

中山大学理学院 2024 年秋季学期

粒子加速器原理

讲义

束流动力学部分

黄永盛、毕远杰、刘星光、苑尧硕

2024 年 12 月

目录

1 前言	5
2 导论	6
2.1 第一台同步辐射光源 - SPEAR	6
2.2 第一台自由电子激光是基于直线对撞机的技术	6
2.3 散裂中子源是基于高能物理固定靶实验的技术	7
2.4 其他例子	7
2.5 从 0 到 1	9
2.5.1 第一个 (第一次) 是零的突破	9
2.5.2 第一台小而简单	9
3 加速器的发展及基本理念概述	11
3.1 基本概念	11
3.2 历史背景	12
3.3 静电加速器 Electrostatic Accelerators	14
3.4 感应加速器 Induction Accelerators	16
3.5 射频加速器 RF Accelerators	18
3.6 加速器的革命性原理	24
3.6.1 纵向自稳相原理 Longitudinal phase stability	25

3.6.2	强聚焦原理 Alternating Focusing	26
4	数学物理基础知识回顾	29
4.1	线性代数基本知识回顾	29
4.1.1	标量与矢量 Scalars and Vectors	29
4.1.2	线性方程式与矩阵 Linear equations and matrices	30
4.1.3	特征值及特征向量	32
4.2	偏微分方程简要回顾	32
4.2.1	梯度、散度和旋度 Gradient, Divergence, Curl	32
4.3	带电粒子与电磁场	33
4.3.1	麦克斯韦方程组 Maxwell's Equations	33
4.3.2	电磁场以及运动方程	34
5	束流动力学基础	35
5.1	束流动力学基本介绍	35
5.2	动力学方程与哈密顿量	36
5.2.1	带电粒子在电磁场中受到的洛伦兹力	36
5.2.2	自然坐标系	36
5.2.3	横向运动	37
6	直线加速器和环形加速器	38
6.0.1	Betatron 运动方程	39
6.0.2	环形加速器中的磁场	40
6.0.3	二极磁铁和四极磁铁	40
6.0.4	Hill equation (希尔方程)	41
7	动力学方程及磁铁	42
7.1	Betatron 方程 (横向振荡方程)	42
7.2	组成加速器的不同类型的电磁铁元件	43
7.3	传输矩阵	43
7.3.1	粒子运动在相空间中的表示	43
7.3.2	传输矩阵的计算	46
7.3.3	粒子在相空间中的表示	48
8	元件的传输矩阵	49
8.1	简单回顾	49
8.2	粒子经过矩阵后的计算	50

8.3	传输矩阵的薄透镜近似	51
8.3.1	四极磁铁的薄透镜近似	51
8.3.2	二极磁铁	52
8.3.3	薄透镜与厚透镜矩阵形式对比	52
8.3.4	多个元件的传输矩阵	53
8.4	二极磁铁的边缘聚焦效应	56
8.5	粒子传输的稳定性条件	59
9	Twiss 参数及实例	61
10	工作点	65
10.1	相椭圆	65
10.2	色散效应	69
11	纵向束流动力学	72
11.1	加速电场与电磁波	72
11.2	同步条件与参考相位	73
11.3	纵向振动 Longitudinal oscillation	75
11.4	一般 (非参考粒子的) 情况	76
11.5	纵向相空间	77
12	纵向与横向运动的耦合及闭合轨道	79
12.1	色散效应 dispersion	79
12.2	色品 (chromaticity)	80
12.3	二极磁铁的线性误差及闭合轨道 (close orbit)	81
13	数值模拟方法介绍: 以 KEK-DA 为例	82
13.1	背景: 小型环形加速器	82
13.2	加速器组成	83
13.3	任务描述: 计算该环形加速器的基本束流光学参数	83
13.4	程序步骤	84
13.4.1	传输矩阵	84
13.4.2	周期性传输矩阵的构建与关键参数计算	86
13.4.3	周期性 Twiss 参数及色散函数计算	86
13.5	程序拓展: 任意点 s 处的 Twiss 参数计算 (周期性条件方法)	87
13.6	计算结果讨论	88

14 射频直线加速器：基础	90
14.1 真空中平面波的主要性质及参数	90
14.2 用于电子加速的行波管加速结构	92
15 射频直线加速器：驻波加速结构	96
15.1 漂移管加速器 (DTL)	99
15.2 行波加速结构与驻波加速结构的对比	100

教师 2024

毕远杰	中山大学	教授级正高级工程师	课程负责人
黄永盛	中山大学	教授	
刘星光	中国科学院高能物理研究所	副研究员	
苑尧硕	中国科学院高能物理研究所	副研究员	

1 前言

《粒子加速器原理》由中山大学理学院黄永盛教授组织开授，定位为本科生专业选修课。因师资所限，同时也让学生能接触最前沿的加速器理念，邀请来自高能物理研究所东莞研究部的袁尧硕、刘星光与来自深圳综合粒子研究院的邵佳航共同讲授，在 2023 年秋季学期第一次开课，结合基础知识与前沿讲座，旨在让学生对加速器这门学科有初步的了解，学习束流动力学的基础知识，培养对该学科的兴趣。此次 2024 年秋季学期为第二次开课，邵佳航老师抽不开身故由刘星光讲授射频直线加速器部分。

根据 2023 年秋季学期反馈，学生普遍反应课程较难。诚然，一方面原因是本身加速器物理涉及代数、经典力学和电动力学等基本知识，虽然各自涉及范围并不广，但实际操作较为复杂，可能学生接受起来有一定门槛，需要一个熟悉的过程。此外，任课教师们虽然均有多年海外教育和工作背景（苑尧硕老师在德国法兰克福大学获得博士学位并在 GSI 工作多年、邵佳航老师清华工程物理系获得博士学位在美国阿贡亦工作多年、笔者本人从日本东京工业大学及 KEK 获得博士学位并在 RIKEN 和 CERN 均有数年研究经历），虽然大家都有短期课程和讲座等经历，但面对本科生从头讲授一门完整的课，属实是头一遭。且我们均有较为繁重的科研业务，虽然大家都努力将课程办好，但时常感觉力不从心，唯恐对不起学生对一门专业课程的期待。

关于讲义本身，在 2023 年版本中仅包含束流动力学部分。在 2024 的课程实践中，我们又适当放慢了速度，加强了课堂讲解。由于课程设置关系，在最后也适当降低了大作业的难度（2023 年秋季的上半学期讲授 2/3 学时，有较为充实的基础与时间完成大作业；2024 年秋季的下半学期集中了 2/3 学时，故在学期中拟布置大作业时束流动力学都还没收尾，完成大作业时间受限）。2024 年版讲义增加了射频直线加速器部分，使得本讲义框架与实际授课情况更为接近。

水平有限，如有纰漏之处还望读者批评指正，并期待在后续教学过程中能够不断改进。

刘星光

整理

2024 年 12 月 30 日

2 导论

黄永盛

粒子加速器是 20 世纪早期人们的一大发明, 至今已有近 100 年的历史。从上世纪二十年代第一台加速器开始, 加速器研究的焦点就一直是提高粒子的能量。这就是所谓的“能量前沿”(Energy Frontier), 也是人们常说的“科学发现的引擎”(Engines of Discovery)。它服务的对象是基础研究, 即高能物理。一开始的高能物理是核物理(十几到几十 MeV), 现在的高能物理是粒子物理(几个, 几十个 GeV 到十几 TeV)。

在这个过程中, 一方面有一系列基础研究中的重大发现(诺贝尔物理奖的三分之一都给了粒子物理)

另一方面又引伸出一大批实际应用(Spin-off) 这些应用又一个个相继形成了新的, 属于它们自己的科学技术领域前沿。

同步辐射光源, 自由电子激光, 和散裂中子源就是三个很好的例子。

2.1 第一台同步辐射光源 - SPEAR

SPEAR 大家并不陌生, 它是一台做高能物理实验的正负电子对撞机, 1974 年 Burt Richter 用它发现了 J/Ψ 粒子, 与丁肇中(用 AGS, 另一台高能物理加速器)一起得了诺贝尔物理奖。

但很多人不知道, 正是这台用来研究高能物理的机器, 是世界上第一台同步辐射光源, (Stanford U. Bill Spicer 和 Seb Doniach 对 Richter 的建议“revolutionize Condensed Matter physics”) 常称为第一代光源(1st Generation, 1G)

后来 SPEAR 改造为专用光源(2G, 另还有 Aladdin 等), 又拿到三个诺贝尔化学奖(Roger Kornberg 2006, Ada Yonath 2009 and Brian Kobilka 2012) 80 年代开始建造第三代光源(3G), 特点是有插入件(insertion devices), 包括 APS, ALS, ESRF, Spring-8, 和国内的合肥光源, 上海光源, 及正在建的北方光源, 筹建中的南方光源等。

2.2 第一台自由电子激光是基于直线对撞机的技术

SLC 是第一台(也是到目前为止唯一的一台) 直线对撞机, 作为 Z 工厂, 研究粒子物理。正是在这台机器上积累的经验, 研发的加速器技术和培养的专业队伍, 为后来把它改造为世界上第一台 X 射线自由电子激光 LCLS 打下了基础(4G)。



图 1: SPEAR: 从对撞机到光源。

现在又进一步使用超导技术, 发展为 LCLS2, 上海在建的 SHINE 就是它以它为借鉴。

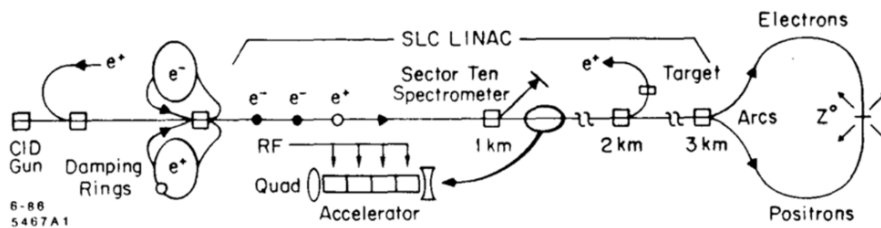


图 2: 当前唯一一台直线对撞机: SLC。

2.3 散裂中子源是基于高能物理固定靶实验的技术

高能质子打在固定靶上, 产生二次粒子, 是粒子物理的重要实验手段。丁肇中当年就是在 AGS 上发现了 J/Ψ 粒子。高能物理学家感兴趣的二次粒子是自然界中看不到的粒子, 除了 J/Ψ 之外, 还有 $\pi, \mu, kaon$, 正电子, 反质子, 等。为了得到大量二次粒子, 高强度高功率的质子加速器技术得到发展。正是在这个技术基础上, 引伸出了散裂中子源 - 即是在固定靶上产生大量中子作为二次粒子, 应用于凝聚态物理, 核物理, 材料科学, 生物科学等各方面。与光源一样, 一开始散裂中子源是高能物理的附属部分, 但后来就有了专用的, 如 ESS, SNS, J-PARC, 及国内新建的 CSNS。

2.4 其他例子

超导技术的迅速发展是由于 Fermilab 建造 Tevatron, 世界上第一台使用超导磁铁的对撞机。它使用的超导材料数量是如此之大, 当时全世界所有生产的

LCLS 将这一段改为 undulator

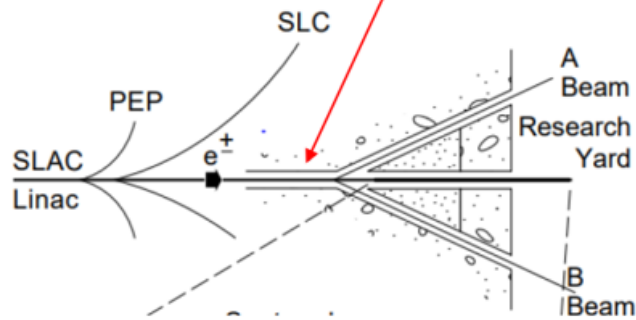


图 3: SLC 上的自由电子激光研究。

铌钛合金都不够它用。这就带动了超导材料工业的发展。

不但如此，它的超导磁铁技术还带动了医学上核磁共振 (MRI) 的发展和广泛应用。电子直线加速器是医学上放射治疗的基础。用加速器产生正电子的技术，是今天 PET scan 的基础。为高能质子加速器而发明的 RFQ 已广泛应用在半导体工业上。为交换高能物理实验数据而发明的 Internet，在全世界引起了一场信息革命，则是完全出于发明者意外的。

加速器技术的发展，一直是由基础研究的需要带动的。这些基础研究，有它自己的科学目标和物理意义。但在加速器技术发展的过程中，它又找到很多实际的应用，有些是事先已想到的，有些是完全没有预料到的。以加速器为例，基础研究对实际应用的贡献主要有三方面：

- 打下技术基础
- 积累操作经验
- 培养专业队伍

希望我们今天讨论的伽玛对撞机，能成为下一个基础研究带动实际应用的例子。



图 4: 费米实验室的固定靶实验技术。

2.5 从 0 到 1

2.5.1 第一个 (第一次) 是零的突破

特别刺激, 特别兴奋, 是个冒险, 有强烈的挑战性, 成功后会长期留在人们记忆中

- 今年 4 月 10 日 EHT 发布第一个黑洞照片
- 2016 年 LIGO 第一次“听”到引力波
- 2012 年 LHC 第一次找到希格斯粒子
- 1919 年卢瑟福第一次把原子核打碎

2.5.2 第一台小而简单

第一台直线加速器早期 Wideroe 关于直线加速器的设想。

第一台环形加速器 1930 年, Ernest Lawrence。可以放在手掌上的加速器:
4” cyclotron

第一台环形对撞机 1961 年, Bruno Touschek 直径 1.6 m, AdA

有了 1, 就有 2,3 和所有后来的在此基础上发展起来的新的理念和技术。

据统计, 当前已有 25 个诺贝尔奖与加速器直接或间接相关。加速器已成为基础研究不可或缺的手段。

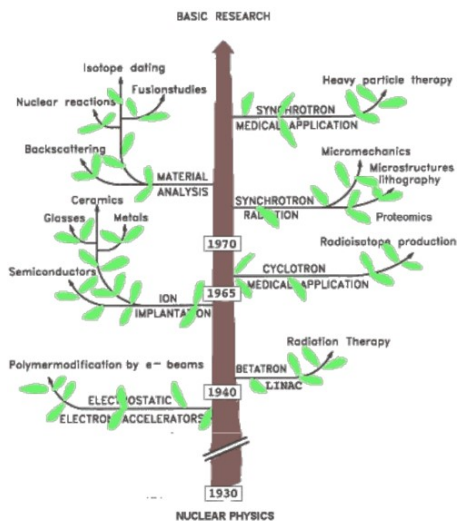


图 5: 从高能物理与核物理衍生出的各种技术及应用。



图 6: 2023 年第一个黑洞照片。

当前世界上已建成的加速器成千上万的各种类型的加速器。第一代对撞机诞生于上世纪 60 年代，目前世界上最大的对撞机为欧洲的大型强子对撞机，其主环周长达 27km。

已建成对撞机

就对撞机来说，在过去 50 年间，我们共建成了 20 余台电子对撞机、5 台强子或重离子对撞机和一个电子质子对撞机。但是，尚无 $\gamma\gamma$ 对撞机建成。中山大学当前 $\gamma\gamma$ 对撞机已获立项，希望同学们努力学习，能够投身到加速器的相关科学中来。

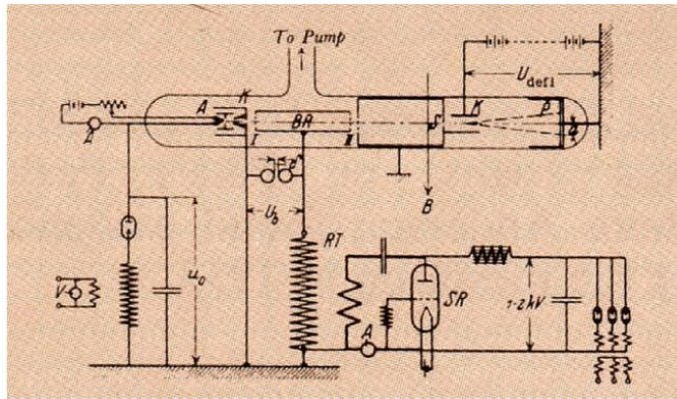


图 7: 1928 年, Rolf Wideröe, 88 cm glass tube linac



图 8: 劳伦斯和他发明的第一个回旋加速器。

3 加速器的发展及基本理念概述

刘星光

3.1 基本概念

什么是加速器

带电粒子加速器，是将带电粒子能量提高的装置或设施。

什么是加速器物理

研究与带电粒子加速器相关的基本加速原理和方式、束流运动和加速器设计相关的学科。

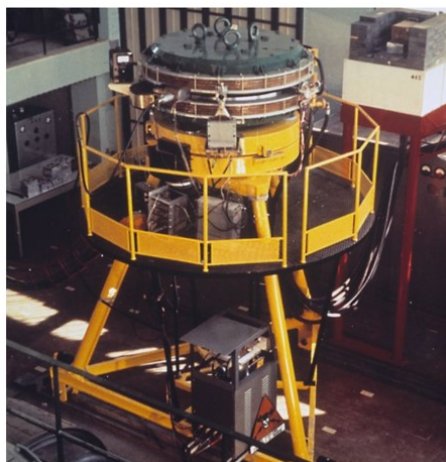


图 9: 第一台环形对撞机。

束流动力学: 描述和研究带电粒子在电磁场中的运动特性的理论及方法。

加速器技术

围绕带电粒子加速器的工程实践需求而发展起来的一系列学科，例如粒子源、加速结构、磁铁、控制、真空、束流测试、辐射防护等学科。

什么是加速器应用

以加速器为基础，直接或间接利用束流开展的一系列应用研究。直接利用束流的比如说对撞机，肿瘤治疗等，间接利用束流的比如散裂中子源、辐射探测、同步辐射和自由电子激光等。

