



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

粒子加速器原理

~数值模拟方法介绍~

以KEK-DA为例介绍束流光学参数计算

刘星光

liuxg@ihep.ac.cn

中国科学院高能物理研究所 东莞研究部

2024

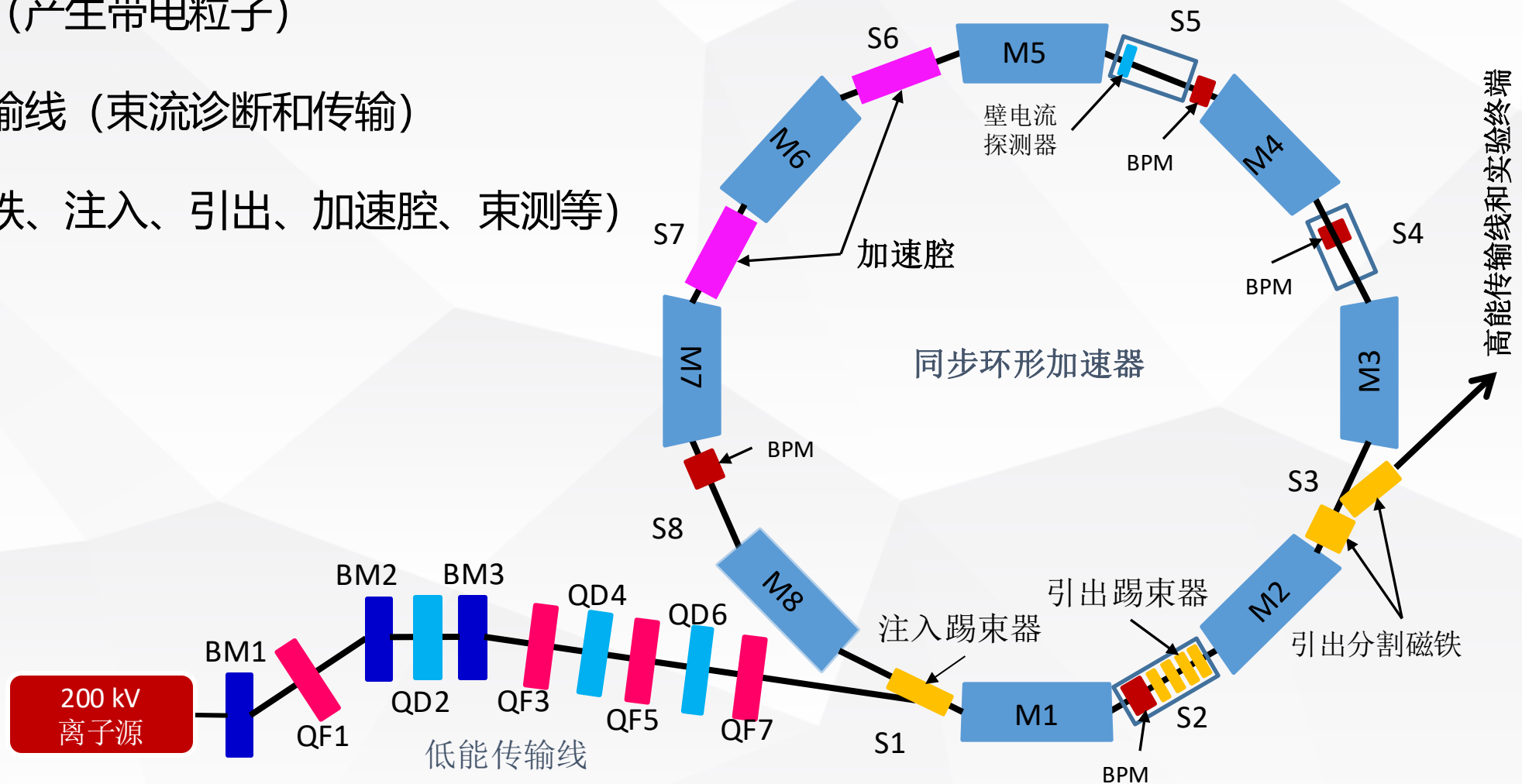
背景：小型环形加速器

加速器组成：

离子源（产生带电粒子）

