目录

[第一部分 宏粒子模型 2](#_Toc161673400)

[1. “2+2”宏粒子模型 2](#_Toc161673401)

[2. “1+2”宏粒子模型 3](#_Toc161673402)

[BBU和TMCI的结合 3](#_Toc161673403)

[BBU不能用特征值，这里却用特征值？ 3](#_Toc161673404)

[矩阵系数分析 5](#_Toc161673405)

[振幅分析 8](#_Toc161673406)

[3. 1+N模型 9](#_Toc161673407)

[第二部分 Vlasov方程 10](#_Toc161673408)

[坐标系统的选择 10](#_Toc161673409)

[多项式正交基的尝试 10](#_Toc161673410)

[采用径向离散化 12](#_Toc161673411)

[过拉伸相空间angle-variable划分方案 13](#_Toc161673412)

[过拉伸流强越高，误差越大 14](#_Toc161673413)

[理论和模拟哪里不合 14](#_Toc161673414)

[参考别人多束团的做法 16](#_Toc161673415)

[新理论的尝试 16](#_Toc161673416)

[头部单粒子、尾部分布 17](#_Toc161673417)

# 第一部分 宏粒子模型

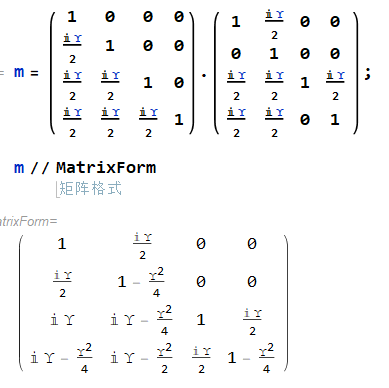
## “2+2”宏粒子模型

假设头部存在两个宏粒子，尾部存在两个宏粒子。采用常数尾场模型。两者纵向交换周期相等。其矩阵如下，

这个矩阵大体分为3个部分。

1. 这里左下角2×2矩阵，为1、2粒子对尾部3、4的作用。由于常数尾场模型，这里1、2和3、4的作用都是相等的。
2. 左上或者右下2×2矩阵表示，1对2、3对4有作用，反过来没有。下半个纵向交换周期，应该反过来。
3. 右上角则表示，3、4粒子对1、2没有作用。

于是我们可以写出完整周期的振幅传输矩阵——因为这里不包括相位。



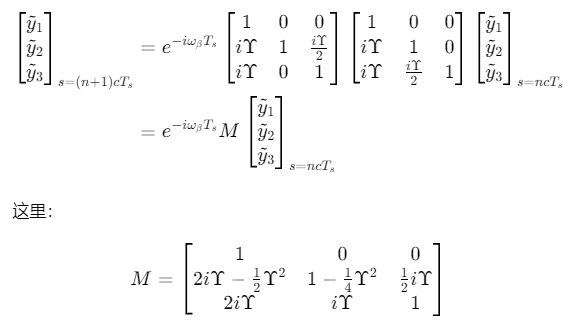
然而这个下三角分块矩阵，特征值等同于左上角2×2和右下角2×2矩阵的特征值。也就是4粒子模型的阈值，和2粒子头尾交换模型阈值相同。BBU看起来完全没有参与。

我们早期研究头部对尾部的影响，就是希望找到BBU对TMCI阈值的影响。其实后面我们会看到BBU不影响阈值，只会影响振幅。

既然2×2求不出新的解，于是希望用1×2来求解，可能没有新的解，但是模型更简单一些。

## “1+2”宏粒子模型

### BBU和TMCI的结合



这里的定义为赵午老师书上的定义的一半。因为赵午老师书上，用来交换的电荷量为，而我们这里用来交换的为。因此，这个矩阵求得的稳定条件为也就合理了。

### BBU不能用特征值，这里却用特征值？

首先回顾下的方法。记的特征值为，线性无关特征向量。利用特征向量线性无关的特性，我们可以将它作为一组基展开。

于是：

所以，需要满足两个条件（1）特征值模；（2）线性无关，也就是的解只有。通常前者能够满足，后者就不一定了。

可是BBU的矩阵

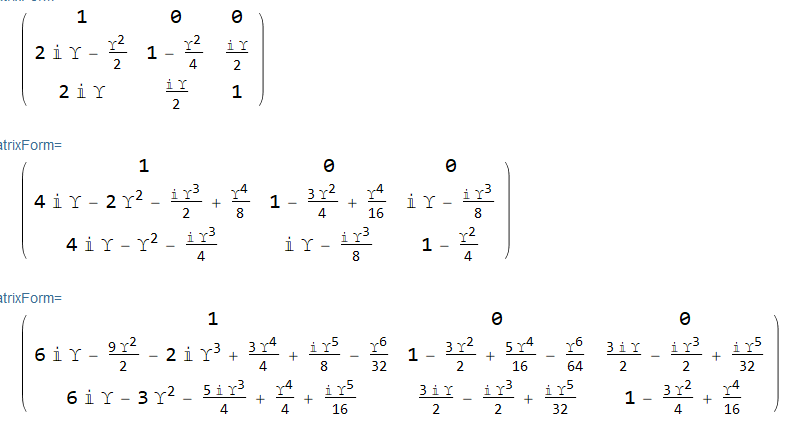
的特征向量

明显无法线性无关。因为前面系数不是非零不可。

而TMCI+BBU的特征向量：

这组基满足线性无关的条件。因此，BBU+TMCI确实没有新的特征值。

但是当时觉得：一是宏粒子模型太过简陋了，二是求特征值的时候，会丢失随着圈数线性增长的部分。

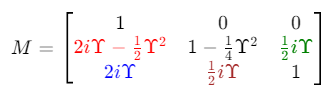


如上图为TMCI+BBU，纵向交换1、2、3周期时的矩阵。可以看到，左下角两项是随圈数线性增长的部分，但是这部分我们最关心的线性增长项，在求矩阵特征值时却肯定会被忽略掉。