3.2 历史背景

天然放射性的发现 Radioactivity

亨利·贝克勒尔 (Henri Becquerel, 1852-1908) 于 1896 年发现天然放射性，揭开了现代核物理学的序幕。1898 年居里夫妇 (Marie Curie & Pierre Curie, 1867-1934 & 1859-1906) 先后发现钋和镭。由于三人在天然放射性的卓越贡献共同获得了 1903 年诺贝尔物理学奖。

三种天然放射性射线

根据天然放射性射线在磁场中的偏转方向，分别以希腊字母命名为 α 、 β 和 γ 射线。后来进一步的实验研究标明， α 射线为 He^+ 粒子，带正电； β 射线为电子 e ，带负电；不带电的 γ 射线为光子，呈电中性。

利用天然放射性的 α 粒子轰击原子核来研究原子核的结构和组成掀开了现

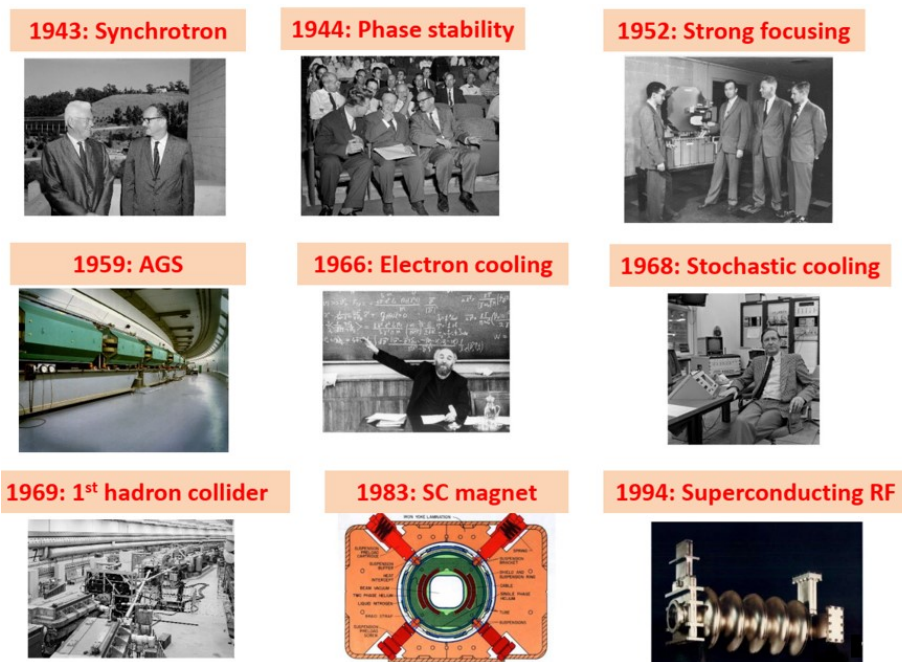


图 10: 新的理念及加速器技术。

代粒子物理与原子核物理学的开端。卢瑟福 (Ernest Rutherford, 1871–1930) 在 1928 年说道：

“I have long hoped for a source of positive particles more energetic than those emitted from natural radioactive substances.”

(我一直希望能找到一个比天然放射性物质发出的粒子更具能量的正粒子源。)

如何加速带电粒子

通过电场 E 或电动势 V 可对带电粒子 (电荷量 q) 进行加速, 获得的能量为:

$$K = q \cdot V = q \cdot E \cdot d$$

其中 K 为通过加速获得的能量, V 为电压, E 为电场, d 为在电场中的加速距离。从这个简单的式子中我们可以看到加速器的基本构成。首先要能产生带电粒子源 (电荷量 q), 其次, 电压、或电场与距离对应的是加速方式与加速结构。

思考: 有哪些可以用于加速带电粒子的方法?

Year	Name	Accelerator-Science Contribution to Nobel Prize-Winning Research
1939	Ernest O. Lawrence	Lawrence invented the cyclotron at the University of California at Berkeley in 1929 [12].
1951	John D. Cockroft and Ernest T.S. Walton	Cockroft and Walton invented their eponymous linear positive-ion accelerator at the Cavendish Laboratory in Cambridge, England, in 1932 [13].
1952	Felix Bloch	Bloch used a cyclotron at the Crocker Radiation Laboratory at the University of California at Berkeley in his discovery of the magnetic moment of the neutron in 1940 [14].
1957	Tsung-Dao Lee and Chen Ning Yang	Lee and Yang analyzed data on K mesons (θ and τ) from Bevatron experiments at the Lawrence Radiation Laboratory in 1955 [15], which supported their idea in 1956 that parity is not conserved in weak interactions [16].
1959	Emilio G. Segrè and Owen Chamberlain	Segrè and Chamberlain discovered the antiproton in 1955 using the Bevatron at the Lawrence Radiation Laboratory [17].
1960	Donald A. Glaser	Glaser tested his first experimental six-inch bubble chamber in 1955 with high-energy protons produced by the Brookhaven Cosmotron [18].
1961	Robert Hofstadter	Hofstadter carried out electron-scattering experiments on carbon-12 and oxygen-16 in 1959 using the SLAC linac and thereby made discoveries on the structure of nucleons [19].
1963	Maria Goeppert Mayer	Goeppert Mayer analyzed experiments using neutron beams produced by the University of Chicago cyclotron in 1947 to measure the nuclear binding energies of krypton and xenon [20], which led to her discoveries on high magic numbers in 1948 [21].
1967	Hans A. Bethe	Bethe analyzed nuclear reactions involving accelerated protons and other nuclei whereby he discovered in 1939 how energy is produced in stars [22].
1968	Luis W. Alvarez	Alvarez discovered a large number of resonance states using his fifteen-inch hydrogen bubble chamber and high-energy proton beams from the Bevatron at the Lawrence Radiation Laboratory [23].
1976	Burton Richter and Samuel C.C. Ting	Richter discovered the J/ψ particle in 1974 using the SPEAR collider at Stanford [24], and Ting discovered the J/ψ particle independently in 1974 using the Brookhaven Alternating Gradient Synchrotron [25].
1979	Sheldon L. Glashow, Abdus Salam, and Steven Weinberg	Glashow, Salam, and Weinberg cited experiments on the bombardment of nuclei with neutrinos at CERN in 1973 [26] as confirmation of their prediction of weak neutral currents [27].

Year	Name	Accelerator-Science Contribution to Nobel Prize-Winning Research
1939	Ernest O. Lawrence	Lawrence invented the cyclotron at the University of California at Berkeley in 1929 [12].
1951	John D. Cockroft and Ernest T.S. Walton	Cockroft and Walton invented their eponymous linear positive-ion accelerator at the Cavendish Laboratory in Cambridge, England, in 1932 [13].
1952	Felix Bloch	Bloch used a cyclotron at the Crocker Radiation Laboratory at the University of California at Berkeley in his discovery of the magnetic moment of the neutron in 1940 [14].
1957	Tsung-Dao Lee and Chen Ning Yang	Lee and Yang analyzed data on K mesons (θ and τ) from Bevatron experiments at the Lawrence Radiation Laboratory in 1955 [15], which supported their idea in 1956 that parity is not conserved in weak interactions [16].
1959	Emilio G. Segrè and Owen Chamberlain	Segrè and Chamberlain discovered the antiproton in 1955 using the Bevatron at the Lawrence Radiation Laboratory [17].
1960	Donald A. Glaser	Glaser tested his first experimental six-inch bubble chamber in 1955 with high-energy protons produced by the Brookhaven Cosmotron [18].
1961	Robert Hofstadter	Hofstadter carried out electron-scattering experiments on carbon-12 and oxygen-16 in 1959 using the SLAC linac and thereby made discoveries on the structure of nucleons [19].
1963	Maria Goeppert Mayer	Goeppert Mayer analyzed experiments using neutron beams produced by the University of Chicago cyclotron in 1947 to measure the nuclear binding energies of krypton and xenon [20], which led to her discoveries on high magic numbers in 1948 [21].
1967	Hans A. Bethe	Bethe analyzed nuclear reactions involving accelerated protons and other nuclei whereby he discovered in 1939 how energy is produced in stars [22].
1968	Luis W. Alvarez	Alvarez discovered a large number of resonance states using his fifteen-inch hydrogen bubble chamber and high-energy proton beams from the Bevatron at the Lawrence Radiation Laboratory [23].
1976	Burton Richter and Samuel C.C. Ting	Richter discovered the J/ψ particle in 1974 using the SPEAR collider at Stanford [24], and Ting discovered the J/ψ particle independently in 1974 using the Brookhaven Alternating Gradient Synchrotron [25].
1979	Sheldon L. Glashow, Abdus Salam, and Steven Weinberg	Glashow, Salam, and Weinberg cited experiments on the bombardment of nuclei with neutrinos at CERN in 1973 [26] as confirmation of their prediction of weak neutral currents [27].

图 11: 与加速器相关的 25 个诺贝尔奖 (courtesy: A. Chao)。

从上式来看, 直接让带电粒子通过一个较高的电动势 (比如平行板电压) 或通过产生电场以后持续给带电粒子进行加速。

早期粒子物理与原子核物理的需求作为最直接的推动力催发了加速器原理与技术的相关研究。由于历史原因, 很快战争与国防的需求也成为了那段时期加速器获得极大发展的重要推动力。

3.3 静电加速器 Electrostatic Accelerators

级联高压发生器 Cockcroft-Walton generator 英国的沃尔顿和柯克克罗夫特设计了基于电压级联的高压发生器 (Cockcroft-Walton generator), 并将质子加速到 400keV 以后轰击锂靶,

在 1980 年前后射频四极加速器出现之前, CW 高压发生器是大型质子加速器设施中将质子等加速到 1MV 左右的基准方案。

范德·格拉夫高压发生器 Van De Graff Generator 利用“丝绸摩擦的玻璃棒带正电, 毛皮摩擦的橡胶棒带负电”类似的摩擦起电的方法产生电荷以后将其集中, 可以产生高压。范德·格拉夫最早提出如图所示的高压产生方式并于 1929 年实现了 80 kV 的高压, 随机很快并能够将电压提升至 1.5 MV。1965 年经 Ray Herb 通过用铁条和尼龙作为电荷传送带以后称为 Pelletron (此时已形

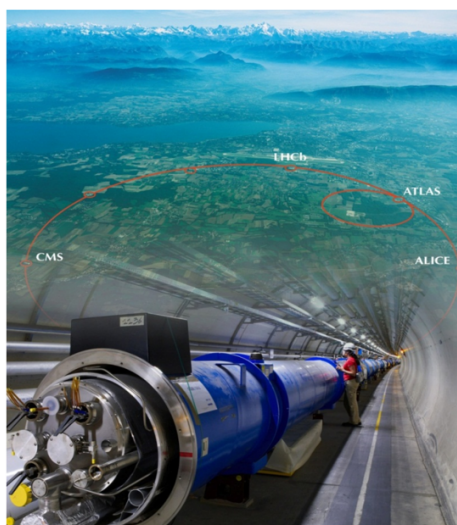


图 12: 世界上规模最大的加速器: 大型强子对撞机。

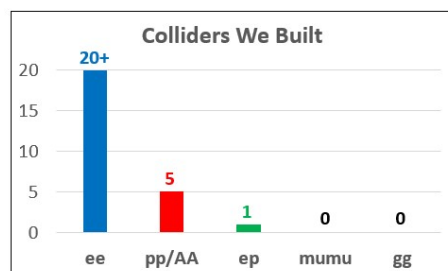


图 13: 世界上规模最大的加速器: 大型强子对撞机。

成将加速器以-tron 结尾的习惯)。

对于负电荷粒子来说 (例如氢负离子), 考虑两头为地电位中间为此种方法产生的高压端的时候, 在高压端放置玻璃膜剥离外层电子将粒子由负离子变为正离子 (比如负氢离子变为带正电质子), 即可获得相当于端部高压所对应的两倍的能量, 这种构型的范德格拉夫高压发生器又被称为 tandem 加速器。即使到如今, 改进后的范德格拉夫高压加速器作为静电加速器的典型代表在能量需求不是很高的重离子加速器领域依然被广泛使用。

静电加速器的局限性

静电加速器的基本目标是获得高电压, 而随着电压的提高, 承载高压的电极在空气中很容易发生放电。因此, 虽然历史上为了追求更高的电压一度出现

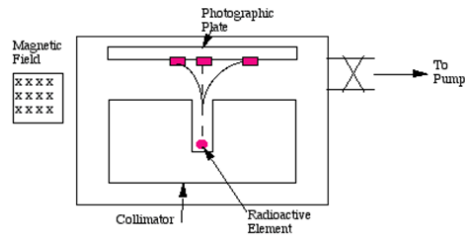


图 14: 天然放射性的三种射线

3.4 感应加速器 Induction Accelerators

电子感应加速器 Betatron 由麦克斯韦方程组中的法拉第电磁感应定律可知，随时间变化的磁场产生电场，如下式所示。

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

从前面的公式来看，除了直接提供高压可用于加速带电粒子以外，我们还可以使用电场来加速带电粒子。实际上，高压本身就对应一定的电场强度与距离 ($V = E \cdot d$)。因此，可以通过变化的磁场来产生电场用于加速带电粒子。

Donald William Kerst (1911–1993) 最先根据这个原理提出了所谓 Betatron 的加速器。通过励磁电流的变化产生变化的磁场，变化的磁场在其周围产生变化的电场，如下图所示，即可用于加速带电粒子。

Betatron 命名的由来： β (beta) 射线为电子，-tron 在希腊语中指各种设备。该种加速方式早期用于加速电子（也仅适用于加速电子），因此将其命名为“加速电子的设备”。也由此开启了加速器大多以 -tron 结尾的开端，如后面介绍的回旋加速器 Cyclotron、同步加速器 Synchrotron 和当前不太常见的由分离偏转磁铁回旋轨道范围较大的 Microtron。

下图为 1940 年 Kerst 在伊利诺伊斯大学建造的第一台 Betatron。

由洛伦兹力可知 $Brho = p/q$ ，可见当偏转半径不变时， p 与 B 一一对应。因此在追求高能量的过程中，不可避免的需要增加半径。

$$\frac{mv^2}{\rho} = q\vec{v} \times B$$

图为通用电器公司建造在上世纪 40 年代建造的 betatron。能量可达 100 MeV。

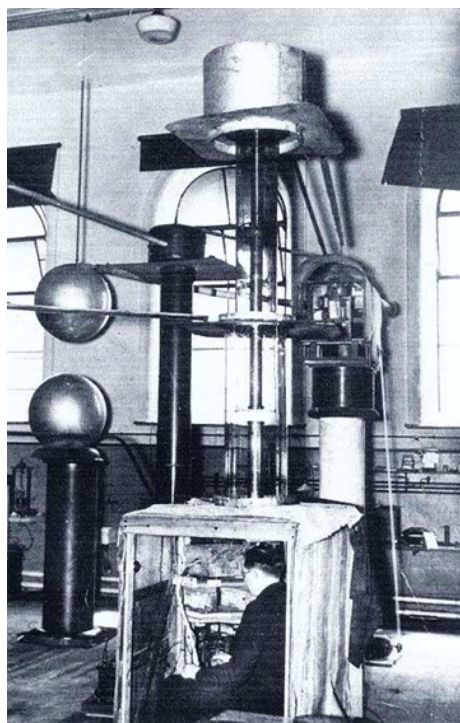


图 15: CW 高压发生器以及实验布局照片

直线感应加速器 Linear Induction Accelerator 另一种利用法拉第电磁感应定律的加速器为直线感应加速器，其基本原理可理解为如下图所示的变压器。变压器的基本原理为初级线圈产生的磁场通过次级线圈时在次级线圈的电缆里产生感生电动势。假设把次级线圈换成一个含带电粒子的真空盒，即可利用感生电动势加速带电粒子。

利用铁芯（或“磁轭”）用于约束磁力线。在铁芯存在的情况下，绝大多数的磁力线将集中在铁芯内（一般设计上也会考虑磁力线的循环），否则将自然分布在空气中不利于控制磁场的分布。此外，铁芯也可以作为结构的主要部分作为支撑，方便布局绝缘和冷却等其他功能。

实际的直线感应加速器的加速结构示意图如下图所示。当外部电流脉冲 I 进入内部导体是

当前主要的强流直线感应加速器：

- 美国, LLNL, 350A 3.5MeV e-, 1960

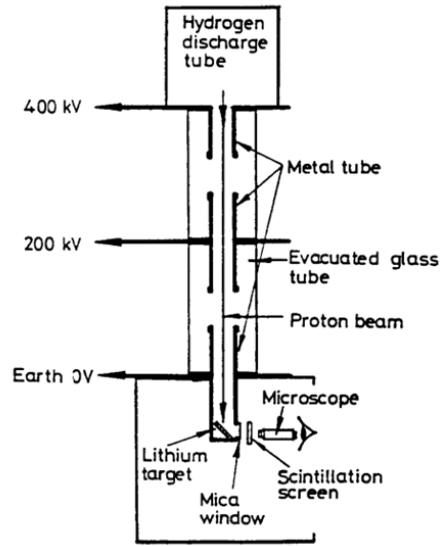


图 16: CW 高压发生器及实验台的原理构造示意图

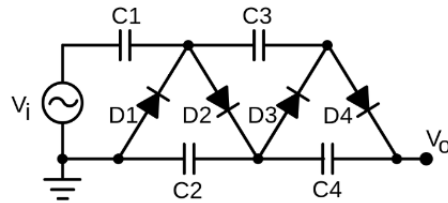


图 17: CW 高压发生器等效电路

- 美国, LLNL, 2kA, 20MeV 1999
- 法国, CEA, 1.9 3.5kA, 20MeV, 1999
- 中国, CAEP-IFP, 3kA, 20MeV, 2005/2015

