中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

中国科学院高能物理研究所 Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

粒子加速器原理

~数学物理基本知识回顾~

刘星光
liuxg@ihep.ac.cn

中国科学院高能物理研究所 东莞研究部
2024

目录

01 线性代数基本概念回顾

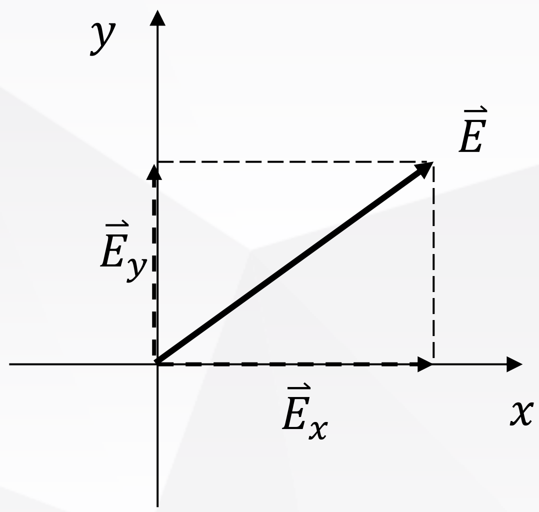
标量与矢量 Scalars and Vectors

只具有大小的量成为标量，如质量、温度和时间等，

一般记为m, T 和 t。

同时具有大小和方向的量称为矢量，如物体的速度、作用在物体上的力和电场磁场等，

一般记为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{M}$ 等, 一般用粗体表示，但为了区分（尤其是手写），常用带箭头的量表示，上述可记为$\vec{a}, \vec{F}$ 和 $\vec{E}, \vec{B}$.

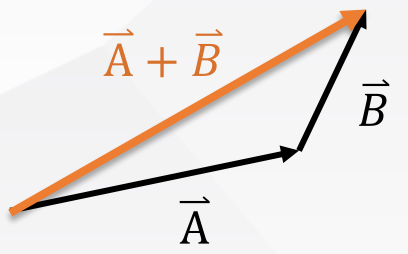


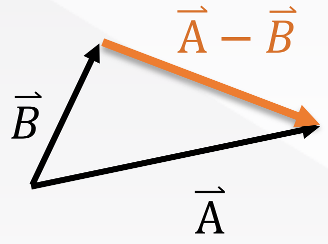
矢量的计算

矢量的加法：等于各自坐标的相加。

交换律：$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

结合律：$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$





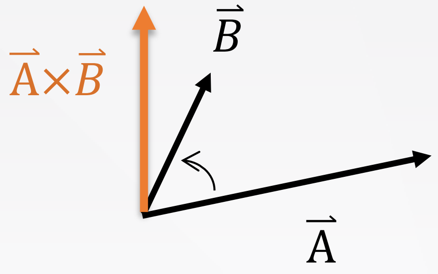
矢量的乘法：

点乘（dot product）或内积(inner product): 结果为标量，

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|Cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+\cdots$$

向量乘积（vector product）：结果为矢量，方向与二者构成的平面垂直且满足右手定则，

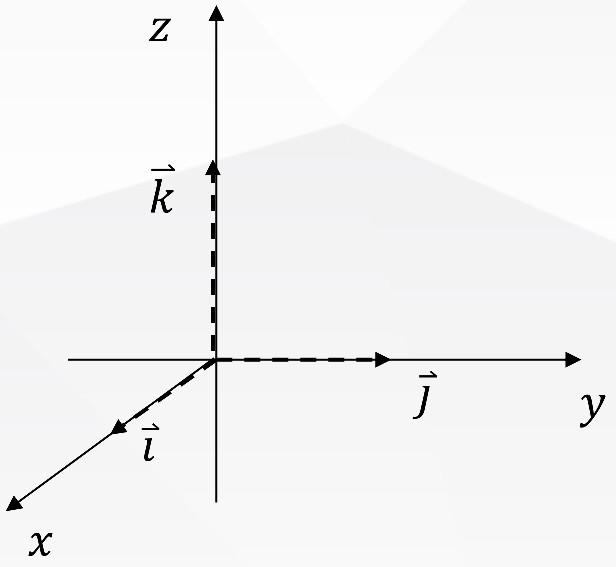
$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|A||B|Sin\theta$$



矢量乘积的坐标计算

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

注：为便于书写，三个坐标向量我们简单记为 i, j, k



如何用坐标法计算矢量乘积。

$\vec{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$，$\vec{B} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$，计算$\vec{A}\times\vec{B}$

线性方程式与矩阵 Linear equations and matrices

如何解如下线性方程组?

$$\begin{aligned} x - z &= 5 \\ -2x + 3y &= 1 \\ x - 3y + 2z &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

M=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad Mr = k$

如果$a\,b = c$, 那么$b = \frac{c}{a} = c\,a^{-1}$. 上面这个问题里，我们有$r = M^{-1}k$吗?