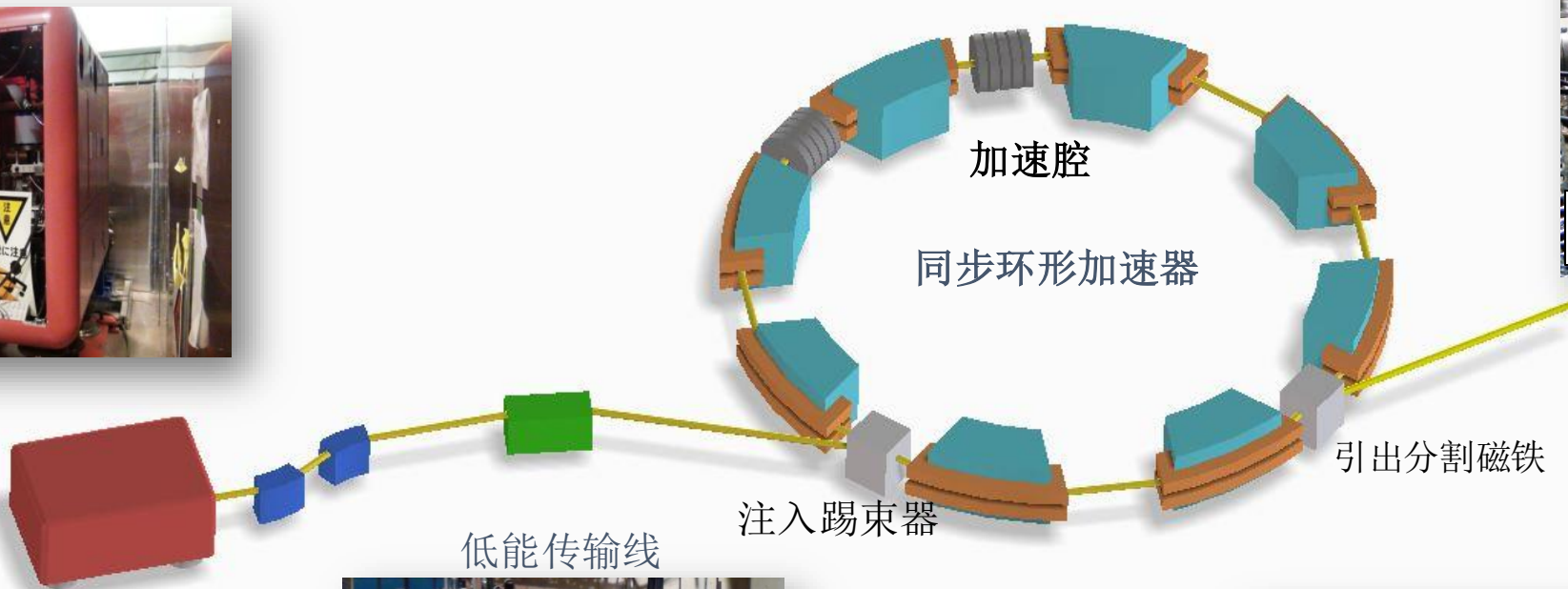
低能传输线（束流诊断和传输）

环（磁铁、注入、引出、加速腔、束测等）

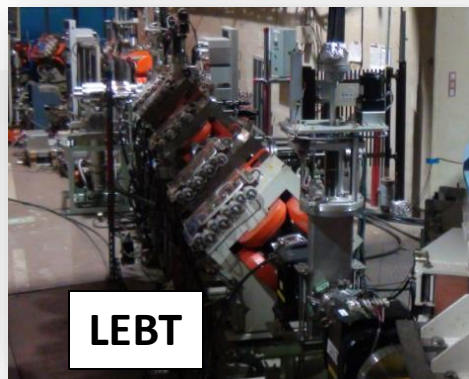




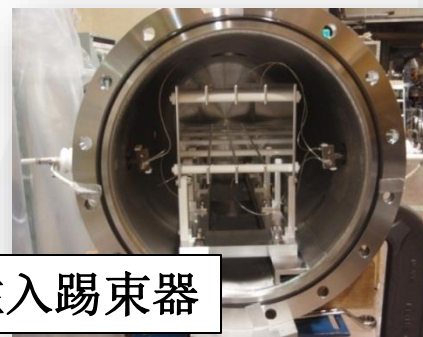
离子源



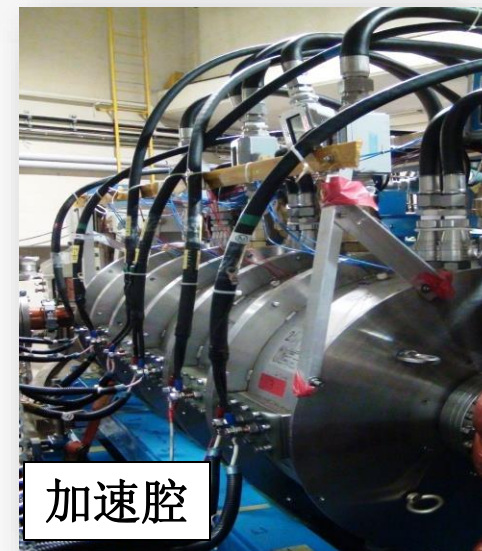