3.5 射频加速器 RF Accelerators

加速效率前面讲述的加速各种加速器虽然今天仍然活跃在各种各样不同的用途当中,但从加速效率来说,他们无疑都是比较低的。比如说利用高压来加速的方式,受限于高压放电和可达到的高压的极限和成本或者占用的空间,可以达到的能量是比较低的。对于感应加速方式来说,早期的 betatron 早已不再使

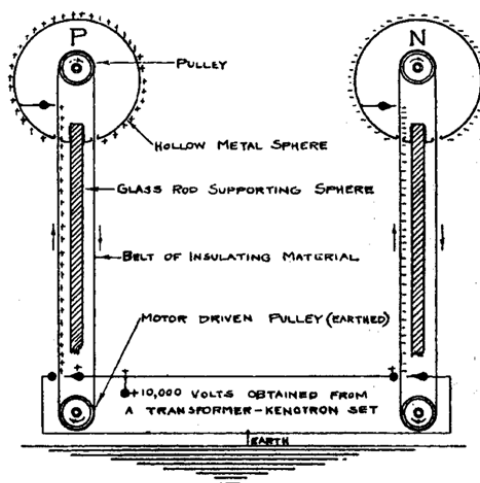


图 18: 范德格拉夫高压发生器原理示意图

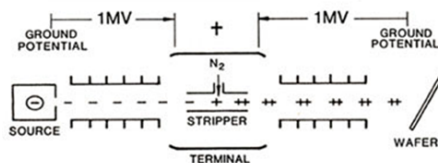


图 19: Tandem 加速器原理示意图

用，直线感应加速器虽然可以通过增加加速腔的模式虽然可以获得更高的能量，但在实际应用中，考虑成本和空间等各种因素，可获得的能量尚不如 betatron。所有的直线型加速器都有这个“优点”，不计成本和空间的话，可以获得更高的能量。

当“高能”是很重要的目标的时候，加速效率就显得非常关键。在加速器物理中，如何在同样的长度下获得更高的束流能量就显得异常重要。单位长度上粒子可获得的能量，以电压的方式计算的话，我们称之为“加速梯度”，单位一般为 MV/m 或 GeV/m 。有时候我们更关注的是等效加速梯度，因为有的结果和方法虽然在很短距离内可获得很高的能量，但为了实现这种方法或结构需要很长的距离的话，那无疑等效加速度也是不高的。

如果有一种方法，能反复地对同一个束流进行加速的话，那就最好了。

“交变电压” AC Voltage 1924 年，Gustaf Ising 就提出了如图所示的连续加速的想法。控制各个“管子”上生成电压的时间，在粒子到达不同间隙的时候

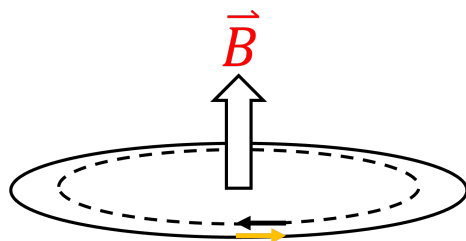


图 20: 变化的磁场产生电场。

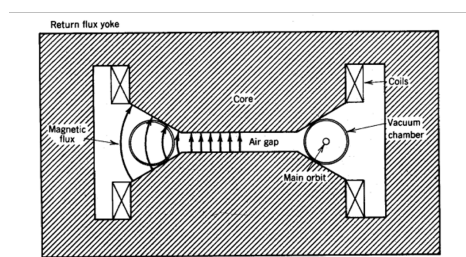


图 21: Betatron 的典型构造。

在不同间隙上获得加速。这个想法虽然最终未能实现，但已经具备了现代直线加速器基本雏形。比如说加速电场需要与粒子的运动进行同步，在不需加速的时候粒子在“管子”里运动不受外场的影响。因为经过加速后粒子的速度越来越快，因此“管子”会变得越长。

这个 idea 很快就被 Wideroe 改进并实现了。与 Ising 的方案相比，Wideroe 将交变电压的两级叫错连接在相邻的“管子”上，电压的变化频率是固定的，只需要根据粒子的速度调整“管子”的大小即可。Wideroe 在 1928 年通过 1MHz, 25kV 的交变电压实现了 50keV 的加速。所使用的“管子”我们称之为漂移管 (Drifting Tube)。

漂移管加速器 Drifting Tube Linac

现代意义上的效率较高的加速方式随着微波技术的发展而得以实现。Luis Alvarez 将漂移管放进微波谐振腔中，谐振腔中可产生交替变化的电磁场。电场用于加速的模型可简化如图所示。

Alvarez 类型的漂移管加速器如图所示。整个谐振腔通过微波馈入以后在轴向（束流运动）方向产生可用于加速的电场，结构简单。1947 年通过 12m 长的该种类型加速器将质子加速到 32MeV。

思考：DTL（漂移管直线加速器）的能量限制？

谐振腔的设计与频率直接相关且一一对应，束流在漂移管间隙获得加速。漂



图 22: Kerst 和他发明的第一台 Betatron

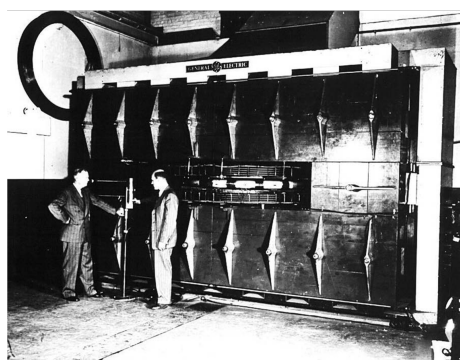


图 23: 通用电器公司建造的 100MeV 的 betatron。

移管的长度由束流能量决定，随着束流能量增加，漂移管长度越来越长，因此等效的加速梯度或者说效率就下降了。

回旋加速器 Cyclotron 带电粒子在磁场中受洛伦兹力，做圆周运动。那是不是可以将直线加速器“卷起来”？这样我们只需要在一个位置提供加速间隙，束流就能反复获得加速了。需要相应的处理的是，束流做圆周运动的半径随着束流能量的增加而变大。

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \rightarrow w = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

回旋加速器的原理示意图如图所示，束流从靠近磁铁的中心注入，磁铁中放置一个交变电压（或谐振腔）的间隙，束流在被加速后半径逐渐变大，最终从边缘处引出。

如图所示为最早 Ernest Lawrence 及他发明的回旋加速器，仅有手掌大小。现如今回旋加速器依然用于各种对能量要求不高的加速器应用当中，尤其对质子重离子来说，还是非常有效的加速方式。

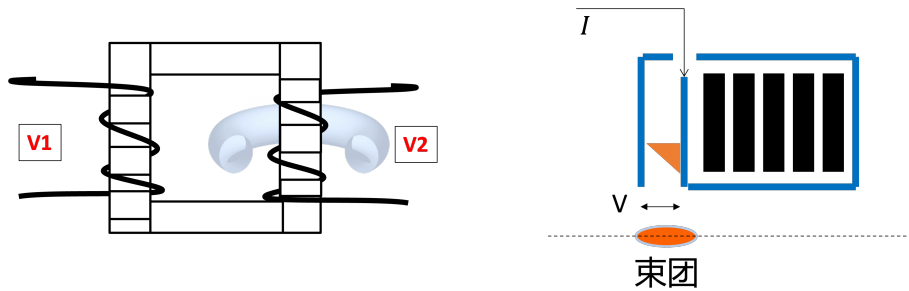


图 24: 感应加速器的变压器原理示意图

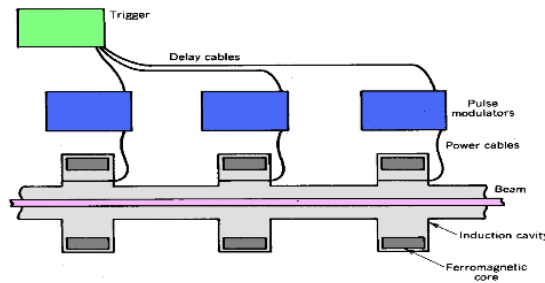


图 25: 直线感应加速器的加速结构组成图（横截面为圆形）。

同步加速器 Synchrotron 在回旋加速器中，磁场是不变化的。因此从洛伦兹力的公式中我们可以看到回旋半径随粒子能量的增加而增大。而磁场是由磁铁提供的，因此，可获得的磁场的大小和磁铁的规模限制了回旋加速器可获得的最大能量。同时，随着体积增大，插入磁铁中用于加速的谐振腔也越来越大，在工程实践上也愈加困难。那如何解决这个问题？如果磁场的强度随着束流能量的增加而增强，那理论上粒子的轨道可以保持不变。如果轨道半径不变，那实际上我们也无需建造特别庞大的磁铁，而只是需要在束流轨道附近提供偏转磁场即可。这就是同步加速器的基本想法。

从洛伦兹力的公式来看，

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \rightarrow r = \frac{p}{qB}$$

可见，只要磁场强度 B 随着粒子动量 p 一同增加，则粒子的偏转半径 r 保持不变。让带电粒子的能量与磁场同步增加以保证粒子轨道的不变，即为“同步加速器”（Synchrotron）。Marcus Oliphant 说过如下一段话，很好的描述了同步加速器的原理。

Particles should be constrained to move in a circle of constant radius thus enabling the use of an annular ring of magnetic field...

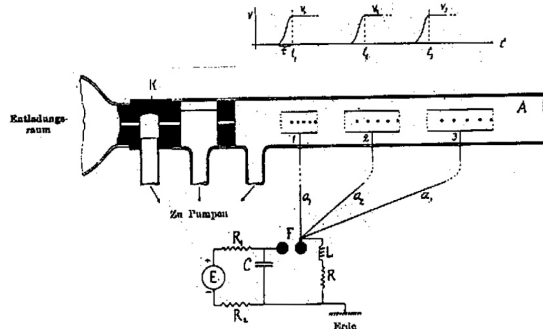


图 26: Ising 提出的基于交变电压进行加速的方法。

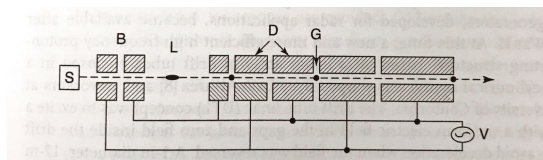


图 27: Wideroe 通过交变电压实现的加速原理。

which would be varied in such a way that the radius of curvature remains constant as the particles gain energy through successive accelerations by an alternating electric field applied between coaxial hollow electrodes.

图示为通用电气 (General Electric Co.) 在上世纪 40 年代建造的电子同步加速器, 图上还可以看到有光发出。现如今同步辐射光源已经成为基础科研非常重要的研究手段, 名称即来自于在同步加速器上产生并利用该种辐射, 称之为同步辐射 (Synchrotron Radiation)。

讨论: 同步加速器的能量限制? 与回旋加速器相比, 同步加速器起始还有非常明显的优势。理论上, 我们只需要建一个圆环形状的磁场, 然后在圆环上放置一个谐振腔, 只要粒子的能量增加和磁场增加符合洛伦兹力维持半径不变就可以了。但实际上我们还可以将这个圆环切成任意多个离散的弧, 弧之间就是直线连接, 不受电场作用, 虽然整体的周长增加了, 但我们可以在直线节上放置谐振腔、聚焦磁铁、真空和束测等设备, 极大地增加了加速器设计的灵活性。

对能量限制来说, 同回旋加速器一样, 磁场的大小依然是制约其最大能量的因素。但与回旋加速器不同, 因为现在磁场切成弧的片段以后, 对磁铁设计的要求就大大降低了。常温的磁铁设计一般来说对于较大尺寸的磁铁, 2 T 即是极

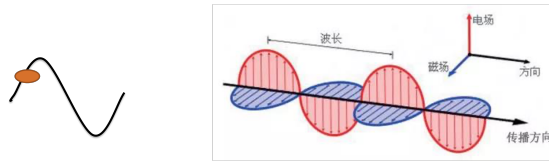


图 28: 射频加速与电磁场。

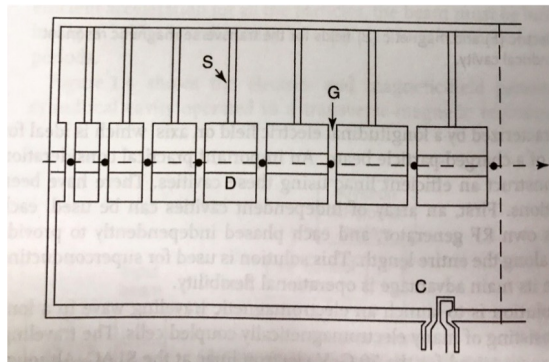


图 29: Alvarez 型漂移管加速器。

限了，一般使用的偏转磁铁都低于 2 T。随着超导技术的发展，8 T 左右的超导磁铁已经量产并使用，目前正在研究超过十几特斯拉的超导磁铁。

同时我们还可以看到，由于磁铁是分离的，就洛伦兹力的公式来说，几十磁铁到达了限值，我们还可以通过增大半径 r 来提高能量。由于同步辐射的存在，一般加速器设施都建于地下，因此需要挖掘超大周长的隧道。

图示为欧洲核子研究中心（CERN）的各种各样的加速器设施示意图。从源头的 LINAC4（直线加速器）开始，束流被注入 PSB（Proton Synchrotron Booster），随即进入 PS（Proton Synchrotron），再进入 SPS（Super Proton Synchrotron），最终注入 LHC（Large Hadron Collider）。同步加速器的半径越来越大，最后的大型强子对撞机 LHC 周长达 27 公里。在 LHC 中使用的即为超导磁铁，也是世界上第一次大规模的使用超导技术。在 2012 年证实了 Higgs 粒子的存在，引领着当前高能物理研究的潮流。当前，CERN 和我国都在规划周长约为 100 公里的大型对撞机，预计采用更强磁场的超导磁铁。

3.6 加速器的革命性原理

虽然上述我们回顾了加速器的主要发展历程并介绍了各种各样的加速器，但归根结底，他们都是在解决“加速”这个基本问题。但实际上，作为一个加速

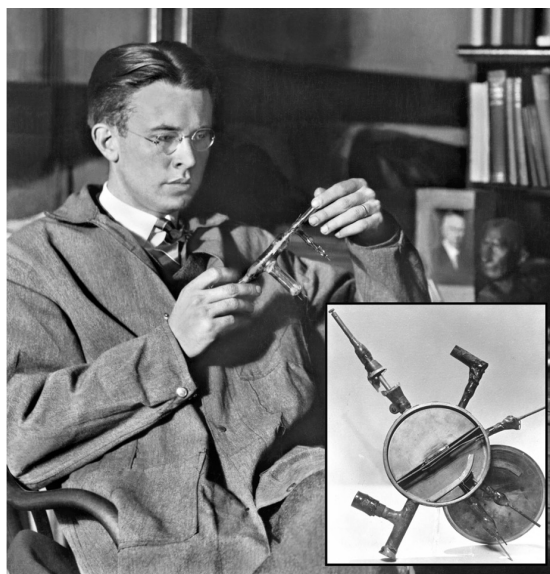


图 30: Lawrence 及其发明的回旋加速器。

器，只是能“加速”是远远不够的。毕竟加速带电粒子最终的目的都是要“用”加速了的粒子，而能不能用、有什么用、怎么用等需求决定了选择什么样的加速方式，也对束流本身提出了许多要求。这些前提都是我们要能对束流，而不是单一的粒子，进行稳定的加速。具体的数学上的表达和物理解释是后续束流动力学的主要内容，在此我们仅直观地描述这两个现代加速器的理论基石。

3.6.1 纵向自稳相原理 Longitudinal phase stability

不管是在环形加速器还是直线加速器中，都有一个加速电场与束流同步的基本需求。在漂移管加速器中，通过调整漂移管长度匹配电场的变化频率。在同步加速器或回旋加速器中，每一圈获得的加速电压的大小应当能保证下一次束流“看见”加速电场时是被加速而不是被减速的。不管在直线还是环形加速器中，假设有一个参考的理想粒子，我们设计加速器的时候让它每次被加速时“看见”的相位都是同一个（也可以根据需求让其变化），则该相位称之为参考相位。

使用谐振腔进行加速器有一个很好的特点。实际的束团在时间或空间上都有一定的分布，束团在横向和纵向都有一定尺寸。现在就纵向来说，相对束团中心的参考粒子来说，假设我们让跑得快的束团粒子（“头部”）获得相对较低的加速，而让跑得慢（“尾部”）的粒子获得相对较高的加速，那么他们都逐渐往中间聚集。即使他们到达束团中间时能量不同而继续向头部或尾部前进，由于

