# 双高频过拉伸的应用与任意设置下不稳定性的研究

* 摘要
* Abstract
* 目录
* 第一章 引言
  1. 课题背景及意义
  2. 目前储存环光源的操作方案
  3. 双高频不稳定性研究进展
  4. 论文的主要内容
  5. 论文的创新点
* 第二章 理论基础
  1. 储存环光源的若干操作方案介绍
  2. 束流崩溃效应和强头尾不稳定性的宏粒子模型
  3. 横向模耦合不稳定性求解器的基本原理
  4. 微波不稳定性的求解器的基本原理
  5. 本章小结
* 第三章 过拉伸束团生成双脉冲X光
  1. 过拉伸束团生成双脉冲X光的基本原理
  2. 可能遇到的问题
  3. 在HEPS模型中的模拟验证
  4. 本章小结
* 第四章 任意双高频TMCI
  1. 宏粒子模型
  2. 双高频设置下TMCI的Vlasov方程的推导
  3. 与现有Vlasov求解器方法的比较
  4. 模拟结果对比
  5. 本章小结
* 第五章 任意双高频MWI
  1. 任意双高频设置下微波不稳定性Vlasov方程的推导
  2. 与现有Vlasov求解器方法的比较
  3. 与模拟结果对比
  4. 本章小结
* 第六章 总结与展望
* 参考文献

目录

[双高频过拉伸的应用与任意设置下不稳定性的研究 1](#_Toc163490774)

[第一章 引言 4](#_Toc163490775)

[1.1 课题的背景及意义 4](#_Toc163490776)

[1.2 目前储存环光源的操作方案 6](#_Toc163490777)

[1.3 双高频不稳定性研究进展 6](#_Toc163490778)

[(1) 双粒子模型 6](#_Toc163490779)

[(2) 粒子跟踪 9](#_Toc163490780)

[(3) Vlasov方程 10](#_Toc163490781)

[(4) Fokker-Planck方程 11](#_Toc163490782)

[(5) 传输矩阵+尾场作用矩阵 12](#_Toc163490783)

[第二章 理论基础 14](#_Toc163490784)

[2.1 储存环光源的若干操作方案介绍 14](#_Toc163490785)

[2.2 束流崩溃效应和强头尾不稳定性的宏粒子模型 14](#_Toc163490786)

[2.2.1 束流崩溃效应的宏粒子模型 14](#_Toc163490787)

[2.2.2 强头尾不稳定性的宏粒子模型 15](#_Toc163490788)

[2.3 横向模耦合不稳定性求解器的基本原理 15](#_Toc163490789)

[第三章 过拉伸束团生成双脉冲X光 17](#_Toc163490790)

[3.1 过拉伸束团生成双脉冲X光的基本原理 17](#_Toc163490791)

[3.2可能遇到的问题 18](#_Toc163490792)

[3.3在HEPS模型中的模拟验证 20](#_Toc163490793)

[3.3.1 双高频系统的设置 20](#_Toc163490794)

[3.3.2 偏转腔的位置和设置 21](#_Toc163490795)

[3.3.3 优化六极铁 23](#_Toc163490796)

[3.3.4 结果 24](#_Toc163490797)

[3.4 本章小结 27](#_Toc163490798)

[第四章 任意双高频TMCI 28](#_Toc163490799)

[4.1 宏粒子模型 28](#_Toc163490800)

[4.1.1 单圈特征值 28](#_Toc163490801)

[4.1.2 多圈迭代的矩阵通项公式 28](#_Toc163490802)

[4.2双高频设置下TMCI的Vlasov方程的推导 30](#_Toc163490803)

[4.2.1 作用量-角度坐标 30](#_Toc163490804)

[4.2.2 角向模展开 30](#_Toc163490805)

[4.2.3 零流强近似 32](#_Toc163490806)

[4.2.4 径向模展开 32](#_Toc163490807)

[4.3 任意欠拉伸结果与现有Vlasov求解器的比较 34](#_Toc163490808)

[4.3.1 单高频 34](#_Toc163490809)

[4.3.2 欠拉伸 35](#_Toc163490810)

[4.3.3 理想拉伸 35](#_Toc163490811)

[4.4 过拉伸 36](#_Toc163490812)

[4.4.1 对理论和模拟误差的修正尝试 36](#_Toc163490813)

[横向尾场力是二阶的 37](#_Toc163490814)

[4.4.2 头部单粒子尾部分布的Vlasov方程 39](#_Toc163490815)

[4.4.3 过拉伸TMCI 40](#_Toc163490816)

[4.5 本章小结 42](#_Toc163490817)

# 引言

## 课题的背景及意义

双高频系统已得到新一代电子储存环光源的普遍应用。若是发生不稳定性，容易影响束流品质和用户实验进度，严重的甚至会伤害到科研人员，因此需要在不影响束流品质情况下抑制集体不稳定性。通过解Vlasov方程分析束流集体不稳定性是一种常用方法。它可以在节省计算资源的同时，快速计算出周期运动中的频率成份，帮助我们得到频率中蕴含的不稳定性的性质。然而目前的Vlasov方法并不能通用于任意的双高频设置。Venturini发展了理想拉伸的Vlasov方法，但不适合更一般的双高频设置。目前尚没有准确的适用于非理想拉伸非高斯分布的Vlasov方法，本论文拟发展适用于电子储存环任意双高频设置的Vlasov方法，对电子储存环中任意双高频系统设置下的集体不稳定性进行研究，进一步厘清集体不稳定性的物理机制和影响。

电子储存环是用来储存电子的装置，是一种非常重要的加速器组成部分。它广泛应用于粒子物理实验和同步辐射光源两个重要领域中。

在粒子物理实验中，电子被加速到近光速并使其对撞，研究人员得以深入探索基本粒子的性质和相互作用，对揭示自然界基本规律具有重要意义。加速器和电子储存环分别起到了给电子提供能量和约束粒子在环内的作用。在同步辐射光源中，电子储存环将束流束缚在轨道上，利用束流通过弯转磁铁时得到的高强度同步辐射光束，帮助材料科学、生物医学、化学等等领域的研究人员进行着广泛的研究。

为了提高对撞机中束流的亮度，或者提高同步辐射光源的亮度，我们需要提高束流的流强，或者减小束流的横向尺寸。但是这两者分别会引起新的问题。

**一、高流强下更容易发生不稳定**

当一个电子在经过储存环某处时，管道内壁的电子会受到电场作用改变排布，等效于管道内壁出现一个镜像电荷。这种镜像电荷不随电子运动。当电子离开后，镜像电荷会潜入管道内壁之中，又浮现出来，重复这个过程，越来越弱，直至消失。这样的运动会引起我们称之为“尾场”的电磁波，它会影响到后来经过这里的电子的运动。因此会有这样的现象：之前经过的电子密度越大，留下的尾场则越强，后面经过电子的运动会在超过某阈值后变得不稳定。这会引起单束团内、多束团间的不稳定。

若是束团的不稳定运动没有得到及时抑制，则一部分甚至全部的粒子会携带大量能量撞击管道内壁。这轻则丢失部分粒子，影响束流品质。重则引起局部过热，破坏设备，甚至产生辐射伤害研究人员。因此我们需要提前研究清楚储存环中集体不稳定性的性质。

要研究储存环中的束流集体不稳定性，一个方法是在时域中进行跟踪：通过大量宏粒子，尽可能模拟出束流在储存环中的运动情况。逐圈跟踪大量粒子虽然能够对束流运动的过程了解得更详细，但比较消耗计算资源。

另一个比较节省资源的方法是：由于束团在储存环中做周期性运动，我们可以分析这种周期运动的频率成份，在频域中分析不稳定性。得到的频率按其来源可以分为3个层次——若是存在的话，前者可以包含后者——上进行分类，我们称为三种模：

1. 在多束团间存在的耦合束团模(coupled-bunch mode)；

2. 对纵向相空间分布角向展开得到角向模(azimuthal mode)；

3. 对每个角向模对应的分布径向展开，得到的径向模(radial mode)。

假设束团质心振荡的各种模频率为，则其振荡有着的相位因子。这些模在频率上产生不稳定的表现为：存在其中一个模频率的虚部>0（产生指数增长），同时不同的模频率的实部也会随着流强的增加而相交（模耦合）。纵向单束团模耦合产生的不稳定性我们称为微波不稳定性（MWI, Microwave Instability），横向单束团模耦合产生的不稳定性我们称为横向模耦合不稳定性（TMCI, Transverse Mode Coupling Instability），多束团间模耦合导致的不稳定性我们称为耦合束团不稳定性(CBI, Coupled-Bunch Instability) [1]。

**二、减小束流横向尺寸会降低Touschek寿命**

目前储存环的一个趋势就是减小束流的尺寸。然而，过小的束流尺寸，其束内散射(IBS, Intra-Beam Scattering)也会非常严重，Touschek寿命也会降低。这两个问题在衍射极限储存环(DLSR, Diffraction-Limited Storage Ring)中更是特别严重[2]。可通过安装主腔频率倍的()的高次谐波腔(HHCs, Higher Harmonic Cavities)来调整射频电压波形，进而拉伸束团长度、减小束内散射[3]，这对于新一代超低发射度的储存环来说非常重要[2][4]。此外，高次谐波腔还具有控制发射度稀释程度[5]，提供朗道阻尼增加稳定性[6]、提高不稳定性阈值[7][8][9][10][11]的优点。

通过调节HHCs的参数，我们可以得到三种分布。

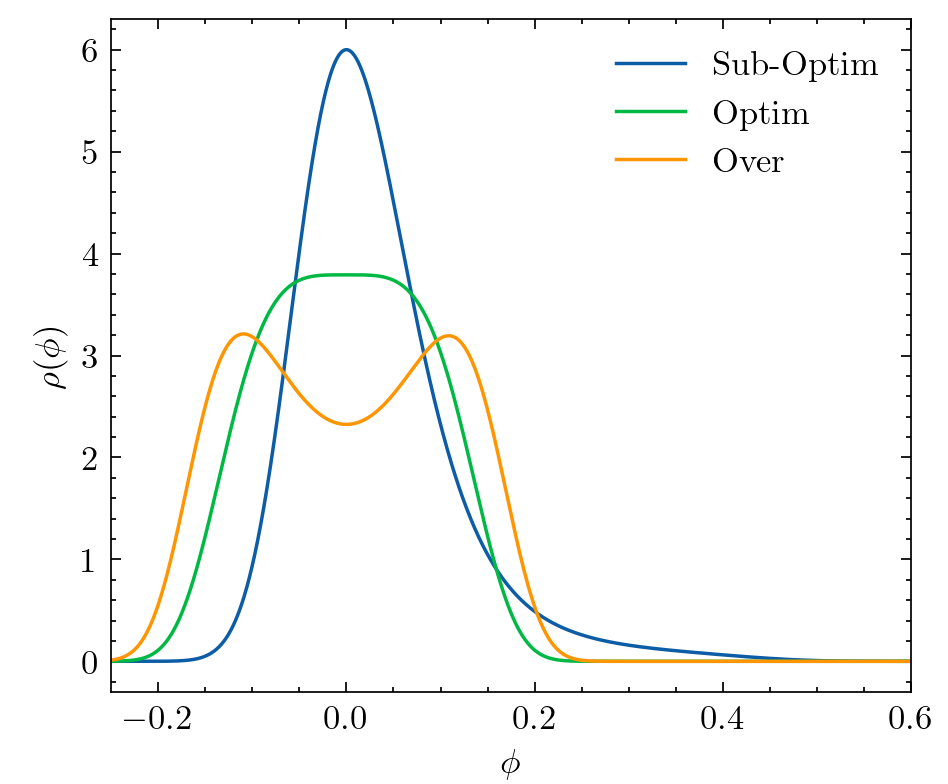


图 1

图1：改变双高频设置得到的三种纵向分布图。

蓝线：欠拉伸（sub-optimal stretching）；

绿线：最优拉伸（optimal stretching，也称为平顶分布，flat-top distribution）；

黄线：过拉伸（over stretching）

最优拉伸，其同步相位处高频电压对相位的一阶导、二阶导都为0，RF势在小振幅近似下为纵向位置的4次函数，纵向密度分布具有平顶。过拉伸则是当谐波腔电压高于理想拉伸设置时，纵向密度分布出现双峰的一类情况。欠拉伸则是谐波腔电压低于理想拉伸，但不是高斯分布的一类情况。

很多的不稳定性分析方法，都假设单粒子纵向运动是几乎线性的——即高斯分布和很小的纵向交换频散。即使近些年，仍有很多Vlasov求解器是基于这个假设，比如14年，N. Mounet文章中的DELPHI(for Discrete Expansion over Laguerre Polynomials and Head-tail modes to compute Instabilities)[12]，同年A. Burov的NHTVS(Nested Head-Tail Vlasov Solver)[13]和18年E. Métral的 GALACTIC(for GArnier-LAclare Coherent Transverse Instabilities Code)[14]。HHCs引入之后，纵向运动在大部分设置下都不能用线性近似表示。前面的Vlasov求解器的准确度就会随着非线性的提升而降低。大部分HHCs的设置中，纵向不但密度分布偏离高斯，相空间工作点也从一个数值变成一个分布。如何包含更一般的纵向密度分布，和更一般的纵向工作点分布，目前还没有令人满意的通用理论。

一个比较成功的尝试是2018年M. Venturini对于最优拉伸的处理。他既未使用高斯分布作为近似反而代入了完整地最优拉伸分布[15]，又未采用A. Burov那样的纵向工作点频散很小的近似反而代入了完整的纵向工作点分布[13]。但他的工作只局限在了“最优拉伸+TMCI”这个特殊情况。

我的工作就是扩展Venturini的方法到任意双高频设置，且扩展到对MWI和CBI这些集体效应的研究上。

随着真空管道半径的减小，电阻壁阻抗也越来越强，这些集体效应也会越来越强。为防止束流丢失，尤其是TMCI导致的快速丢失，我们一方面要去安装非常强的反馈系统，并解决其带来的问题[9]，另一方面就有必要去提前研究。

