中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

中国科学院高能物理研究所 Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

粒子加速器原理

~纵向束流动力学（下）~

色散函数

刘星光
liuxg@ihep.ac.cn

中国科学院高能物理研究所 东莞研究部

2024

学习要点

- 色散函数（本节重点）

（下述见上一节课件）

- 纵向运动方程（重点）
- 纵向振荡（了解）
- 纵向粒子跟踪实例

- 其他：大作业相关

Betatron运动方程

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\rho+x}{\rho^2}=\frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2 \qquad \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{B_x}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

- 简化为希尔方程（Hill’s Equation)

简化条件：1.只考虑四极磁铁和二极磁铁

2. 动量 $p=p_0$ (无能散)

$$x''+K_x(s)=0 \qquad y''+K_y(s)=0$$

二极磁铁（水平偏转）

- $B_y = -B_0$ (正电荷） $B_x = 0$

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

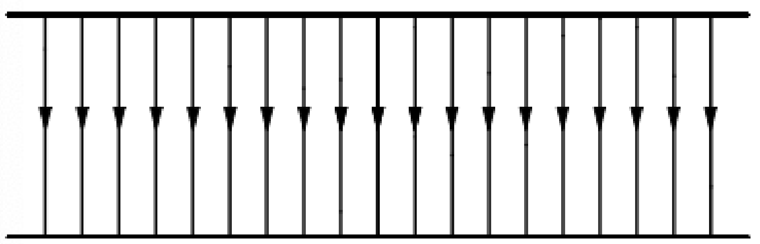
$= -\frac{1}{\rho}$ $=1$ $= 1 + \frac{2x}{\rho} + \frac{x^2}{\rho^2}$

$-(\frac{1}{\rho} + \frac{x}{\rho^2})$

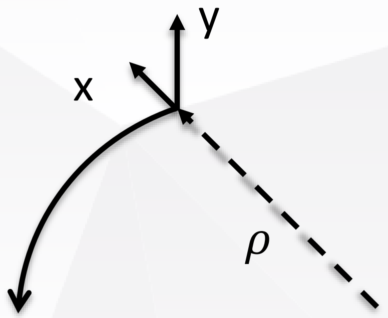
$= -(\frac{1}{\rho} + \frac{2x}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^3})$

忽略x高阶项
且ρ一般远远大于x

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{\rho^2}x = 0$$



纯二极场（偏转磁铁）



二极磁铁+四极磁铁

=1

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\rho+x}{\rho^2}=\frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

- $B_y = -（B_0+\frac{\partial B_y}{\partial x}x)$（正电荷）

$= -(B_0+\frac{\partial B_y}{\partial x}x)\frac{1}{B\rho}$ $= 1+\frac{2x}{\rho}+\frac{x^2}{\rho^2}$

$-(\frac{1}{\rho}+\frac{x}{\rho^2})$

$= -(\frac{1}{\rho}+\frac{2x}{\rho^2}+\frac{x^2}{\rho^3}) - K_x(x+\frac{2x^2}{\rho^2}+\frac{x^3}{\rho^3})$

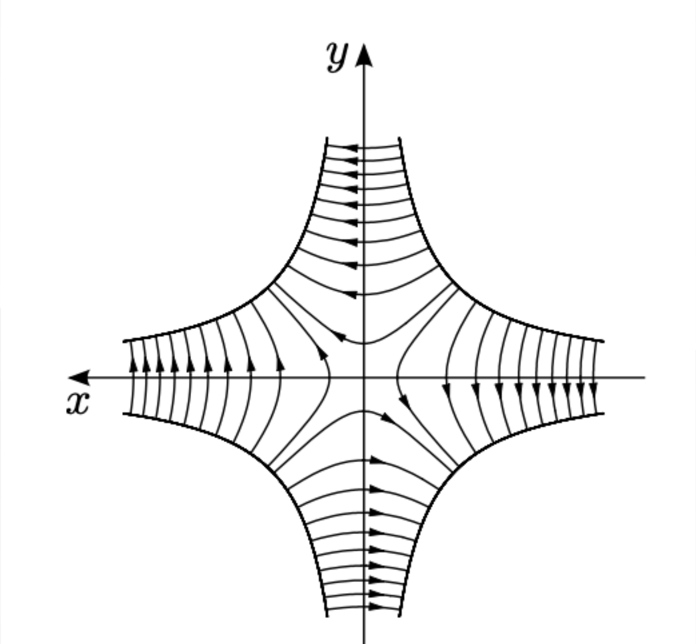
$$\frac{d^2x}{ds^2}+(\frac{1}{\rho^2}+K_x)x=0 \qquad K_x=\frac{\partial B_y}{\partial x}/B\rho$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}+K_yx=0 \qquad K_y=-K_x$$