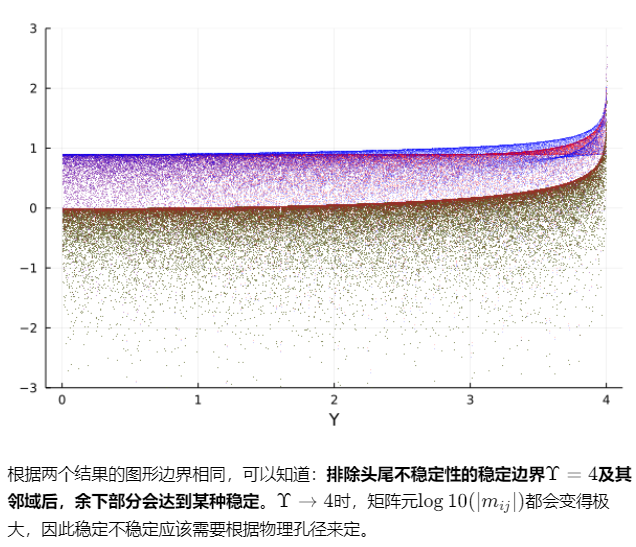
所以我们一边尝试借助第二部分讲的Vlasov方程和林椿涛师兄的传输矩阵方法，一边尝试不通过求特征值来分析这个矩阵。

### 矩阵系数分析

不借助求特征值的方法，我们直接对矩阵进行累乘。由于纵向交换速度较慢，我们很容易迭代到粒子寿命以上——这说明矩阵迭代的方法不至于需要很多次以至于产生很大误差。



我们对不同流强迭代次，借此观察上图颜色相对应的每一项的模并化成对数图。



可以看到各项存在清晰的上限，也就是它不会随着距离的传输，振幅无限增大。

除了矩阵迭代，我们还可以求出其数值通项公式。观察其是否含有随着无限增大的项。

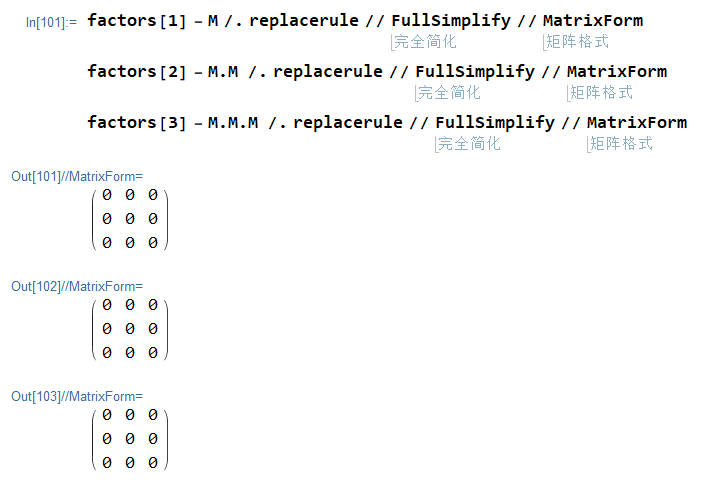
且递推公式为：

我们可以写出相邻两次系数的传输矩阵：

利用上面传输矩阵的特征值和特征向量表示出通项公式：

此处：。

我们取和结果对比（因为三角函数同一结果有不同写法，因此这里作减法不用进行转化），可以看到结果相等。



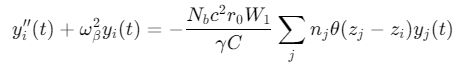
从前面系数的通项公式可以看出，这里的结果并不包含正比于的项，甚至没有随增长的项。因此，我们确定，我们写出结合了BBU和TMCI的传输矩阵，不会导致类似BBU的随增长的情况。