离子源



LEBT



注入踢束器



加速腔

引出分割磁铁

注入踢束器

同步环形加速器

加速腔

低能传输线

任务：计算该加速器环形加速器的基本束流光学参数

组成：

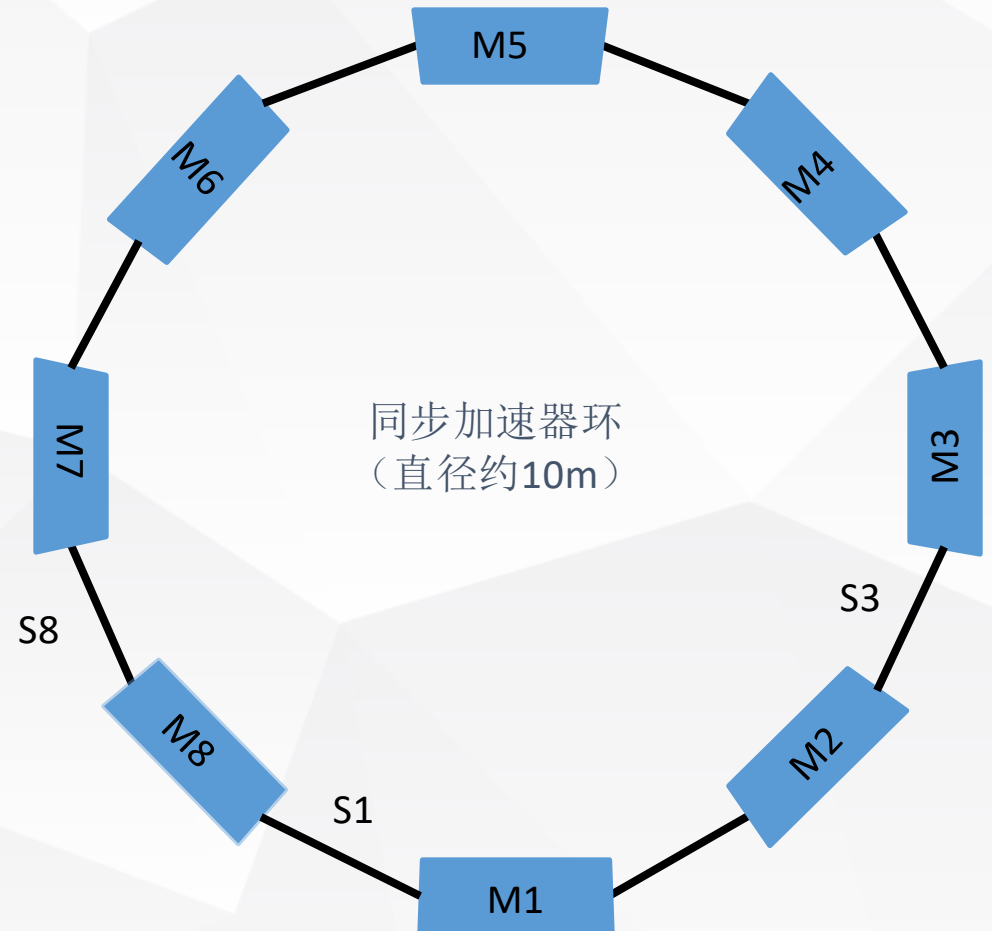
8块组合型偏转铁（二极+四极）
8个直线节

方法：

传输矩阵（包含色散的3x3矩阵）

工具：

Mathematica
(Python、C++或Matlab)



