一圈约化的生成函数

冯波

北京计算科学研究中心

基于工作 2403.16040

2024 年 4 月 17 日

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

动机

- 实验的高精度，使得一圈圈修正的计算成为必须，有些过程需要 2 圈及以上修正
- 虽然现在理论研究的前沿是 2 圈及以上，多点多标度的一圈计算效率的提升还是非常有用的

动机

- 圈图计算的一本标准方案是 约化，即

$$I = \sum_i c_i I_i$$

- 通过约化，我们把一般的圈图计算分为两个相对独立的部分： 基的积分计算 和 约化系数的计算
- 基是普适的。目前一圈图的基计算已经完成，现在研究的一大方向是两圈及以上基的计算。目前有很多巨大进展

动机

- 不同的物理过程体现在不同的约化系数，因此高效的约化方法是圈图计算的一个重要组成部分。
- 约化方案大致可以分为两大类：被积函数层面的约化 和 积分层面的约化
- 被积函数层面的约化原则上通过 计算代数几何 的方法，已经完整解决。当然算符效率的提高仍是可以追求的 [Ossola, Papadopoulos, Pittau, 2006] [Mastrolia, Ossola, Papadopoulos, Pittau, 2011] [Badger, Frellesvig, Zhang, 2012] [Zhang, 2012]

动机

积分层面的约化有不同的建议，目前常见的大致如下：

- Passarino-Veltman(PV)-reduction [Passarino and Veltman, 1979]
- Integration-by-Part (IBP) method [Chetyrkin and Tkachov, 1981; Tkachov, 1981; Laporta, 2001]
- Unitarity cut method [Bern, Dixon, Dunbar and Kosower, hep-ph/9403226, hep-ph/9409265] [Britto, Cachazo and Feng, hep-th/0412103]
- Intersection theory [Mastrolia and Mizera, 1810.03818] [Frellesvig, Gasparotto, Mandal, Mastrolia, Mattiazzi and Mizera, 1907.02000]

动机

不管什么样的约化方法，约化中都会出现 递归的结构，比如用 IBP 方法计算简单的 tadpole 时

$$I_1(a) = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{(l^2 - M^2)^a}. \tag{1}$$

- IBP 关系给出如下的递推结构

$$I_1(a) = \frac{D - 2a + 2}{2(a-1)M^2} I_1(a-1), \tag{2}$$

- 对这个简单例子，反复应用上面关系我们可以求解

$$C_1(a) = \frac{(-1)^{a-1}(1 - \frac{D}{2})_{a-1}}{(a-1)!(M^2)^{a-1}}. \tag{3}$$

动机

一般情况下，递归关系的求解并不容易，需要反复应用它。这就是 Laporta 算符比较耗时的原因之一。因此约化方案效率提高的思路之一，就是能否更有效的求解递归关系。这就导致 生成函数的概念。在很多物理问题中，我们发现，求解生成函数，远比方法应用递归关系简单很多。一个大家比较熟悉的例子就是量子力学中谐振子的本征波函数，可以通过如下左边的生成函数，进行级数展开求解

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{4}$$

目标

我们的目标是如下一个最一般的一圈积分的约化：

$$\int d\ell \frac{\ell_{\mu_1} \ldots \ell_{\mu_m}}{\prod D_i^{a_i}} \tag{5}$$

它们可以通过如下的生成函数的约化

$$I_{n+1}^R(\boldsymbol{t}) \equiv \int \frac{d^D \ell}{i\pi^{D/2}} \frac{e^{2\ell \cdot R}}{\prod_{i=0}^n ((\ell - K_i)^2 - M_i^2 - t_i)} . \tag{6}$$

得到。其中我们引入了辅助矢量 R，并通过

$$\ell_{\mu_1} \ldots \ell_{\mu_m} = \frac{\partial}{\partial R_{\mu_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial R_{\mu_1}} (\ell \cdot R)^m$$

来得到张量的约化。

目标

为了上述目标，我们分为两步：

- 张量的约化

$$
\begin{aligned}
I_{n+1}^{R} &\equiv \int \frac{d^D\ell}{i\pi^{D/2}} \frac{e^{2\ell\cdot R}}{\prod_{i=0}^{n}(((\ell-K_i)^2-M_i^2-t)} \\
&= \boldsymbol{J}_{n+1}(t)\cdot\vec{\alpha}^{gen}(R)\,,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