本课题拟发展适用于电子储存环任意双高频设置的Vlasov方法，对电子储存环中任意双高频系统设置下的集体不稳定性进行研究，进一步厘清集体不稳定性的物理机制和影响。

## 1.2 目前储存环光源的操作方案

为了应对不同的、潜在的用户需求，储存环存在很多的操作方案。比如“Camshaft”，“laser slicing”模式，低动量压缩lattice模式、横向共振岛模式、利用TDC生成短束团模式。

1999年，A. Zholents提出用偏转腔偏转束团以获得亚皮秒X光脉冲。2005年，M. Borland在APS上验证了这个方案。

2007年，W. Guo提出用偏转脉冲磁铁替换掉偏转腔，配合开槽，可以实现更短的皮秒级X光脉冲。

## 1.3 双高频不稳定性研究进展

目前集体效应研究存在多种方法。现在对其中的几种进行介绍。

### (1) 双粒子模型

双粒子模型曾经用于研究直线BBU、储存环存在纵向交换时的强头尾和头尾不稳定性，甚至研究多耦合束团时也曾用过两个宏粒子来进行初步研究[16][17][18][19]。

作为一个典型，下面介绍下分析强头尾不稳定性时双粒子模型的应用。通过这种初步分析，我们可以计算强头尾不稳定性阈值。

在纵向运动前一半的交换周期内，粒子1产生的横向尾场驱动粒子2的振荡：

用做代换，同时在的近似下，可以写成传输矩阵的形式：

然而后半个纵向运动交换周期，粒子2产生的横向尾场会驱动粒子1，有类似的结果：

此处

于是，整个纵向交换周期内的传输矩阵为：

这是一个复数矩阵。根据定理：

其中和为矩阵的特征值和特征向量，为任意向量，可以按两个特征向量拆分为。可以发现若要希望其稳定，则意味着模不随增加，的模不大于1。最终双粒子模型得到的稳定条件为。

双粒子模型做了高度简化，物理非常清晰，而且还能有更进一步的发展。2016年，Yong Ho Chin考虑空间电荷力，加上了粒子1和粒子2的相互作用[20]。比如前半纵向交换周期内，方程变为：

这里为空间电荷的作用强度，表示前面粒子的横向尾场作用强度。

可以表示空间电荷力的强度。我们可以得到其在强（）、弱空间（，其中为传统双粒子模型稳定条件）电荷力下的总传输矩阵，得到增长率。

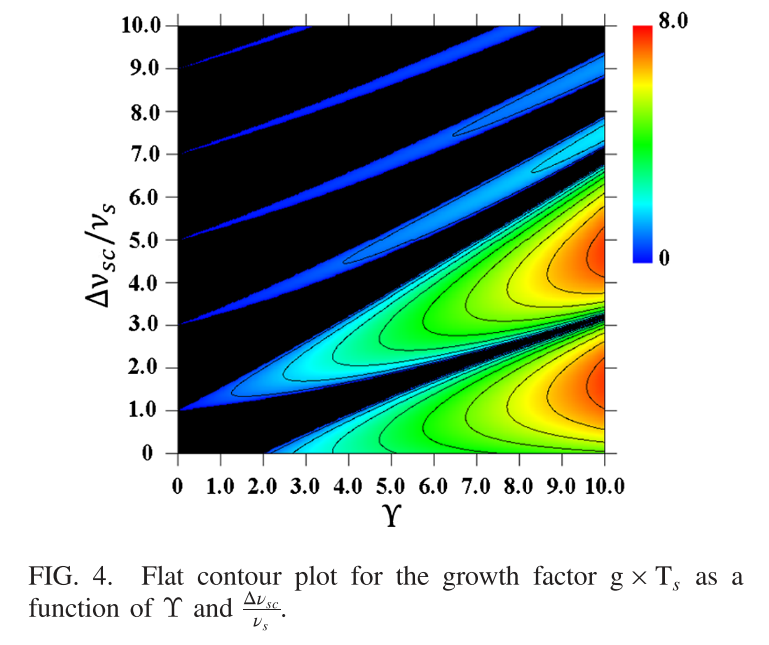


图 2

图2：不同空间电荷力强度、横向尾场作用强度与增长率的关系。

一些模拟结果表明：较弱的空间电荷力能提供一些阻尼抑制不稳定性，但若是空间电荷力进一步增加的话，则束流又会变得不稳定。Yong Ho Chin的理论能解释这个问题，且预言若是空间电荷力进一步增强，束流可能又重新变得稳定（之所以说可能，是因为空间电荷力太强会导致尺寸增长，从而空间电荷力产生的频移减小）。

2017年，Yong Ho Chin用双粒子模型、Vlasov方法和模拟研究了强头尾不稳定性的色品效应。在双粒子模型中，他将传统强头尾不稳定性加上了色品，得到了增长率与尾场强度和头尾横向振荡的相差关系图[21]。

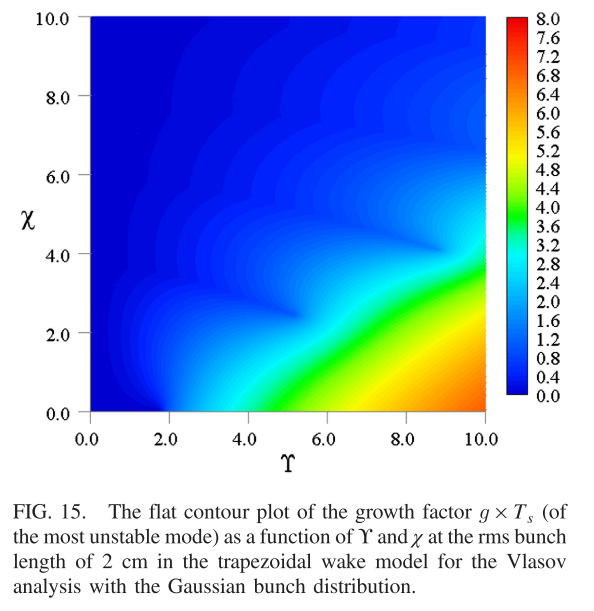
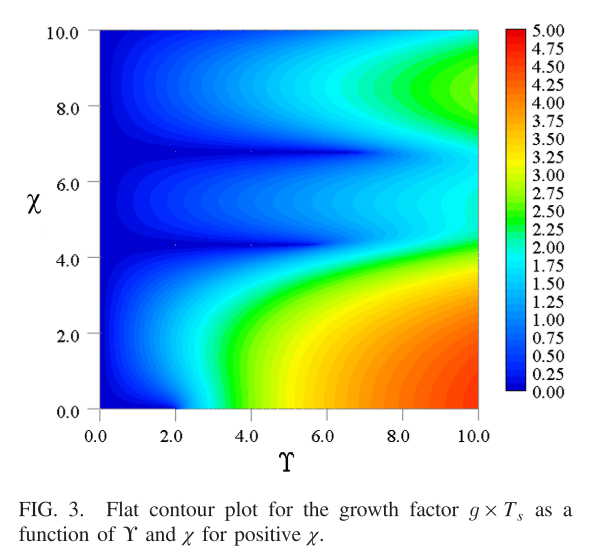


图 3

图3：双粒子模型（左）和“Vlasov方程+梯形尾场”（右）得到的尾场强度系数、横向振荡头尾相位差和增长率的关系图。

可以看到相似，但细节上有所不同。

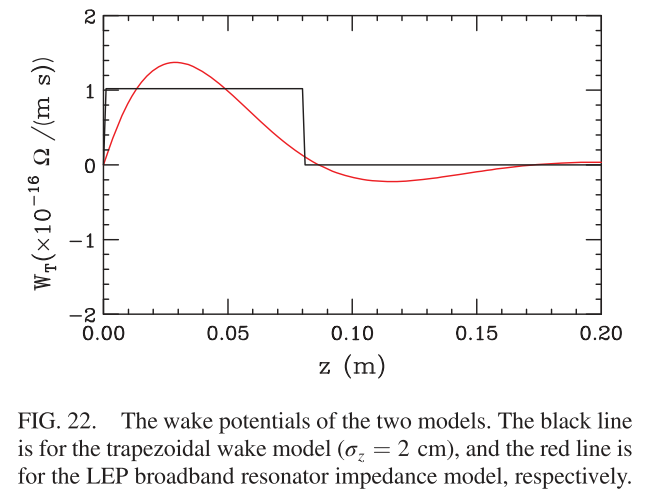


图 4

图4：梯形尾场模型（黑色）和LEP宽带谐振子阻抗模型（红色）

然后“Vlasov方程+梯形尾场”和模拟结果对比具有一致性（图5）。

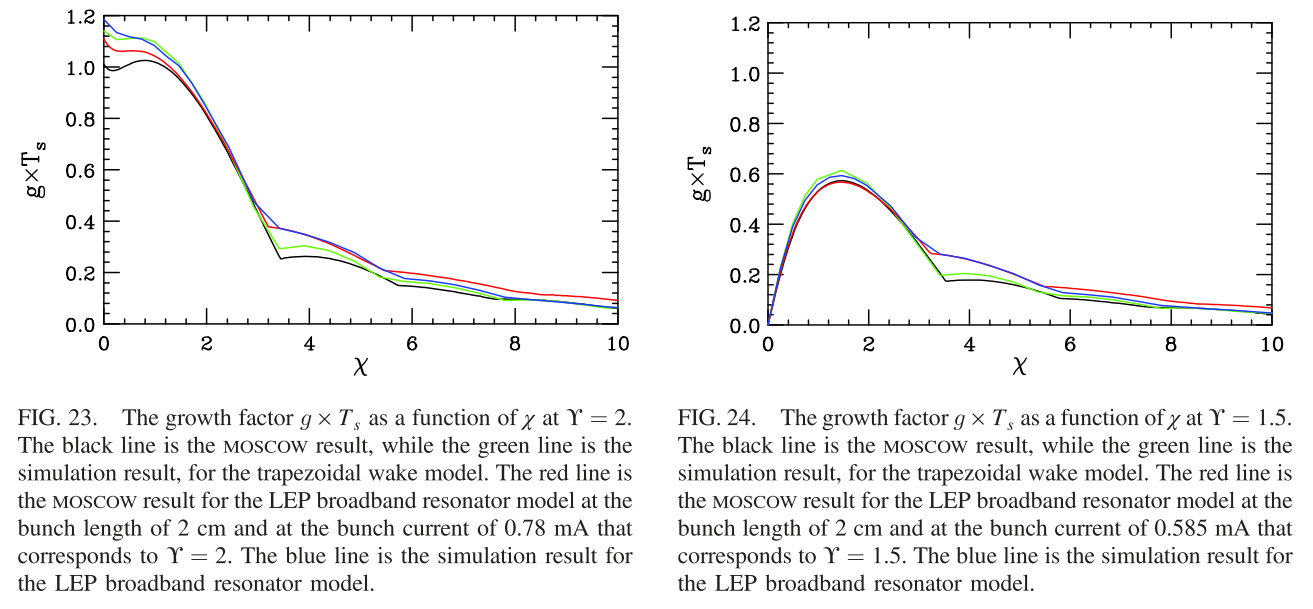


图 5

图5：Vlasov方程+梯形尾场模型与模拟的对比。

左图为，右图。

**绿色**：梯形尾场模型， Vlasov方程得到的结果；

**黑色**：梯形尾场模型，MOSES得到的结果

**红线**：LEP谐振子模型，用MOSES得到的结果；

**蓝线**：LEP谐振子模型，模拟结果

Yong Ho Chin得到两个结论：1. 增加确实可以抑制不稳定性，但是对于短束团，通过增加色品难以增加。这或许可以解释为什么在很多机器中色品不是抑制TMCI的好工具。2. 梯形尾场能够给出合理的定量预测，且具有简洁性，相信能帮助理论的发展。

### (2) 粒子跟踪

粒子跟踪是用大量粒子尝试模拟真实粒子在储存环中运动的方法。其对大概在量级的宏粒子在时域上进行跟踪[22]，然后对其质心振荡进行分析可以得到各种模的频率。

一些可以包含横向尾场在内，进行数值模拟的软件：

* TRANFT。Fortran编写的程序，用快速傅里叶变换模拟环形加速器中的不稳定性。可以用于任何粒子类型。
* ELEGANT。支持对超过100种元件类型在六维相空间进行跟踪。使用不同的方法，包括辛积分、矩阵（高达3阶）和传统的数值积分[23]。
* MBTRACK, 在六维相空间中，模拟储存环中短程尾场和长程尾场驱动的单束团、多束团集体不稳定性。
* Matlab版本的AT(Accelerator Toolbox)和Python版本的pyAT。

数值模拟的优点是，能提供非常完整的束团运动细节。缺点是比较消耗计算资源和时间。

### (3) Vlasov方程

一些横向平面的半解析的Vlasov求解器不完全列表如下：

* MOSES（MOde-coupling Single bunch instability in a Electron Storage ring）程序，只适合单束团，谐振子模型（resonator model），不带阻尼器（damper）[30]。
* NHTVS。缺点为不能自动检查收敛性，径向离散化时依赖air-bag环，且在稳定图理论(stability diagram theory)（近似）框架下处理朗道阻尼[13]；
* 半解析程序DELPHI[12]。基于单高频，考虑了阻尼器和横向振荡频散导致的阻尼。
* 程序GALACTIC和程序GALACLIC（for GArnier-LAclare Coherent Longitudinal Instabilities Code）。这两个程序的理论基于Laclare, 1987的CAS（CERN Accelerator School）文章[22]。在单高频的基础上考虑了阻尼器。

对于相空间密度分布，Vlasov方程为：

Vlasov方程适合保守系统。关于角向均匀的纵向相空间分布和线性振荡，作为最基本的近似，能非常容易地对其径向模和角向模展开[16]。

在赵午教授的书[16]中，粒子在纵向相空间中的轨迹是可以整理成圆形的：

以此为假设代入Vlasov方程之后能带来很多便利。最主要的，就是提供了如

的解析形式。这导致在参考文献[16]中式(6.74)和(6.75), (6.177)和(6.178)中开始出现贝塞尔函数。同时也出现在了文献[16]的最终结果和不少Vlasov求解器的推导之中，比如DELPHI和NHTVS中贝塞尔函数的来源都是来自于单高频的对称性。

