粒子加速器原理

~纵向束流动力学（中）~

刘星光
liuxg@ihep.ac.cn

中国科学院高能物理研究所 东莞研究部
2024

同步条件(参考粒子）

带电粒子在电磁场中所受的力

$$F = q(E + v \times B)$$

加速　　洛伦兹力

$$B\rho = \frac{P}{q}$$

$$\omega_{rf} = 2\pi f_{rf} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{L}{\beta c}$$

同步条件：

高频变化的周期与粒子运动的周期一致

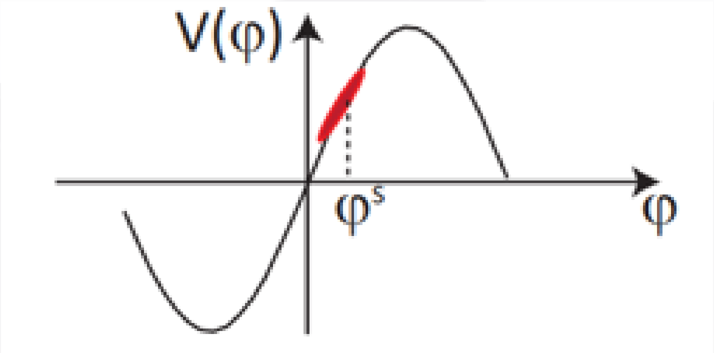
或者说理想情况下稳定的加速希望：

参考粒子每次都看到设定的加速相位

$$\phi_s = \omega_{rf} t - kz = const. \ (1)$$

$$\dot{\phi}_s = \omega_{rf} - k\dot{z}$$

或者$\omega_{rf} = k\beta c$

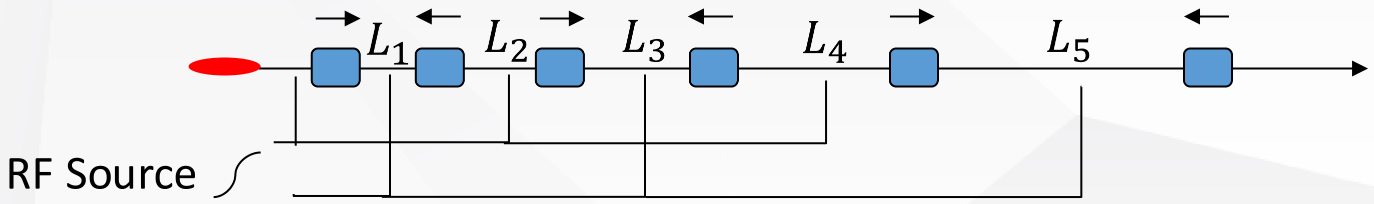


同步相位的定义

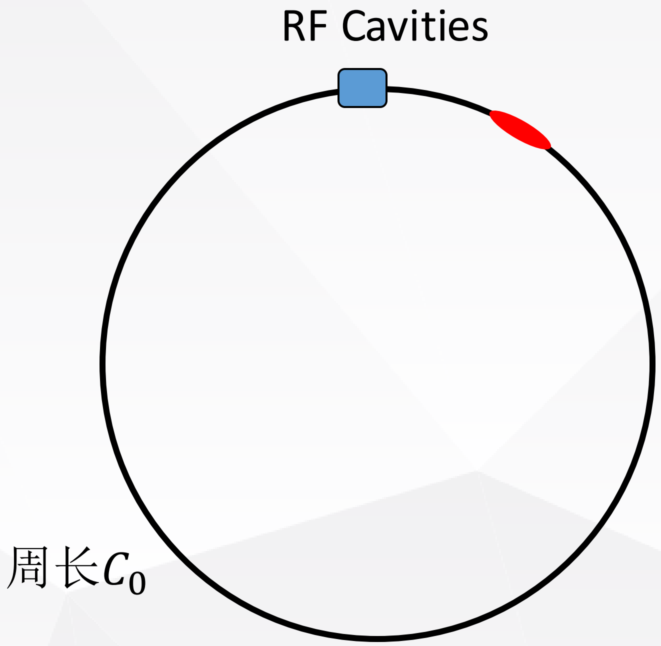
参考：$\omega = 2\pi f$　　$f = \frac{1}{T}$　　$k = \frac{2\pi}{\lambda}$　　$\lambda = c/f$

直线加速器与环形加速器不同的表现形式?

$$h\,\beta\lambda_{rf} = L$$



直线加速器（Wideroe）



环形加速器

纵向运动上的相空间

横向运动:

典型的相空间：x, x_p, y, y_p

关心粒子的**相对**位置及“散度”