这里 t 和质量是同等地位，而展开的基含有 t

- 含 t 的标量积分约化到真正的标量基

$$
\boxed{\boldsymbol{J}_{n+1}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{J}_{n+1}\;\mathcal{G}(\boldsymbol{t})}
\tag{8}
$$

微分方程

- 通过如下 IBP 关系 (取 $A = \ell, K_i$)

$$0 = \int \frac{d^D \ell}{i\pi^{D/2}} \frac{d}{d\ell^\mu} \left\{ A^\mu \frac{e^{2\ell \cdot R}}{(\ell^2 - M_0^2) \prod_{i=1}^n ((\ell - K_i)^2 - M_i^2)} \right\} \quad (9)$$

我们得到方程

$$\boxed{\vec{\mathcal{Y}}_r = \sum_{j=0}^{n} f_{rj} \vec{X}_j}, \qquad r = 0, 1 \ldots, n \qquad (10)$$

- 由于 R 的引入，有个新的 IBP 关系

$$0 = 2R^2 \vec{\alpha}^{gen} + \sum_{j=0}^{n} \left(\left(2R \cdot K_j - R \cdot \frac{\partial}{\partial R} \right) \vec{X}_j \right) \quad (11)$$

微分方程

- 求解 X_i 并代人 (11) 我们最终得到如下微分方程

$$\left\{2R^2 - \sum_{j=0}^{n}\left(2R\cdot K_j - R\cdot\frac{\partial}{\partial R}\right)(F^{-1})_{jr}\left(D-2-n-2K_r\cdot R + R\cdot\frac{\partial}{\partial R}\right)\right\}\vec{\alpha}^{gen} = -\sum_{j=0}^{n}\left(2R\cdot K_j - R\cdot\frac{\partial}{\partial R}\right)(F^{-1})_{jr}B_r\ . \quad (12)$$

这里 **modified Caylay matrix** F 是

$$f_{ij} = (K_i - K_j)^2 - M_i^2 - M_j^2,\quad i,j = 0,\dots,n;\quad K_0 = 0 \quad (13)$$

张量约化的生成函数

我们可以有两种方法求解 (12). 第一种方法是级数展开

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}^{gen} &= \sum_{i_0,\ldots,i_n=0}^{\infty} \vec{\alpha}_{i_0 i_1 \ldots i_n} (R^2)^{i_0} (2K_1 \cdot R)^{i_1} \ldots (2K_n \cdot R)^{i_n} \\ B_r &= \sum_{i_0,\ldots,i_n=0}^{\infty} \vec{b}_{r;i_0 i_1 \ldots i_n} (R^2)^{i_0} (2K_1 \cdot R)^{i_1} \ldots (2K_n \cdot R)^{i_n} \end{aligned} \tag{14}$$

张量约化的生成函数

代入化简后得到

$$
\begin{aligned}
&\vec{\alpha}_{i_0 i_1 \ldots i_n}(2i_0+\sum_{t=1}^{n} i_t)(D-2-n+(2i_0+\sum_{t=1}^{n} i_t))\sum_{j,r=0}^{n}(F^{-1})_{jr}\\
= & -\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{n}(F^{-1})_{jr}\vec{b}_{r;i_0 i_1\ldots(i_j-1)\ldots i_n}\right.\\
&\left.-(2i_0+\sum_{t=1}^{n} i_t)\sum_{j,r=0}^{n}(F^{-1})_{jr}\vec{b}_{r;i_0 i_1\ldots i_n}\right]\\
&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{n}(F^{-1})_{jr}\vec{\alpha}_{i_0 i_1\ldots(i_j-1)\ldots i_n}(D-3-n+4i_0+2\sum_{t=1}^{n} i_t)\\
&-\sum_{j,r=1}^{n}(F^{-1})_{jr}\vec{\alpha}_{i_0 i_1\ldots(i_j-1)\ldots(i_r-1)\ldots i_n}-2\vec{\alpha}_{(i_0-1)i_1\ldots i_n} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

