 一般NLSM-BAS与NLSM振幅

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N}\oplus\mathrm{B}}(1,\cdots,n;\underline{\{a,b\}}||\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{N}\oplus\mathrm{B}}(1,\cdots,n;\underline{\{a,b,c,d\}}||\boldsymbol{\sigma})$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{N}\oplus\mathrm{B}}(1,\cdots,n;\underline{p_{2m}}||\boldsymbol{\sigma})$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\sigma}_4) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\sigma}_6) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\sigma}_{2m})$$

### 含高阶导数相互作用的4点振幅

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N+4}}(\boldsymbol{\sigma}_4) = \frac{s^2+t^2+u^2}{2}\mathcal{A}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\sigma}_4)$$

### 含一个高阶导数顶点的Pion振幅

$\Big\downarrow$ 插入pion

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N+4}}(\boldsymbol{\sigma}_{2m}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha},|\boldsymbol{\alpha}|=2k,\\ 1\leq k\leq m-1}} \mathrm{tr}(P_{\boldsymbol{\alpha}})\,\mathcal{A}_{\mathrm{N}\oplus\mathrm{B}}(\boldsymbol{\alpha};p_{2m}\setminus\alpha||\boldsymbol{\sigma}_{2m})$$

# 目 录

Contents

# 总结

1. 软行为的普遍性 + 量纲、自旋等，可以完全决定振幅
2. 规范不变性自动满足
3. double copy结构自动出现
4. 往其他理论和圈图推广

# 谢谢大家！

# 敬请批评指正


欢迎访问扬州！