Hill 方程： $x'' + kx = 0$

纵向运动：

典型的相空间： $\psi, \Delta p/p$

关心粒子在纵向上的相对位置及能量差别

纵向束流动力学上的Hill方程？

$\psi = \phi - \phi_s$

运动方程研究的是：粒子相对于参考粒子（理想粒子）的变化

纵向振动 Longitudinal oscillation

周期长度（长度L或者环形路径长度C）上粒子运动所需时间为

$$T = \frac{L}{\beta c}$$

对于具有不同能量的粒子（或速度βc ）来说，其走过的路径和走过一个周期的时间也不一致，这种微小变化可表示为：

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

现定义一个γ_t使得：

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\gamma_t^2}\delta$$

则有：

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\delta = \eta\delta$$

$$\eta = \frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

路径长度的不同还可表示为

$$\Delta L = \delta \int \frac{D(s)}{\rho} ds$$

我们可以定义动量压缩因子：

$$\alpha_c = \frac{1}{L_0}\int_0^{L_0} \frac{D(s)}{\rho} ds$$

与γ_t 比较有：$\gamma_t^2 = 1/\alpha_c$

（作业回顾与现场练习：$\delta = \frac{\Delta p}{p} = \gamma^2 \frac{\Delta \beta}{\beta}$)

η =0意味着什么？

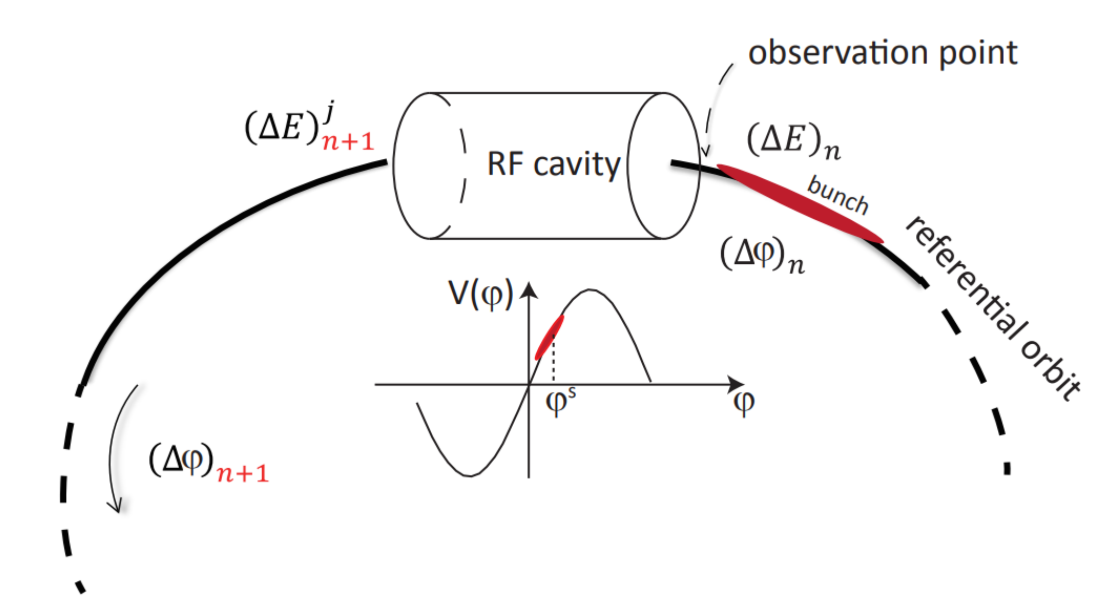
- η称为滑移因子slip factor或slippage factor
- γ_t被称之为穿越能量(Transition energy/gamma)
- $\alpha_c = 1/\gamma_t^2$ 称为动量压缩因子(momentum compaction factor)，用于表示由于动量差别导致的路径差别

一般（非参考粒子的）情况

加速器前后的参数变化：

$$\Delta E_{n+1} = \Delta E_n + QeV_{rf}\,(\mathrm{Sin}\phi_n - \mathrm{Sin}\phi_s)$$

$$\Delta\phi_{n+1} = \Delta\phi_n + \frac{h\omega_{rf}\eta_{n+1}}{\beta_s^2} T_{n+1} \frac{\Delta E}{E_s}$$



$$V(\phi) = V_{rf}\,\mathrm{Sin}\phi$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + h\omega_{rf}(T + \Delta T)_{n+1} = \phi_n + \phi_s + h\omega_{rf} T_{n+1} \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{n+1}$$

$$\Delta\phi = \phi - \phi_s \text{ 且 } \phi_s = \omega_{rf}\, T$$

$$\Delta\phi_{n+1} = \Delta\phi_n + h\omega_{rf}\eta_{n+1} T_{n+1}\delta_{n+1}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{Tdn}$$