张量约化的生成函数

第二种方法是定义

$$R = t\widetilde{R}\ . \tag{16}$$

偏微分方程 (12) 转化为如下的二阶常微分方程

$$At\frac{d^2}{dt^2}W + (B_0 + B_1 t)\frac{d}{dt}W + (C_0 + C_1 t)W + \mathcal{B}(t) = 0\ . \tag{17}$$

$$\begin{aligned} A &= \boldsymbol{I}\cdot(F^{-1})\cdot\boldsymbol{I}^T, \qquad B_0 = (D-(n+1))A \\ B_1 &= -2\boldsymbol{I}\cdot(F^{-1})\cdot\mathcal{P}^T, \quad C_0 = \frac{(D-(n+1))}{2}B_1 \\ C_1 &= 2\widetilde{R}^2 + \mathcal{P}\cdot(F^{-1})\cdot\mathcal{P}^T\ . \end{aligned} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{I} = (1,1,...,1), \quad \mathcal{P} = (2K_0\cdot\widetilde{R}, 2K_1\cdot\widetilde{R}, ..., 2K_n\cdot\widetilde{R})\ . \tag{19}$$

张量约化的生成函数

上面方程的一般解由 **generalized hypergeometric function** 给出，其定义是

$$
{}_A F_B(a_1, \ldots, a_A; b_1, \ldots, b_B; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_A)_n}{(b_1)_n \ldots (b_B)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{20}
$$

这里 **Pochhammer symbol** 是 ($(x)_{n=0} = 1, \forall x$)

$$
(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \prod_{i=1}^{n} (x + (i-1)) \ . \tag{21}
$$

张量约化的生成函数

一般解是

$$\widetilde{\alpha}^{\vec{gen}}(t,\widetilde{R}) = e^{\frac{-B_1+\sqrt{B_1^2-4C_1}}{2}t}\left({}_1F_1(a_1;b_1;x)\right)\left\{\vec{c}_1+\int_0^x ds\frac{s^{-b_1}e^s}{\left({}_1F_1(a_1;b_1;s)\right)^2}\left(\int_0^s dyg(y)y^{b_1-1}\,{}_1F_1(a_1;b_1;y)e^{-y}\right)\right\} \quad (22)$$

with $\vec{c}_1 = \{1,0,0,...,0\}^T$

$$x = \frac{-t\sqrt{B_1^2-4C_1A}}{A}, \quad b_1 = (D-(n+1)), \quad a_1 = \frac{b_1}{2}$$

$$\vec{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{B_1^2-4AC_1}}e^{\frac{-(B_1-\sqrt{B_1^2-4AC_1})x}{2\sqrt{B_1^2-4AC_1}}}\vec{\mathcal{B}}\left(\frac{-xA}{\sqrt{B_1^2-4C_1A}}\right) \quad (23)$$

张量约化的生成函数

特例： n-gon 到 n-gon 的约化系数的生成函数是

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\vec{\alpha}}^{gen}(t,\widetilde{R}))_{\emptyset} &= e^{\frac{-B_1+\sqrt{B_1^2-4C_1A}}{2A}t} \\
&\quad {}_1F_1\left(\frac{(D-(n+1))}{2};(D-(n+1));\frac{-t\sqrt{B_1^2-4C_1A}}{A}\right) \\
&= e^{\frac{-B_1 t}{2A}}\ {}_0F_1\left(\emptyset;\frac{(D+1-(n+1))}{2};\frac{(B_1^2-4C_1A)t^2}{16A^2}\right)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

张量约化的生成函数

无质量 bubble 图： bubble to bubble 的生成函数是

$$e^{(K\cdot\widetilde{R})t}\ {}_0F_1\left(\emptyset;\frac{(D-1)}{2};\frac{1}{4}t^2((K\cdot\widetilde{R})^2-K^2\widetilde{R}^2)\right)\quad(25)$$

One can easily expand (25) and check with known results:

$$\begin{aligned}&1+(K\cdot\widetilde{R})t+\frac{(D(K\cdot\widetilde{R})^2-K^2\widetilde{R}^2)t^2}{2(D-1)}\\&+\frac{((D+2)(K\cdot\widetilde{R})^3-3K^2\widetilde{R}^2(K\cdot\widetilde{R}))t^3}{6(D-1)}\\&+\frac{((D+2)(D+4)(K\cdot\widetilde{R})^4-6(D+2)K^2\widetilde{R}^2(K\cdot\widetilde{R})^2+4(K^2\widetilde{R}^2)^2)t^4}{24(D-1)(D+1)}+\ldots\end{aligned}\quad(26)$$