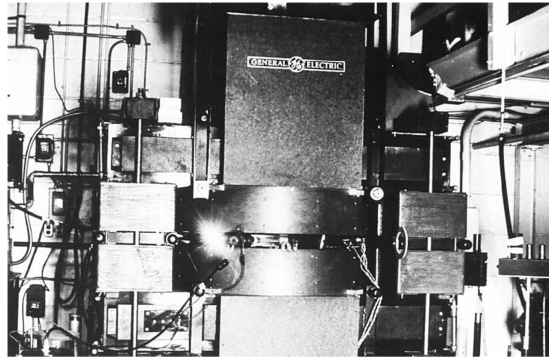


图 31: 通用电气 20 世纪 40 年代的 300MeV 的同步加速器。

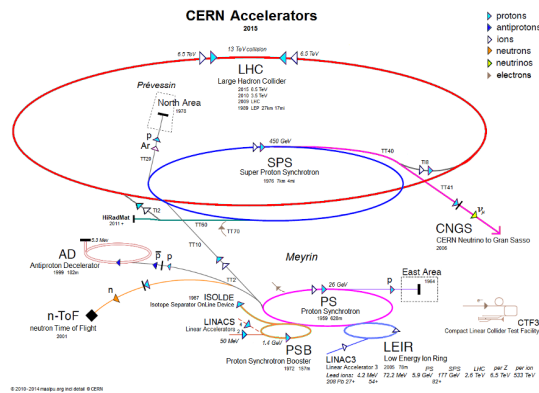


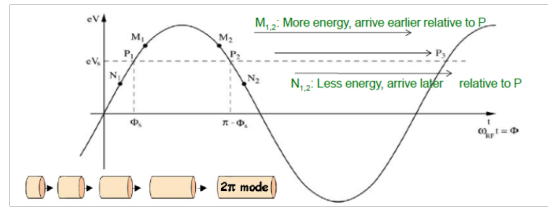
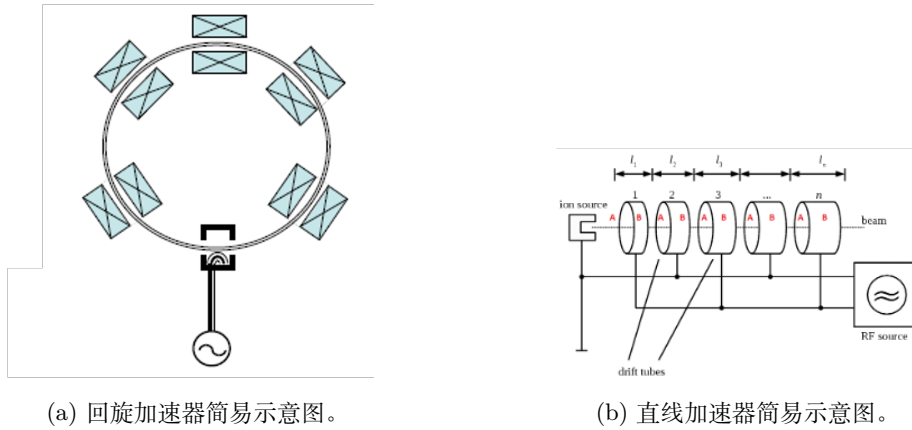
图 32: 欧洲核子研究中心的大型强子对撞机。

头部尾部加速的差别，他们依然会在一定范围内震荡而不会散开。谐振腔的加速电场如图所示是像三角函数一样变化的，天然就提供了这样的条件。以最高点为界，由于两侧的电场大小（或加速电压）的变化趋势不同，分别为上升和下降，因此只有一侧能够提供“头部能量比尾部能量低”的条件。

注：在学习束流动力学之后，我们会发现，有时候我们也需要“头部”的粒子比“尾部”的粒子获得更多的加速才能维持纵向的稳定加速。

3.6.2 强聚焦原理 Alternating Focusing

解决了束团在纵向加速上的稳定性问题，在束团的横向运动上，我们也需要一个稳定机制，以保证束团在加速和传输过程中的稳定而不至于散开。束团都是运行在真空管道中的，都有一定的横向尺寸，束团在横向上散开就会碰壁而丢失。而且，很多时候我们都需要束团在横向上维持一个很小的尺寸。



早期利用磁场变化的感生电动势实现的 Betatron 的束流在束团运动的轨道上，在横向较小范围内，通过对磁铁的一定设计可获得横向的聚焦力，我们称之为“弱聚焦原理”。数学过程在此略过，我们仅以 1954 年美国建造的同样采用弱聚焦原理用于加速质子的 Bevatron 为例，其最大能量为 6.2 GeV，磁铁总重量约为一万吨，真空盒的孔径超过了一米。由图可见其磁铁规模之大。值得一提的是，反质子就是在 Bevatron 上证实的。

而同样在 1950 年前后由 E.D.Courant, M.S.Livingston 和 H.S.Schneider 提出的强聚焦原理，完美地解决了横向聚焦的问题。四极磁铁的特征是能在横向上提供与距离成正比的磁场强度。但在横向上来说如果水平是让粒子向内“聚焦”的话在其垂直方向上则是让粒子向外的“散焦”。Courant 等人证实，通过交替排布一系列极性相反的四极磁铁，能够实现束流整体的“聚焦”传输而不至于发散。因此，该原理被称之为“强聚焦原理”。前面在介绍同步加速器的时候我们提到同步加速器的环形轨道原则上我们可以切为一个个的弧，中间用直线连接。如果我们在直线节上放置满足强聚焦条件的四极磁铁，则能够使得束流在整个加速过程中保持横向稳定。

在 1960 年美国建成了使用了强聚焦原理的 AGS(Alternating Gradient Syn-



图 35: 基于弱聚焦原理建造的 Bevatron。

chrotron) 加速器, 磁铁总重量约为 4 千吨, 但其质子束流能量可达 33GeV。可见强聚焦原理相比弱聚焦的优越之处。现代大型加速器几乎都基于强聚焦原理设计并建造。

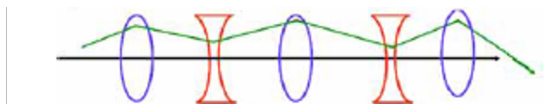


图 36: 强聚焦原理为极性交替排布的四极磁铁组成。



图 37: 美国 BNL 的交变梯度同步加速器 (AGS)。

4 数学物理基础知识回顾

刘星光

4.1 线性代数基本知识回顾

4.1.1 标量与矢量 Scalars and Vectors

只具有大小的量成为**标量**，如质量、温度和时间等，
一般记为 m, T 和 t 。

同时具有大小和方向的量称为**矢量**，如物体的速度、作用在物体上的力和电场磁场等，

一般记为 \mathbf{a}, \mathbf{F} 和 E, M 等，一般用粗体表示，但为了区分（尤其是手写），常用带箭头的量表示，上述可记为 \vec{a}, \vec{F} 和 \vec{E}, \vec{B} 。

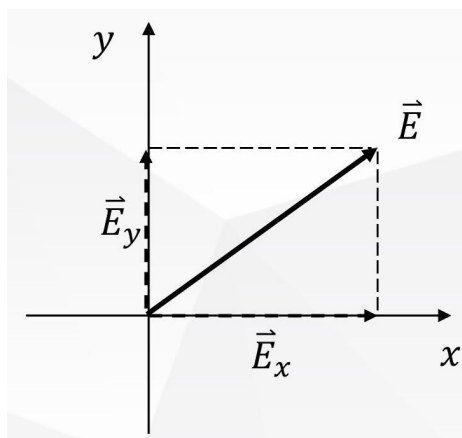


图 38: 矢量及其分量在坐标系中的表示。

矢量的计算

矢量的加法: 等于各自坐标的相加。

交换律: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

结合律: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

矢量的乘法: 点乘 (dot product) 或内积 (inner product): 结果为标量,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + \dots$$

向量乘积 (vector product): 结果为矢量, 方向与二者构成的平面垂直且满足右手定则,

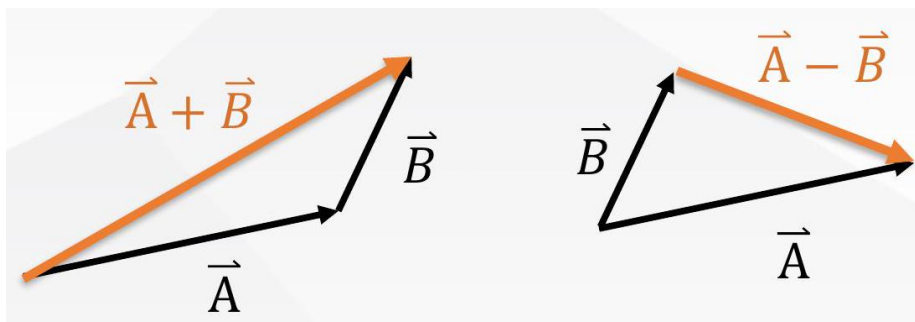


图 39: 矢量的加减法。

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

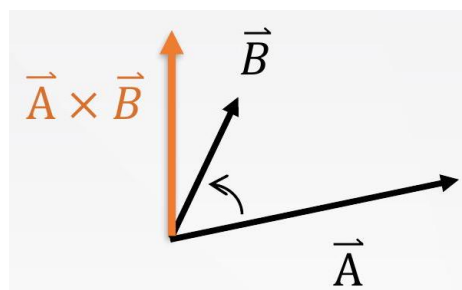


图 40: 矢量的乘法。

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

注: 为便于书写, 三个坐标向量我们简单记为 i, j, k

练习: 如何用坐标法计算矢量乘积。

$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, 计算 $\vec{A} \times \vec{B}$

4.1.2 线性方程式与矩阵 Linear equations and matrices

如何解如下线性方程组?

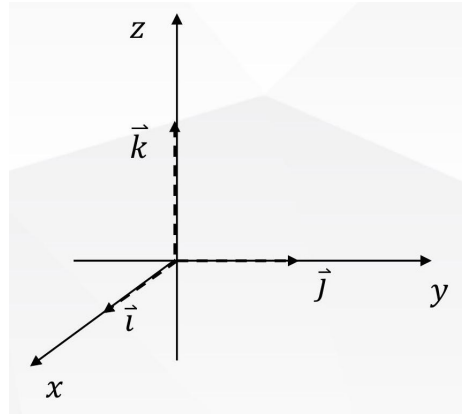


图 41: 矢量的三维基坐标。

$$x - z = 5$$

$$-2x + 3y = 1$$

$$x - 3y + 2z = -10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

分别定义:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

则有:

$$Mr = k$$

如果 $ab = c$, 那么 $b = \frac{c}{a} = ca^{-1}$. 上面这个问题里, 我们有 $r = M^{-1}k$ 吗?

如果 $AB = BA = I$, I 为单位矩阵, 则记 $B = A^{-1}$, 为 A 的逆矩阵, 且,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = m_{ij}$ 对应余矩阵的值乘以 $(-1)^{i+j}$.

练习: 计算上页 M 的逆矩阵 M^{-1} 并给出 r 的值。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4.1.3 特征值及特征向量

坐标变换

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

记 $\vec{R} = \lambda \vec{r}$, 则有

练习: 求 λ

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

称为矩阵 M 的**特征方程**。上式可解得其特征向量 (λ_1, λ_2) . 则矩阵 M 可以找到一个 C 使得:

$$C^{-1}MC = D$$

D 为仅包含特征值的对角矩阵, 该过程称为对角化。

4.2 偏微分方程简要回顾

4.2.1 梯度、散度和旋度 Gradient, Divergence, Curl

梯度

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

散度 $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

旋度

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

拉普拉斯公式:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

波动方程:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

扩散方程, 热传导和薛定谔方程:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

高斯积分原理

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

斯托克斯原理

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

4.3 带电粒子与电磁场

4.3.1 麦克斯韦方程组 Maxwell's Equations

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ 库仑定律}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \text{ 法拉第电磁感应定律}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E} \text{ 安培定则}$$

在国际单位制中,

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{C}{Vm} = 8.8541878 \times 10^{-12} \frac{C}{Vm}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 1.2566371 \times 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

4.3.2 电磁场以及运动方程

由于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 定义一个向量 \vec{A} 使得,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

则法拉第定律:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \quad \text{即} \quad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0$$

可解为 $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$, 可理解为磁场变化产生的电场。

加上静电场的部分则为:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla \phi$$

粒子在电磁场中收到的力为 (电场与磁场):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

5 束流动力学基础

苑尧硕

5.1 束流动力学基本介绍

发展

随着粒子加速器技术不断发展而形成的交叉学科

作用

描述带电粒子在加速器电磁场中的动力学行为的理论

意义

帮助人们更深入的理解和控制束流行为，从而设计和优化加速结构，提高束流的流强

分类

分类 (按维度) $\left\{ \begin{array}{l} \text{横向束流动力学} \\ \text{纵向束流动力学} \end{array} \right.$

分类 (按粒子数) $\left\{ \begin{array}{l} \text{单粒子动力学} \\ \text{多粒子动力学 (集体效应)} \end{array} \right.$

包含领域

- 分析力学 (哈密顿量、动力学方程)
- 电磁学与电动力学 (麦克斯韦方程组)
- 热力学与统计物理 (相空间、绝热、温度等概念)
- 等离子体物理 (等离子体波、集体不稳定性)
- 原子物理学与量子力学 (束流的极化)

学习顺序

- 横向束流动力学
- 纵向束流动力学
- 横纵向之间的耦合效应
- 多粒子动力学 (集体效应)

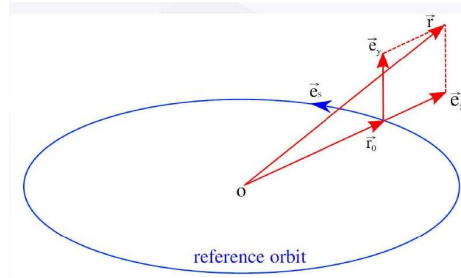


图 42: 自然坐标系与参考轨道。

5.2 动力学方程与哈密顿量

5.2.1 带电粒子在电磁场中受到的洛伦兹力

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} = \vec{F} = e(\vec{\varepsilon} + \vec{v} \times \vec{B})$$

带电粒子在电磁场中的拉格朗日形式

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\phi + e\vec{v} \cdot \vec{A}$$

广义动量 $\vec{P} = \vec{p} + e\vec{A}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

5.2.2 自然坐标系

定义沿质点的运动轨道建立的坐标系

- 纵向沿着环的方向 \vec{e}_s
- 横向垂直于纵向的平面
 - 水平在环的平面内 \vec{e}_x
 - 垂直垂直于环平面 \vec{e}_y

粒子的坐标参数表示为 (x, y, s)

- 理想粒子 $x = 0, y = 0,$
- 实际粒子围绕理想粒子作小幅振荡, 即 betatron 振荡

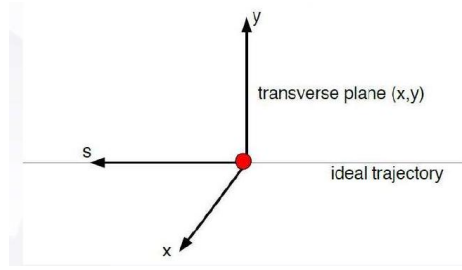


图 43: 自然坐标系

$$\vec{r} = \vec{r}_0(s) + x\vec{e}_x(s) + y\vec{e}_y(s)$$

5.2.3 横向运动

哈密顿量在自然坐标系下的表示

- 以 (x, y, s) 作为坐标, 通过正则变化, 哈密顿量变为

$$H_2 = e\Phi + c \left\{ m^2 c^2 + \frac{(p_s - e\vec{A}_s)^2}{(1 + x/\rho)^2} + (p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

旧: 直角坐标系 (\vec{r}, \vec{P})

新: 自然坐标系 $(x, p_x; y, p_y; s, p_s)$

- 变化为以 s 为自变量

$$H_3 = - \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \left[\frac{(H - e\Phi)^2}{c^2} - m^2 c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - eA_s$$

$$H_3 \approx -p \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) + \frac{1 + x/\rho}{2p} \left[(p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - eA_s$$

新: 自然坐标系 $(x, p_x; y, p_y; t, -H_2)$

► 环形加速器中磁铁的主要类型

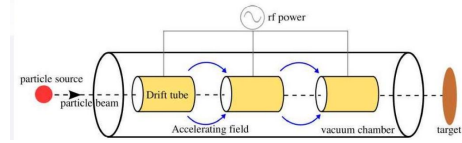


图 44: 漂移管加速器。

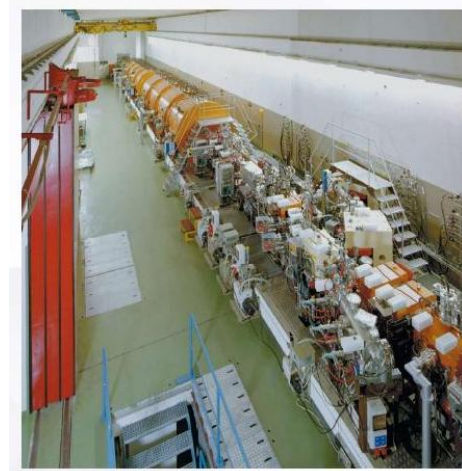


图 45: 德国重离子研究中心 (GSI) 的 unilinic 直线加速器

6 直线加速器和环形加速器

苑尧硕

DTL(Drift-tube Linac) 漂移管型直线加速器

环形加速器

环形加速器磁铁的主要类型

- 线性元件
 - 二极磁铁 (偏转磁铁): 提供偏转力



图 46: 中国散裂中子源: 快循环同步环



图 47: 四极磁铁.