纵向振动 Longitudinal Oscillation

假设每一个周期（圈）的变化很小：

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{Tdn}$$

$$\frac{d\Delta E}{Tdn} = \frac{QeV_{rf}}{T}(\mathrm{Sin}\phi\ -\mathrm{Sin}\phi_s) \approx \frac{QeV_{rf}Cos\phi_s}{\mathrm{T}}\ \Delta\phi$$

$$\frac{d\Delta\phi}{Tdn} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2}\frac{\Delta \mathrm{E}}{E_s}$$

$$\frac{d^2\Delta\phi}{T^2dn^2} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2E_s}\frac{d\Delta E}{\mathrm{T}dn} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2E_sT}QeV_{rf}\ (\mathrm{Sin}\phi\ -\mathrm{Sin}\phi_s) \approx \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2E_sT}(QeV_{rf}Cos\phi_s)\ \Delta\phi$$

$$\mathrm{Sin}(\phi_s+\Delta\phi) = Sin\phi_sCos\Delta\phi + Sin\ \Delta\phi\ Cos\phi_s \approx Sin\phi_s + \Delta\phi Cos\phi_s$$

$\ddot{\varphi} - \Omega^2\varphi = 0$ (记$\Delta\phi$为φ)

各个参数对纵向运动的影响？

$$\Omega^2 = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2E_sT}QeV_{rf}Cos\phi_s$$

Ω 为纵向振荡频率（与纵向工作点，tune相关）

同步加速所需腔压及相位需求

当参考粒子进入一个偏转半径为ρ 的二级磁铁时，有：

$$B\rho = \frac{p}{q}$$

对两边同时求导：

$$\dot{B}\rho = \frac{\dot{p}}{q} = \frac{1}{vq}\dot{E} = \frac{1}{\beta ce}\dot{E}$$

因为同步粒子在加速间隙获得的能量为：

$$\Delta E = eV\sin\phi_s$$

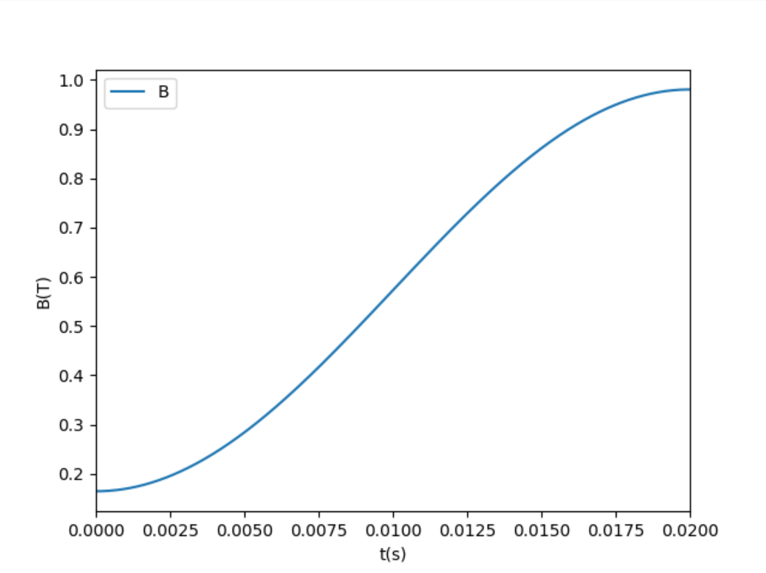
故有：

$$\dot{E} = \frac{\Delta E}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}eV\sin\phi_s$$

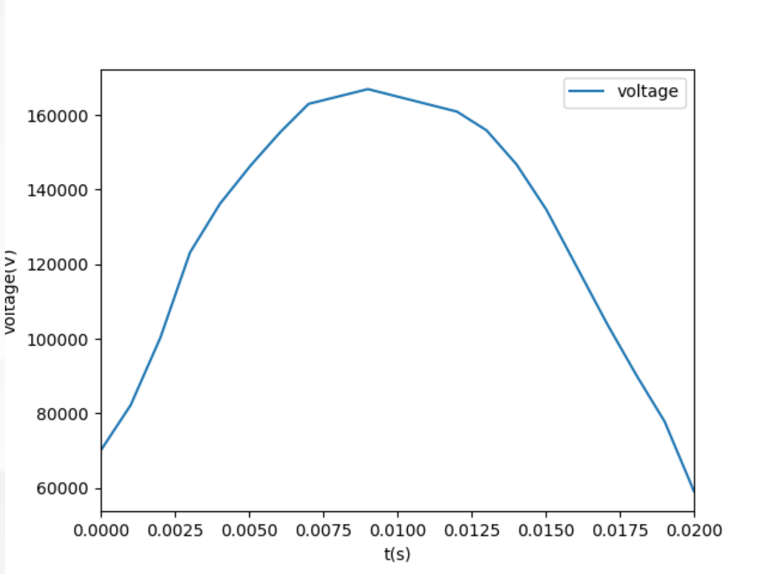
$$V\sin\phi_s = 2\pi R\rho\frac{dB}{dt} = \rho C_0\frac{dB}{dt}$$

RCS计算例(了解)