含 t 标量的约化的生成函数

对标量积分

$$J_n(\boldsymbol{t}) \equiv \int \frac{d^D\ell}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n((\ell-K_i)^2-M_i^2-t_i)}\,. \tag{27}$$

IBP 关系 (10) 中令 $R=0$　得到如下的偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{G}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t}) = \sum_j (F^{-1})_{ij}(\boldsymbol{t})\left\{-(D-1-n)\mathcal{G}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t}) + \sum_{r\neq j}\frac{\partial}{\partial t_r}\mathcal{G}_{\widehat{S}_1,\widehat{j}}(\boldsymbol{t})\right\} \tag{28}$$

with $F_{ij}(\boldsymbol{t}) = (K_i-K_j)^2 - M_i^2 - t_i - M_j^2 - t_j$

含 t 标量的约化的生成函数

为了对方程有理解，先考虑 n-gon 到 n-gon 方程，此时它简化为

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t}) = -\sum_j (F^{-1})_{ij}(\boldsymbol{t})(D-1-n)\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t}) \ . \quad (29)$$

我们可以组合 (29)

$$\begin{aligned}
\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t})\right) dt_i &= -(D-1-n)\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t}) \sum_{i,j} (F^{-1} \\
&= -\frac{(D-1-n)}{2}\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t}) \sum_{i,j} (F^{-1})_{ij}(\boldsymbol{t})(dt_i + dt_j) \\
&= \frac{(D-1-n)}{2}\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t}) \sum (F^{-1})_{ij}(\boldsymbol{t}) dF_{ij}(\boldsymbol{t}) \ ;
\end{aligned}$$

含 t 标量的约化的生成函数

利用熟知的关系

$$dg = g\left(g^{-1}\right)^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}\ , g = |g_{\mu\nu}| \tag{31}$$

(30) 就是全微分

$$d\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t}) = \frac{(D-1-n)}{2}\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t})\frac{d|F|}{|F|}\ , \tag{32}$$

从而马上解出

$$\mathcal{G}_{\emptyset,\emptyset}(\boldsymbol{t}) = \left(\frac{|F|(\boldsymbol{t})}{|F|(\boldsymbol{t}=0)}\right)^{\frac{(D-1-n)}{2}}\ . \tag{33}$$

含 t 标量的约化的生成函数

对一般情况，同样的求解步骤给出

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{G}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t}) &= \frac{(D-1-n)}{2}\mathcal{G}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t})\, d\ln|F| + \sum_i \mathcal{B}_{i;\widehat{S}_1}(\boldsymbol{t})\, dt_i \\
\mathcal{B}_{i;\widehat{S}_1}(\boldsymbol{t}) &= \sum_j (F^{-1})_{ij}(\boldsymbol{t}) \sum_{r\neq j} \frac{\partial}{\partial t_r}\mathcal{G}_{\widehat{S}_1,\widehat{j}}(\boldsymbol{t})\,. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

用常数变易法

$$
\mathcal{G}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t}) = \left(\frac{|F|(\boldsymbol{t})}{|F|(\boldsymbol{t}=0)}\right)^{\frac{(D-1-n)}{2}} \widetilde{g}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t})\,. \qquad (35)
$$

含 t 标量的约化的生成函数

给出如下的结果

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{g}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t}) - \widetilde{g}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t}=0) \\
= &\int_0^1 d\lambda \left(\frac{|F|(\lambda \boldsymbol{t})}{|F|(\boldsymbol{t}=0)} \right)^{-\frac{(D-1-n)}{2}} \sum_i \mathcal{B}_{i;\widehat{S}_1}(\lambda \boldsymbol{t}) t_i
\end{aligned}
\tag{36}
$$

其边界条件是

$$
\widetilde{g}_{\widehat{S}_1,\emptyset}(\boldsymbol{t}=0) = \begin{cases} 1, & S_1 = \emptyset \\ 0, & S_1 \neq \emptyset \end{cases} \tag{37}
$$

总结

一些未来的问题：

- 利用得到的解析结果挖掘更多的物理信息
- 推广到高圈

欢迎大家的指正！