图 48: 二极磁铁和六极磁铁

- 四极磁铁: 提供横向聚焦力
- 六极磁铁、八级磁铁: 用于控制束流的稳定性非线性元件

四极磁铁

二极磁铁和六极磁铁

6.0.1 Betatron 运动方程

定义

变聚焦加速结构中的横向运动方程

电势 $\phi = 0$; 磁场 $B_s = 0$

外界电磁场可表示为 $\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y$ 通过哈密顿量 H_3 , 可得 Betatron 运动方程为

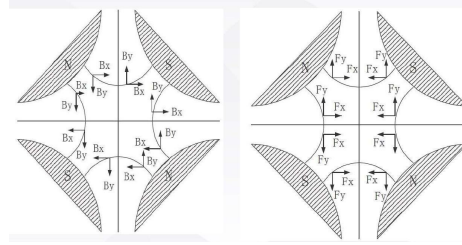


图 49: 带负电荷的粒子垂直于纸面向里运动。x 方向: 聚焦; y 方向: 散焦

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

磁刚度

描述环形加速器的物理量

$$B\rho = \frac{p_0}{e}$$

其中 p_0 为理想粒子动量

6.0.2 环形加速器中的磁场

由麦克斯韦方程 $\nabla \times \vec{B} = 0$ 并且 $B_s = 0$

可得 $\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$

结论: 在 x 和 y 两个方向上同时提供回复力是不可能的。

当粒子与设计轨道间有一个小的位移 (x, y) , 受到的磁场为

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y = (B_x(0,0) + \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial y} y + \frac{\partial B_x}{\partial x} x}_{\text{回复力}}) \vec{e}_x + (B_y(0,0) + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y}_{\text{回复力}}) \vec{e}_y$$

6.0.3 二极磁铁和四极磁铁

四极磁铁中磁场及粒子受力

- 处于磁铁中心: 不受力
- 处于位置 (x, y) : 受力情况为 $B_x = B_1 y$ $B_y = B_1 x$

四极磁铁磁场梯度为常数 B_1

6.0.4 Hill equation (希尔方程)

在只有二极磁铁和四极磁铁的情况下，Betatron 方程可以简化为 Hill 方程

简化条件: 1. 只有二极磁铁和四极磁铁, 2. 动量 $p = p_0$ (无能散)

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

(水平) 二极磁铁情形 $B_y = B_0 \quad B_x = 0$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0 \quad \text{其中 } \frac{1}{\rho} \text{ 量纲为 } m^{-2}, \text{ 表现为水平方向上的弱聚焦力}$$

四极磁铁情形 $B_y = B_1 x \quad B_x = B_1 y \quad \rho = \infty$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 & \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \\ \frac{d^2x}{ds^2} \mp \frac{B_1 x}{B\rho} = 0 & \quad \frac{d^2y}{ds^2} \pm \frac{B_1 y}{B\rho} = 0 \end{aligned}$$

亦写作: $x'' + K_x(s)x = 0 \quad K_x = \mp \frac{B_1}{B\rho} y'' + K_y(s)y = 0 \quad K_y = \pm \frac{B_1}{B\rho}$

可以看出, 水平和垂直两个方向上的聚焦系数 $K_x = -K_y$

一个方向为聚焦力, 另外一个方向必为散焦力

粒子在二极磁铁和四极磁铁的运动可总结为

水平方向

$$x'' + K_x(s)x = 0$$

垂直方向

$$y'' + K_y(s)y = 0$$

其中

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + K_1(s)$$

$$K_y(s) = -K_1(s)$$

$$K_1(s) = \mp \frac{B_1(s)}{B\rho}$$

- 利用交变梯度排列四极铁来进行聚焦的加速器叫**强聚焦加速器**, 是现代高能粒子加速器的基础。
- 强聚焦原理将导致束团尺寸与磁铁强度及间距相关, 而**不依赖于加速器的大小**。

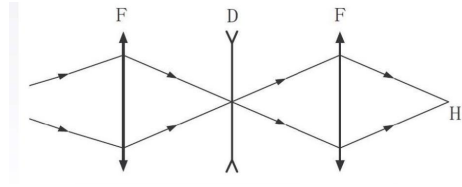


图 50: 加速器中常见的四极磁铁排列-FODO 结构。

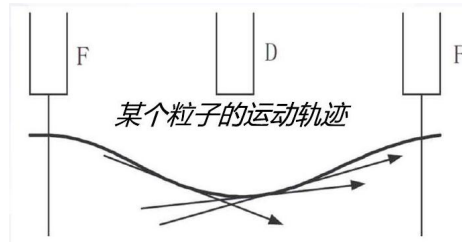


图 51: 在 FODO 结构中粒子的运动轨迹。

7 动力学方程及磁铁

苑尧硕

7.1 Betatron 方程 (横向振荡方程)

电场为零 & 横向磁场

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

希尔方程无能散, 线性元件 (二极或四极磁铁)

水平方向

$$x'' + K_x(s)x = 0$$

其中 $K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + K_1(s)$

$$K_1(s) = \mp \frac{B_1(s)}{B\rho}$$

垂直方向

$$y'' + K_y(s)y = 0$$

$$K_y(s) = -K_1(s)$$

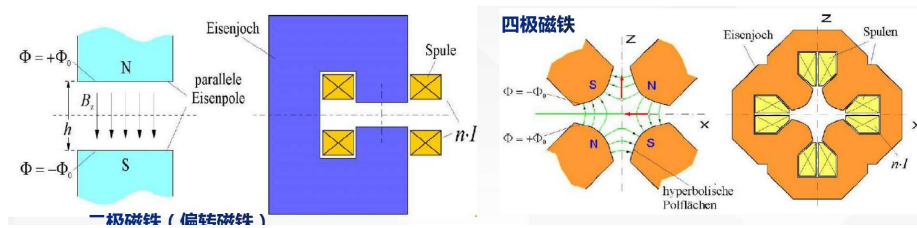


图 52: 二极磁铁示及四极磁铁。

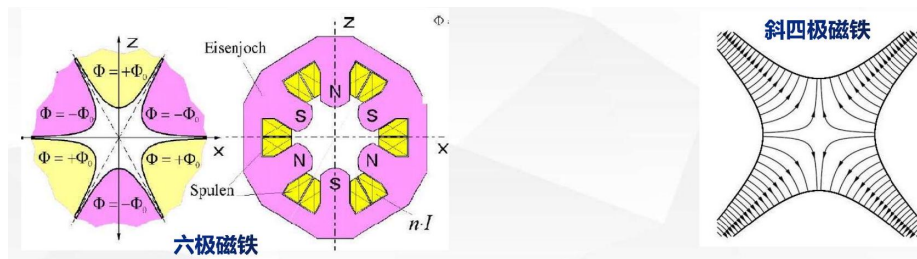


图 53: 六极磁铁和斜四极磁铁。

7.2 组成加速器的不同类型的电磁铁元件

二极磁铁 (偏转磁铁)

各种类型的磁铁

强聚焦加速器与 lattice 利用交变梯度排列四极磁铁来进行聚焦的加速器叫强聚焦加速器，是现代高能加速器的基础。各种磁铁排布组成 lattice。

7.3 传输矩阵

7.3.1 粒子运动在相空间中的表示

希尔方程中的聚焦系数 $K_{x,y}(s)$ 为分段函数，满足周期性条件。加速器中磁铁一般为周期性排列。

$$z'' + K_z(s)z = 0 \quad K_z(s+L) = K_z(s)$$

通解:

$$z(s) = a_1 \sin(\sqrt{K_z}s) + a_2 \cos(\sqrt{K_z}s)$$

或者,

$$z(s) = a \cos(\sqrt{K_z}s + b) \quad (K_z > 0 \text{ 情形})$$

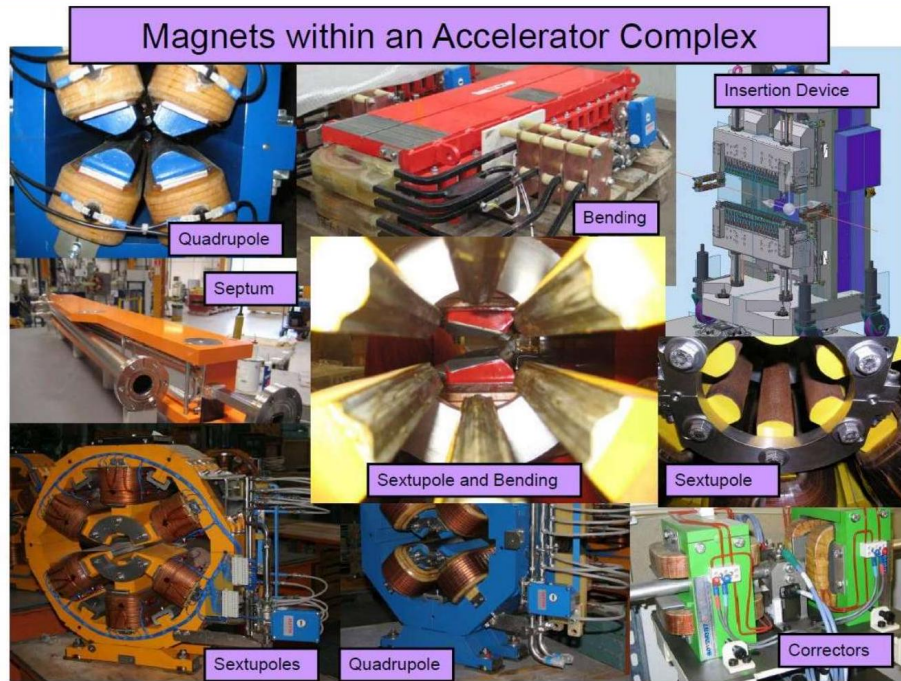


图 54: 加速器系统中各种各样的磁铁。

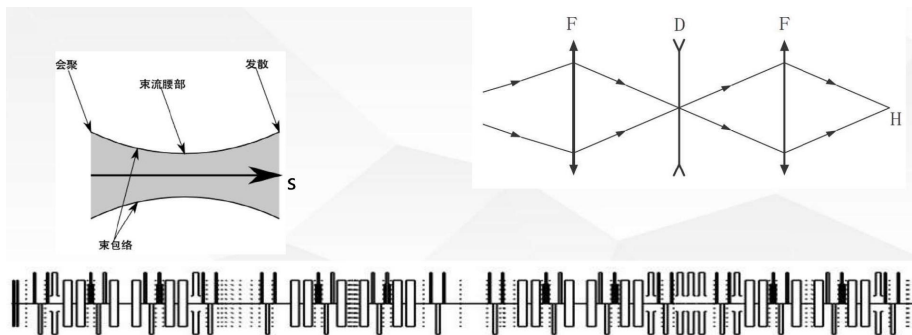


图 55: 磁铁元件在加速器中的排列:lattice

a1 和 a2 由初值 ($z = z_0, z' = z'_0$) 决定。

复习: 一阶线性齐次常系数微分方程组表示为矩阵形式

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{ds} &= a_{11}x_1(s) + a_{12}x_2(s) + a_{13}x_3(s) \\ \frac{dx_2}{ds} &= a_{21}x_1(s) + a_{22}x_2(s) + a_{23}x_3(s) \\ \frac{dx_3}{ds} &= a_{31}x_1(s) + a_{32}x_2(s) + a_{33}x_3(s)\end{aligned}$$

可写作矩阵形式:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = A\vec{x}(s)$$

解为 $\vec{x}(s) = e^{A(s-s_0)}\vec{x}(s_0)$

n 阶常微分方程可以化为 n 个一阶常微分方程组成的方程组。

$$\vec{z}(s) = \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix}$$

从 s_0 到 s 的传输矩阵 (注意顺序):

$$\vec{z}(s) = M(s | s_0) \vec{z}(s_0)$$

注意: z, z' 不是一对正则共轭坐标量。此外, 传输矩阵由初值 $\vec{z}(s_0)$ 确定。

希尔方程 $z'' + K_z(s)z = 0$

$$\text{通解为} \begin{cases} z(s) = a_1 \sin(\sqrt{K_z}s) + a_2 \cos(\sqrt{K_z}s) & K_z > 0 \\ z(s) = a_1 s + a_2 & K_z = 0 \\ z(s) = a_1 \sinh(\sqrt{-K_z}s) + a_2 \cosh(\sqrt{-K_z}s) & K_z < 0 \end{cases}$$

在 $s = s_0$ 处的初值为 $z(s_0), z'(s_0)$

聚焦四极场 $K_z > 0$ 情形的传输矩阵:

$$z'' + K_z(s)z = 0 \Rightarrow z(s) = a_1 \sin(\sqrt{K_z}s) + a_2 \cos(\sqrt{K_z}s)$$

$$z(s_0) = a_1 \sin(\sqrt{K_z}s_0) + a_2 \cos(\sqrt{K_z}s_0)$$

$$z'(s_0) = a_1 \sqrt{K_z} \cos(\sqrt{K_z}s_0) - a_2 \sqrt{K_z} \sin(\sqrt{K_z}s_0)$$

$$z(s) = z(s_0) \cos[\sqrt{K_z}(s-s_0)] + z'(s_0) \frac{1}{\sqrt{K_z}} \sin[\sqrt{K_z}(s-s_0)]$$

$$z'(s) = -z(s_0) \sqrt{K_z} \sin[\sqrt{K_z}(s-s_0)] + z'(s_0) \cos[\sqrt{K_z}(s-s_0)]$$

通过对比, 可以确定矩阵各个元素

$$\begin{aligned}\vec{z}(s) &= M(s | s_0) \vec{z}(s_0) & z(s) &= m_{11}z(s_0) + m_{12}z'(s_0) \\ z'(s) &= m_{21}z(s_0) + m_{22}z'(s_0)\end{aligned}$$

传输矩阵为

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_z}(s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{K_z}} \sin \sqrt{K_z}(s - s_0) \\ -\sqrt{K_z} \sin \sqrt{K_z}(s - s_0) & \cos \sqrt{K_z}(s - s_0) \end{pmatrix}$$

散焦四极场 $K_z < 0$ 情形 (课后作业)

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{-K_z}(s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{-K_z}} \sinh \sqrt{-K_z}(s - s_0) \\ \sqrt{-K_z} \sinh \sqrt{-K_z}(s - s_0) & \cosh \sqrt{-K_z}(s - s_0) \end{pmatrix}$$

漂移节 $K_z = 0$ 情形

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示: $\sinh(A-B) = \sinh A \cosh B - \cosh A \sinh B$ $\cosh(A-B) = \cosh A \cosh B + \sinh A \sinh B$

二极磁铁的传输矩阵

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_x}(s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{K_x}} \sin \sqrt{K_x}(s - s_0) \\ -\sqrt{K_x} \sin \sqrt{K_x}(s - s_0) & \cos \sqrt{K_x}(s - s_0) \end{pmatrix}$$

提示: $K_x = \frac{1}{\rho^2} \theta = \frac{s-s_0}{\rho}$

二极磁铁的传输矩阵以偏转半径和偏转角度的传输矩阵

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

7.3.2 传输矩阵的计算

- 传输矩阵是加速器 lattice (或者元件) 的属性, 而不是粒子束流的属性。
- 利用传输矩阵, 可以计算出粒子通过该元件后粒子运动状态 (位置和角度) 的改变。

例 1 已知漂移节的传输矩阵 $M_{\text{drift}} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $l = s - s_0$, 和粒子的初始坐标 x_0, x_0' 求经过漂移节后粒子位置和角度的改变。

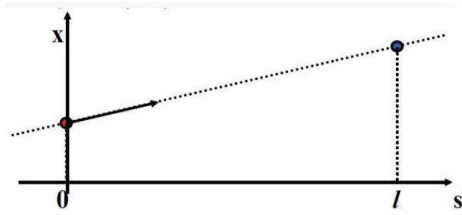


图 56: 粒子经过漂移节时 x 的变化。

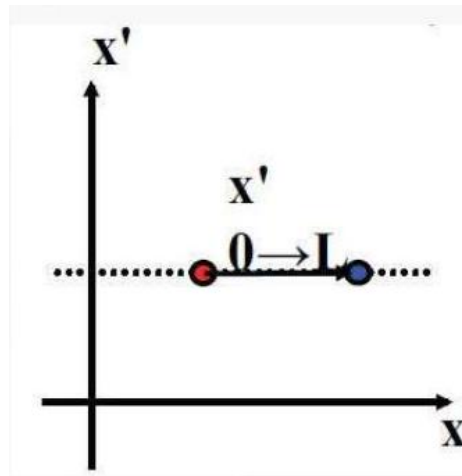


图 57: 粒子经过漂移节时角度 x' 的变化。

解：通过

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

可得

$$x = x_0 + lx'_0$$

$$x' = x'_0$$

粒子经过漂移节后，只有横向位置发生改变。

例 2 已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标 $x = x_0, x' = x'_0$

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0}l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0}l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0}l & \cos \sqrt{K_0}l \end{pmatrix}$$

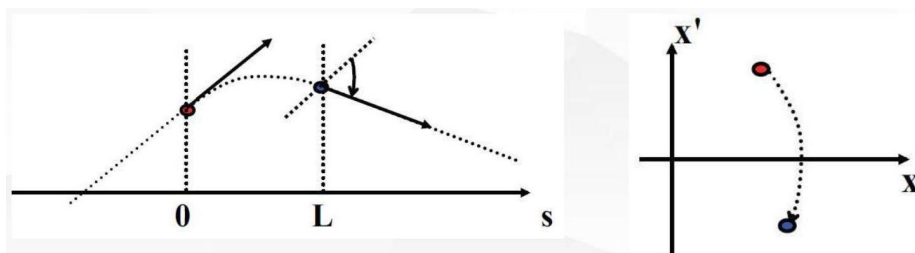


图 58: 粒子经过四极磁铁时轨迹的变化。

求经过该四极磁铁后粒子位置和角度的改变

思路: 已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标 $x = x_0, x' = x_0'$ 求经过该四极磁铁后粒子位置和角度的改变

$$\text{解: } \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

7.3.3 粒子在相空间中的表示

定义: 广义坐标和广义动量联合表示的多维空间

例如 (x, p_x) 构成一个水平方向的二维相空间, (y, p_y) 构成垂直方向的二维相空间, (x, y, p_x, p_y) 构成一个横向四维相空间.