这有没有可能是矩阵的方法不适合我们的问题。下面我们将从微分方程数值解的角度来分析BBU会不会给TMCI带来新的物理。

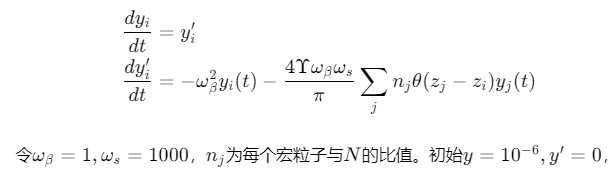
### 振幅分析

微分方程无法求特征值。微分方程是关于振幅的微分方程。因此我们从振幅角度来观察它的变化是否会随传输距离的增加而增加。

我们将下面的微分方程

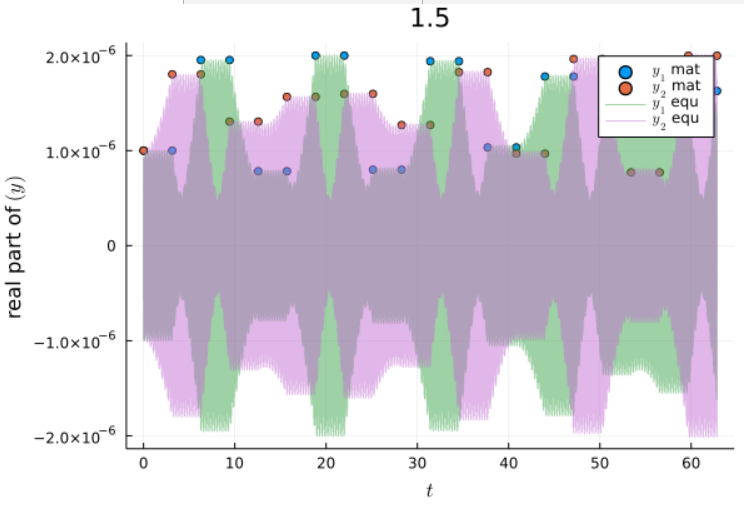
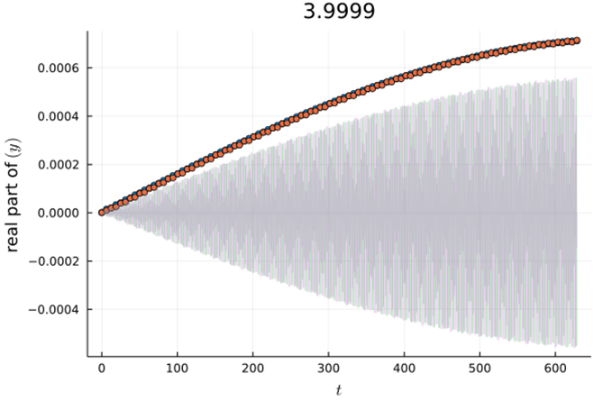


写成下面的形式：



于是可以进行数值解。

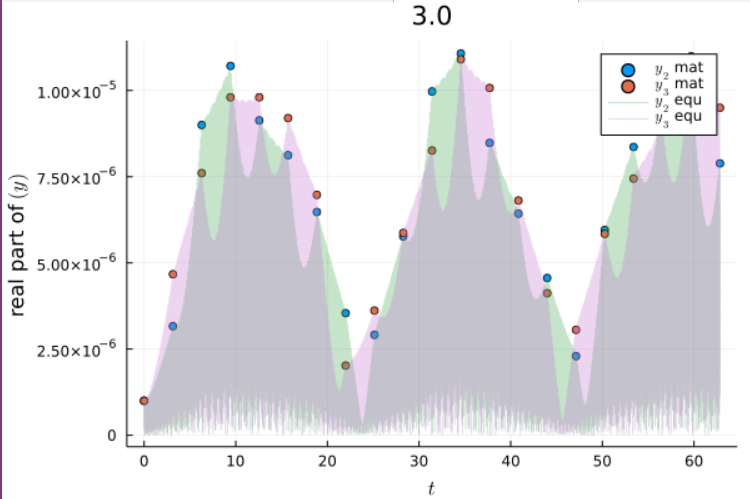
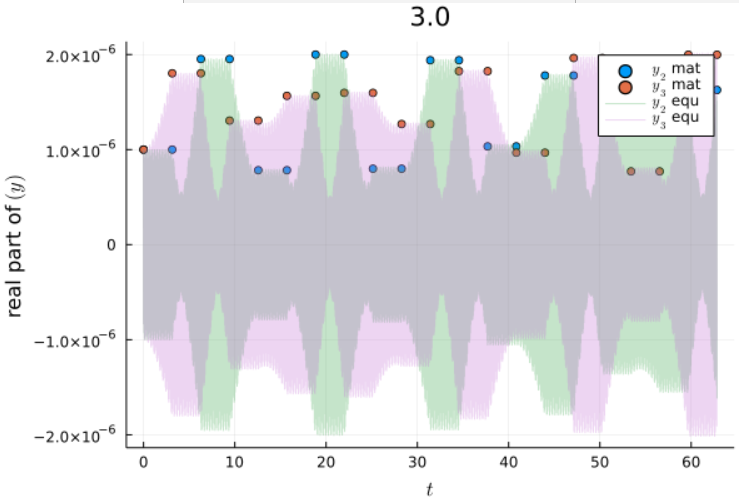
首先，该数值解在振幅较大时误差较大。比如下图为和时，矩阵跟踪（用点表示）和微分方程数值跟踪（用线表示）的结果对比。