从单高频扩展到双高频，问题来源于三个方面：

* 径向分布在双高频下变得更复杂；
* 角向没有了上面的规则，没有解析表达式；
* 纵向振荡工作点不再是传统单高频问题中的常数值，而是一个分布；

对于第一个方面，高斯分布在极坐标下径向密度为：

在作用量-角度坐标下，单高频径向密度分布为：

然而，只要稍微偏离单高频，指数部分就不再是线性的了，会变成的复杂函数。这就导致传统的利用作为积分核，用特殊函数做正交基的方法此时失效了。1994年，K. Oide首次以分段函数形式构造了离散的正交基用来处理纵向不稳定性[31]。2018年，Venturini发展了他的方法直接进行径向离散化，处理单高频和理想拉伸小振幅近似的TMCI[15]。他的方法完整的包含了纵向密度分布和纵向相空间工作点分布的信息，而之前的方案——正如我在第1节讨论的——在最优拉伸下准确度会降低，因此对于更一般的双高频设置，我计划延续这种径向离散化的做法。

对于第二个方面，由于没有了的规则，没有解析表达式。Venturini的做法是，将重新定义为粒子在轴上的振幅，从而近似成的形式[15]。然而他这个做法不适合包含奇数次项的RF势。为了应用于更一般的RF势，同时受到传输矩阵+尾场作用矩阵采样方案的启发[28]，我决定采用角向离散化。即使没有类似贝塞尔函数的解析表达式，也可以用数值解。

第三个方面，对于非线性振荡的包含工作点分散的普遍处理方式为：在高斯分布的基础上加上小幅度的工作点分散。比如：14年的DELPHI在单高频的基础上考虑了横向振荡的工作点分散[12]；14年的NHTVS在单高频的基础上考虑了横向振荡和纵向振荡的工作点分散[13]。这种近似方法仅仅适用于离高斯分布偏差不大、纵向工作点分散也不大的情形。一旦方案变成最优拉伸甚至过拉伸，这时方法完全不适用。算是目前理论的一个不足之处。不过，Venturini也是通过径向离散化方法还是使得其中一个特殊情形——最优拉伸小振幅近似——得到了解决。因为他的径向离散化可以代入完整的分布。总之还是要延续他的径向离散化方法。

### (4) Fokker-Planck方程

Fokker-Planck方程考虑了同步辐射的阻尼和激发。它通过在微分方程中加上随机项建立随机微分方程（stochastic differential equation, SDE）。再将随机项消除，变成统计量便得到了Fokker-Planck方程[24][25]：

其中为阻尼常数；为扩散系数。Fokker-Planck方程和Vlasov方程相比，多了右侧的扩散项和阻尼项。由于电子质量极小，随机效应对电子的影响比较大，因此Fokker-Planck方程实际分析电子更加准确[16]。

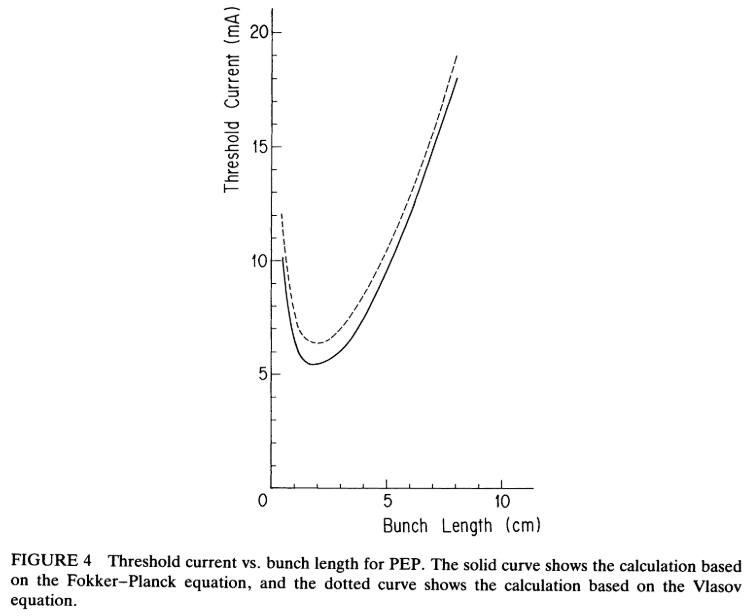


图 6

图6：虚线和实线分别表示用Vlasov方程和Fokker-Planck方程解出的束长和不稳定性阈值的关系。（引用自T. Suzuki, Fokker-Planck theory of transverse mode coupling instability, 1986, FIG. 4.[26]）

这幅图展示了的Vlasov方程（虚线）和Fokker-Planck方程（实线）应用于PEP时两者存在差异：Fokker-Planck方程（实线）给出的阈值更低，也更接近实验上的结果。

但若是阻尼和扩散不那么重要时，用Vlasov方程对电子进行模式分析仍然具有参考价值；反之则应该Fokker-Planck方程更合适。比如，高色品能抑制掉低阶模的不稳定性，使得高阶模支配了不稳定性；而高阶模受同步辐射阻尼的影响是很大的。此时用Fokker-Planck方程就更合适[27]。当色品较低、低阶模支配了不稳定性时，Vlasov方程是足够的。

在通用双高频设置下处理Vlasov/Fokker-Planck方程，难点和核心是上式左侧的处理方法，考虑到前者方程比后者更简单，不妨优先从Vlasov方程着手。

### (5) 传输矩阵+尾场作用矩阵

这个方法是将尾场的作用集中到储存环上一点，单独写出环的传输矩阵和尾场作用矩阵。它们在作用量-角度坐标下分别满足：

和

之后便可以结合传输矩阵和作用矩阵计算总的特征值。由于该方法也利用了类似Vlasov方程的模展开方法，因此也能分析出同样的角向模和径向模[28]。不同之处在于，这个方法展开的是横向相空间坐标在纵向相空间的分布：；传统Vlasov方程展开是纵向相空间密度分布。

这个方法的计算速度比起传统数值跟踪速度要快得多。尤其是高斯束团。而对于接近最优拉伸的束团则需要更多的角向和径向采样数以提高精度，速度稍微慢一些。

这个方法最近是在束束作用中用得多。2018年N. Kuroo用他来研究束束对撞中的头尾不稳定性[29]。2022年林椿涛利用这个方法来计算横向束束相互作用的横向模耦合[28]。

# 理论基础

## 2.1 储存环光源的若干操作方案介绍

## 2.2 束流崩溃效应和强头尾不稳定性的宏粒子模型

### 2.2.1 束流崩溃效应的宏粒子模型

假设存在两个粒子：头部1号宏粒子，尾部2号宏粒子。并假定尾场为常数：

通过整个阻抗结构，尾部2号宏粒子受到1号宏粒子的能量影响为：

于是单位距离内1的横向尾场导致2的倾角扰动为：

这里为电子经典半径，且最后一步取。于是粒子2受到的振荡方程为：

头部1号宏粒子的振荡方程为：

引入变换：

于是两个方程可以变成：

其中第二个方程可以解得：

可以看到若是没有1、2粒子交换时，此时2粒子受到1粒子的作用振幅线性增加。“振幅线性增加”这个现象和发生共振时是一样的。

### 2.2.2 强头尾不稳定性的宏粒子模型

假定前一节的BBU只发生在纵向交换周期的前半周期，则BBU可以写成矩阵形式：

后半周期的矩阵形式为：

其中：

于是一整个周期的传输矩阵为：

要希望传输矩阵则要求两个特征值的模，可解得：

## 2.3 横向模耦合不稳定性求解器的基本原理

利用单粒子运动的动力学方程：

将上式代入Vlasov方程

并变换到纵向和横向都为极坐标形式的相空间

可以得到

代入密度扰动的一阶形式

并在计算过程忽略高阶的项。

是描述二阶振荡的，因此它具有如下形式的解：

此外，还利用了如下近似：

并且假设尾场力也是二阶的。于是得到横向的一般性角向模分解了的方程：

对于径向模分解，我们先忽略耦合，于是我们可以得到尾场下的模的Sacherer积分方程

其中为权重函数

称为核函数：

我们利用正交归一关系

找到权重的一组完备集。将按此展开

并代入微分方程，可以得到矩阵方程：

其中

解此方程相当于解了角向模为，且径向模分解了的频移。

# 过拉伸束团生成双脉冲X光

## 3.1 过拉伸束团生成双脉冲X光的基本原理

双高频系统可以通过调整两个射频腔的参数，调整纵向密度分布。当主腔电压、相位，谐波腔电压、相位，能够满足：

1. 参考粒子获得能量为定值，能损；
2. 电压在参考粒子处的一阶导为0；
3. 电压在参考粒子处的二阶导为0；

则可以得到一类纵向密度分布顶部为平的“最优拉伸”或者“理想拉伸”，如下图的Optim为最优拉伸的纵向密度分布（蓝色）和bucket（红色）。当谐波腔电压比此时电压再高一些，则纵向密度分布会从一个平顶变成两个峰的形状，我们称为过拉伸。如下图#1~4为四种不同的过拉伸的纵向密度分布（蓝色）和bucket（红色）。

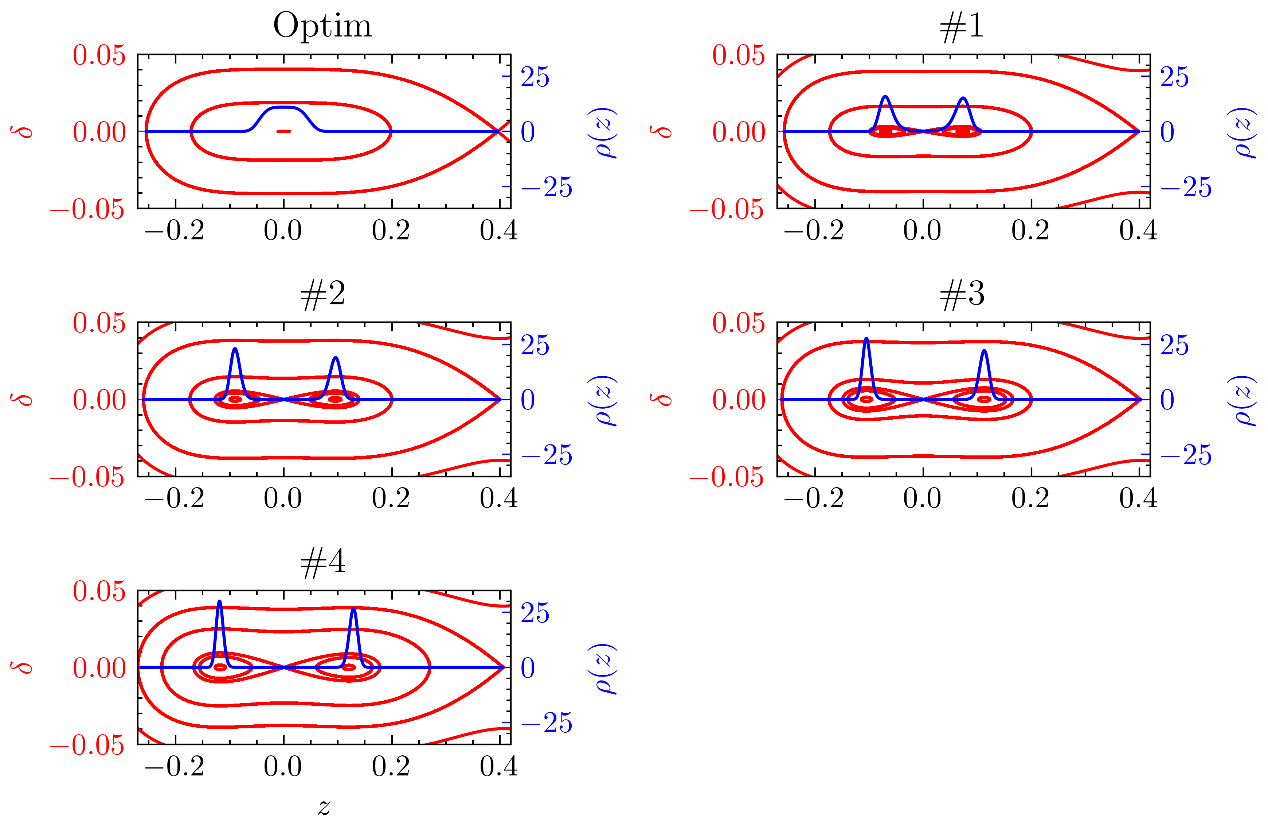


图 7

我们计划用过拉伸的两个微束团去实现新的双X光双脉冲。

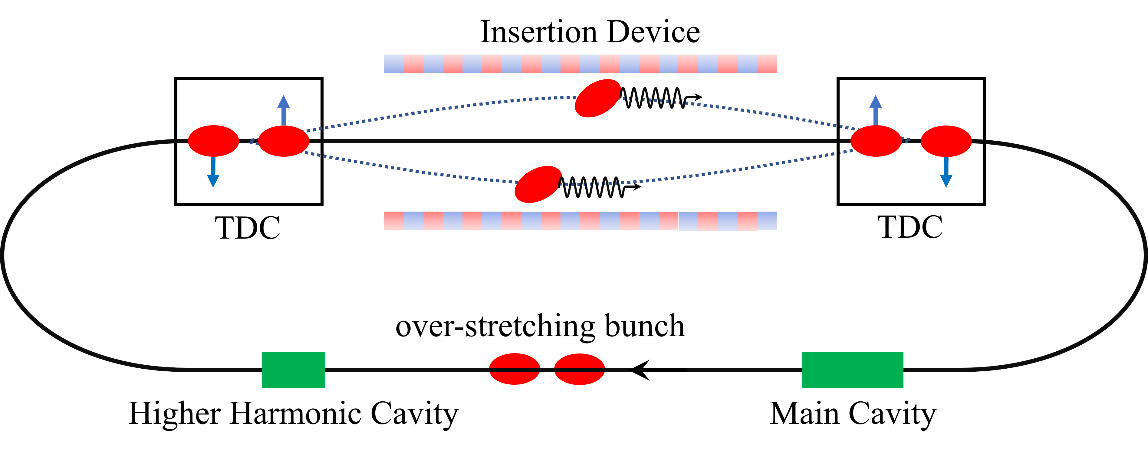


图 8

假设两个偏转腔处于出光点对称，且相位相差180°的位置。当两个微束团经过第一个偏转腔时，如图(a)所示，头部尾部受到相反方向的偏转力。当束团到达出光点时，相位刚好经过90°，则两个微束团刚好有着最大的分离（图(b)）。当束团到达第二个偏转腔入口时，又经过90°（图(c)），此时理论上两个微束团恰好。然后经过第二个偏转腔之后（图(d)），被抵消。于是，我们便实现了过拉伸的X光双脉冲且将影响限制在一个超周期内，不影响其它线站的使用。