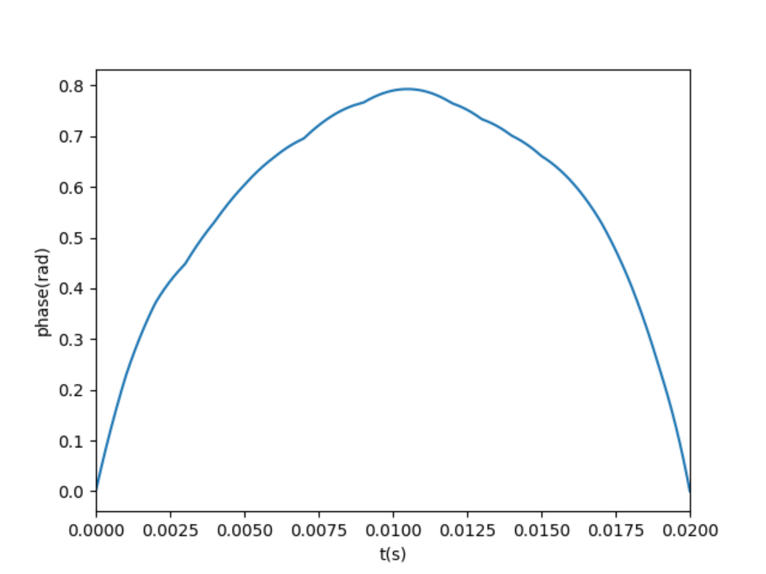
RCS环的同步频率为25Hz，h=2，周期为20ms。将一组腔压进行插值，与二极磁铁B值随时间变化的函数结合(5)式，可得同步相位的变化曲线。



二极磁铁磁场变化
（25Hz，对应80MeV至1.6GeV）



单次加速所需能量（以电压V表示）



相位设置

➢ 纵向运动参数计算

由(1)式可得：

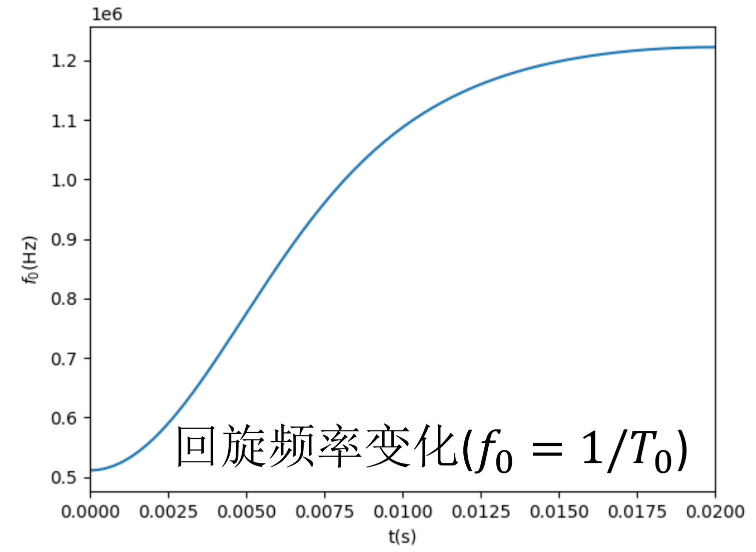
$$B\rho = \frac{\gamma m_p v}{e} \qquad (6)$$

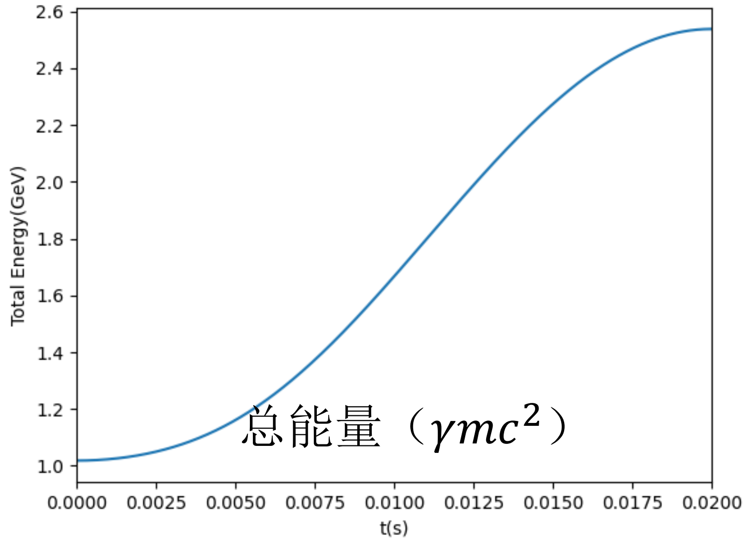
其中，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$，$v = \omega_0 R$，代入得到同步粒子的回旋频率$f_0$：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{B^2}{B^2+\left(\frac{mc^2}{ec\rho}\right)^2}} \qquad (7)$$