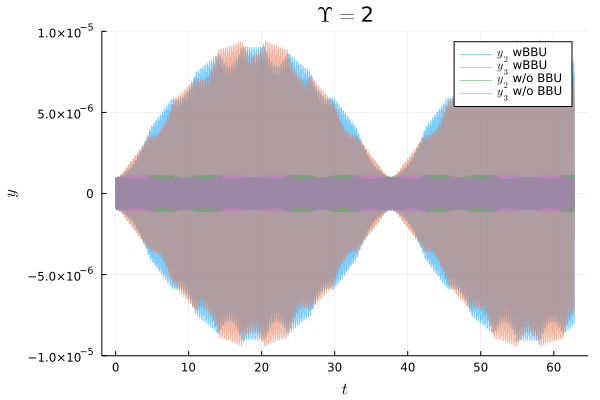
可以看到只要只要不那么极端，微分方程的解和矩阵跟踪的结果是一致的。

下面两幅图为时不带BBU（左图）和带BBU（右图）的对比。可以看到：

1. 微分方程解和传输矩阵结果吻合；
2. 带BBU时，周期变得更长，振幅变得更大。



这幅图是时的情况，也能看到振幅变大。



至此，我们用矩阵和微分方程两种方法证明了：**双粒子模型中BBU会导致振幅增加，但不会影响TMCI的阈值**。但是双粒子模型是否太粗糙？于是在有可用的Vlasov solver之前可以尝试更多粒子会怎么样。

### 振幅计算

对于“1+2”三粒子模型，我们可以写出下面的关系式：

这里只是将前面的传输矩阵拆分成这种形式。其中RHS第一项方阵的特征值和特征向量：

于是：

这里满足：

于是

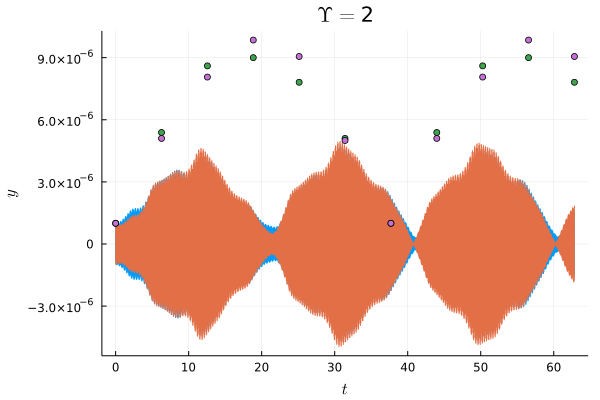
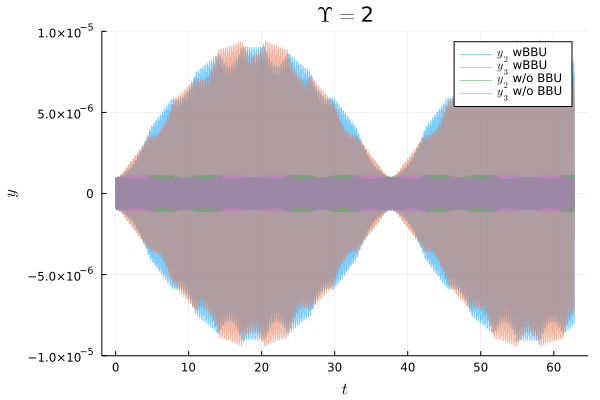
记：

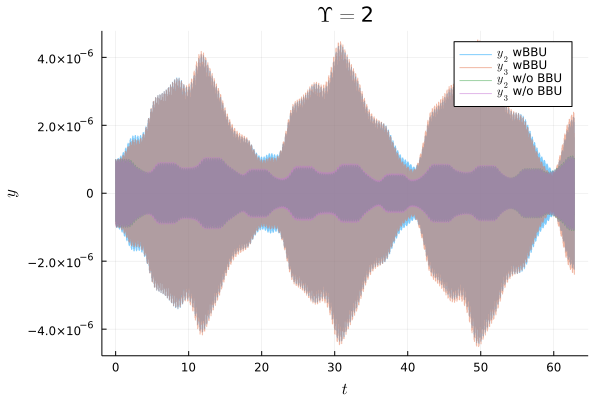
于是：

注意到：

可以解得：

## 1+N模型





这几幅图分别是3、20、50粒子模型。都没有出现振幅随距离线性增长的现象。如果要继续增加粒子数，也就只有Vlasov方程了。

其实，如果我们能意识到：**尾部看成单粒子时存在的线性增长，尾部看成双粒子就突然没有了，那我继续增加更多粒子怎么可能找到呢？**然而当时我们下了个严谨的结论： “在宏粒子模型下找不到新物理”。就放弃了这个模型。

# 第二部分 Vlasov方程

## 坐标系统的选择

Vlasov方程拓展到过拉伸，第一个难题就是两个哈密顿量相同的bucket，怎么用不同的坐标来区分？

最有可能的是action-angle坐标。但是双高频系统，action-angle坐标很难计算：书上给出的是单高频的action-angle公式；2018年，Venturini通过一些近似，给出了理想拉伸的action-angle的计算公式。