实际上, 用坐标 x 和角度 x' 构成的相空间更为方便

$$x' \equiv \frac{dx}{ds}$$

8 元件的传输矩阵

苑尧硕

8.1 简单回顾

传输矩阵

$$\vec{z}(s) = M(s | s_0) \vec{z}(s_0)$$

从 s_0 到 s 的传输矩阵 (注意顺序) 聚焦四极磁铁和二极磁铁

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_z}(s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{K_z}} \sin \sqrt{K_z}(s - s_0) \\ -\sqrt{K_z} \sin \sqrt{K_z}(s - s_0) & \cos \sqrt{K_z}(s - s_0) \end{pmatrix}$$

散焦四极磁铁

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{-K_z}(s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{-K_z}} \sinh \sqrt{-K_z}(s - s_0) \\ \sqrt{-K_z} \sinh \sqrt{-K_z}(s - s_0) & \cosh \sqrt{-K_z}(s - s_0) \end{pmatrix}$$

二极磁铁

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 传输矩阵是加速器 lattice (或者元件) 的属性, 而不是粒子束流的属性。
- 利用传输矩阵, 可以计算出粒子通过该元件后粒子运动状态 (位置和角度) 的改变。

漂移节

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关于相空间的定义

- x 和 x' 构成二维水平平面相空间 ($x' \equiv \frac{dx}{ds}$)
- y 和 y' 构成二维垂直平面相空间
- x, x', y, y' 构成四维横向相空间

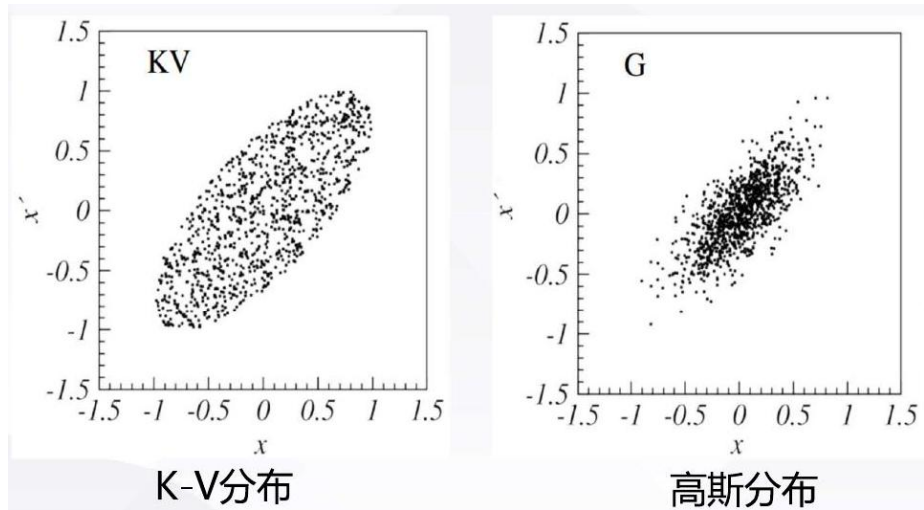


图 59: K-V 分布与高斯分布

8.2 粒子经过矩阵后的计算

例 1

已知某四极磁铁在水平方向的聚焦强度为 K_0 ，粒子进入该四极磁铁前水平坐标为 (x_0, x'_0) ，垂直坐标为 (y_0, y'_0) ，求经过该四极磁铁后粒子位置和角度在水平和垂直方向上发生的改变

解：四极磁铁的传输矩阵可写为

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0}l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0}l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0}l & \cos \sqrt{K_0}l \end{pmatrix} \quad M_y = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{K_0}l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0}l \\ \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0}l & \cosh \sqrt{K_0}l \end{pmatrix}$$

粒子在水平和垂直方向运动方程的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = M_y \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

粒子在四维横向相空间中的运动可表示为，

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

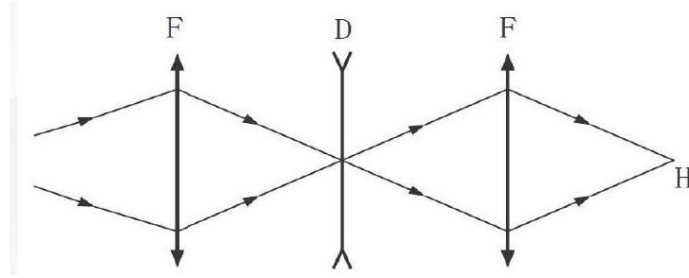


图 60: 四极磁铁的薄透镜近似。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0}l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0}l & 0 & 0 \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0}l & \cos \sqrt{K_0}l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \sqrt{K_0}l & \frac{1}{\sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0}l} \\ 0 & 0 & \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0}l & \cosh \sqrt{K_0}l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

其中当前为 0 的对角位置为 x 和 y 之间的耦合项。

8.3 传输矩阵的薄透镜近似

8.3.1 四极磁铁的薄透镜近似

四极磁铁的薄透镜近似（束流光学）为当四极磁铁的长度较短时， $l \rightarrow 0$ 并且 $K \rightarrow \infty$ Kl 为常数，则传输矩阵 M 可以简化为

$$\text{聚焦 } M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{散焦 } M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

f 为聚焦长度 $f = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{|K|l}$

四极磁铁薄透镜近似下，粒子穿过四极磁铁后，位置保持不变，而动量发生改变。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ x' &= -\frac{1}{f}x_0 + x'_0 \end{aligned}$$

(粒子受到了一个聚焦的“kick”)

如果假定 $f > 0$ ，则**聚焦四极铁**可以表示为

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix}$$

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

(粒子受到了一个聚焦的“kick”)

散焦四极铁表示为

$$M_D = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0} l \\ \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0} l & \cosh \sqrt{K_0} l \end{pmatrix}$$

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

8.3.2 二极磁铁

例 2 计算在薄透镜近似条件下, 二极磁铁的传输矩阵

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

解答: $\theta \ll 0 \cos \theta = 1 \sin \theta = \theta \rho \theta = l$

二极磁铁的传输矩阵 M 可以简化为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二极磁铁的传输矩阵为漂移节 (较弱聚焦作用被忽略了)

8.3.3 薄透镜与厚透镜矩阵形式对比

四极磁铁的厚透镜形式

$$\begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0} l \\ 0 & 0 & \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0} l & \cosh \sqrt{K_0} l \end{pmatrix}$$

四极磁铁的薄透镜形式

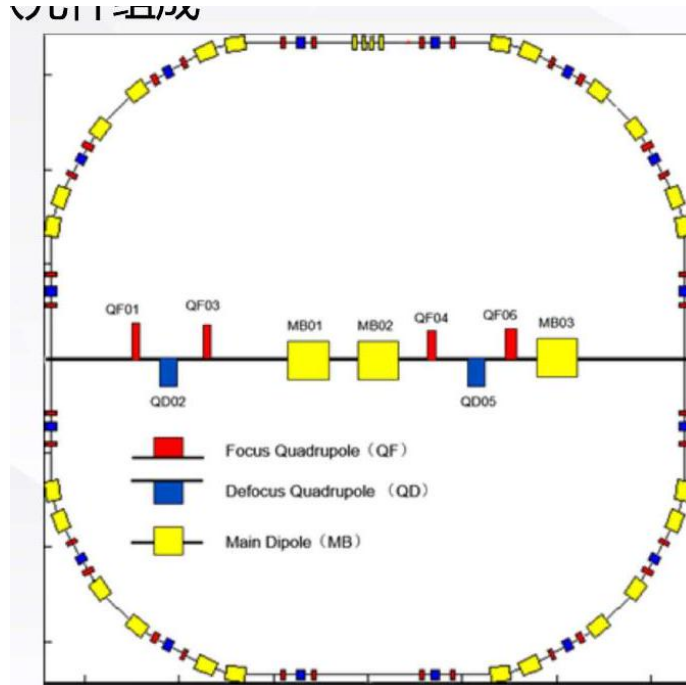


图 61: 中国散裂中子源 RCS 环的 lattice 构成。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

8.3.4 多个元件的传输矩阵

环形加速器通常由周期性加速结构组成的，周长 $C = NL$ 。假设全环由 N 个加速周期节组成，每个周期节由 n 个磁铁元件组成

$$M(s) \equiv M(s + L)M(s) = M_n \dots M_2 M_1$$

注意：传输矩阵运算中元件的顺序与束流线中的排列顺序**相反**。
经过 P 个相同的周期节，传输矩阵可写为

$$M(s + PL)M(s) = [M(s)]^P$$

线性传输:

$$M(s_2 | s_0) = M(s_2 | s_1) M(s_1 | s_0)$$

例 3:

已知从 s_0 到 s_1 和从 s_1 到 s_2 这两段的传输矩阵分别为

$$M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求从 s_0 到 s_2 的传输矩阵。

解:

$$M(s_2 | s_0) = M(s_2 | s_1) M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列式 $\det M = 1$ (朗斯基行列式不显含时间) $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

传输矩阵运算满足结合律。

$$M = M_3 M_2 M_1 = M_{32} M_1 = M_3 M_{21} M_{32} = M_3 M_2 M_{21} = M_2 M_1$$

例 4

构造一个 doublet 结构: 长度为 L 的漂移段分隔开的两个四极磁铁。

$$\begin{aligned} M_{\text{doublet}} &= M_2 M_{\text{drift}} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ \frac{l_0}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

若取 $f_1 = -f_2 = f_0$, $M_{\text{doublet}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_0} & l_0 \\ -\frac{l_0}{f_0^2} & 1 + \frac{l_0}{f_0} \end{pmatrix}$

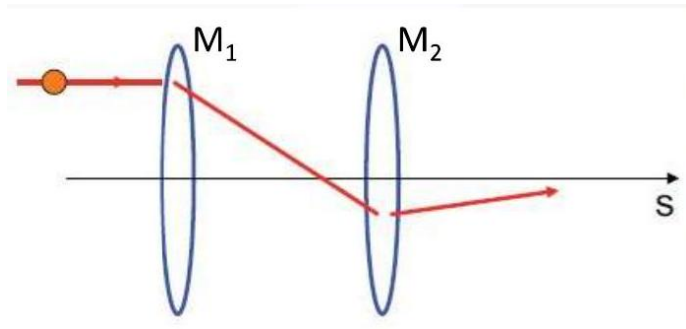


图 62: doublet 结构。

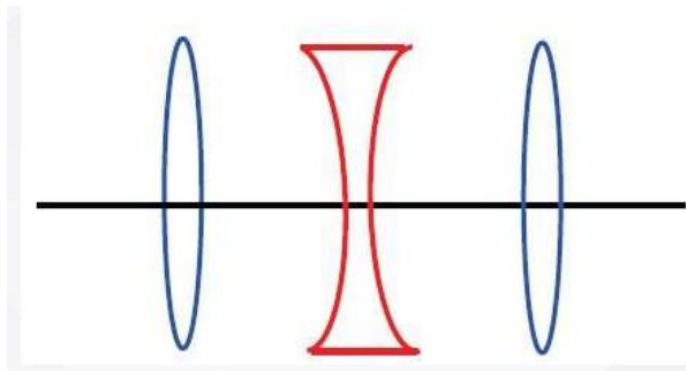


图 63: Enter Caption

如果 f_1, f_2 在水平和垂直方向上的符号相反，可以实现在水平和垂直两个方向上聚焦。

练习:

(线性传输矩阵) 证明: 聚焦力为 $-1/f$ 的四极磁铁可以分为两个聚焦力为 $-1/2f$ 的传输矩阵

$$M_{QF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} M_{QF/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{QF} = M_{QF/2} M_{QF/2}$$

例 5

构造一个 triplet 结构: 长度为 I_0 的漂移段分隔开的两个四极磁铁。

解: $M_{\text{triplet}} = M_{QF/2} M_{\text{drift}} M_{QD} M_{\text{drift}} M_{QF/2}$



图 64: 垂直入射二极磁铁。

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{f} & 2l_0 \left[1 - \frac{l_0}{2f_2} \right] \\ -\frac{2}{f} \left[1 - \frac{l_0}{2f_1} \right] & 1 - \frac{2l_0}{f} \end{pmatrix} \quad \text{其中 } \frac{1}{f} = \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} - \frac{l_0}{4f_1f_2}
 \end{aligned}$$

triplet 属于 FODO 结构

若令 $f_1 = -f_2 = f_0$ 则 $\frac{1}{f} = \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} - \frac{l_0}{4f_1f_2} = \frac{l_0}{4f_0^2}$

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f_0^2} & 2l_0 \left[1 + \frac{l_0}{2f_0} \right] \\ -\frac{l_0}{2f_0^2} \left[1 - \frac{l_0}{2f_0} \right] & 1 - \frac{l_0^2}{2f_0^2} \end{pmatrix}$$

可以看出, 如果 $f_0 > l_0/2$, 则 triplet 在水平和垂直方向都是聚焦的

$$\frac{1}{f_x} = \frac{l_0}{2f_0^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f_0} \right) \frac{1}{f_y} = \frac{l_0}{2f_0^2} \left(1 + \frac{l_0}{2f_0} \right)$$

8.4 二极磁铁的边缘聚焦效应

二极磁铁的传输矩阵为:

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} M_y = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

束流 (粒子) 垂直入射二极磁铁与带有角度入射二极磁铁。

当不垂直入射 (离开) 二极磁铁时, 会产生边缘聚焦效应。

由薄透镜近似, 可知,

$$\Delta l = x_0 \tan \varepsilon x = x_0$$

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta l}{\rho} = x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho} x' = x'_0 + x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho}$$

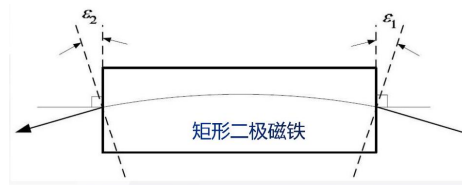


图 65: 带有角度入射二极磁铁。

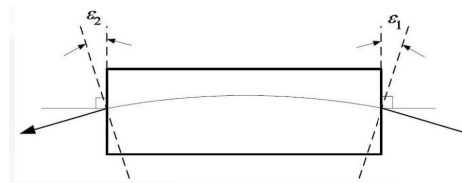


图 66: 带有角度入射二极磁铁时有边缘聚焦效应。

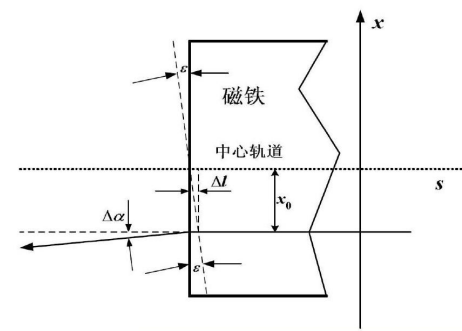


图 67: 二极磁铁出口处。

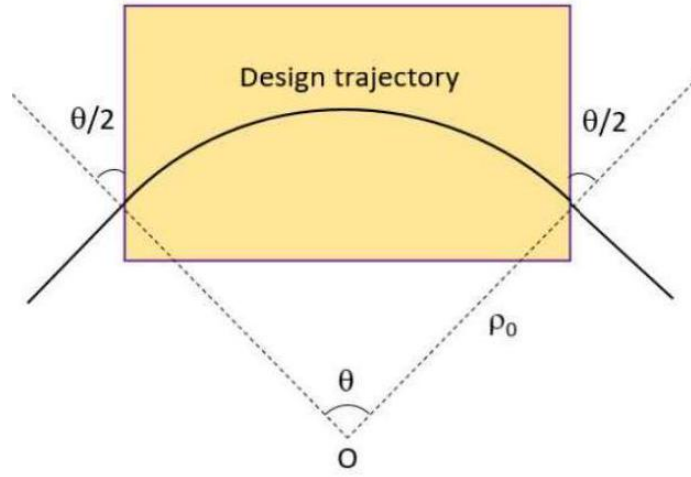


图 68: 矩形二极磁铁的边缘场效应。

练习

已知粒子 (x, x_0) 经过二极磁铁的边缘后的变化为

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ x' &= x'_0 + x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho} \end{aligned}$$

求相应的传输矩阵。

简单观察可知，相应的传输矩阵为：

$$M_{\text{edge},x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

例 6

证明矩形二极磁铁的传输矩阵为

$$M_{\text{rect},x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩形二极磁铁的总的传输矩阵可写为

$$M_{\text{rect},x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证毕。



图 69: Enter Caption

8.5 粒子传输的稳定性条件

假设某环形加速器由 P 个长度为 L 的周期性加速结构组成，粒子在环中运行一圈的传输矩阵为

$$M(s + PL | s) = [M(s)]^P$$

粒子经过 m 圈的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = [M(s)]^{mP} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

稳定性条件：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \text{finite}$$

设二维矩阵 M 的两个特征值为 λ_1 和 λ_2 ， v_1 和 v_2 为对应的特征向量。

$$M\lambda_1 = v_1\lambda_1 M\lambda_2 = v_2\lambda_2$$

则有

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{Trace}(M)\lambda + 1 = 0$$

$$\text{Trace}(M) = m_{11} + m_{22}$$

λ 为实数的充要条件为 $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

令 $\text{Trace}(M) = \cos(\phi)$ 则两个特征值可表示为 $\lambda_1 = e^{i\phi}$ $\lambda_2 = e^{-i\phi}$

Φ 为 betatron 相移 Φ 为实数 $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

Φ 为复数 $|\text{Trace}(M)| \geq 2$

粒子的初始坐标可写为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_m \\ x'_m \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2 = ae^{in\phi} v_1 + be^{-in\phi} v_2$$

λ_1 和 λ_2 保持单位 1 的充要条件 Φ 为实数, 或者

$$|\text{Trace}(M)| \leq 2$$

即为粒子轨道稳定性条件。

线性系统的稳定性条件与初值 (x_0, x'_0) 无关, 与加速器的结构有关。

9 Twiss 参数及实例

苑尧硕

回到希尔方程

$$z'' + K(s)z = 0, K(s+L) = K(s)$$

其解的形式可写为,

$$z(s) = a\omega(s)e^{i\psi(s)}z^*(s) = a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$$

$$\text{包络方程 } \omega'' + K\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0, \psi' = \frac{1}{\omega^2}$$

Floquet 定理

$$K(s+L) = K(s) \implies \psi\psi(s+L) = \psi(s)\omega(s+L) = \omega(s)$$

由 s_1 到 s_2 的传输矩阵可表示为

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1+\omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1}\right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix}$$

其中在 s_1 处, $\omega(s_1) = \omega_1$, 在 s_2 处, $\omega(s_2) = \omega_2$

$$\psi = \psi(s_2) - \psi(s_1)$$

对传输矩阵 $M(s_2 | s_1)$ 应用周期性条件, 令 $s_2 = s_1 + L$, 则有

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \omega_1' = \omega_2' = \omega'$$

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi(s_1 + L) - \psi(s_1) = \phi$$