而对于粒子总能量，有：

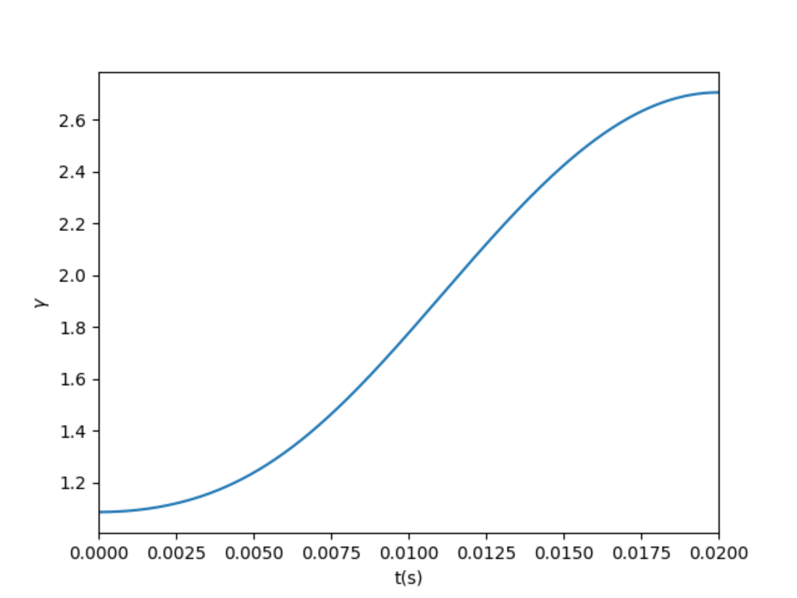
$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{{\omega_0}^2 R^2}{c^2}}} \qquad (8)$$



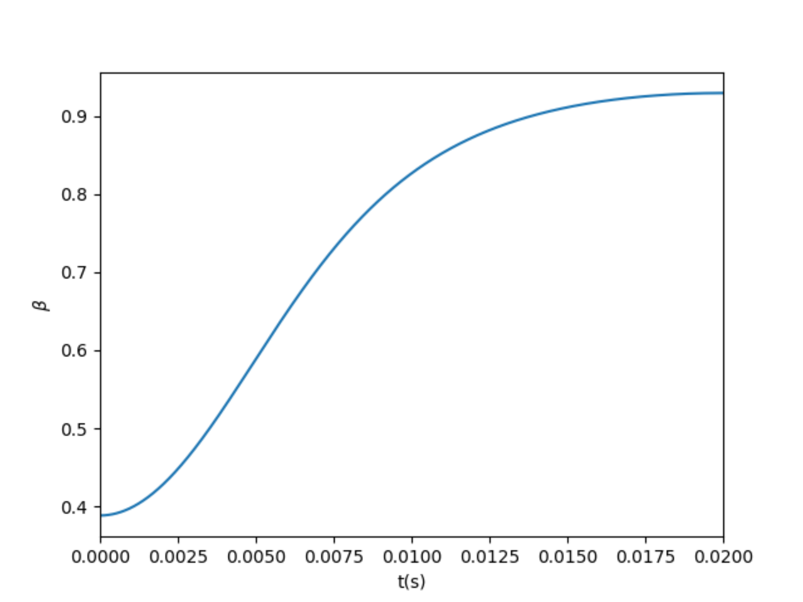


➢ 纵向运动参数计算（加速20ms）

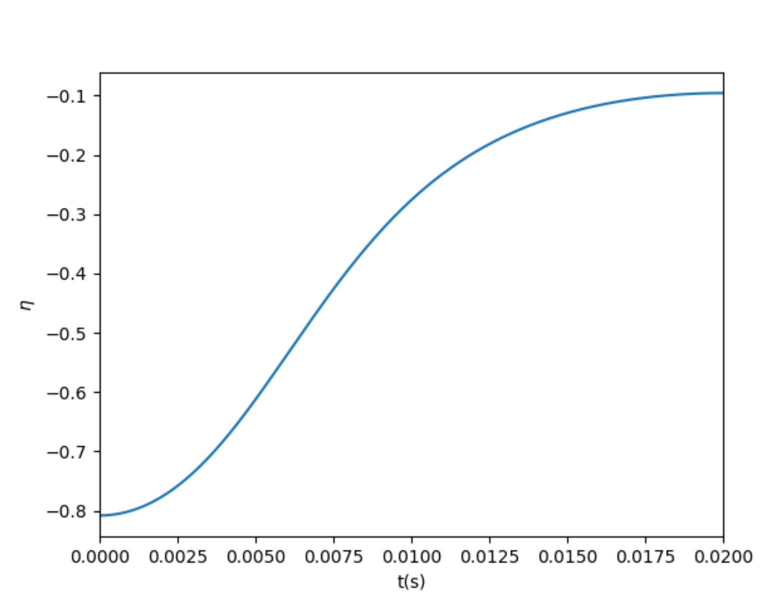
利用 $\gamma = \frac{E}{E_0}$，$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2}$，$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$，可得：



