



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

粒子加速器原理

~纵向束流动力学 (上) ~

刘星光
liuxg@ihep.ac.cn

中国科学院高能物理研究所 东莞研究部
2024

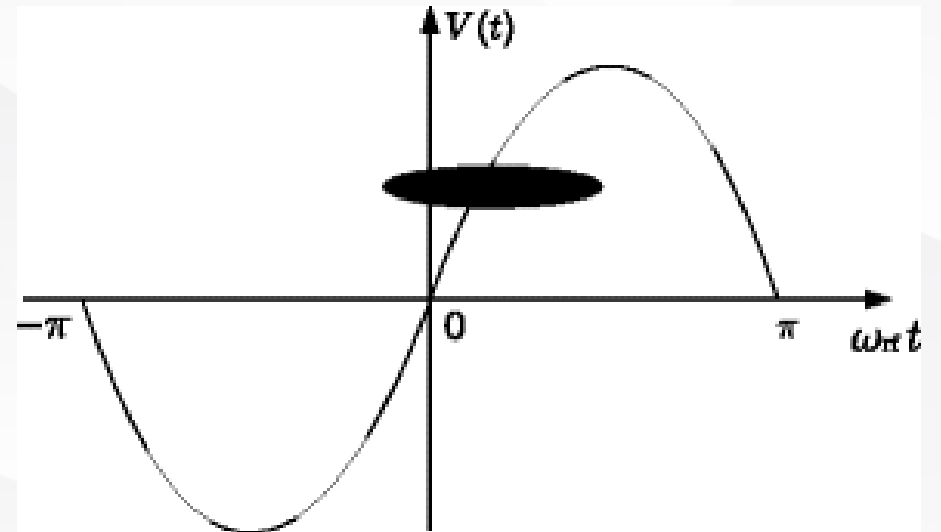
➤ 加速电场 Accelerating field

加速方式:

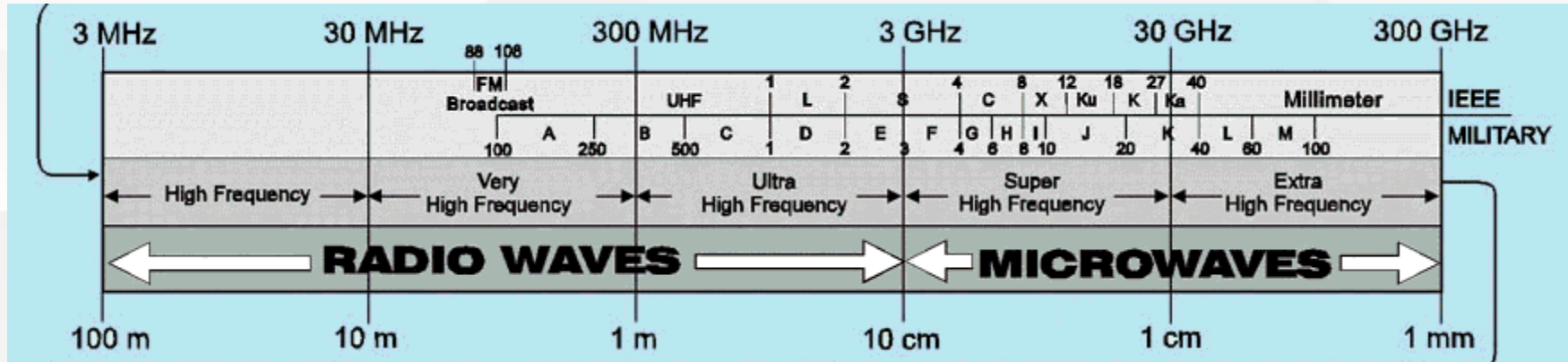
- 直流高压 DC High Voltage
- Betatron (感生电动势)
- 谐振腔 Resonant Cavities (→下半学期直线射频加速结构)

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t + \delta}$$

$$V(\phi) = V_{rf} \sin\phi$$



电磁波基本概念



(from internet)

频率：电磁场（波）变化的频率

- 质子重离子常用加速场：数十MHz~数百MHz
- 电子常用加速场：3GHz~12GHz

频率 f (frequency), 角频率 ω (angular frequency), 波长 λ (wave length), 波数 k (wave number), 周期 T (period)

$$\omega = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = c/f$$



3GHz电磁波(S波段) 的波长?