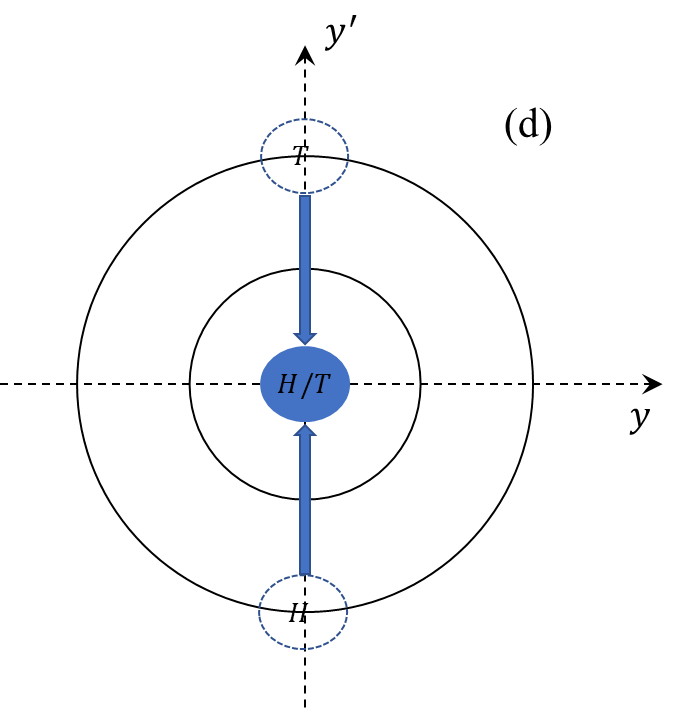
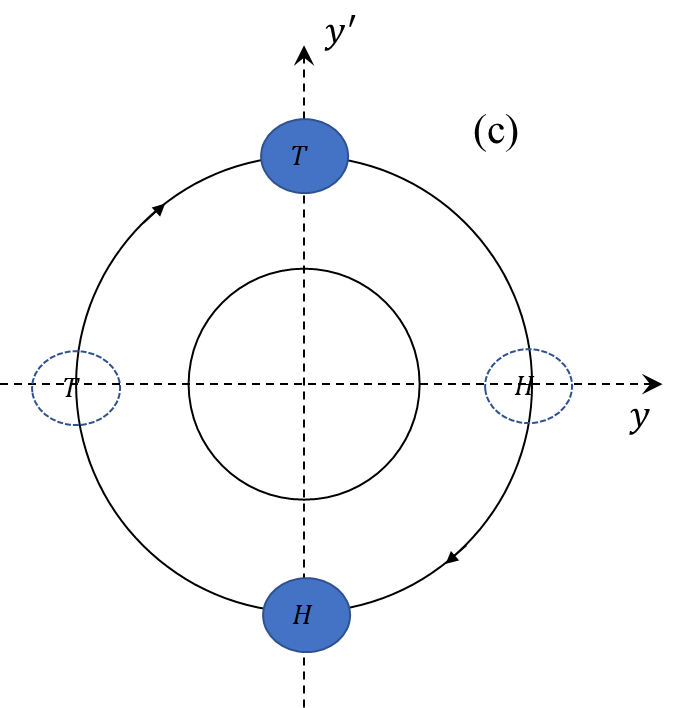
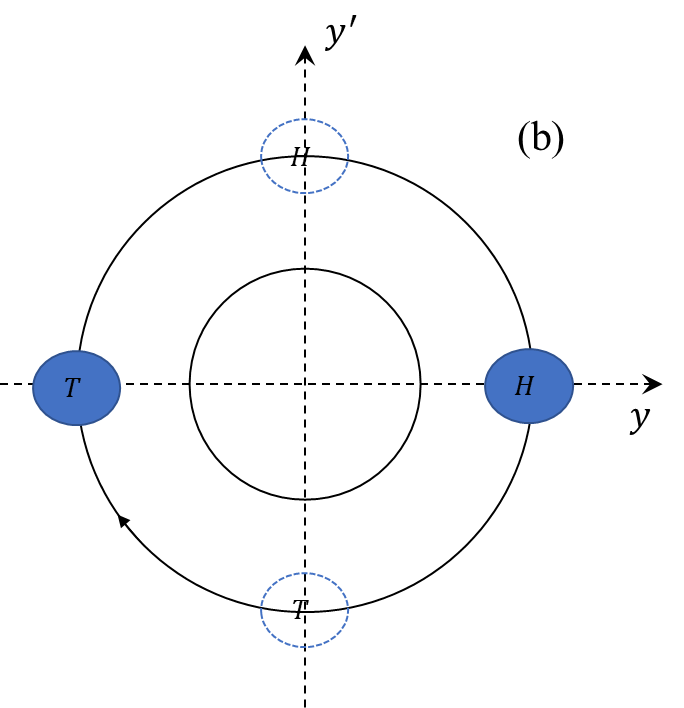
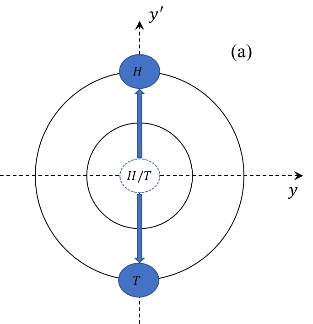


图 9

## 3.2可能遇到的问题

由于过拉伸头尾微束团以很大的分离经过磁铁（也就是相较于原本的还有额外较大的偏移，，后面推导中我们会频繁用到这个假设），所以它们经过磁铁时受到的力都要比平时要强。

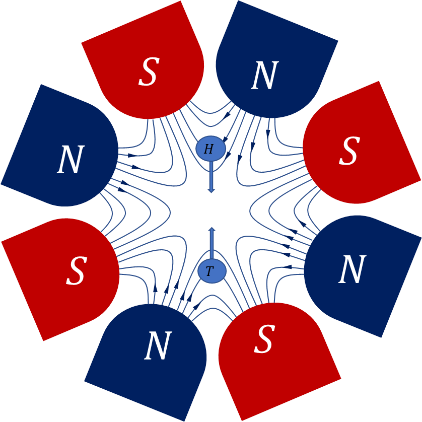
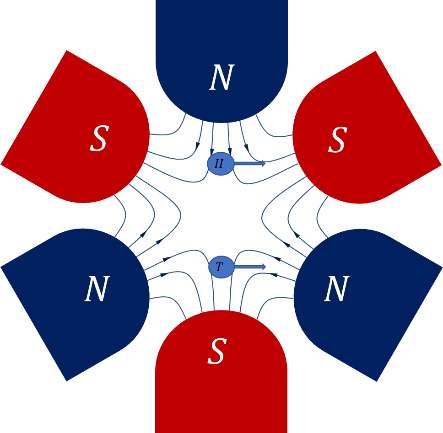
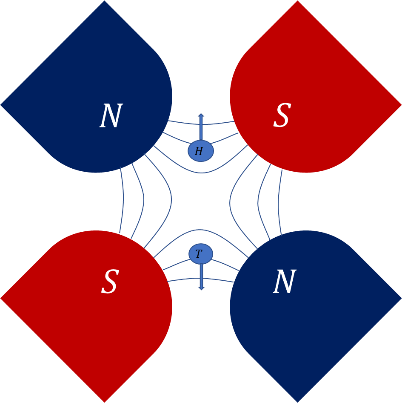


图 10

**四极铁误差推导**

当微束团以位置经过四极铁时，看到的四极场为：

若束团经过四极铁方向有额外的偏差，则看到的四极场为：

也就是额外的横向二极场：

它起到线性约束微束团方向振荡的作用。这个作用对于头尾束团来说关于平面是对称的，我们可能可以借助偏转腔，将平面的影响消除。

**六极铁误差推导**

当微束团以位置经过六极铁时，看到的六极场为：

若束团方向有额外的偏差，则看到的六极场为：

其中

这里利用了假设。注意到六极铁除了会产生关于平面对称的部分，在水平方向还有一种非对称作用，它会导致束团整体在水平面向一侧偏移。这是无法通过偏转腔消除掉的。

**八极铁误差推导**

当微束团以位置经过八极铁时，看到的八极场为：

若微束团经过八极铁方向有额外的偏移，则微束团看到的八极场为

这里，

这里利用了假设。注意到导致的平面的影响，也是对称的。但是导致的水平面的影响是非对称、偏转腔恢复不了的。

总之，在我们当前的，且忽略-耦合带来的平面的额外偏移的假设下，四、六、八极铁的额外影响分为以下两类：

1. 四、六、八极铁都存在的平面的对称的额外偏移。这类偏移可以被偏转腔给消除掉；
2. 六、八极铁都存在的平面的不对称的整体偏移。需要额外调整六极铁即可消除。

**调整六极铁的必要性**

我们如果不对六极铁进行调整，只通过调整出口偏转腔，则可以观察到：即使平面优化不错，平面也会观察到头尾微束团向同一侧偏移。

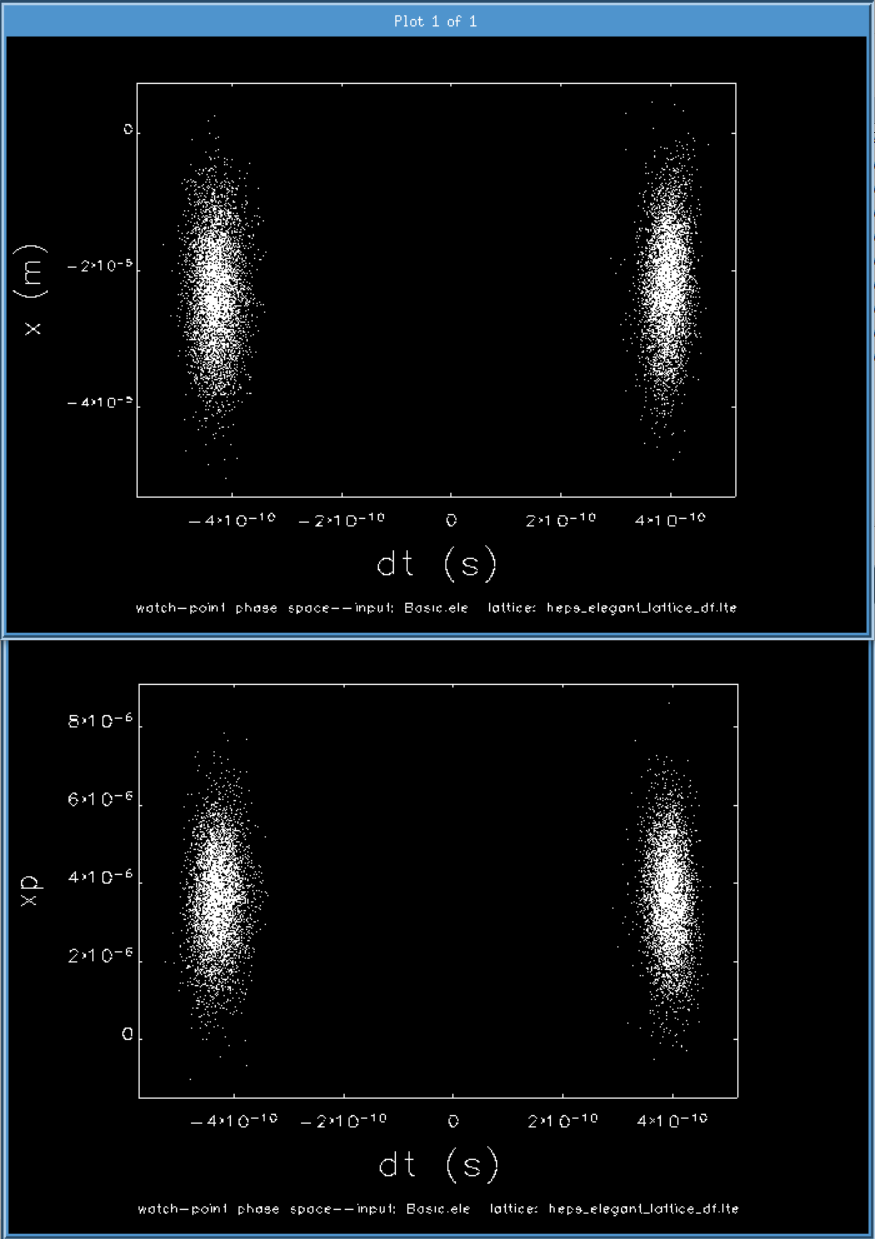


图 11

也就是前面讲述的微束团偏心经过六、八极铁时，导致的平面偏移，只通过调整偏转腔是无法消除的。因此有必要调整六极铁进行调整。

## 3.3在HEPS模型中的模拟验证

下面利用HEPS的模型验证这一点。

### 3.3.1 双高频系统的设置

双高频系统有4个参数可调。通常过拉伸只有一个约束：每圈能损为定值。为了方便研究，我们额外假定了两个约束：主腔电压不变，头尾两个bucket高度相等。这3个约束使得只留下一个可供调节的参数，用来调整过拉伸分布的形状。