加速过程中相对能量γ的变化



加速过程中相对速度β的变化



加速过程中相对滑相因子η的变化

➢ 纵向运动参数计算

一个相位为ϕ的非同步粒子在加速过程中围绕同步粒子振荡，其运动方程有：

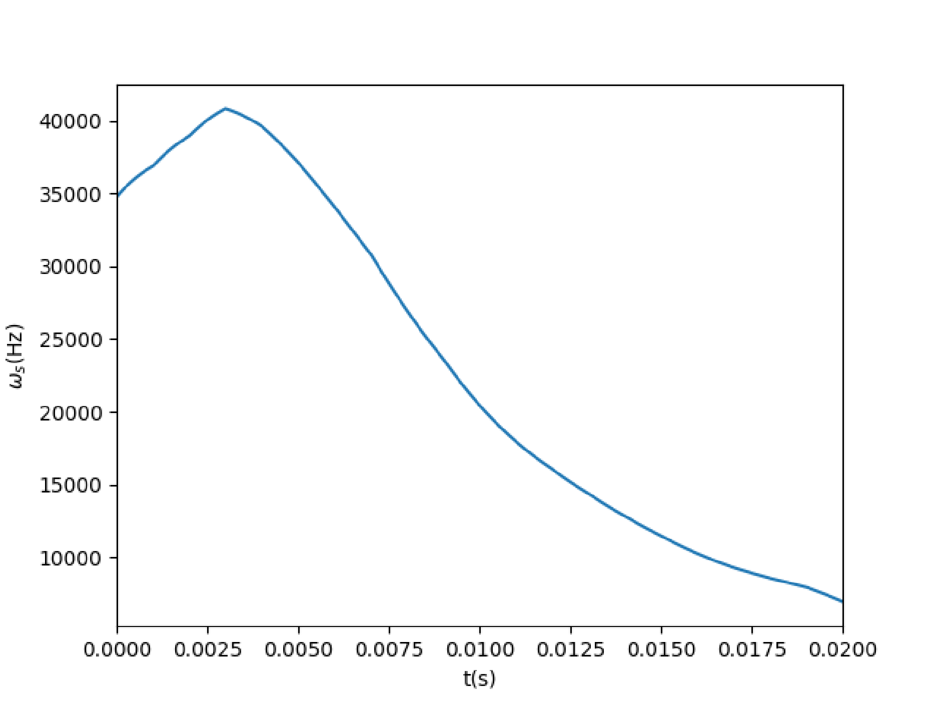
$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = h\omega_0\eta\delta \\ \dfrac{d\delta}{dt} = \dfrac{\omega_0}{2\pi\beta^2 E} eV\,(\sin\phi - \sin\phi_S) \end{cases} \tag{9}$$

当非同步粒子在同步粒子周围做小幅度振荡时，有：

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \left(\frac{h\eta{\omega_0}^2 eV}{2\pi\beta^2 E}\cos\phi_S\right)\phi \tag{10}$$

则非同步粒子的振荡频率为：

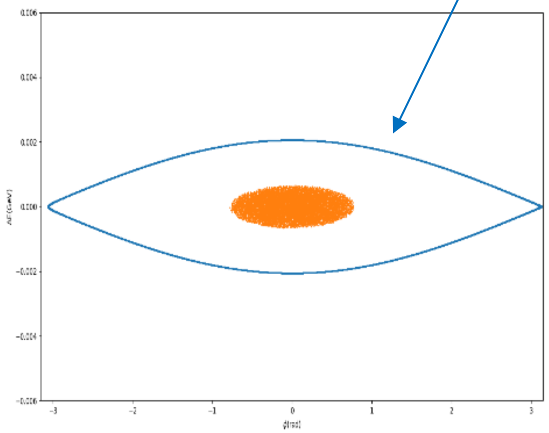
$$\omega_S = \frac{c}{R}\sqrt{\frac{heV|\eta\cos\phi_S|}{2\pi E}} \tag{11}$$