同步条件与参考相位

同步条件:

$$\omega_{rf} = h\omega_0 = 2\pi h \frac{\beta c}{C_0}$$

h – 谐波数, harmonic number

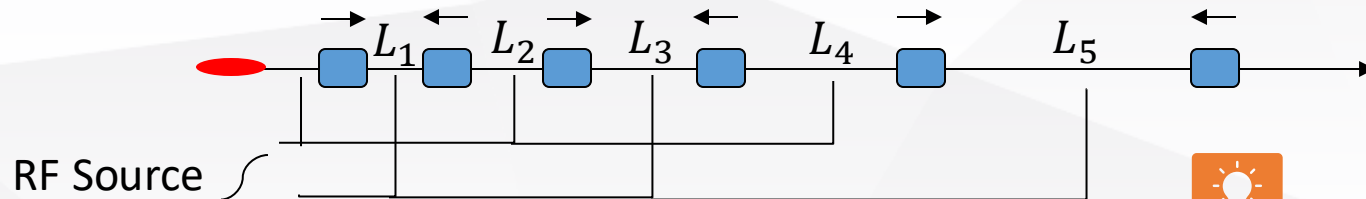
参考相位: 假设理想粒子被加速时相位为 ϕ_s , 则同步条件要求

$$\phi_s = \omega_{rf}t - kz = const.$$

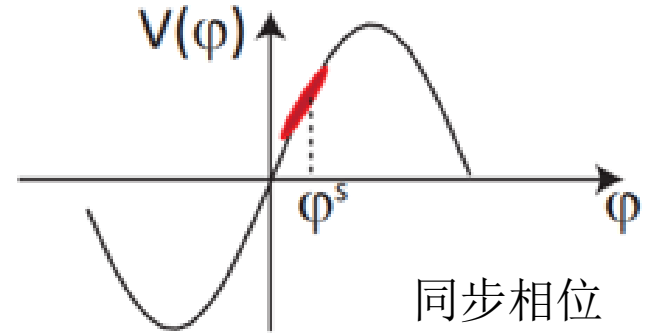
或 $\dot{\phi}_s = \omega_{rf} - k\beta c = 0$, 与前式相同

对于环形加速器, 周长为 C_0 (或直线为 L 的直线加速器) 要求:

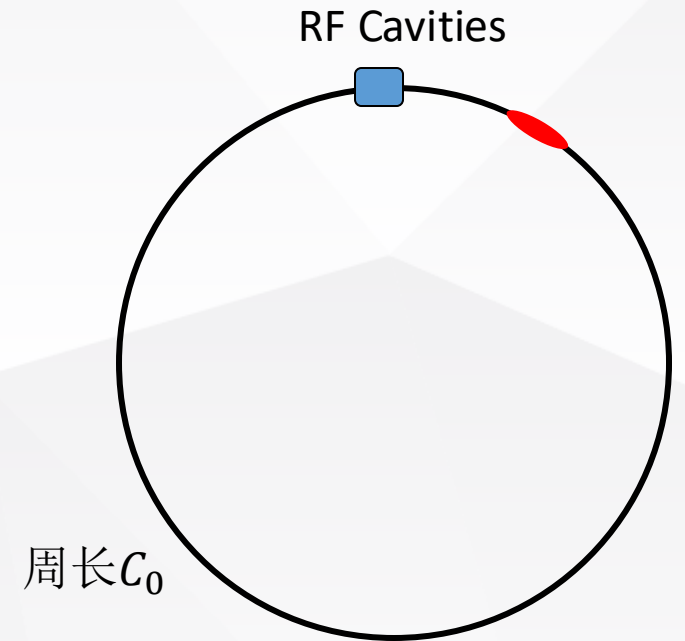
$$h\beta\lambda_{rf} = C_0$$



直线加速器 (Wideroe)



同步相位



周长 C_0

环形加速器



设计要求的不同之处?

纵向振动 Longitudinal oscillation

周期长度（长度 L 或者环形路径长度 C ）上粒子运动所需时间为

$$T = \frac{L}{\beta c}$$

对于具有不同能量的粒子（或速度 βc ）来说，其走过的路径和走过一个周期的时间也不一致，这种微小变化可表示为：

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

现定义一个 γ_t 使得：

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\gamma_t^2} \delta$$

则有：

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \delta = \eta \delta$$

$$\eta = \frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

路径长度的不同还可表示为

$$\Delta L = \delta \int \frac{D(s)}{\rho} ds$$

我们可以定义动量压缩因子：

$$\alpha_c = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \frac{D(s)}{\rho} ds$$

与 γ_t 比较有： $\gamma_t^2 = 1/\alpha_c$

（作业回顾与现场练习： $\delta = \frac{\Delta p}{p} = \gamma^2 \frac{\Delta \beta}{\beta}$ ）