- 纯四极磁铁？（$\rho\sim\infty,\frac{1}{\rho}=0$)

$$\frac{d^2x}{ds^2}+K_xx=0$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}+K_yx=0$$



纯四极磁场（聚焦/散焦磁铁）

色散函数

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\rho+x}{\rho^2}=\frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$-\left(\frac{1}{\rho}+\frac{x}{\rho^2}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{\rho}+K_x x\right)\frac{1}{1+\delta}\left(1+\frac{2x}{\rho}+\frac{x^2}{\rho^2}\right)$$

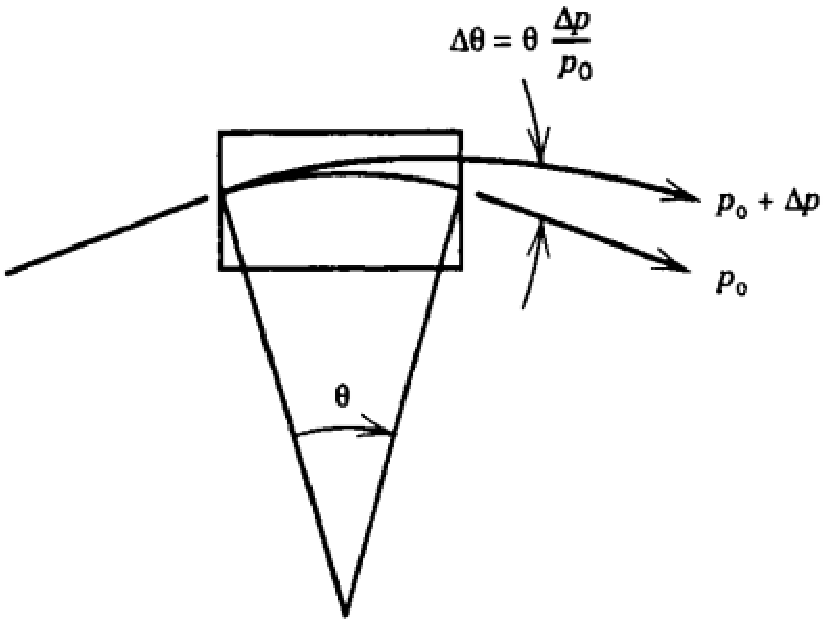
$$=-\left(\frac{1}{\rho(1+\delta)}+\frac{K_x}{1+\delta}x\right)\left(1+\frac{2x}{\rho}\right)$$

假设： 1.只考虑四极磁铁和二极磁铁

2. 动量 p≠p₀ (能散)

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\left(-\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2(1+\delta)}+\frac{K_x}{1+\delta}\right)x=\frac{\delta}{\rho(1+\delta)}$$

$$=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho(1+\delta)}-\frac{2}{\rho^2(1+\delta)}x-\frac{K_x}{1+\delta}x$$



$$p=p_0+\Delta p=p_0(1+\delta)$$
$$\delta=\Delta p/p$$

$$\frac{p_0}{p_0+\Delta p}=\frac{1}{1+\delta}=1-\delta+O(\delta^2)$$

$$\frac{1}{1+\delta}=1-\delta+O(\delta^2)$$

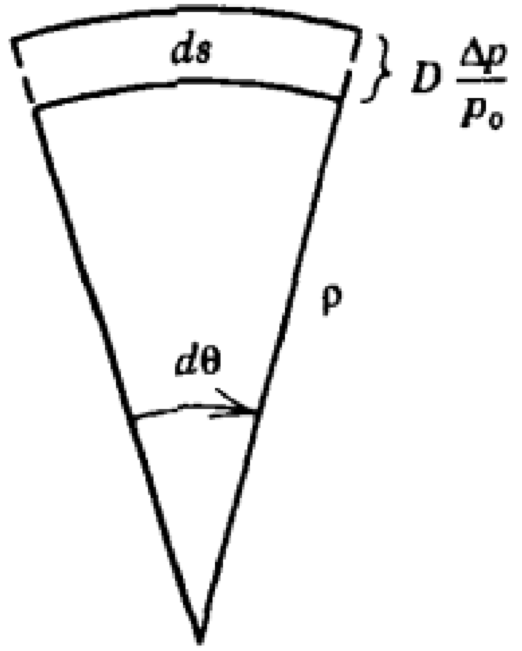
$$\frac{d^2x}{ds^2}+[\frac{1}{\rho^2}+K_x-\left(\frac{1}{\rho^2}+K_x\right)\delta]x=\frac{1}{\rho}\delta$$