直线节

$$m_D = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

纯二极磁铁

$$m_B = \begin{pmatrix} \cos[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\sqrt{K}} (1 - \cos[\sqrt{K}L]) \\ -\sqrt{K} \sin[\sqrt{K}L] & \cos[\sqrt{K}L] & \sin[\sqrt{K}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

组合型二极磁铁（聚焦）

$$m_{BF} = \begin{pmatrix} \cos[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\rho K} (1 - \cos[\sqrt{K}L]) \\ -\sqrt{K} \sin[\sqrt{K}L] & \cos[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\rho \sqrt{K}} \sin[\sqrt{K}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

组合型二极磁铁（散焦）

$$m_{BD} = \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\sqrt{\text{Abs}[K]}} \sinh[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\rho \text{Abs}[K]} (\cosh[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] - 1) \\ \sqrt{\text{Abs}[K]} \sinh[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \cosh[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\rho \sqrt{\text{Abs}[K]}} \sinh[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

组合型偏转铁：F-D-F类型

组合型偏转铁参数：

$$l_F = 0.6313 \text{ m}$$

$$l_H = 0.0352 \text{ m} \text{ (过渡节, 视为纯二极磁铁)}$$

$$l_D = 1.2589 \text{ m}$$

$$\rho = 3.3 \text{ m}$$

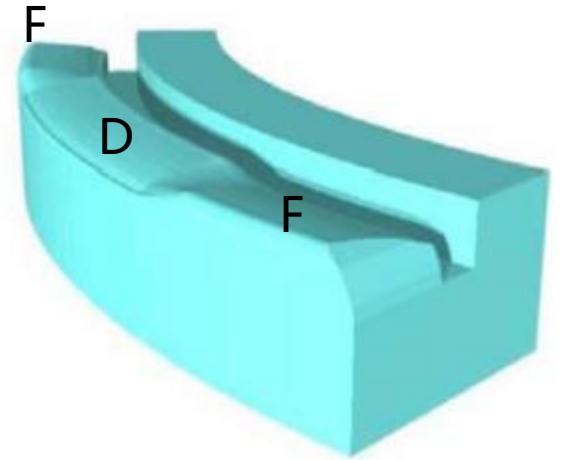
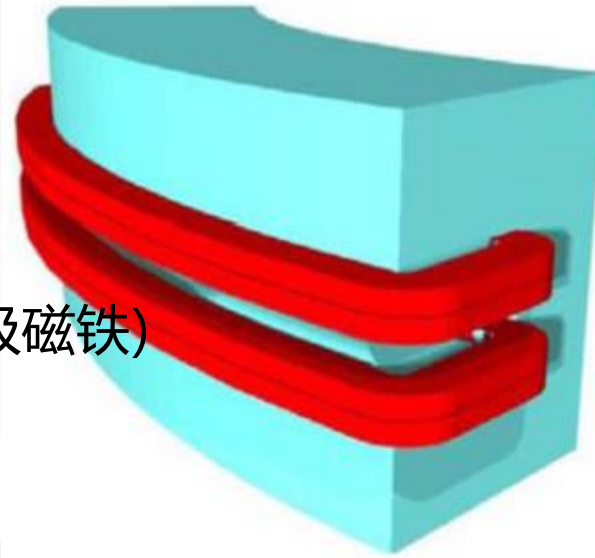
$$k_F = 3.618/\rho$$

$$k_D = -3.639/\rho$$

注：组合型磁铁k值为： $k = k_0 + k_1 = \frac{1}{\rho^2} + k_1$ ， k_1 为四极磁铁相应k值。

漂移节直线长度：

$$l_{drift} = 2.1206 \text{ m}$$



程序步骤 (1) : 建立传输矩阵模型 (函数)

(* Transfer Matrix definition *)

$$\text{MatrixDrift}[L_]:= \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{MatrixBending}[K_, L_] := \begin{pmatrix} \cos[\sqrt{K} L] & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin[\sqrt{K} L] & \frac{1}{\sqrt{K}} (1 - \cos[\sqrt{K} L]) \\ -\sqrt{K} \sin[\sqrt{K} L] & \cos[\sqrt{K} L] & \sin[\sqrt{K} L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{MatrixF}[K_, L_] := \begin{pmatrix} \cos[\sqrt{K} L] & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin[\sqrt{K} L] & \frac{1}{\rho K} (1 - \cos[\sqrt{K} L]) \\ -\sqrt{K} \sin[\sqrt{K} L] & \cos[\sqrt{K} L] & \frac{1}{\rho \sqrt{K}} \sin[\sqrt{K} L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (* transfer matrix for focus section,$$