逆矩阵与矩阵的特征值

如果$AB = BA = I$， I为单位矩阵，则记$B = A^{-1}$,为A的逆矩阵, 且，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$$

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = m_{ij}$对应余矩阵的值乘以$(-1)^{i+j}$.

计算上页M的逆矩阵M^{-1}并给出r的值。

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 1\\ 10\end{pmatrix}$$

特征值及特征向量

坐标变换

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

求λ

记 $\vec{R} = \lambda \vec{r}$，则有

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

称为矩阵M的特征方程。上式可解得其特征向量(λ_1, λ_2).
则矩阵M可以找到一个C使得：

$$C^{-1}MC = D$$

D为仅包含特征值的对角矩阵，该过程称为对角化。

求C。用途。

02 偏微分方程简要回顾

梯度、散度和旋度 Gradient, Divergence & Curl

梯度

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

散度

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

旋度

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$\nabla^2\phi=0$ 拉普拉斯公式

$\nabla^2\phi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ 波动方程

$\nabla^2\phi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 扩散方程，热传导和薛定谔方程

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = div\ grad\ \phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

高斯积分原理

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{\mathrm{A}}\, dV = \iint\limits_S \vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{n}\, dS$$

斯托克斯原理

$$\oint \vec{\mathrm{A}} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S (\nabla \times \vec{\mathrm{A}}) \cdot \vec{n}\, dS$$

03 带电粒子与电磁场

麦克斯韦方程组 Maxwell’s Equations

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ 库仑定律

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$ 法拉第电磁感应定律

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{B}\right) = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon\vec{E}$$ 安培定则

在国际单位制中， $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}\frac{C}{V\ m} = 8.8541878 \times 10^{-12}\ \frac{C}{V\ m}$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\frac{V\ s}{A\ m} = 1.2566371 \times 10^{-6}\frac{V\ s}{A\ m}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

麦克斯韦方程组的积分形式（作业）

电磁场以及运动方程

由于$\nabla\cdot\vec{B}=0$， 定义一个向量$\vec{\mathrm{A}}$使得，

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{\mathrm{A}}$$

则法拉第定律：

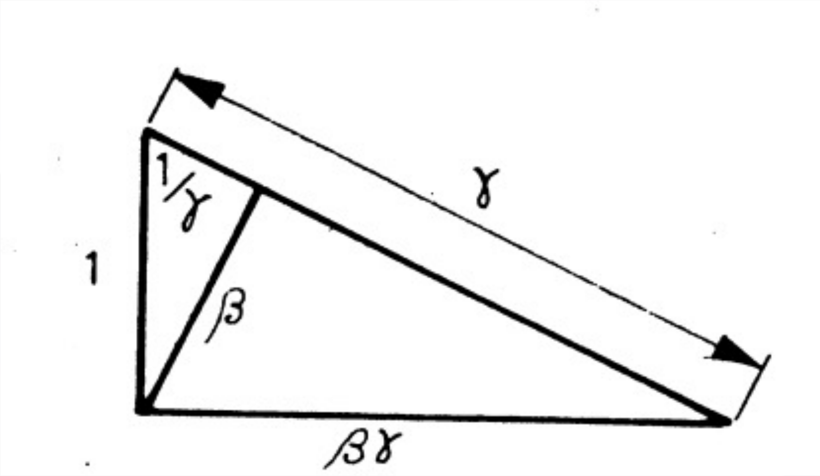
$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{\mathrm{A}})$ 即 $\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A})=0$

可解为$\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$，可理解为磁场变化产生的电场。

$$\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\nabla\phi$$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=q\vec{E}+q(\vec{v}\times\vec{B})$$

狭义相对论中的简单公式



$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

能量$E = \gamma mc^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$

04

作业

作业:

Q1： 由麦克斯韦微分形式推导其积分形式

Q2： 完成下述表格

	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{cp}$	$\boldsymbol{T}$(动能）	E（总能量）	$\boldsymbol{\gamma}$
$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\beta}$				
$\boldsymbol{cp}$		$\boldsymbol{cp}$			
$\boldsymbol{T}$(动能）			$\boldsymbol{T}$		
E （总能量）				E	
$\boldsymbol{\gamma}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$				$\boldsymbol{\gamma}$

Q3： 以$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$及其微分表示 $d(\beta\gamma)$