传输矩阵 $M(s_2 | s_1)$ 变为

$$M(s_1 + L | s_1) = \begin{pmatrix} \cos \phi - \omega \omega' \sin \phi & \omega^2 \sin \phi \\ -\frac{(1+\omega^2 \omega'^2)}{\omega^2} \sin \phi & \cos \phi + \omega \omega' \sin \phi \end{pmatrix}$$

若定义

$$\omega^2 = \beta$$

$$\alpha = -\omega \omega' = -\frac{\beta'}{2}$$

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

$$M(s_1 + L | s_1) = \begin{pmatrix} \cos \phi - \omega \omega' \sin \phi & \omega^2 \sin \phi \\ -\frac{(1 + \omega^2 \omega'^2)}{\omega^2} \sin \phi & \cos \phi + \omega \omega' \sin \phi \end{pmatrix}$$

传输矩阵 M 变为 (练习)。

经过一个加速周期后的传输矩阵 M 变为

$$M(s_1 + L | s_1) = \begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\omega^2 = \beta \psi' = \frac{1}{\omega^2} \phi = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta(s)}$$

$\beta(s)$ 为 betatron 振幅函数, 简称 beta 函数 (β 函数)。

ϕ 为一个加速周期 L 内 betatron 振幅相移, 简称相移。

练习:

由包络方程 $\omega'' + K\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0$ 和 $\beta = \omega^2$ 可得:

$$\frac{1}{2}\beta'' + K\beta - \frac{1}{\beta} \left[1 + \left(\frac{\beta'}{2} \right)^2 \right] = 0$$

希尔方程

$$z'' + K(s)z = 0, K(s+L) = K(s)$$

其解的形式

$$z(s) = a\omega(s)e^{i\psi(s)}z^*(s) = a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$$

$$z(s) = a\sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z] \psi_z(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

Twiss 参数 (Courant-Snyder 函数)

$$\beta(s)\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2}\gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

注意: Twiss 参数是描述机器属性的一组参数, 与粒子的状态无关。

例 2

一个 doublet 结构由强度相同的一个聚焦四极磁铁和一个散焦四极磁铁组成 $\{QF \ O \ DF\}$, 求粒子经过这段 doublet 的 betatron 相移

提示: $M_{\text{doublet}} = M_2 M_{\text{drift}} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$

解:

$$\begin{aligned}
M_{\text{doublet}} &= M_2 M_{\text{drift}} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ \frac{l_0}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_0}{f_1 f_2}$$

$$\text{对比 } \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{和 } \begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$$

可知

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \text{Trace}(M) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{l_0}{f_1} - \frac{l_0}{f_2} \right)$$

例 3

一般地, s_1 到 s_2 的传输矩阵可用 Twiss 参数表示为: (提示: $\beta = \omega^2 \alpha = -\frac{\beta'}{2}$)

$$\begin{aligned}
M(s_2 | s_1) &= \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi + \alpha_1 \sin \psi) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi \\ -\frac{(1 + \alpha_1 \alpha_2)}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin \psi - \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \right) \cos \psi & \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi - \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

例 4

求 FODO 结构 $\{QF/2 \circ QD \circ QF/2\}$ 的 Twiss 参数

$$\begin{aligned}
M_{\text{FODO}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0}{2f} \right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f} \right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

对比

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0}{2f} \right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f} \right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\gamma \sin \varphi & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix}$$

可知

$$\beta_F = \frac{2l_0^2 [1 + \sin \frac{\varphi}{2}]}{\sin \varphi}$$

$$\alpha_F = 0$$

计算结果为该 FODO 结构入口处和出口处的 Twiss 参数

作业已知一个 FODO 结构 $\{QF/2OQDOQF/2\}$ 的传输矩阵为

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

求在 QD 出口处的 Twiss 参数 (β, α, γ)

提示: $\{QF/2 \circ QD \circ QF/2\} \Rightarrow \{QD/2 \circ QF \circ QD/2\}$

10 工作点

苑尧硕、刘星光 2023 年 10 月 8 日经过长度为 L 的周期性加速结构的 betatron 的相移为

$$\varphi_z = \psi_z(s+L) - \psi_z(s) = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

若环形加速器的周长为 L ，包含 P 个周期性加速器结构，则经过全环的相移为

$$P\varphi_z = \psi_z(s+PL) - \psi_z(s) = \int_s^{s+PL} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

则工作点 Q 可定义为：

$$Q_z = \frac{P\varphi_z}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

10.1 相椭圆

希尔方程

$$z'' + K(s)z = 0, K(s+L) = K(s)$$

其解为

$$z(s) = A_z \sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z]$$

其中 $\beta_z(s)$ 为 twiss 参数， $\psi_z(s)$ 为相位。

则

$$\alpha(s)z(s) + \beta(s)z'(s) = -A_z \sqrt{\beta_z(s)} \sin[\psi_z(s) + \xi_z]$$

$$z^2 + (\alpha z + \beta z')^2 = A_z^2 \beta$$

$$\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2}$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

可得 $A_z^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$

相椭圆

$$A^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$$

$$J_z = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2} [\gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)]$$

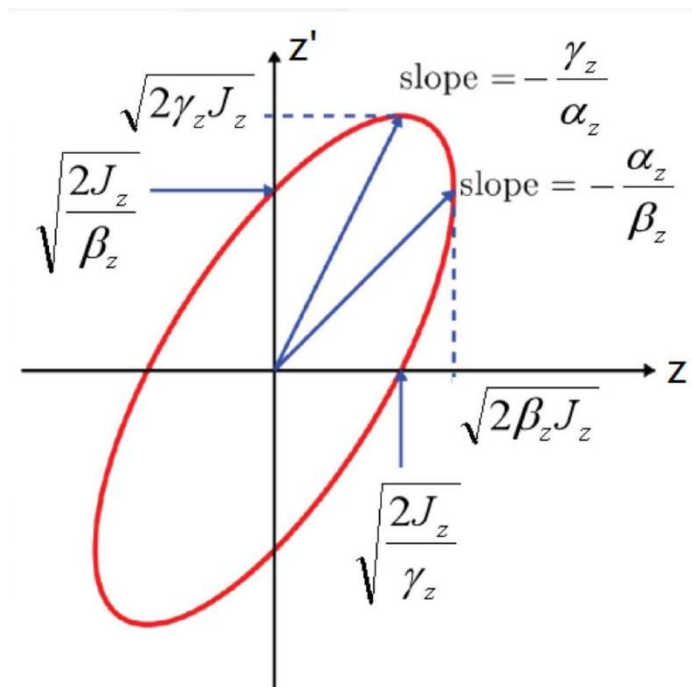


图 70: 相椭圆及 Twiss 参数。

相椭圆面积

$$S = \frac{\pi A^2}{\sqrt{\beta\gamma - \alpha^2}} = \pi A^2 = 2\pi J$$

束流的发射度

描述束流参数的物理量:

一阶矩 (平均值)

$$\langle x_i \rangle = \sum_N^{i=1} \frac{x_i}{N}, \langle y_i \rangle = \sum_N^{i=1} \frac{y_i}{N}, \langle x'_i \rangle = \sum_N^{i=1} \frac{x'_i}{N}, \langle y'_i \rangle = \sum_N^{i=1} \frac{y'_i}{N}$$

$\langle x_i \rangle$ 和 $\langle y_i \rangle$ 的物理意义: 束流 (横截面) 的中心

二阶矩

$$\sigma_x^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = \sum_N^{i=1} \frac{x_i^2}{N} - \left(\sum_N^{i=1} \frac{x_i}{N} \right)^2$$

物理意义: 束流 rms 横向尺寸

- 每一个粒子对应一个相椭圆, 相椭圆的面积保持不变
- 在某位置处, 一个粒子在相空间中是一个点, 在经过 2π , 为其运动轨迹为一闭合的相椭圆
- 不同的粒子对应的相椭圆的面积不同

多粒子情形

在某位置处, 一群粒子构成的束流在相空间中占据一个椭圆, 这个椭圆的面积称为束流的发射度 (初始由离子源决定)

在线性元件构成的环形加速器中, 束流的 (面积) 发射度不变—刘维定理 (Liouville's theorem)

束流的包络与单粒子的运动

单粒子由 (x, x', y, y') 描述

两个粒子由 (x_1, x'_1, y_1, y'_1) 和 (x_2, x'_2, y_2, y'_2) 描述

n 个粒子?

$> n^{10}$ 个粒子??

束流的发射度

利用二阶矩, 可以定义方均根 (rms) 发射度: $\varepsilon_{rms,x} = \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_x'^2 - \sigma_{xx'}^2}$

在线性元件传输过程中, 发射度的面积是不变的:

传输矩阵与 Twiss 参数 (Courant-Snyder Parameters) 传输矩阵 M 是保辛的 (Symplectic), 满足:

$$M^T J M = J$$

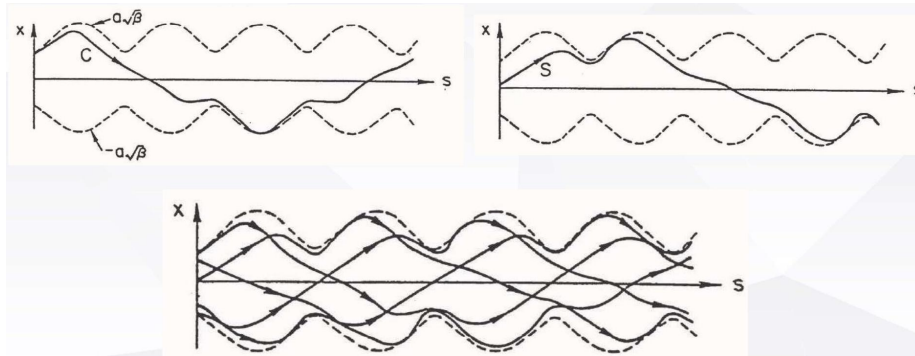


图 71: 单粒子运动轨迹及束流整体的包络。

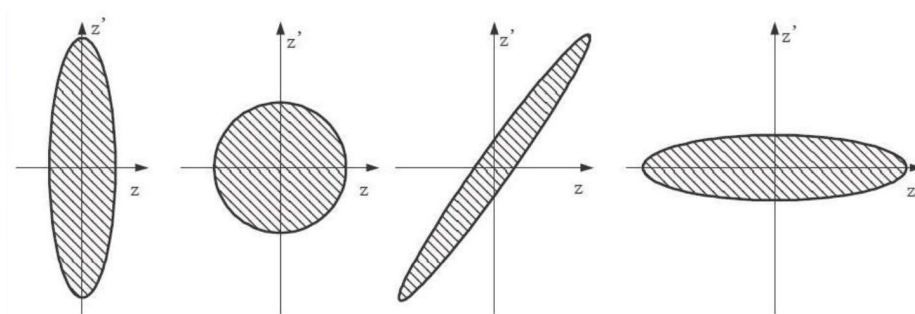


图 72: 束流在经历环形加速器中的不同元件时束流相空间椭圆形状 (发射度) 的变化。

辛矩阵的行列式值为 1，即 $\det(S) = 1$ 。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 辛矩阵与其转置矩阵的逆相等，即 $s^T = s^{-1}$ 。
- 两个辛矩阵的乘积仍为辛矩阵。

Twiss 参数可写作矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

- 其行列式为: $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$
- 传输矩阵可写为:

$$M = I \cos \mu + JA \sin \mu = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

10.2 色散效应

Betatron 运动方程 (束流动力学第二节)

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

简化条件:

- 1. 只有二极磁铁和四极磁铁
- 2. **动量 $p = p_0$ (无能散)**

则 Hill (希尔) 方程:

$$\begin{aligned} x'' + K_x(s)x &= 0 & y'' + K_y(s)y &= 0 \\ K_x(s) &= \frac{1}{\rho^2} + K_1(s) & K_y(s) &= -K_1(s) & K_1(s) &= \mp \frac{B_1(s)}{B\rho} \end{aligned}$$

和一般性希尔方程: $x'' + kx = 0$

但实际束流中的粒子的动量是不同的, 即束流具有能散或动量分散

通常束流的动量散度 $\delta \equiv \frac{p-p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p} \leq 10^3$

当考虑动量分散时

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} &= \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \\ &= \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p_0(1+\delta)} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \\ B_y &= B_0 + \frac{\partial B}{\partial x} x \end{aligned}$$

提示: 泰勒展开 $\frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + O[\delta^5]$

练习: 推到含动量分散的运动方程在 x 方向下具有如下形式

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{2p_0 - p}{p} + \frac{B'}{B\rho} \frac{p_0}{p} \right) x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

数学上为包含特殊解的希尔方程。

包含色散效应的传输矩阵

记其特殊解具有如下形式: $x = D(s)\delta$, 则

其通解为

$$x = x_\beta + D(s)\delta$$

其中 x_β 为到目前为止进行 betatron 震荡的粒子坐标。可见由于色散导致的束流轨道的变化与粒子的动量散度成正比, 由该位置的色散函数 $D(s)$ 决定。

考虑色散效应的传输矩阵为:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s_2} = \begin{pmatrix} - & - & d \\ - & - & d' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s_1}$$

对于扇形二极磁铁 (sector magnet) 来说, 以偏转角表示的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho_0 \sin \theta & \rho_0(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho_0} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s_1}$$

$\theta = \frac{l}{\rho_0}$ 为偏转角度。

注: 在非偏转方向粒子运动相当于经过长度 l 的漂移段。在基于强聚焦原理设计的加速器当中, 色散函数源自二极磁铁且只存在于偏转的平面 (例如水平偏转的磁铁)。

色散函数的计算

考虑到能量不同的粒子轨道是在 betatron 函数上的叠加 ($x = x_\beta + D(s)\delta$), 对于 x, x' 来说, 其随 s 的变化可以通过传输矩阵直接求得。对于具有周期属性的 lattice 来说 (例如环的天然周期性或按周期设计的 lattice), 周期的入口及出口应具有相同的值。可见, $D(s)$ 与普通粒子一样通过传输矩阵传输。因此, 假设周期性 lattice 的传输矩阵为 M , 则可通过周期性条件求解 D 和 D' 。

$$\begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix}_{s_2} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix}_{s_1}$$

其中 m_{13} 与 m_{23} 仅在二极磁铁中有贡献。求得某一位置处的 D 和 D' 以后, 对于任意其他位置处的色散函数, 可以直接通过两点之间的传输矩阵求得。当然, 也可以把目标位置当做周期起点, 通过周期性条件求解。

通过以上过程我们可以发现, 虽然色散函数来源于偏转磁铁, 但色散函数是通过矩阵进行传输的, 同 Twiss 参数一样, 随着 s 而变化。在实际的加速器设计中, 很多时候需要将其设计为 0, 则只存在束线的局部而不影响其他部分的设计。此外, 反应在多粒子中, 色散函数的效果直接反应为束流尺寸的大小。

11 纵向束流动力学

刘星光

11.1 加速电场与电磁波

加速电场 Accelerating field 从历史发展和通用的基本原理来看, 传统加速器主要的加速方式如下:

- 直流高压 DC High Voltage
- Betatron (感生电动势)
- 感应加速
- 谐振腔 Resonant Cavities (下半学期直线射频加速结构)

直流高压由于其结构及原理简单, 作为最早出现的加速带电粒子的方式, 当前仍然在所需能量不高的情况下广泛使用, 或者作为离子源的一部分为束流提供初始能量。感应加速器方式在电子流强需求特别高 (数千安培) 的情形下仍然是非常有竞争力的方式。相比之下, betatron 由于其弱聚焦的特点, 已然被回旋加速器等取代。当前对于传统加速器而言, 不管是直线型加速器还是环形加速器 (包括回旋加速器和同步加速器), 谐振腔加速方式是高能加速器最主要的方式。在加速器物理计算中, 其电场及加速电压用下述关系表示:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t + \delta}$$

$$V(\phi) = V_{r,f} \sin \phi$$

电磁波基本概念

频率: 电磁场 (波) 变化的频率

- 质子重离子常用加速场: 数 MHz ~ 数百 MHz
- 电子常用加速场: 3GHz ~ 12GHz

重要参数: 频率 f (frequency), 角频率 ω (angular frequency), 波长 λ (wave length), 波数 k (wave number), 周期 T (period)

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}$$

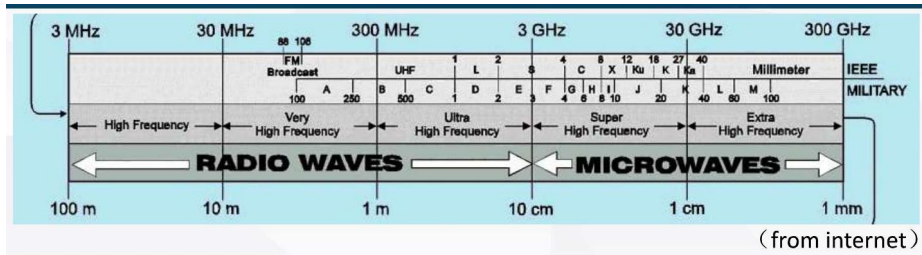


图 73: 电磁波频谱。

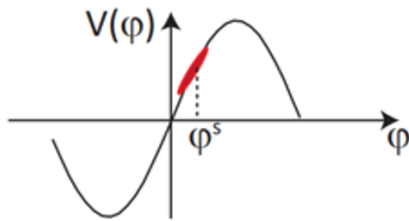


图 74: 同步相位: 参考粒子所在相位。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = c/f$$

11.2 同步条件与参考相位

同步条件:

$$\omega_{rf} = h\omega_0 = 2\pi h \frac{\beta c}{C_0}$$

h - 谐波数, harmonic number

参考相位: 假设理想粒子被加速时相位为 ϕ_s , 则同步条件要求

$$\phi_s = \omega_{rf}t - kz = \text{const}$$

或 $\dot{\phi}_s = \omega_{rf} - k\beta c = 0$, 与前式相同

对于环形加速器, 周长为 C_0 (或直线为 L 的直线加速器) 要求:

$$h\beta\lambda_{rf} = C_0$$

直线加速器 (Wideroe)

思考: 设计要求的不同之处?