对于更一般欠拉伸，则没有一个而简单的公式，更不用说过拉伸。

然后受到林椿涛师兄的启发，我沿用了他数值计算action-angle的方法。

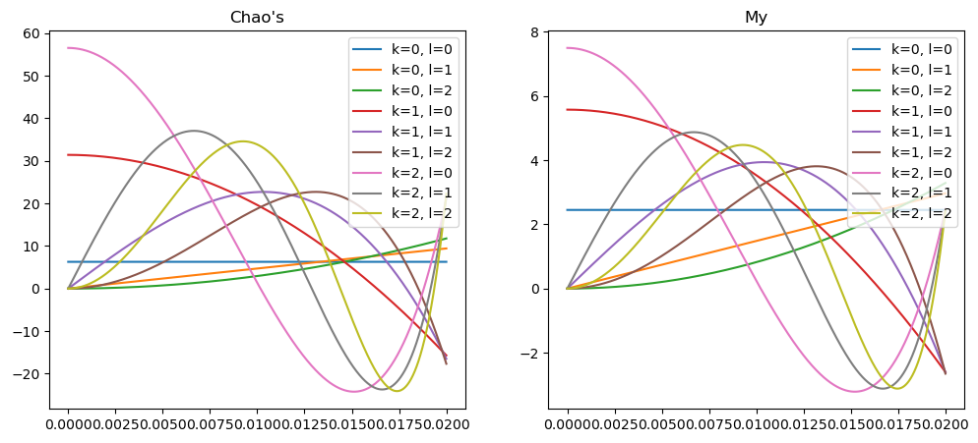
## 多项式正交基的尝试

在林椿涛师兄的方法中，径向离散化代替了赵午老师的径向模分解。其实径向离散化也相当于对一种离散基展开——对于action坐标离散成60个的情况，它在第个区间内（）为1，在其它区间为0。

但是这显著增加了最终求解矩阵的维度。赵午老师书中的高斯束团，径向对**多项式正交基**展开，往往只需要个位数的基。但是单高频对离散基展开（或者称为离散化）都需要60个才能达到足够精度。于是，我们希望通过多项式正交基来降低矩阵的维度。

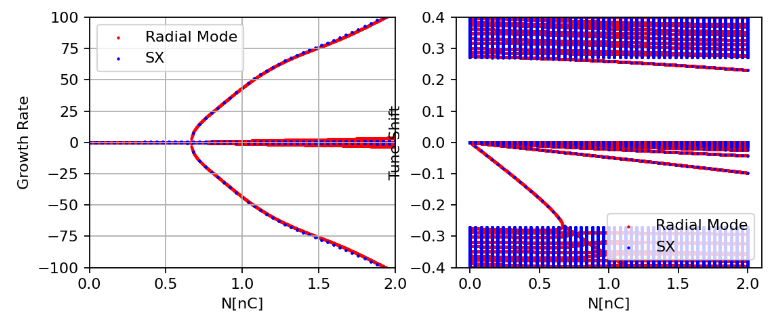
观察到赵午老师的径向模分解，不同模型的基都是和组成的多项式。也就是：对于角向模，正交多项式具有：