$K > 0$ *)

$$\text{MatrixD}[K_, L_] := \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\text{Abs}[K]} L] & \frac{1}{\sqrt{\text{Abs}[K]}} \sinh[\sqrt{\text{Abs}[K]} L] & \frac{1}{\rho \text{Abs}[K]} (\cosh[\sqrt{\text{Abs}[K]} L] - 1) \\ \sqrt{\text{Abs}[K]} \sinh[\sqrt{\text{Abs}[K]} L] & \cosh[\sqrt{\text{Abs}[K]} L] & \frac{1}{\rho \sqrt{\text{Abs}[K]}} \sinh[\sqrt{\text{Abs}[K]} L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$



周期性传输矩阵

```
(*-----*)  
(*-----horizontal direction-----*)  
(*-----*)  
  
(* transfer matrix for focus section, K > 0 *)  
MF = MatrixF[k0 + k1F, FsectionLength]; (* compound type, gradient magnet*)  
MH = MatrixBending[k0, HsectionLength];  
MD = MatrixD[k0 + k1D, DsectionLength]; (* compound type, gradient magnet*)  
Mdrift = MatrixDrift[driftSectionLength];  
  
(*Transfer matrix for a period*)  
Mperiod = MF.MH.MD.MH.MF.Mdrift;
```

相移与工作点计算

```
PeriodPhaseAdvance = ArcCos[(Mperiod[[1, 1]] + Mperiod[[2, 2]]) / 2];  
tune = PeriodPhaseAdvance * (8 / (2 * pi))
```



程序步骤 (3) : 周期性Twiss 参数及色散函数计算

Twiss 参数计算:

$$\begin{pmatrix} \cos[\Delta\phi] + \alpha \sin[\Delta\phi] & \beta \sin[\Delta\phi] \\ -\gamma \sin[\Delta\phi] & \cos[\Delta\phi] - \alpha \sin[\Delta\phi] \end{pmatrix}$$

thus:

$$\begin{aligned} \beta &= M_{\text{period}}[1,2] / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}] \\ \alpha &= 0.5 * (M_{\text{period}}[1,1] - \cos[\text{PeriodPhaseAdvance}]) / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}] \\ \gamma &= -M_{\text{period}}[2,1] / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}] \end{aligned}$$

*)

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5 * (M_{\text{period}}[1,1] - \cos[\text{PeriodPhaseAdvance}]) / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}] \\ \beta &= M_{\text{period}}[1,2] / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}] \\ \gamma &= -M_{\text{period}}[2,1] / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}] \end{aligned}$$

0.15395

色散函数计算:

$$\begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix}$$

thus

*)

$$\text{Solve} \left[\begin{pmatrix} D \\ dD \\ 1 \end{pmatrix} == M_{\text{period}} \cdot \begin{pmatrix} D \\ dD \\ 1 \end{pmatrix}, \{D, dD\} \right]$$