通过调整谐波腔电压，我们得到了过拉伸分布两个峰值之间的距离与谐波腔电压与主腔电压之比的关系。

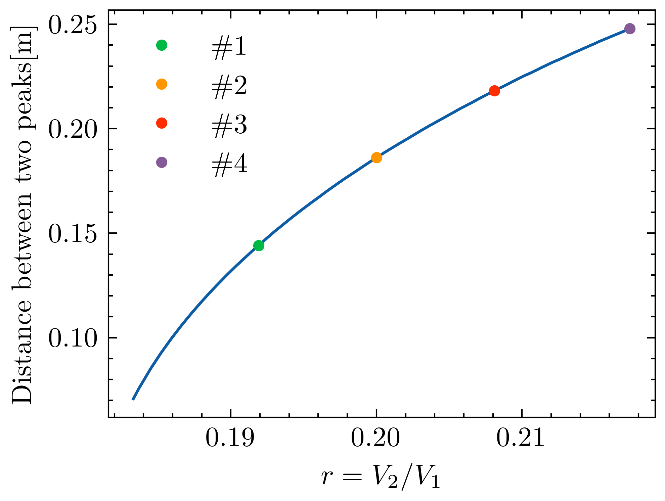


图 12 高频腔与主腔电压之比V.S. 过拉伸峰值距离。#1-4为我们优化过程所采用的设置。

我们在其上选择4个过拉伸分布作为优化的例子。其分布和bucket的形状如图 7所示。

### 3.3.2 偏转腔的位置和设置

下图展示了两个偏转腔（粉色）和出光点（橙色）在HEPS模型一个超周期中的位置。这里两个偏转腔之间横向振荡相位相差180°。

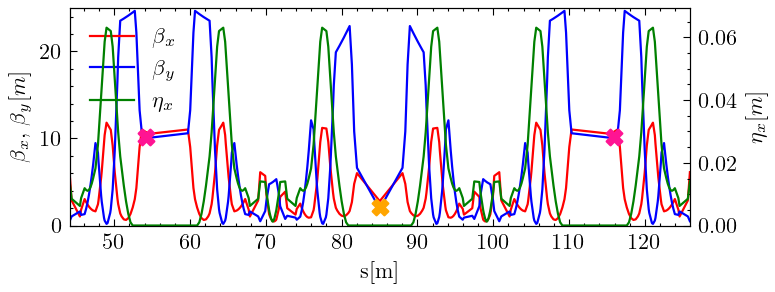


图 13

接下来就需要确定第一个偏转腔TDC1的电压和相位。TDC1的相位，需要能对等的分开过拉伸两个峰。然而，过拉伸两个稳定不动点：SFP1和SFP2可能是不对称的。因此我们的TDC1相位也要进行微调：

关于TDC1的电压的选择，TDC1的电压和出光点的分离之间存在着简单的线性关系。对于四个例子，我们选择电压使得横向分离量为。

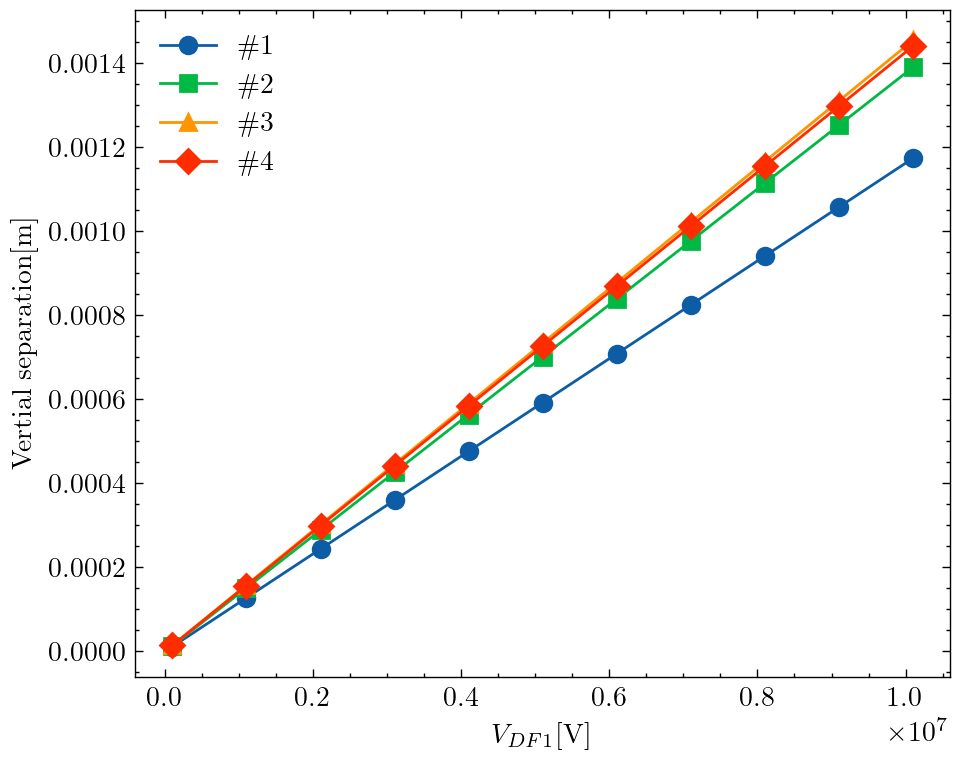


图 14

对于第二个偏转腔，我们需要利用它来优化平面的偏差使得两个TDC的影响不会泄露出去，影响其它线站。首先，遍历第二偏转腔的电压和相位，然后分别对电压和相位采用线性和二阶拟合，如图 15。

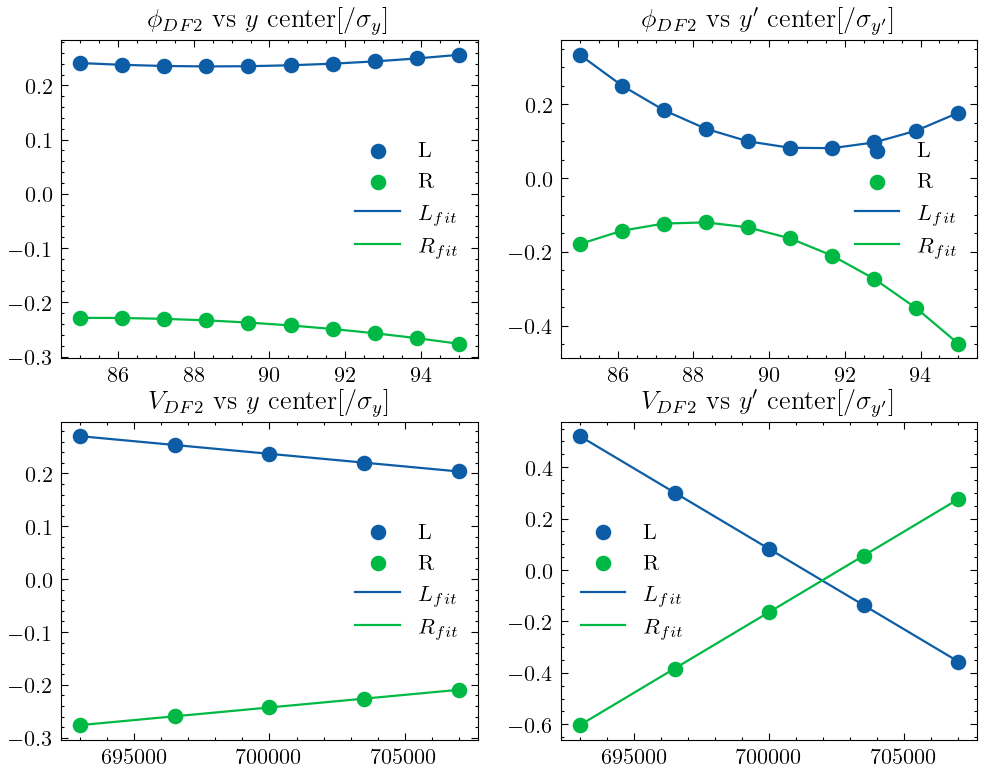


图 15 和的微束团中心分别对和进行扫描。微束团和的中心与和的关系分别是线性函数和二次函数的。

得到拟合函数之后，采用差分进化算法优化如下目标函数：

其中为：

其函数图像为：

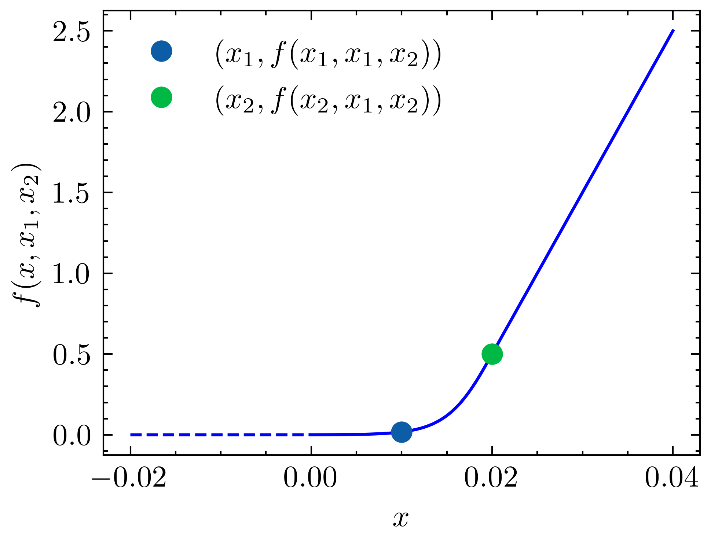


图 16 的图像。

当它应用于对的优化，可以在时有最快的收敛速度，而在时有最低的收敛速度。应用于多目标优化过程时，可以避免过度优化某个目标。

然而，无论平面单圈优化再怎么优化得好，平面总是有偏移。这个偏移与第一偏转腔的电压成二次函数的关系，如图 17。结合图 14的电压与平面分离的线性关系，容易意识到，平面的偏移与平面的偏移有二次函数关系。这符合我们之前偏心经过六极铁、八极铁时的推导。所以，接下来我们尝试通过优化六极铁来抑制平面的偏移。

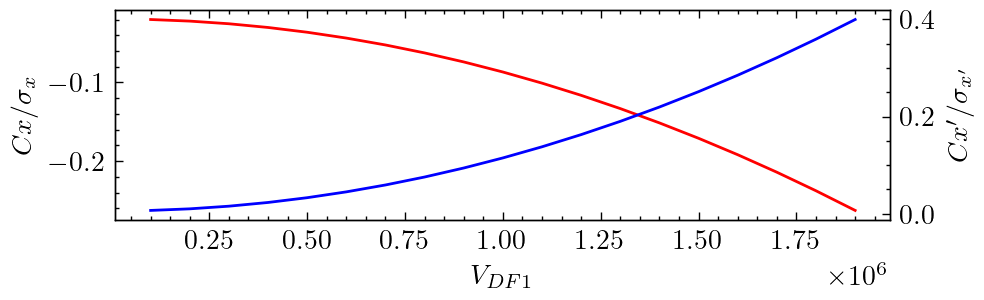


图 17

### 3.3.3 优化六极铁

HEPS一个超周期有12个六极铁。对它们的优化采用同样的方式：先依次遍历12个六极铁，得到优化目标的拟合函数，然后用差分进化算法。

我们的优化需要满足：

1. 维持两个微束团在第二个偏转腔的出口时，处于平面的中心；
2. 维持一阶色品不变以防止频移；
3. 尽量保持六极铁的改动很小，以减小对磁铁性能的影响。

所以我们选择这些优化目标：两个微束团的和的中心；一阶色品；12个六极铁的相对偏差的绝对值的总和。如下图所示，一阶色品和两个微束团在平面的中心都可以用线性函数来拟合。拟合完之后，可以用差分进化算法进行优化。