的形式。下图为用抛物线模型复刻正交基的结果。也就是我们确实成功地利用分布复刻了多项式。



到了action-angle坐标下，多项式正交基应该具有如下形式：

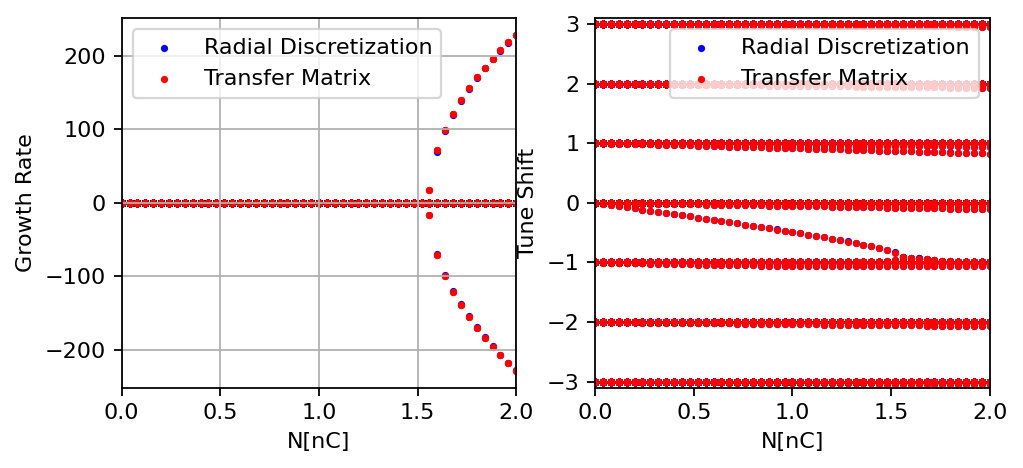
然后成功地应用于欠拉伸。

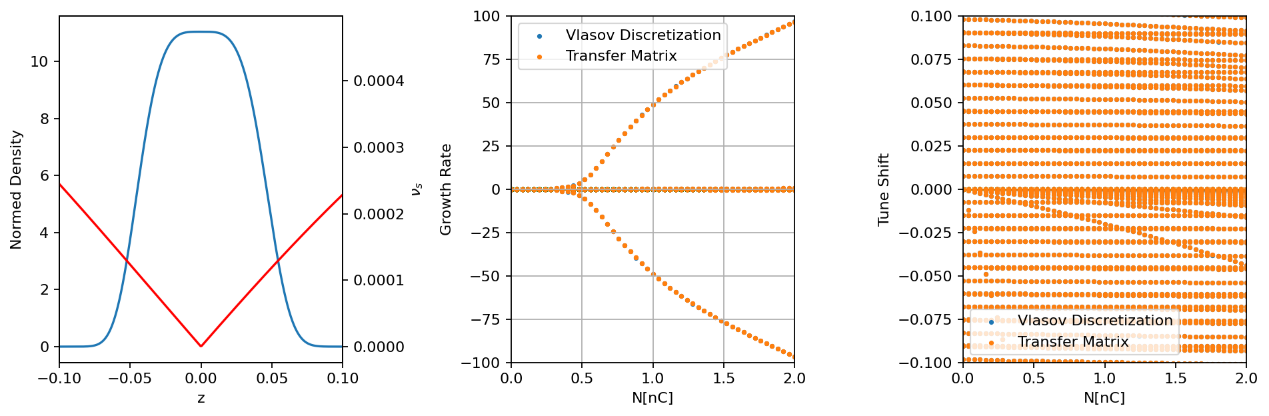


但是，就像用作为基比Bessel多项式作基、傅里叶级数作基更高效。多项式正交基在计算理想拉伸频移上也是低效的——多项式基和师兄径向离散基（/径向离散化）相比，**低增长率+低频移区域**总是不准确。

## 采用径向离散化

之后对径向的模分解，就不再对多项式正交基展开，而是对离散基展开（也就是离散化）。得到的结果基本和林椿涛师兄结果吻合。





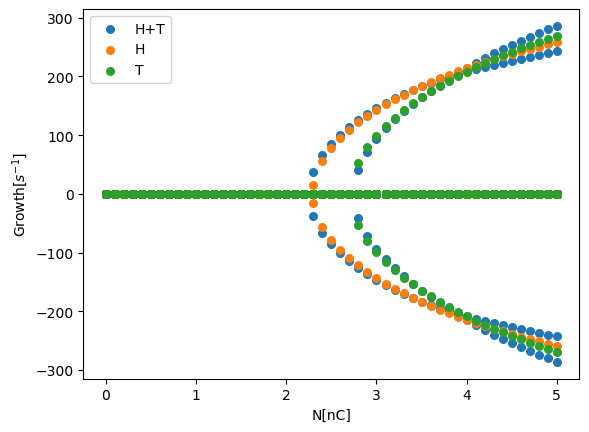
上面两图分别式单高频和理想拉伸的两种方法的对比。

## 过拉伸相空间angle-variable划分方案

将过拉伸相空间的划分，一开始有两个方案。其实就是将过拉伸两个闭合的哈密顿量等高线作为整体还是独立的，来进行角向模展开。

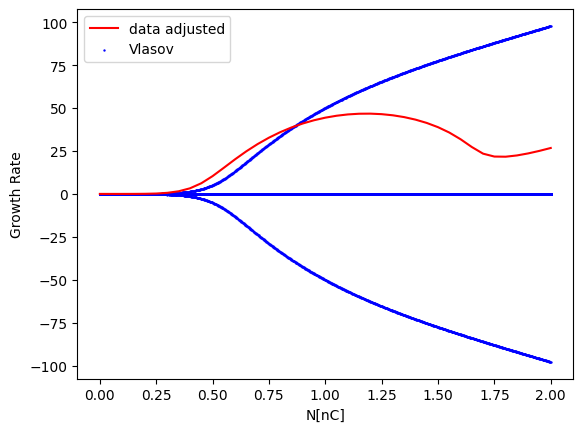
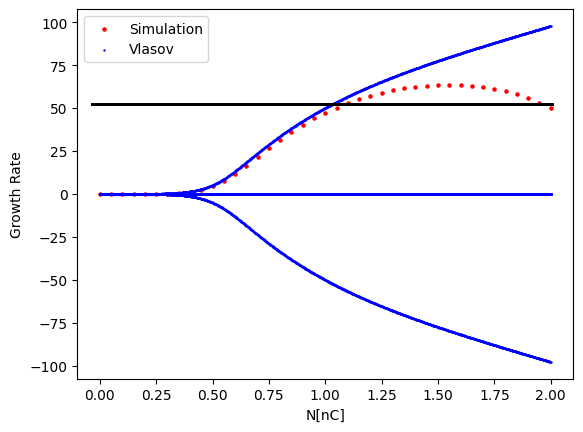
一个是从测量的角度，因为测量得到的角向模是一个整体概念。这样还避免了action变量的跳跃。缺点是是跳跃的。

第二个方法是，将不同bucket当作独立的。先头部、尾部、外围进行处理。这导致是跳跃的，是连续的。

最后我们采取了第二个方法。因为这时的结果更正确，且能够被解释。如下图，这种划分方式下，整体的增长率图的曲线，刚好能对应头、尾不同部分的增长率曲线。

## 过拉伸流强越高，误差越大

下图为理想拉伸（左）和过拉伸（右）增长率与模拟对比。

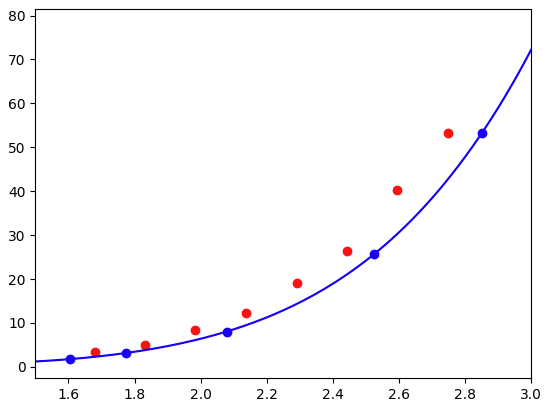


可以看到流强高了之后出现了流强降低。不知道流强高了之后怎么出现了阻尼。检查ELEGANT元件：

* 移除SREffects带来的阻尼
* 排除了其它元件非线性的存在。
* 最终发现了主要n\_bins不足。可惜n\_bins最高可以取到8388609还是不够。不过现在想到的方法是，缩减束团长度和微束团之间的间隔——这样可以充分利用所有的切片，不至于不存在粒子。