$\eta = 0$ 意味着什么？

- η 称为**滑移因子**slip factor或slippage factor
- γ_t 被称之为穿越能量(Transition energy/gamma)
- $\alpha_c = 1/\gamma_t^2$ 称为**动量压缩因子**(momentum compaction factor)，用于表示由于动量差别导致的路径差别

➤ 一般（非参考粒子的）情况

加速器前后的参数变化：

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + QeV_{rf} (\sin\phi_n - \sin\phi_s)$$

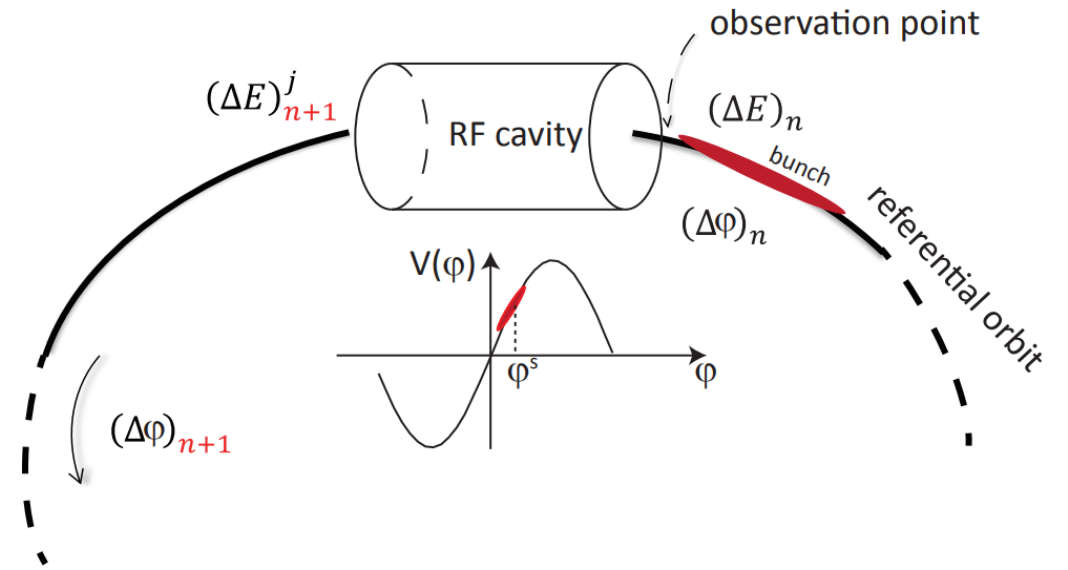
$$\Delta\phi_{n+1} = \Delta\phi_n + \frac{h\omega_{rf}\eta_{n+1}}{\beta_s^2} T_{n+1} \frac{\Delta E}{E_s}$$

$$V(\phi) = V_{rf} \sin\phi$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + h\omega_{rf}(T + \Delta T)_{n+1} = \phi_n + \phi_s + h\omega_{rf}T_{n+1} \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{n+1}$$

$$\Delta\phi = \phi - \phi_s \text{ 且 } \phi_s = \omega_{rf} T$$

$$\Delta\phi_{n+1} = \Delta\phi_n + h\omega_{rf}\eta_{n+1}T_{n+1}\delta_{n+1}$$



$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{Tdn}$$

纵向振动 Longitudinal Oscillation

假设每一个周期（圈）的变化很小：

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{Tdn}$$

$$\frac{d\Delta E}{Tdn} = \frac{QeV_{rf}}{T} (\sin\phi - \sin\phi_s) \approx \frac{QeV_{rf}\cos\phi_s}{T} \Delta\phi$$

$$\frac{d\Delta\phi}{Tdn} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2} \frac{\Delta E}{E_s}$$

$$\frac{d^2\Delta\phi}{T^2dn^2} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s} \frac{d\Delta E}{Tdn} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s T} QeV_{rf} (\sin\phi - \sin\phi_s) \approx \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s T} (QeV_{rf}\cos\phi_s) \Delta\phi$$

$$\sin(\phi_s + \Delta\phi) = \sin\phi_s \cos\Delta\phi + \sin\Delta\phi \cos\phi_s \approx \sin\phi_s + \Delta\phi \cos\phi_s$$

$$\ddot{\varphi} - \Omega^2 \varphi = 0 \quad (\text{记}\Delta\phi\text{为}\varphi)$$

$$\Omega^2 = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s T} QeV_{rf}\cos\phi_s$$

Ω 为纵向振荡频率（与纵向工作点，tune相关）



各个参数对纵向运动的影响？



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

04

作业

作业:

Q1: 假设 $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ 的传输矩阵为 $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, 推导对应的Twiss参数 $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ 的传输矩阵。(注: 应为3x3的矩阵, 且元素用 $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ 表示。