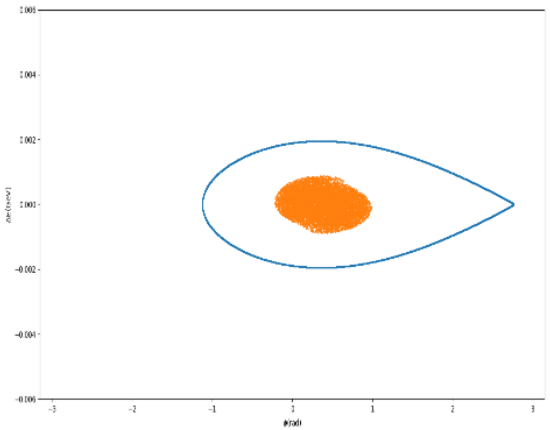
➢ 多粒子多圈跟踪

纵向'bucket'，大小与参考相位相关

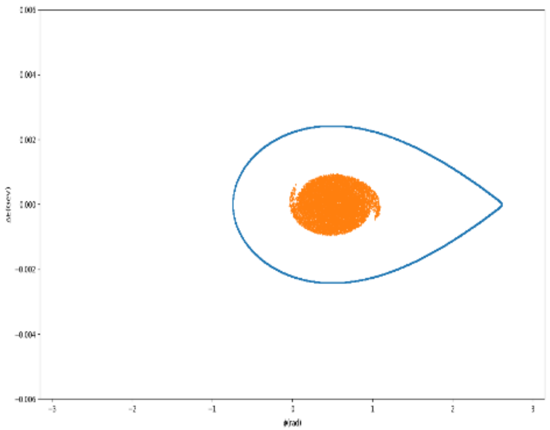
Turns=1



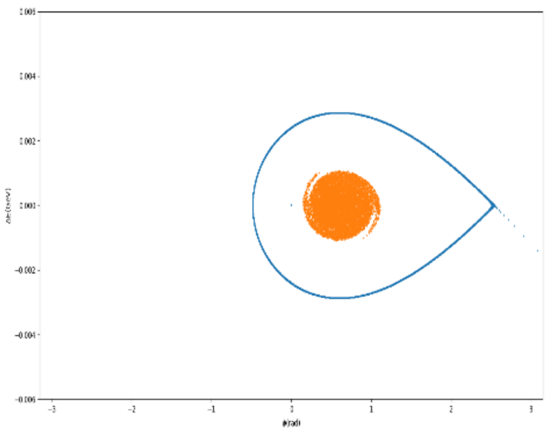
Turns=1000



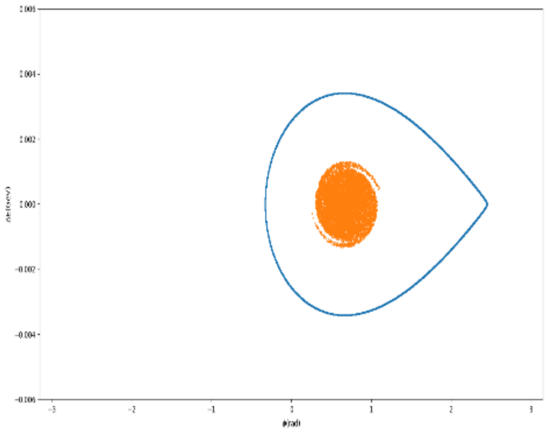
Turns=2000



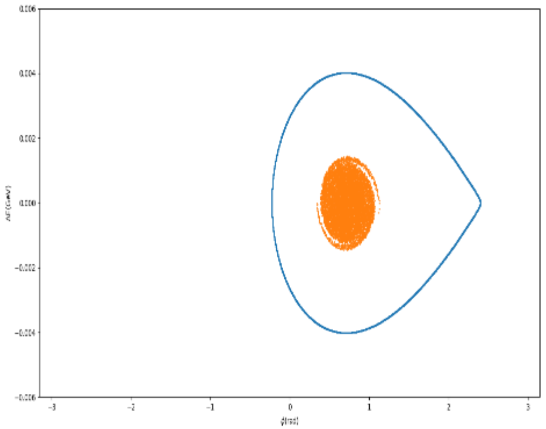
Turns=3000



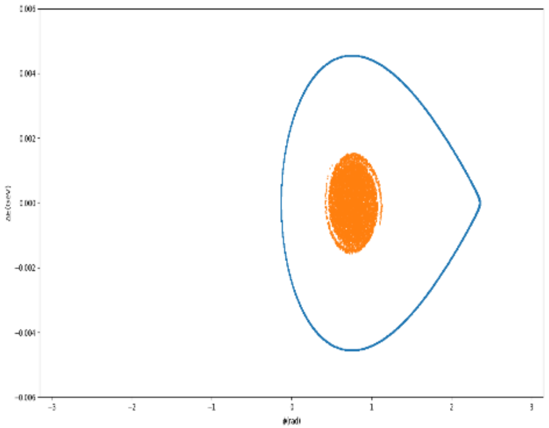
Turns=4000