## 理论和模拟哪里不合

在发现n\_bins的问题之前，我们调查了所有元件没有发现非线性。而且我们发现Venturini的结果本身也是和模拟并不吻合的。



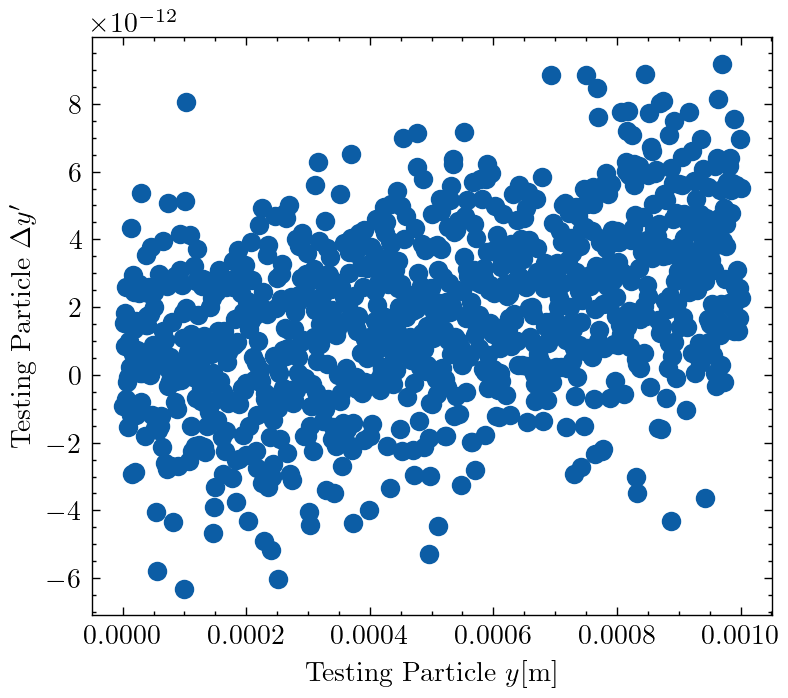
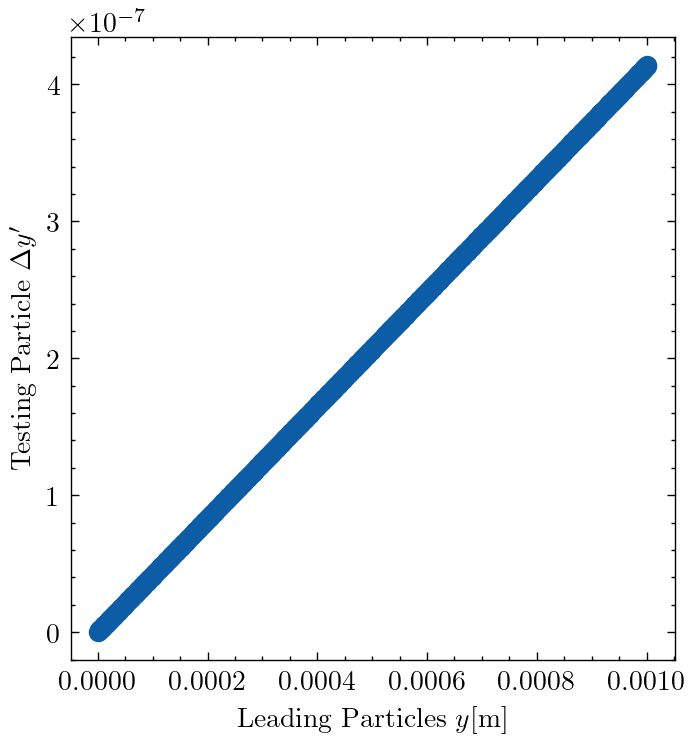
这是Venturni的理论和结果对比，他也是流强越高，相差越大；他也正好流强截断到增长率等于阻尼率为止——我们也是增长率大于阻尼率之后，开始看见显著偏离。这让我们怀疑，这个高流强下的偏差是理论自带的。我们模拟没有问题。因此我们怀疑是否是理论过于简单？

理论所用到的假设如下：

1. 忽略“横向尾场的纵向梯度”。也就是忽略下面公式的第二项。

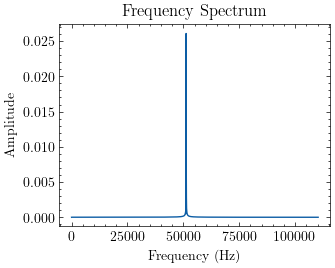
同一处的测试粒子应该满足和自己的成线性关系。但是实际并没有观察到。因此排除这一项。