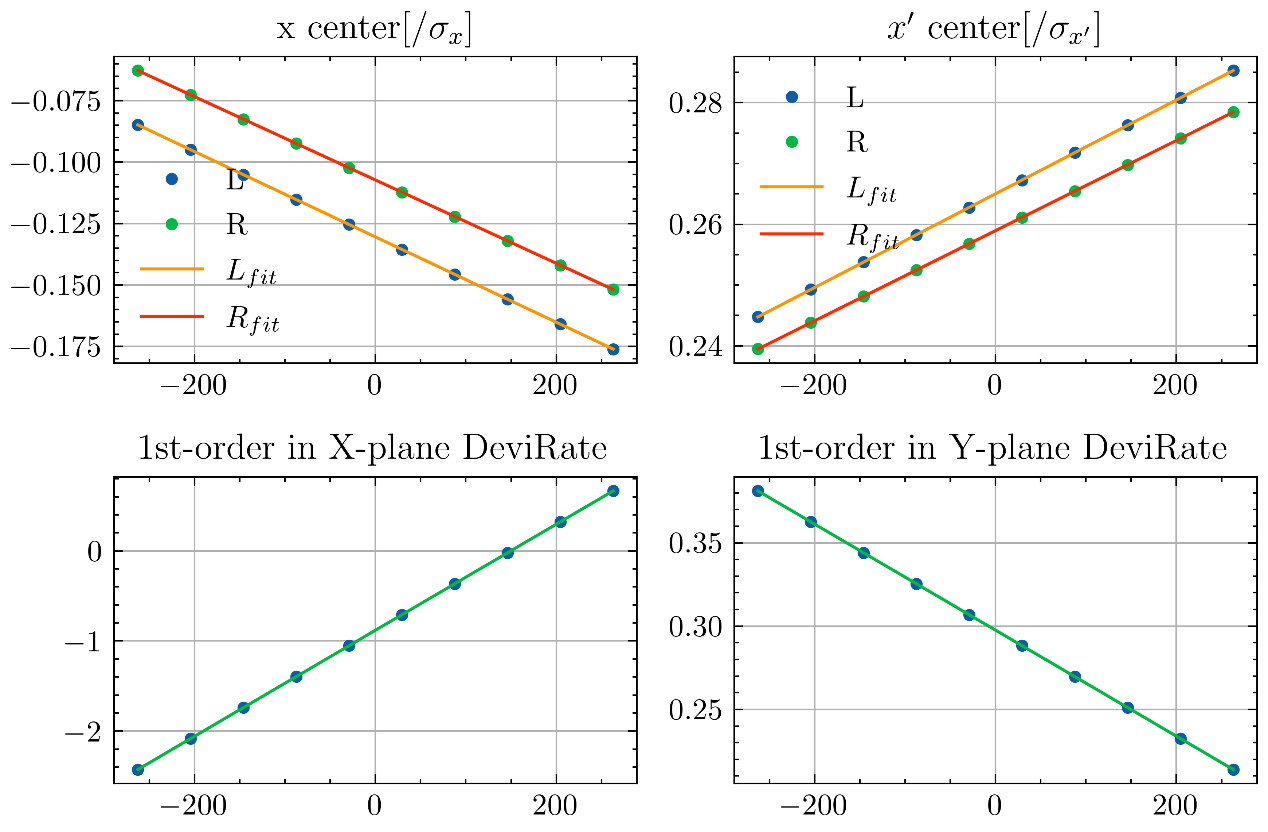


图 18

### 3.3.4 结果

各个六极铁最终优化的强度的相对变化为到之间。色品的变化也能控制得很小（见表格）。

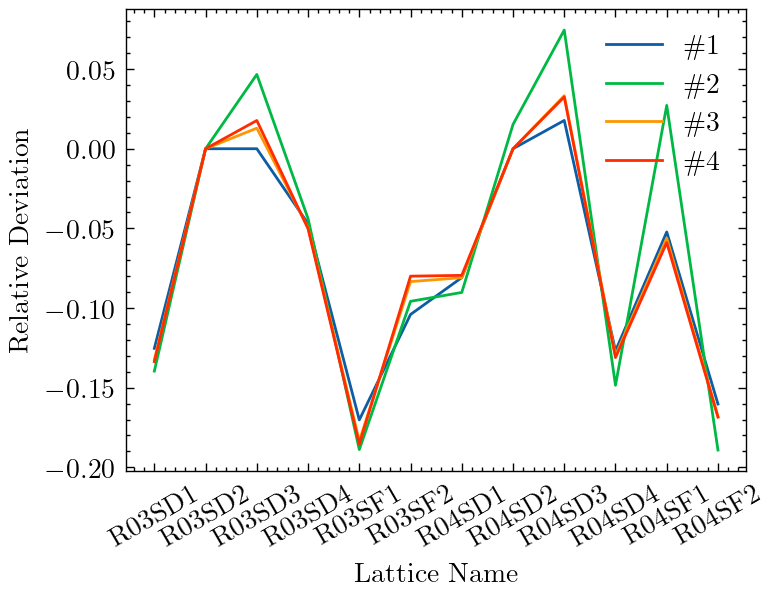


图 19

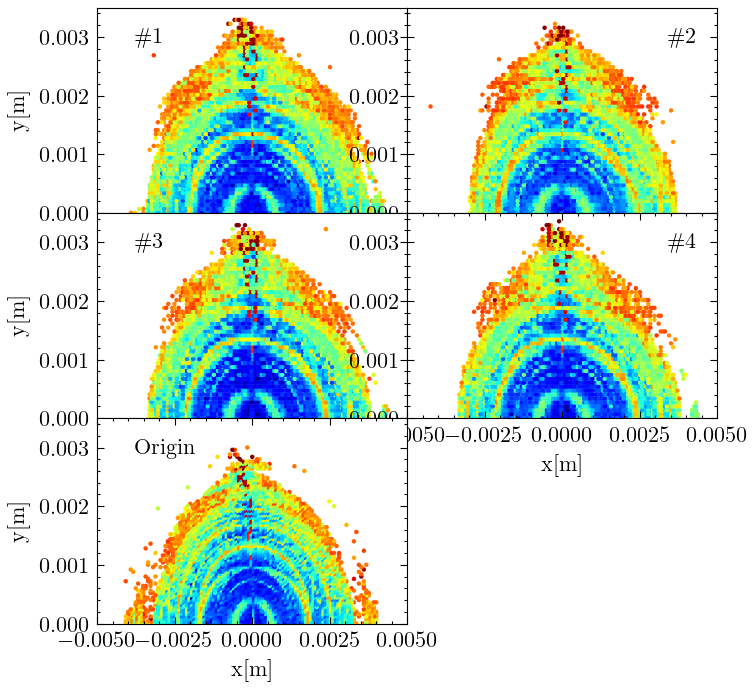


图 20

上图为四个情况的动力学孔径和原始的动力学孔径。总体上还是非常不错的。

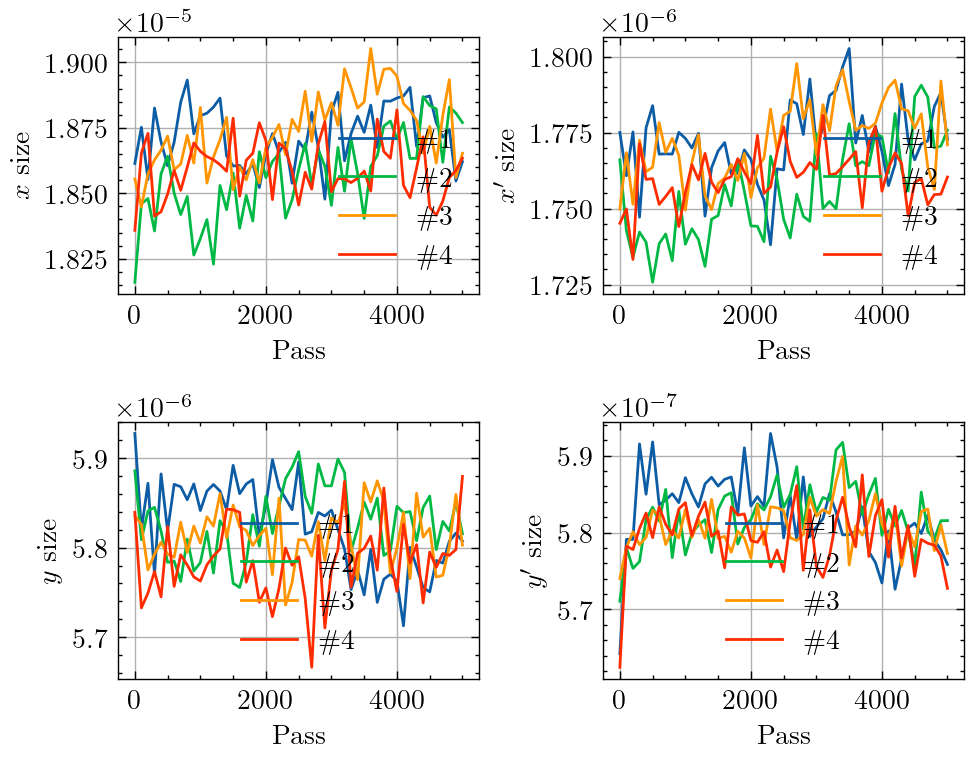


图 21

上图展示了第二个偏转腔出口的尺寸随圈数的变化。

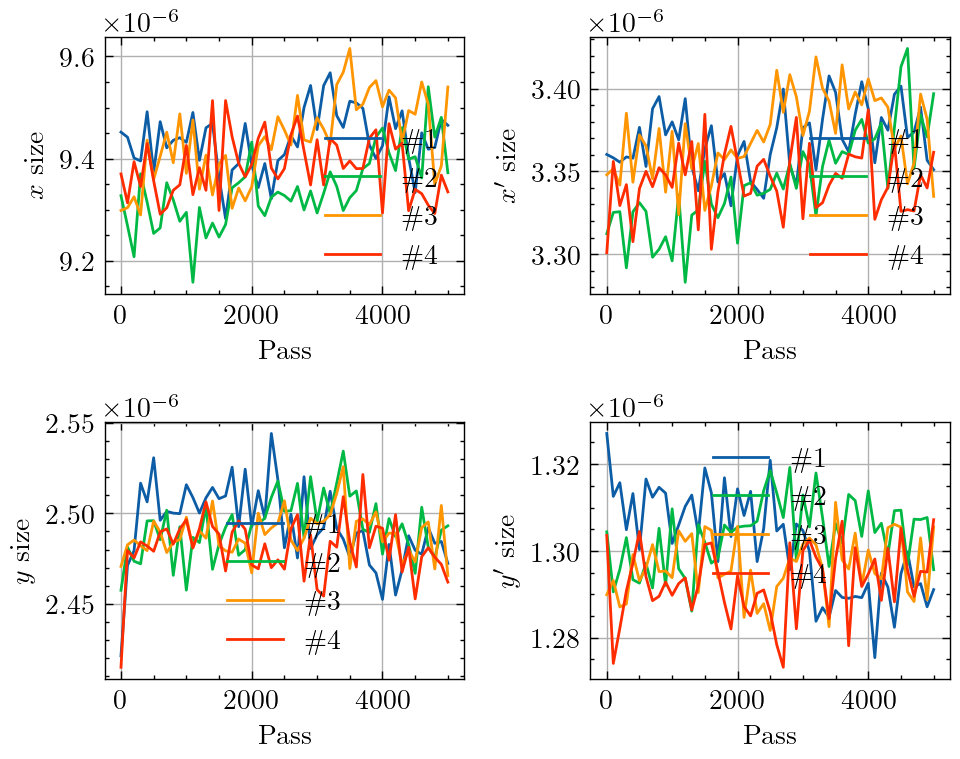
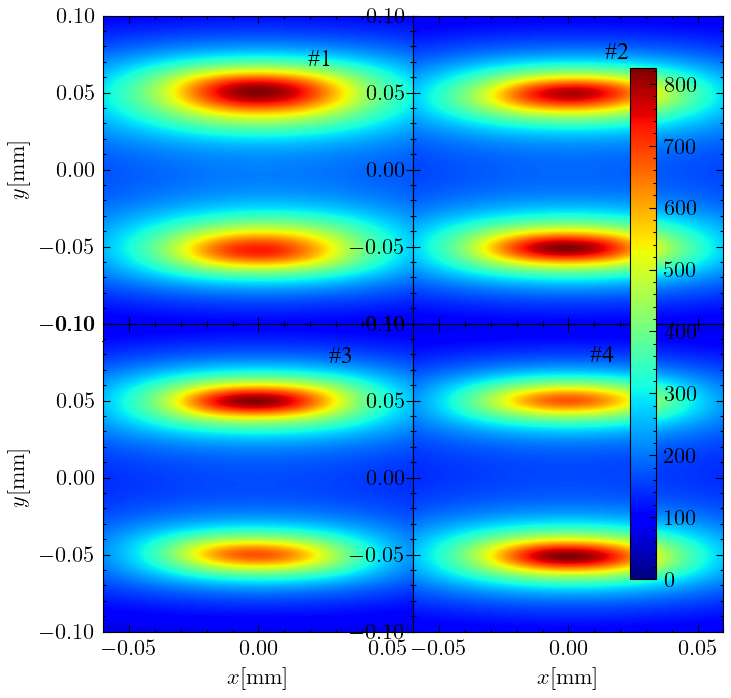


图 22

上图展示了下一直线节出光点的尺寸随圈数的变化。



上图展示了用SPECTRA计算的#1-4的出光点的光斑，参数见表格。可以看到它们方向确实分离成了两个光斑，且分离量和预期的差不多。

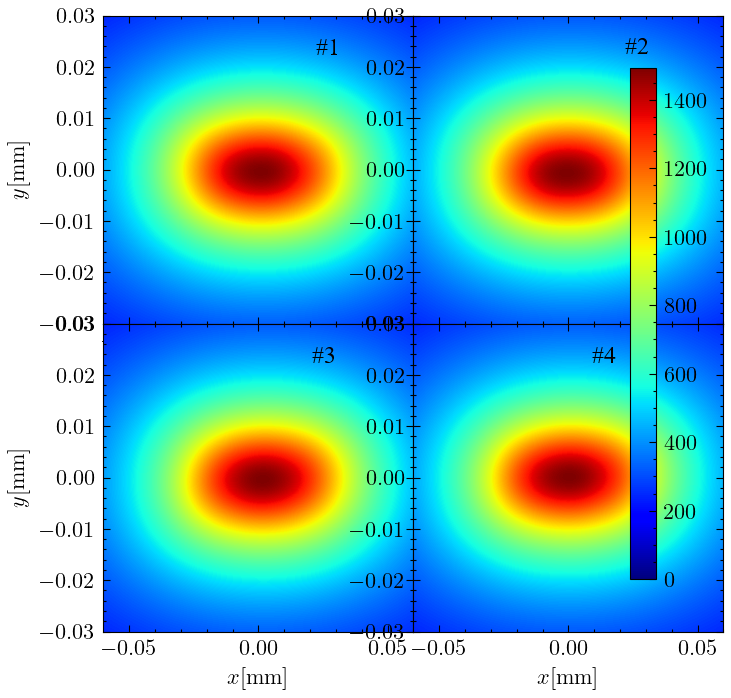


图 23

上图展示了下一直线节出光点的光斑。可以看到光斑还是高斯的，可以认为不影响其它线站的工作。

## 本章小结

本章提出了利用过拉伸束团生成双脉冲X光的方法。本方法在双高频系统的情形下额外添加了两个偏转腔。一个用来产生方向的分离，另一个用来消除方向残余的偏差，使得不影响其它线站的使用。由于偏心经过六极铁和八极铁，平面也产生了很大的偏离。为了抑制这个偏移，我们选择了调整六极铁强度。模拟结果表明，能在维持动力学孔径、色品、磁铁强度的改动都很小的情况下消除平面的偏移。且多圈仍然保持稳定。