观察该方程的形式：

（1）该方程的解由通解和特殊解构成，且通解为修正系数的Hill方程

（2）假设$x=x_\beta+D(s)\delta$ 且忽略来自系数的修正项，则

$$D''(s)+\left(\frac{1}{\rho^2}+K_x\right)D(s)=1/\rho$$



色散函数（线性特殊解）时的物理图像

$D(s)$称为**色散函数(Dispersion function)**，它具有下述性质：

（1）像一个普通粒子一样做betatron运动

（2）由偏转磁铁产生

包含色散函数的传输矩阵

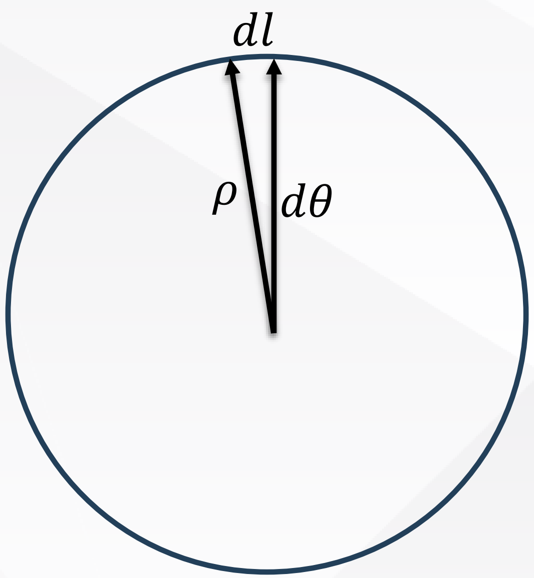
$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s2} = \begin{pmatrix} Cos(\frac{l}{\rho}) & \rho Sin(\frac{l}{\rho}) & D \\ -\frac{1}{\rho}Sin(\frac{l}{\rho}) & Cos(\frac{l}{\rho}) & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s1}$$

$$\theta = \frac{l}{\rho}$$

$$= \begin{pmatrix} Cos\theta & \rho Sin\theta & \rho(1 - Cos\theta) \\ -\frac{1}{\rho}Sin\theta & Cos\theta & Sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s1}$$

注：感兴趣的同学可以根据二极磁铁的解及$D''(s) + \frac{1}{\rho^2}D(s) = 1/\rho$尝试其特殊解

色散函数的影响(1):路径长度



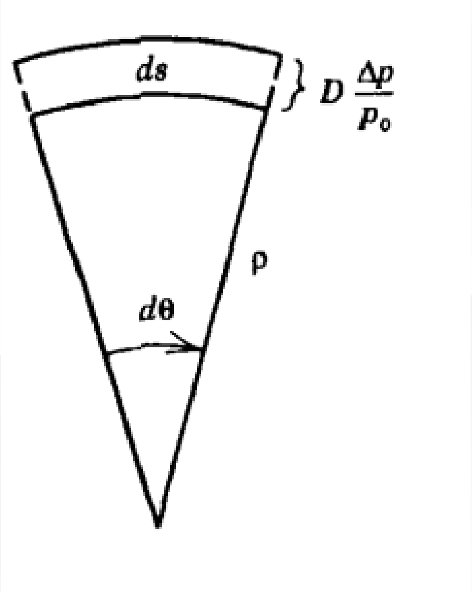
对于一个标准圆形，他的周长：$2\pi\rho$，
或者说

$$C = \oint dl = \oint \rho d\theta = 2\pi\rho$$

在色散函数存在的情况下，

$$\Delta C = C - C_0 = \int_0^{2\pi} (\rho + x) d\theta - \int_0^{2\pi} \rho d\theta = \int_0^{2\pi} x d\theta = \delta \int_0^{C_0} \frac{D(s)}{\rho} dl$$

$$x = x_\beta + D(s)\delta$$



定义**动量压缩因子(Momentum compaction factor)**：

$$\alpha_c = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \frac{D(s)}{\rho} ds$$

色散函数的影响(2)：路径时间

周期长度（长度L或者环形路径长度C）上粒子运动所需时间为

$$T=\frac{L}{\beta c}$$

则时间差别为：

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta L}{L}-\frac{\Delta\beta}{\beta}=\frac{\delta\int_0^L\frac{D(s)}{\rho}dl}{\frac{1}{\alpha_c}\int_0^L\frac{D(s)}{\rho}dl}-\frac{1}{\gamma^2}\delta=(\alpha_c-\frac{1}{\gamma^2})\delta$$

$$\frac{\Delta p}{p}=\Delta\gamma+\Delta\beta=1$$

定义穿越能量$\gamma_t=1/\sqrt{\alpha_c}$(transitional energy)

(注：请结合上一堂课内容学习）