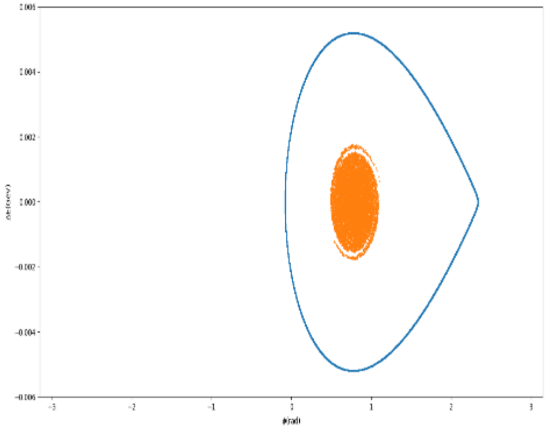
Turns=5000



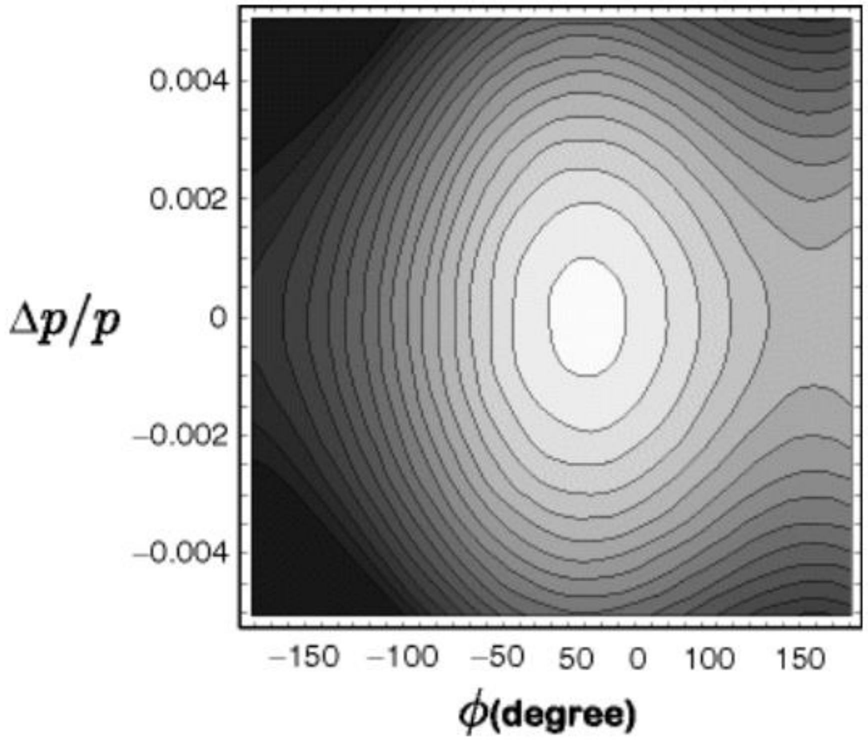
Turns=6000



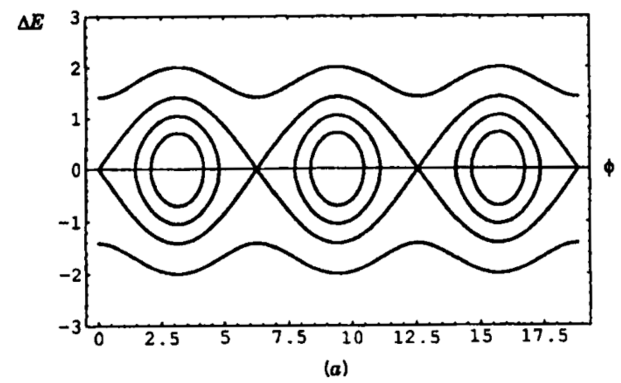
Turns=7000



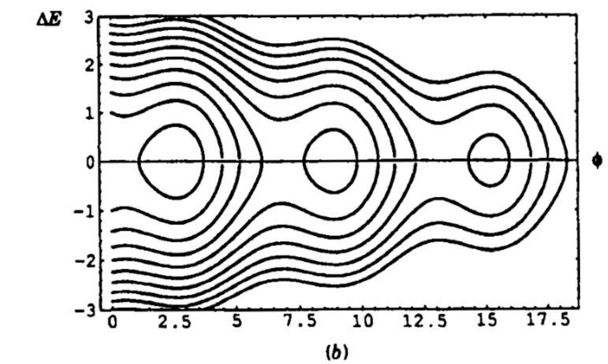
典型的纵向相空间



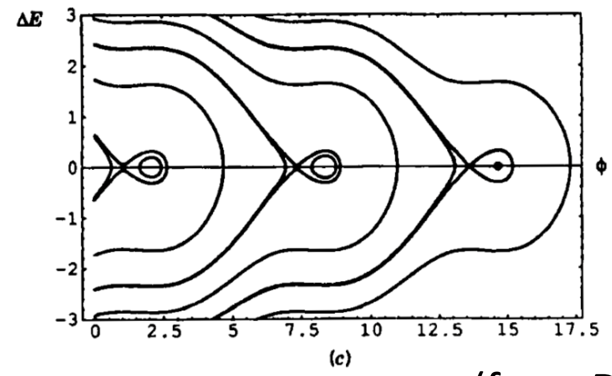
注：感兴趣的同学可参考纵向Hamiltonian作图



$\phi_s = 0$(无加速）



ϕ_s一般情况



ϕ_s接近90
(最大加速）

(from D.Edwards)