# 任意双高频TMCI

## 4.1 宏粒子模型

### 4.1.1 单圈特征值

假设存在3粒子，编号为#1,#2,#3。其中#1代表头部粒子，带有电荷量；#2,#3代表尾部粒子，电荷量分别为。它们的初始相空间坐标，前半周期的传输矩阵：

右下角的2×2矩阵相当于BBU。和BBU相比，由于用于交换的电荷量，从变成了，因此表示头部对尾部作用的矩阵元也变成了一半。

将#2、#3粒子互换我们就得到了后半周期的传输矩阵：

于是我们得到完整周期的传输矩阵形式：

这里

对此矩阵求特征值得到稳定条件为。也就是传统双粒子强头尾不稳定性的阈值。只是由于用于交换的束团电荷量变成了一半，因此阈值变成两倍。

### 4.1.2 多圈迭代的矩阵通项公式

我们都知道传统BBU，即使写成传输矩阵的形式：

也不能采用求特征值的操作。因为其特征向量：

明显无法线性无关。因为前面系数不是非零不可。而三粒子模型的特征向量为：

这组基满足线性无关的条件。因此，3粒子模型虽然考虑了BBU和TMCI，但确实没有新的阈值。

我们还可以求出迭代圈的通项公式。记，其具有通项公式：

我们可以写出相邻两次系数的传输矩阵：

利用上面传输矩阵的特征值和特征向量表示出通项公式：

此处：。从这里通项公式可以看出，这里结果并不包含随增长的项。因此，我们确定结合了BBU和TMCI的传输矩阵，不会导致类似BBU随增长的情况。

## 4.2双高频设置下TMCI的Vlasov方程的推导

### 4.2.1 作用量-角度坐标

对于单高频、欠拉伸、理想拉伸，作用量的计算为：

也就是对于只存在单个闭环的哈密顿量等高线，作用量为其面积除以。对于过拉伸，一些哈密顿量等高线为两个闭环。我们分别对两个闭环单独计算其作用量。

要计算角度坐标，我们先要计算生成函数：

其中，为哈密顿量等高线闭环的的最大值。对于过拉伸存在两个闭环的情形，为各自闭环的的最大值。之后利用

可以求出角度坐标。

### 4.2.2 角向模展开

首先写出单粒子运动方程：

这里：

表示用归一化的双高频电压。这里纵向、横向相空间都是直角坐标系。我们将纵向相空间变换到作用量-角度坐标，将横向变换到极坐标：

并应用于Vlasov方程：

可以得到：

其中

将线性微扰展开

和代入，则得到：

一阶扰动密度的傅里叶变换为：

其中：

对二维空间扰动分布展开：

将前两式代入即可得到：

其中

### 4.2.3 零流强近似

我们研究方程在零流强时的特征。零流强时

针对模，我们可以对离散化，并将方程写成矩阵形式：

容易发现模的频移，也就是右侧矩阵的特征值的解与个的采样有关。对于理想拉伸、过拉伸，存在大量粒子的等于或者接近0。因此，单高频和欠拉伸经常采用的频移图或者模耦合图，在理想拉伸或者过拉伸时，随着采样的增加，在0附近采样越多，从而以前所谓的“0模”附近就会越密集。

因此对于理想拉伸和过拉伸，我们没有必要去观察其模耦合图，而是直接计算其增长率图。正如Venturini所做的一样。

### 4.2.4 径向模展开

通常方法仍然会对每个角向模的分布进行径向展开，称为Sacherer积分方程。不同的纵向密度分布——称为Sacherer积分方程的权重函数——径向模展开时有不同的基。比如纵向密度分布为均匀分布或者为高斯分布时，所选用的基为Legendre函数（相应径向模称为Legendre模）或者Hermite函数（相应径向模称为Hermite模）。

#### 4.2.4.1 双高频径向多项式正交基

对于更一般的双高频设置，没有固定的权重函数，也就没有固定的多项式正交基。因此可以尝试以为权重函数构造一组基。这组基满足正交归一关系：

在纵向相空间为极坐标的传统坐标系中，径向模具有如下形式：

因此作用量-角度坐标系中，多项式正交基应该具有如下形式：

利用此假设，我们成功的应用于单高频的情形，还

我们成功的将该形式的正交基应用于欠拉伸的情形，下图为多项式正交基的Vlasov求解器（红色）和林椿涛的传输矩阵方法（蓝色）应用于欠拉伸的对比。无论是增长率还是模耦合图，两者都吻合得非常好。

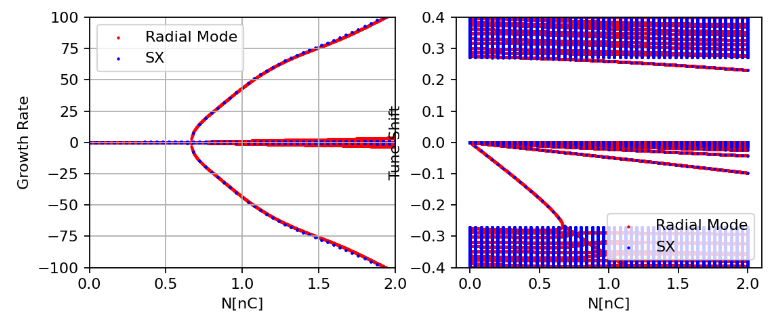


图 24

但是，不同的问题有更适合的基。我们发现多项式基在较低的附近表现不好。前面我们分析在理想拉伸时，0流强时，频移应该是可以无限小的。可是多项式正交基却很难覆盖到比较小的频移（下右图），这同时导致了增长率较小时不准确（下左图）。

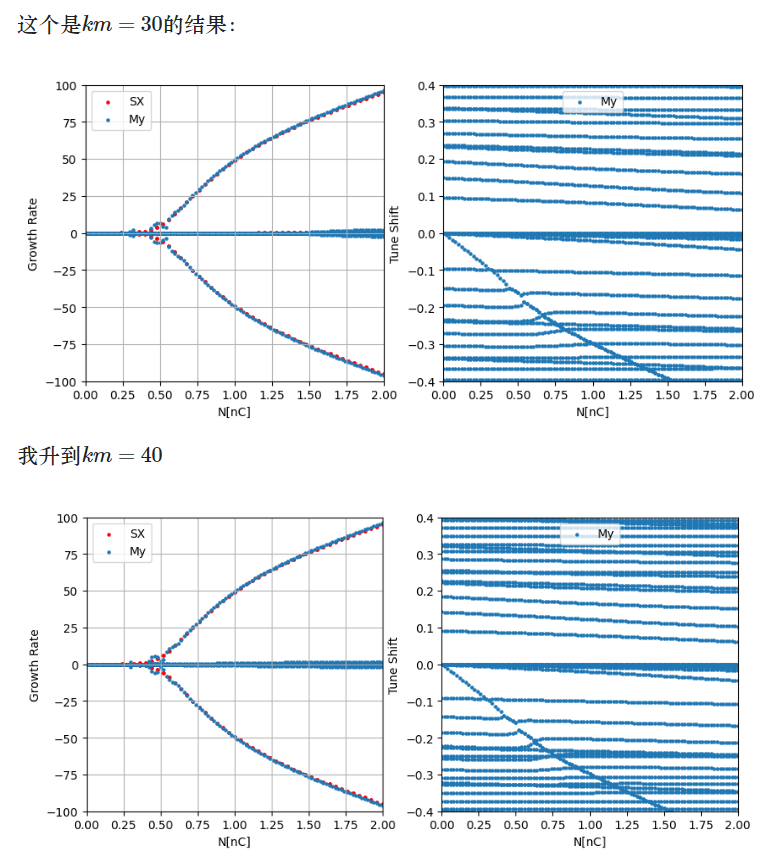


图 25

#### 4.2.4.2 双高频径向离散基

对于更一般的双高频设置，我们采用一种特殊的基——分段阶跃函数。我们将径向离散成段，则第（）个基只在上不为零。这个结果和直接对进行离散化是一样的。下面简要说明证明过程。

定义权重函数为：

基为：

这里为权重的第个离散模；只在第个片段内为1，其余片段内为0；为归一化系数，需要满足正交归一条件：

模径向分布按以下方式分解：

代入前一节式子之后即得到

这个直接径向离散化结果是一样的。因此径向离散化也算是一种特殊但万能的径向模分解。

## 4.3 任意欠拉伸结果与现有Vlasov求解器的比较

### 4.3.1 单高频

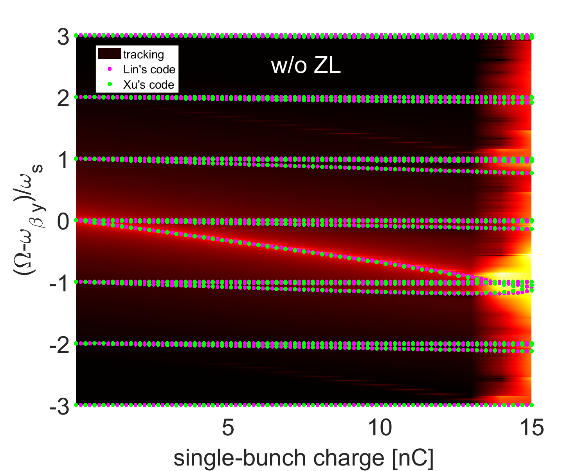


图 26

上图为应用于CEPC模型时，Vlasov求解器、林椿涛的“传输矩阵+尾场作用矩阵”方法和模拟结果的对比。

### 4.3.2 欠拉伸

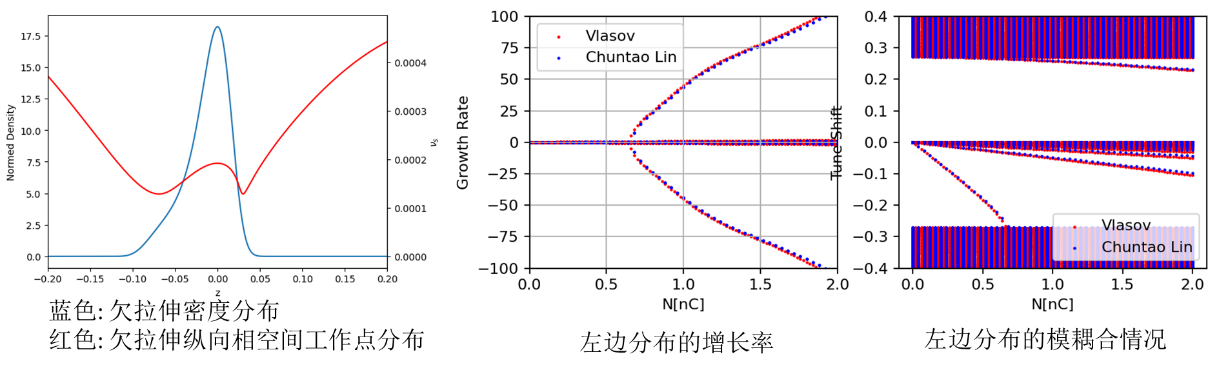


图 27

上图为应用于HEPS模型，欠拉伸分布图/synchrotron tune（左）、增长率图（中）和模耦合图（右）

### 4.3.3 理想拉伸

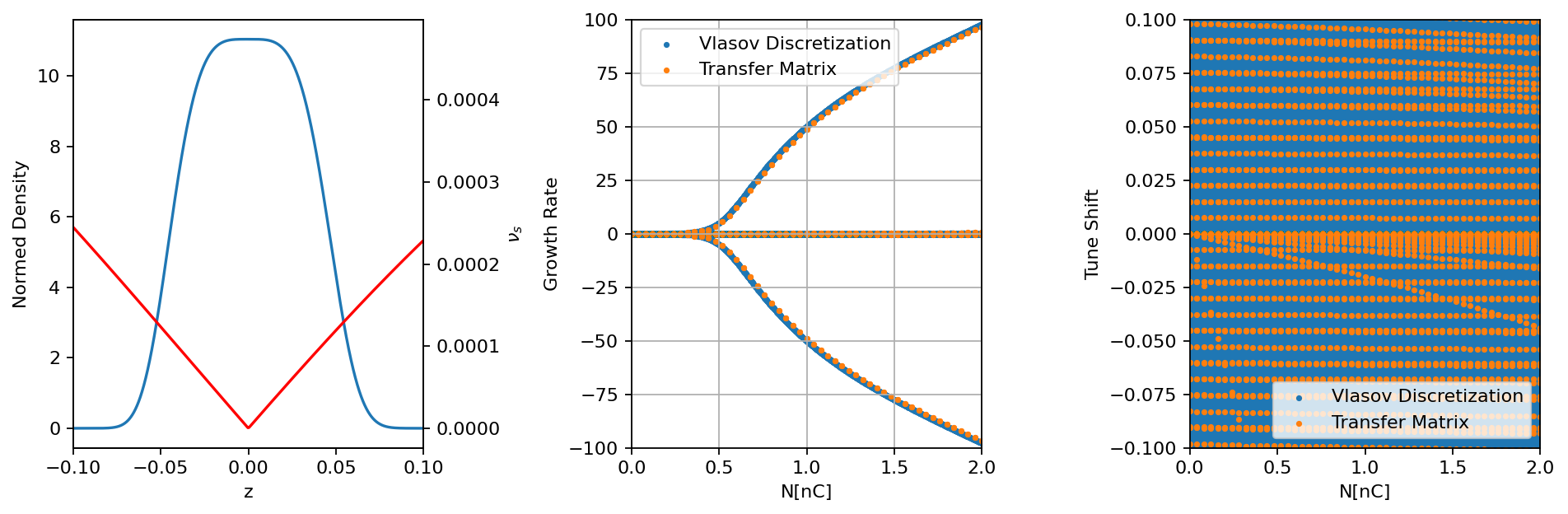


图 28

上图为应用于HEPS模型，理想拉伸分布图/synchrotron tune（左）、增长率图（中）。将它和模拟结果对比（下图），可以看到在流强较低时还是比较吻合的。