$D \rightarrow 1.43$



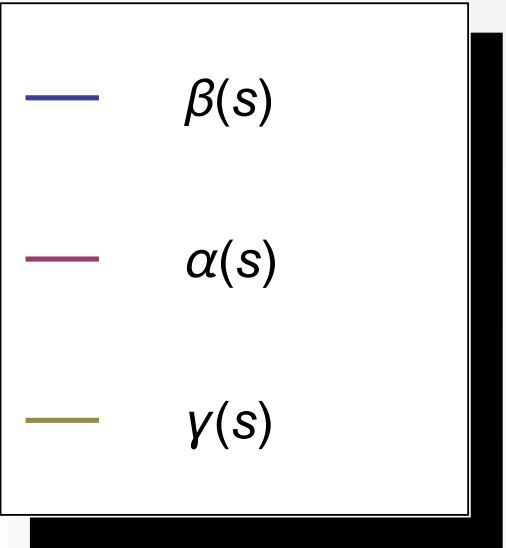
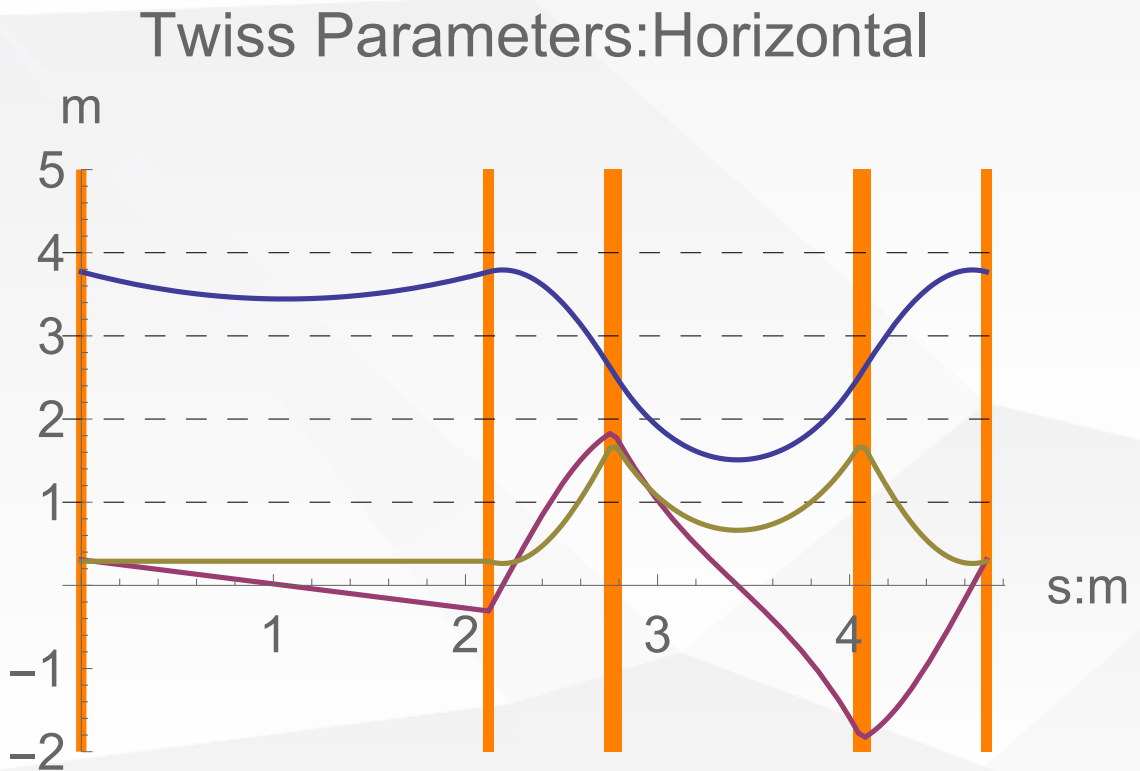
以任意点为起点构建传输矩阵

```
TransferMatrix[s_] :=  
  Piecewise[{{MatrixDrift[s - M[[1]]].MF.MH.MD.MH.MF.MatrixDrift[M[[2]] - s], M[[1]] ≤ s < M[[2]]},  
    {MatrixF[k0 + k1F, s - M[[2]]].Mdrift.MF.MH.MD.MH.MatrixF[k0 + k1F, M[[3]] - s], M[[2]] ≤ s < M[[3]]},  
    {MatrixBending[k0, s - M[[3]]].MF.Mdrift.MF.MH.MD.MatrixBending[k0, M[[4]] - s], M[[3]] ≤ s < M[[4]]},  
    {MatrixD[k0 + k1D, s - M[[4]]].MH.MF.Mdrift.MF.MH.MatrixD[k0 + k1D, M[[5]] - s], M[[4]] ≤ s < M[[5]]},  
    {MatrixBending[k0, s - M[[5]]].MD.MH.MF.Mdrift.MF.MatrixBending[k0, M[[6]] - s], M[[5]] ≤ s < M[[6]]},  
    {MatrixF[k0 + k1F, s - M[[6]]].MH.MD.MH.MF.Mdrift.MatrixF[k0 + k1F, M[[7]] - s], M[[6]] ≤ s ≤ M[[7]]}},  
  {s, M[[1]], M[[7]]}];
```

要点:

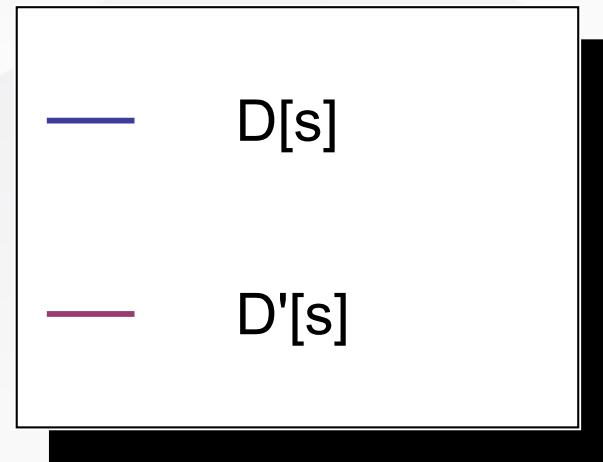
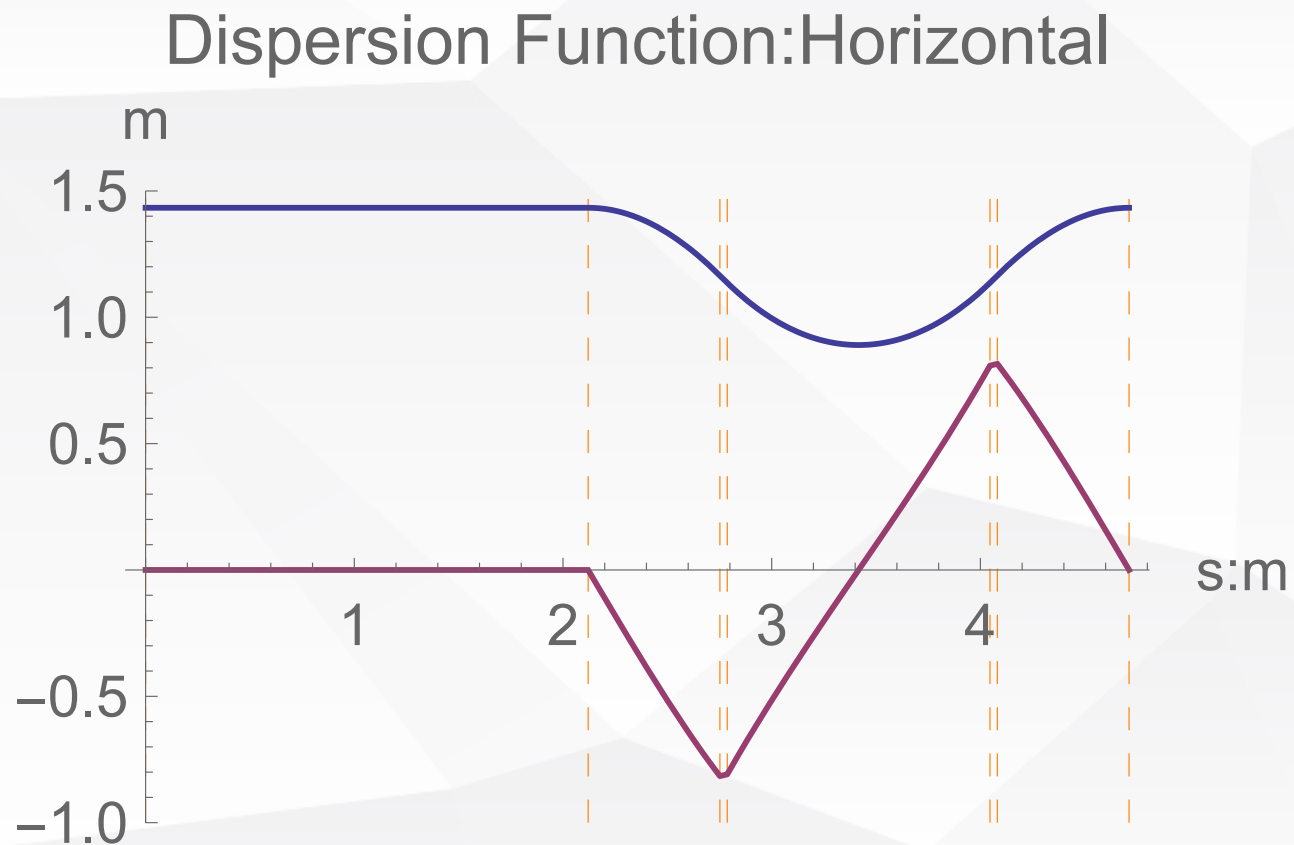
- 判断s所处位置（磁铁）
- 计算以该位置为起点的周期性解