1. 横向尾场力是二阶的。这个可以结合公式，通过移动测试粒子和leading粒子的横向位置，观察测试粒子受到的kick。



(上左图)Testing particle受到的kick和leading粒子成正比；(上右图)和testing particle横向位置无关。排除。这两图说明就是即尾场是二阶的。

1. betatron振荡是二阶的。这个通过FFT可以确定只有一个频率，不存在高阶振荡。



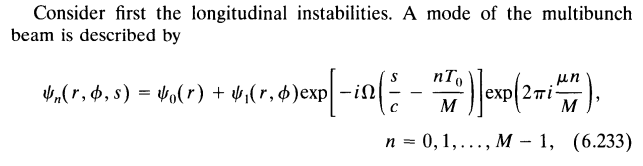
1. 密度扰动形式保留到1阶。
2. 对积分一个周期。

但是这些都不是。

既然师兄传输矩阵方法和我的方法结果相同，且传输矩阵更直观，采用师兄方法逐圈比较。

## 参考别人多束团的做法

注意到赵午老师多束团也是指数增长的。



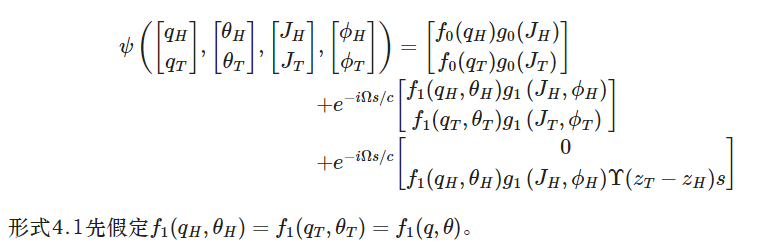
也就是现今基于类似方法的理论**都不包含BBU**。

## 新理论的尝试

* 除了二极振荡还有四极振荡——对模拟数据FFT没有观察到，所以不需要更高阶。
* 没有新结果

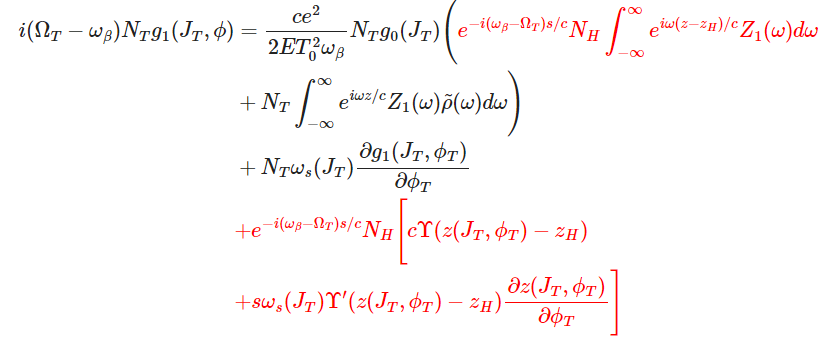
不正确。尾部的增长需要由头部引起。

* 同时包含头部、尾部展开



## 头部单粒子、尾部分布

将前面的公式应用于头部单粒子，尾部分布的模型。得到下面的公式：

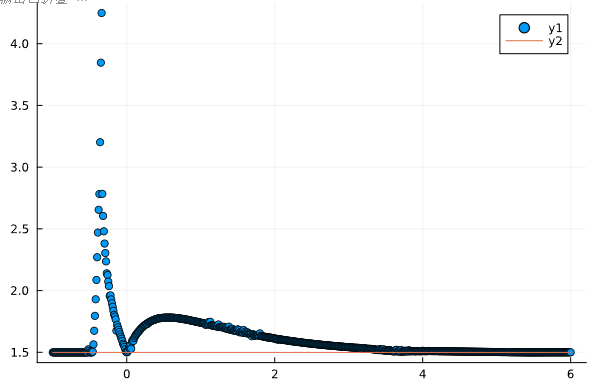
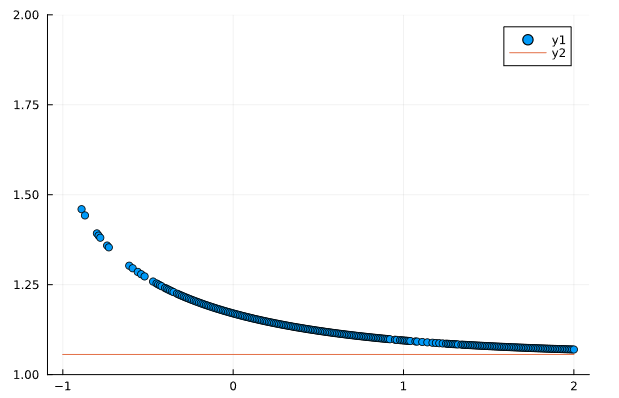


红色部分引入两种额外项：

1. 正比于。相当于方程。

2. 正比于。相当于方程。

这两项都会导致振幅在短时间内增长，但是增长很快消失。



上面两图分别为和的虚部最大值随的变化关系。这里的先增长，后不增长，其实就是指振幅增加。这和宏粒子模型的结论对应上了，从宏粒子到连续分布的Vlasov模型，结论一致。这再次证明了宏粒子模型的正确性。

将前面公式进行角向模展开，得到：