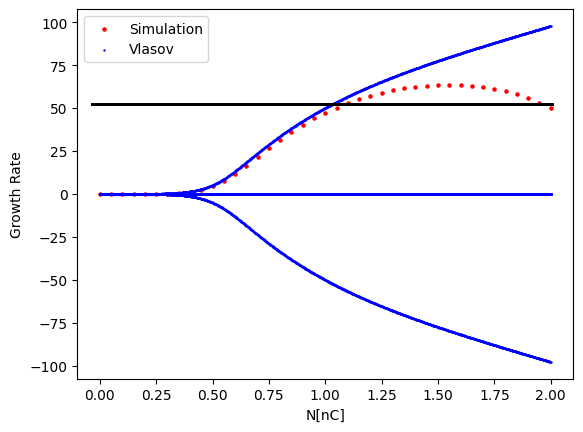


图 29

## 4.4 过拉伸

### 4.4.1 对理论和模拟误差的修正尝试

从我们前面和Venturini的结果来说，理论和模拟在辐射阻尼率附近已经出现了偏差。这个偏差在过拉伸情况下会变得更加大。如下图，红线表示过拉伸的增长率（由于SERFFECTS元件和RF腔搭配时会存在阻尼，所以这里实际是拿增长率减去初始的阻尼）。

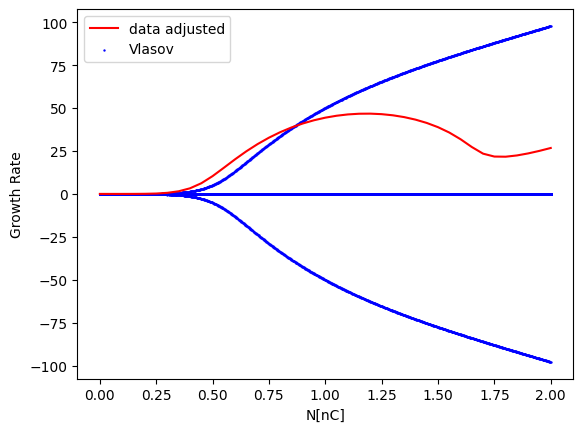


图 30

因此一个自然而然的想法是，去找理论中的不足。

传统方法的几个假设：

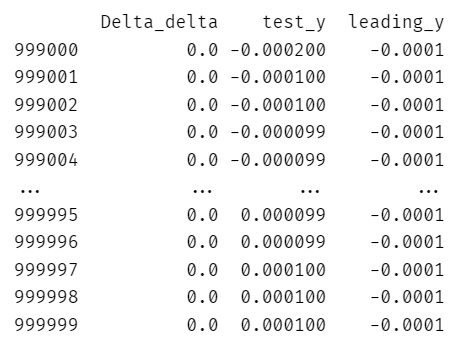
1. 忽略横向尾场的纵向梯度；
2. 横向尾场力是二阶的；
3. 密度扰动只包含二阶振荡；
4. 计算过程忽略高阶项；
5. 忽略分量。

#### 忽略横向尾场的纵向梯度

单粒子纵向运动方程为

此前传统的方法都忽略了上式右侧第二项。若，则上式等同于

理论忽略了第二项，也就是理论认为同一处的和无关。



我们选取100万个粒子，将尾部1000个粒子置于尾部同一处，并改变它们的；剩余头部粒子设置它们的平均为m。我们发现和试验粒子的没有正比关系。因此忽略横向尾场的纵向梯度是合理的。

### 横向尾场力是二阶的

在理论中，我们只使用了二阶尾场：

模拟中是否存在高阶尾场？我们可以根据公式判断。

横向尾场和与头部激励束团横坐标和尾部试验粒子横坐标的关系为：

我们分别对激励束团和试验粒子进行扫描，确定它们的关系：

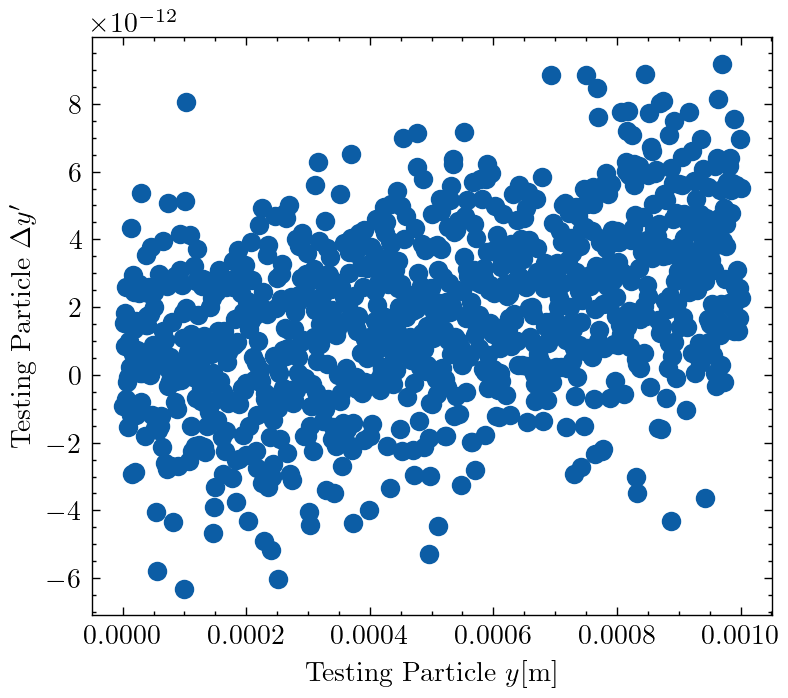
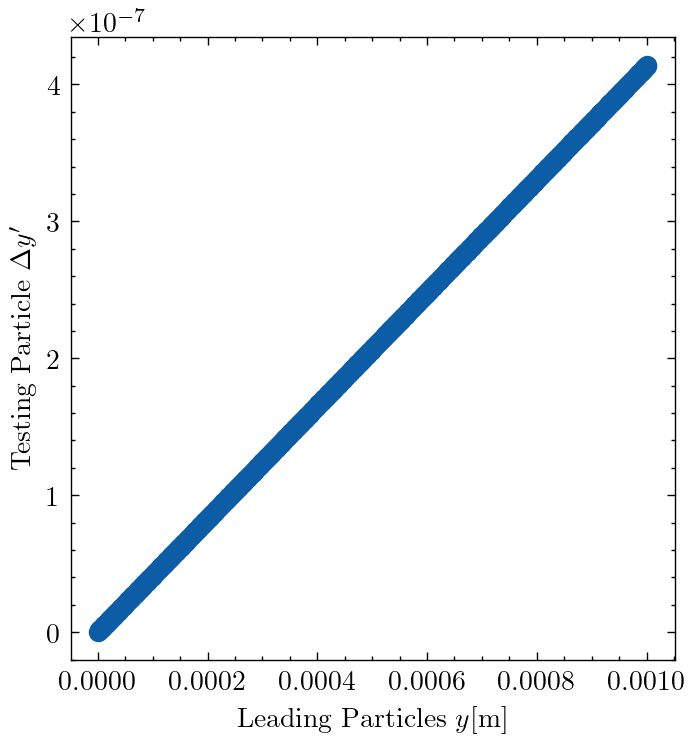


图 31

(上左图)Testing particle受到的kick和leading粒子成正比；(上右图)和testing particle横向位置无关。

这两图说明就是横向尾场是的，也就是尾场是二阶的。

#### 密度扰动只包含二阶振荡

传统扰动形式中，密度的一阶展开形式为：

其中描述的是横向二阶振荡。模拟中是否存在高阶振荡？我们需要对粒子坐标进行跟踪，并傅里叶变换分析其频率，发现其中并没有更高阶的频率：

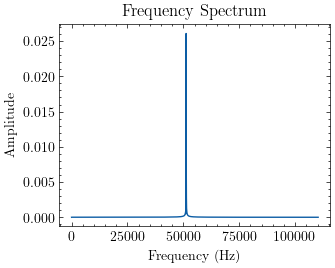


图 32

#### 保留计算过程高阶项与保留的分量

基于同样的假设，但是保留计算过程高阶项和分量，我们可以得到：

这里保留了很多相位因子，比如。一个合理的做法是：对于稳定情况，我们不妨取其平均；对于指数增长情况，我们对其周期取平均也是指数增长的。这就很好的保持原方程的物理性质。

但是对每个周期取平均后，再次退回到以前忽略高阶项或者的方程。

### 4.4.2 头部单粒子尾部分布的Vlasov方程

为了观察头部对尾部束团的影响，我们假定头部微束团为一个宏粒子，其电子数为，尾部微束团的电子数位。假定尾部微扰展开式为：

这里

是去除掉和电子数的BBU增长参数的剩余部分。也就是的前两项为尾部自身TMCI的微束团的密度扰动形式，第三项为头部对尾部的BBU的密度扰动影响。

通过和前面一样的推导过程，可以得到：

这里：

这里公式右侧有4项。第二、三项尾部束团原本的TMCI；第四项为若头部粒子对尾部束团的BBU存在时的影响；第一项也是头部粒子对尾部束团TMCI的另一种影响。

### 4.4.3 过拉伸TMCI

我们可以尝试无视头尾之间的相互作用，直接分为过拉伸束团的TMCI。但是由于过拉伸束团束长太长，超过了ELEGANT能计算的范围——它的阻抗元件ZTRANSVERSE的N\_BINS参数最大为，此时的N\_BINS并未使得过拉伸的模拟结果收敛。为此，我们不得采用不那么真实的参数——我们为了限制束长提供了极高的RF腔电压。

同时，模拟中由于SREFFECTS这个元件和RF腔一起会提供阻尼，我们不能通过SREFFECTS元件提供能损。因此我们的模拟中假设束流能损为0。

我们选取了如下四个密度分布作为计算案例

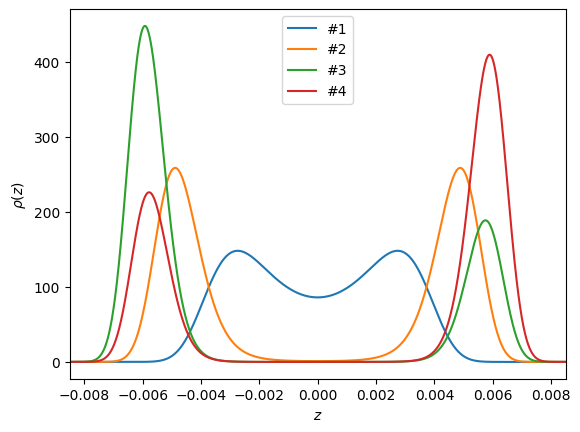


图 33

它们增长率的理论结果和模拟结果如下：

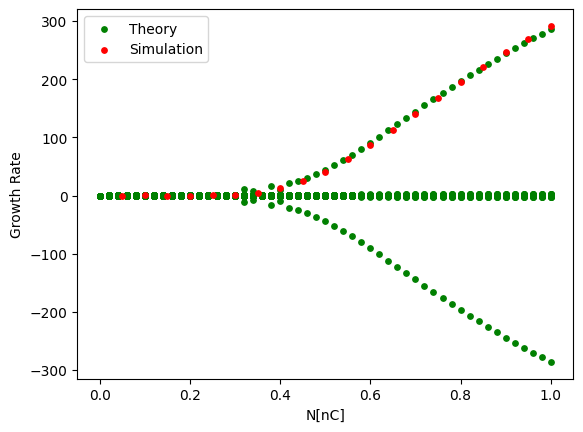


图 34

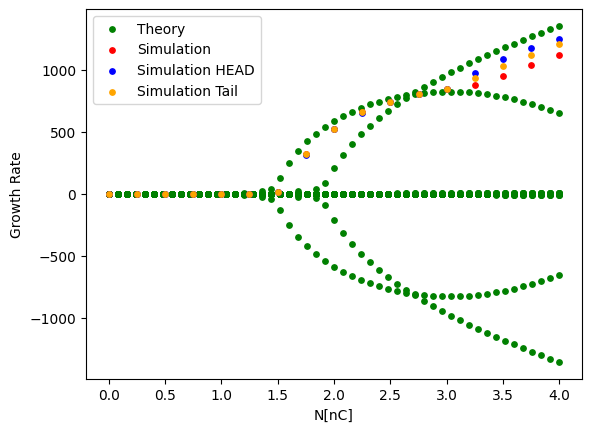


图 35

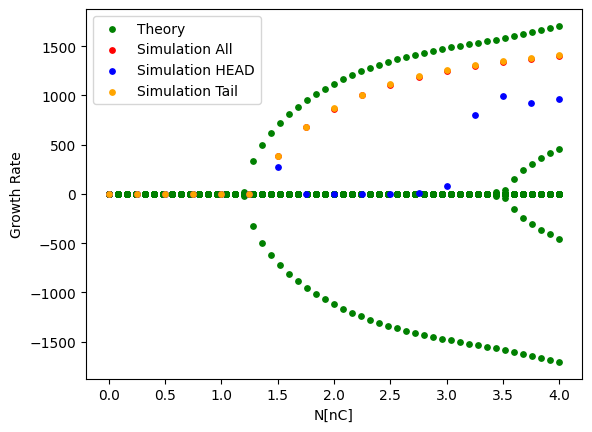


图 36

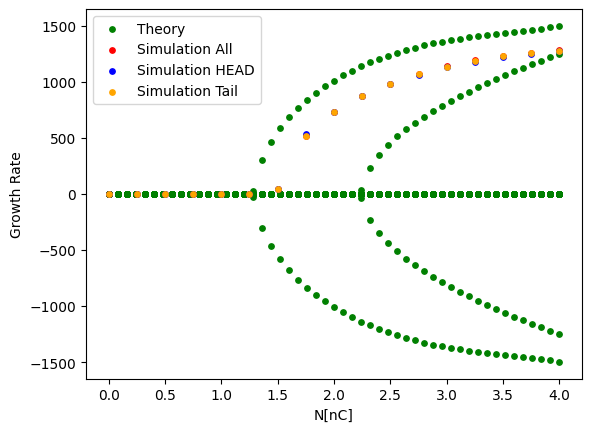


图 37

## 4.5 本章小结

本章分析了过拉伸的TMCI和BBU效应。利用宏粒子模型和Vlasov方程，我们推测过拉伸不存在BBU效应。