计算结果 (1) : x方向Twiss参数

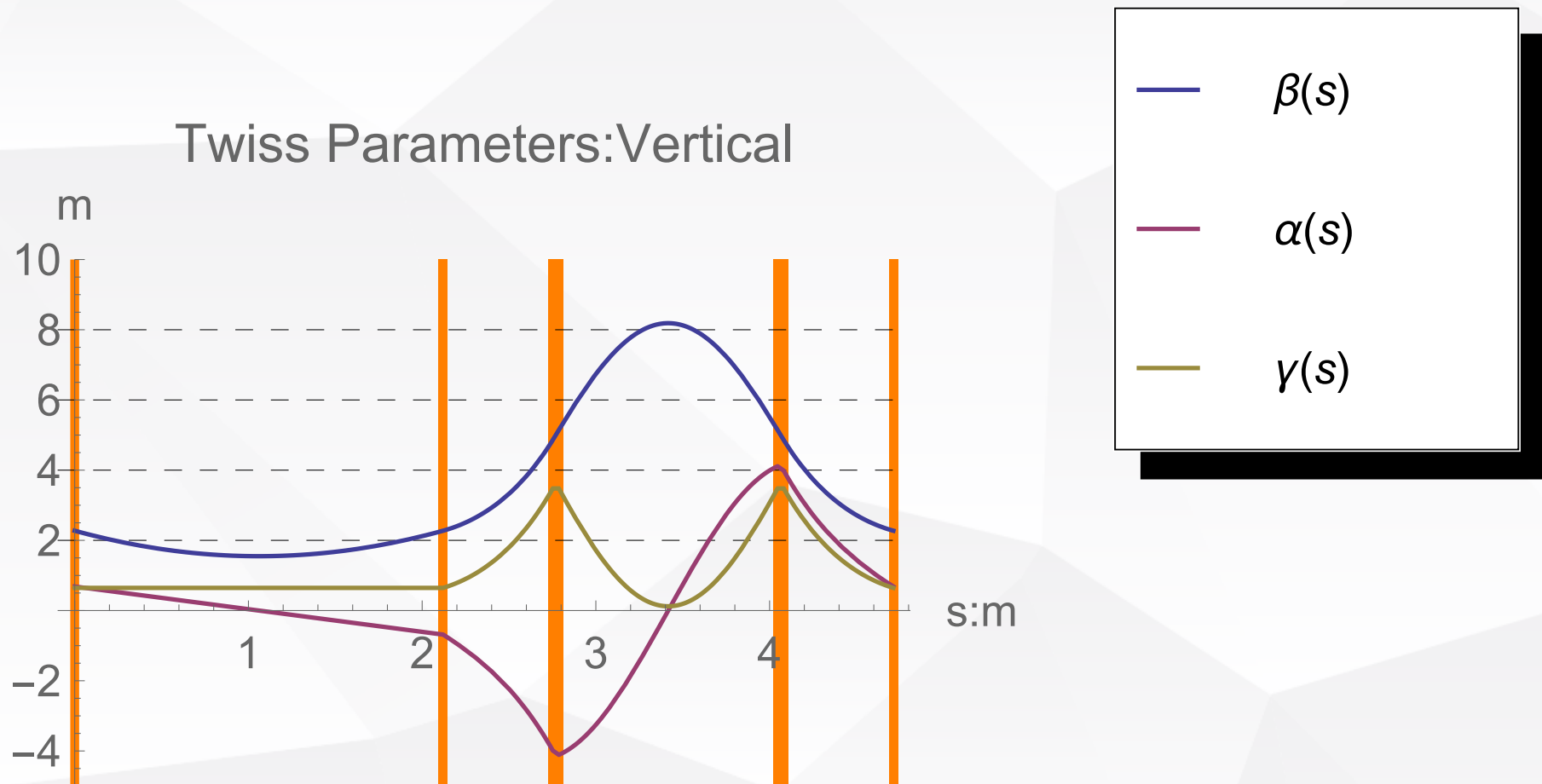


横向工作点: 2.17

计算结果 (2) : x方向色散函数



计算结果 (3) : y方向Twiss参数



纵向工作点: 2.17

1 关于编程与计算语言的选择:

Matlab, Octave, Mathematica

Python, C/C++

Fortran

2 如何用Python进行类似的计算

3 如何将其拓展为一个粒子追踪程序 (Tracking code)