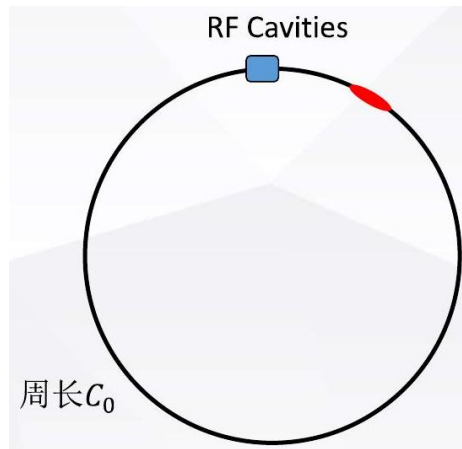


图 75: 环形加速器通过谐振腔加速。

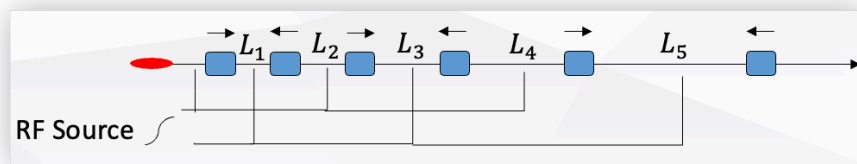


图 76: Wideroe 型直线加速器原理示意图。

11.3 纵向振动 Longitudinal oscillation

在横向束流动力学中，粒子的运动由 Hill 方程和磁铁参数可得，从数学上来说，与弹簧振子的简谐振动相同。纵向束流动力学虽然元件变成了加速腔，是否也有相似的性质？

周期长度（长度 L 或者环形路径长度 C ）上粒子运动所需时间为

$$T = \frac{L}{\beta c}$$

对于具有不同能量的粒子（或速度 βc ）来说，其走过的路径和走过一个周期的时间也不一致，这种微小变化可表示为：

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

现定义一个 γ_t 使得：

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\gamma_t^2} \delta$$

则有：

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} &= \left(\frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \delta = \eta \delta \\ \eta &= \frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{\Delta p}{p} = \gamma^2 \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

- η 称为滑移因子 slip factor 或 slippage factor
- γ_t 被称之为穿越能量 (Transition energy/gamma)
- $\alpha_c = 1/\gamma_t^2$ 称为动量压缩因子 (momentum compaction factor), 用于表示由于动量差别导致的路径差别

讨论: $\eta = 0$ 意味着什么？

关于 α_c , 路径长度的不同还可表示为

$$\Delta L = \delta \int \frac{1}{\rho} D(s) ds$$

我们可以定义动量压缩因子：

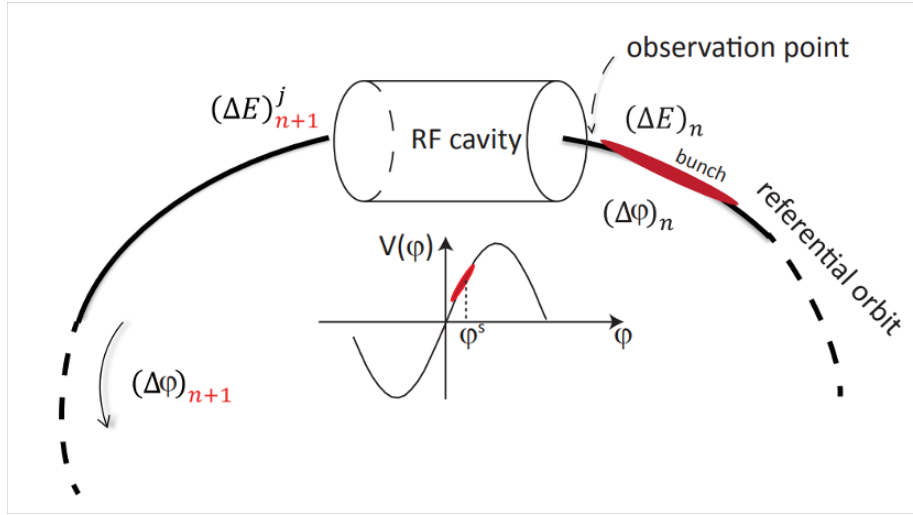


图 77: 环形加速器中的加速的数学模型。

$$\alpha_c = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \frac{1}{\rho} D(s) ds$$

注: 在非二极磁铁部分, $\rho = \infty$ 。

11.4 一般 (非参考粒子的) 情况

加速器前后的参数变化:

$$\begin{aligned} \Delta E_{n+1} &= \Delta E_n + QeV_{rf} (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \\ \Delta \phi_{n+1} &= \Delta \phi_n + \frac{h\omega_{rf}\eta_{n+1}}{\beta_s^2} T_{n+1} \frac{\Delta E}{E_s} \end{aligned}$$

加速过程可参考图示的数学模型:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= V_{rf} \sin \phi \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + h\omega_{rf}(T + \Delta T)_{n+1} = \phi_n + \phi_s + h\omega_{rf}T_{n+1} \left(\frac{\Delta T}{T} \right) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \phi - \phi_s \text{ 且 } \phi_s = \omega_{rf}T \\ \Delta \phi_{n+1} &= \Delta \phi_n + h\omega_{rf}\eta_{n+1}T_{n+1}\delta_{n+1} \end{aligned}$$

假设每一个周期（圈）的变化很小：

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{Tdn}$$

则有：

$$\frac{d\Delta E}{Tdn} = \frac{QeV_{rf}}{T} (\sin \phi - \sin \phi_s) \approx \frac{QeV_{rf} \cos \phi_s}{T} \Delta \phi$$

$$\frac{d\Delta \phi}{Tdn} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s} \frac{\Delta E}{E_s}$$

带入第二式可得：

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \phi}{T^2 dn^2} &= \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s} \frac{d\Delta E}{Tdn} = \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s T} QeV_{rf} (\sin \phi - \sin \phi_s) \\ &\approx \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s T} (QeV_{rf} \cos \phi_s) \Delta \phi \end{aligned}$$

用到：

$$\sin(\phi_s + \Delta \phi) = \sin \phi_s \cos \Delta \phi + \sin \Delta \phi \cos \phi_s \approx \sin \phi_s + \Delta \phi \cos \phi_s$$

可得到：

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} - \Omega^2 \varphi &= 0 \quad (\text{记 } \Delta \phi \text{ 为 } \varphi) \\ \Omega^2 &= \frac{h\omega_{rf}\eta}{\beta_s^2 E_s T} QeV_{rf} \cos \phi_s \end{aligned}$$

可见纵向运动从数学上来看与横向运动一样，也为希尔方程的形式。 Ω 为纵向振荡频率（可由此定义类似横向的纵向工作点，tune 等）。不同的是，与横向只与各种特殊磁铁的参数相关，纵向的运动（ Ω ）与多个参数相关，且这些参数在加速过程中一般都是变化的。

各个参数对纵向运动的影响？

11.5 纵向相空间

在此我们暂且忽略具体的推导，典型的纵向相空间如下图所示。可见，与横向相空间为椭圆的形状不同，纵向相空间一般类似于“梭形”图，有比较明显的稳定区（中间类似椭圆部分和非稳定区。

(from D.Edwards)

作业：

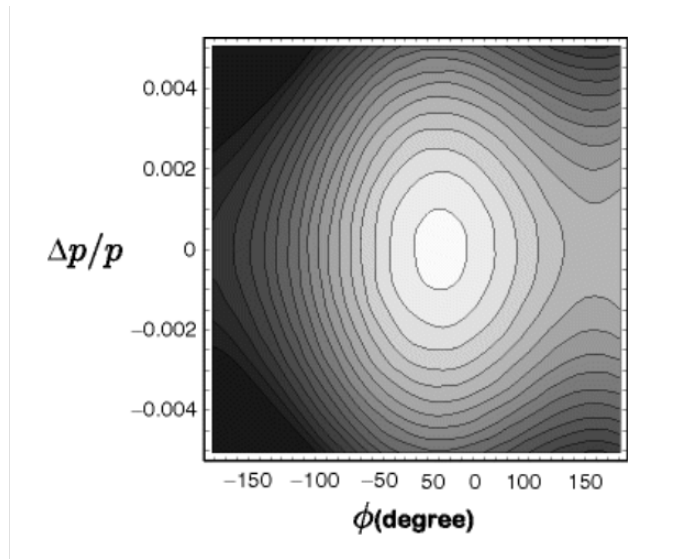


图 78: 典型的纵向相空间示意图。

Q1: 假设 $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ 的传输矩阵为 $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, 推导对应的 Twiss 参数 $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ 的传输矩阵。(注: 应为 3×3 的矩阵, 且元素用 $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ 表示。

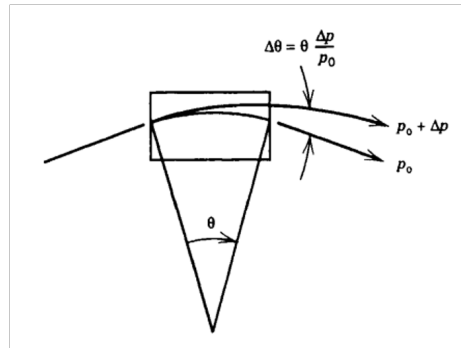


图 79: 有色散时的物理图像。

12 纵向与横向运动的耦合及闭合轨道

刘星光

12.1 色散效应 dispersion

色散函数 (Dispersion function): 在经过偏转铁时, 由于能量不同导致束流横向位置与角度不同。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho_0 \sin \theta & \rho_0(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho_0} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s1}$$

$$\theta = \frac{l}{\rho_0}$$

其中 $D = \rho_0(1 - \cos \theta)$ 经之前介绍, 为色散函数, 反应在色散条件下运动方程中特殊解:

$$x = x_\beta + D(s)\delta$$

$$\delta = \Delta p/p$$

- 色散函数 $D(s)$ 是如何变化 (传输) 的?
- 如何获得其周期性解?

色散 (Dispersion)

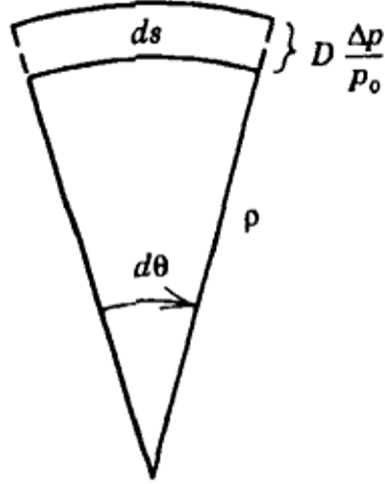


图 80: 色散函数 (线性特殊解) 时的物理图像。

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y p_0}{B\rho p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p_0(1+\delta)} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

对于普通二极磁铁和四级铁, 我们均假设 $p = p_0$ 。色散研究时去掉该假设, $p = p_0 + \Delta p = p_0(1 + \delta)$, 保留 δ 的最低阶线性项进行了推导讨论了纵向运动的特点 (未做严格推导)。

12.2 色品 (chromaticity)

其中, “弹性系数” $K_1(s) = \mp \frac{B_1(s)}{B\rho}$ 中其实 $B\rho = \frac{p}{q}$, 也是依赖于能量的。

$$K_1(s) \rightarrow \beta(s) \rightarrow \Delta\mu \text{ 或其对应的工作点 tune}$$

我们将工作点对动量散度的线性关系称为色品 (chromaticity):

$$\Delta v = \xi\delta\xi = -\frac{1}{4\pi} \oint K(s)\beta(s)ds$$

由 lattice 设计本身决定的色品称为自然色品 (natural chromaticity)。在线性束流动力学中, 一般性的 Hill 中的 K 值包含四极磁铁和二极磁铁的部分。四

极磁铁为磁铁梯度与磁刚度的比 ($\frac{\partial B/\partial y}{B\rho}$), 二极磁铁为 $1/\rho^2$ 。对于大型的环形加速器来说, 色品的主要贡献几乎都来自于四极磁铁。

12.3 二极磁铁的线性误差及闭合轨道 (close orbit)

前述“动量散度”实际上就是最简单的误差。

在含有二极磁铁的 lattice 中 (比如环), 假设磁铁本身的磁场与理想/参考磁场不一致束流的轨道如何?

$$\Delta\theta = \frac{\Delta B}{B\rho} l$$

周期性解要求:

$$M \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \frac{\Delta\theta}{2 \sin \pi\nu} \begin{pmatrix} \beta_0 \cos \pi\nu \\ \sin \pi\nu - \alpha_0 \cos \pi\nu \end{pmatrix}$$

任意位置处的 $x(s)$ 则可通过对应的相移及 twiss 参数求出:

$$x(s) = \frac{\theta \sqrt{\beta(s)\beta_0}}{2 \sin \pi\nu} \cos(\psi(s) - \pi\nu)$$

- 闭合轨道的解在什么情况下是稳定的?
- 闭合轨道的矫正方法?
- 闭合轨道可以测量吗, 如何测量?

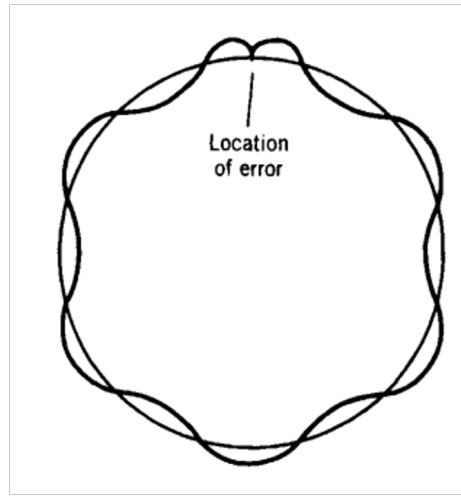


图 81: 色散函数（线性特殊解）时的物理图像。

13 数值模拟方法介绍: 以 KEK-DA 为例

刘星光

13.1 背景: 小型环形加速器

KEK-DA (KEK Digital Accelerator) 是一台小型的重离子加速器。由一个可以产生氢、氦、氦等离子体的 ECR 离子源、低能传输线及一个快循环同步加速器 (Rapid Cycling Synchrotron) 构成。本次课程仅关注快循环同步加速器的基本光学参数计算, 因此不需要了解该加速器的其他细节。

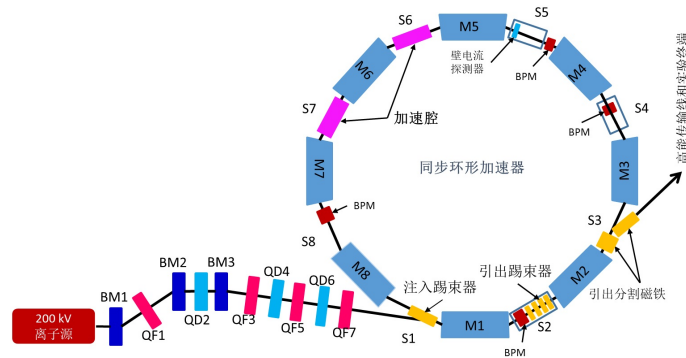


图 82: KED-DA 整体布局示意图。

13.2 加速器组成

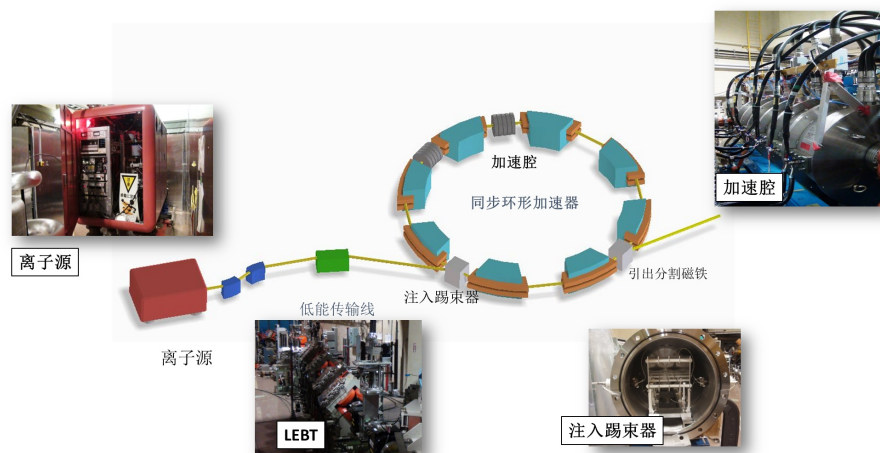


图 83: KEK-DA 的主要部件。

离子源 (产生带电粒子) 离子源为电子回旋共振离子源 (ECRIS)，通过更改电离气体可以切换产生的束流种类。离子源置于 200kV 的高压平台内，因此不管是多少荷质比 (Q/A) 的束流，在其出口处束流的动能均为 200 keV。关于离子源的更多介绍，可参考专门讲述主要带电粒子源的该节课程。

低能传输线 (束流切断和传输) 束流经由一条传输线 (或叫输运线) 从离子源出口传输到快循环同步加速器的注入点处。输运线除了传输束流以外，还配备了法拉第筒、发射度仪和多丝靶等束流诊断设备用于测量束流的相关参数。此外，末端的磁铁还用于注入束流的轨道与相空间匹配。

环 (磁铁、注入、引出、加速腔、束测等) 在快同步加速器环上，使用了 8 块相同规格的组合型二极磁铁 (即包含了二极成分用于偏转以及四极成分用于聚焦)，无独立的纯二极磁铁或四极磁铁。此外，在注入点处用静电注入踢束器 (kicker) 将入射束流“踢”到环的参考轨道上。当束流在环上经由加速腔加速到指定能量时，由引出磁铁将束流“踢”出环，用于后续实验或输送往束流垃圾桶。同样的，在环上配置了诸如束流位置探测器 (BPM) 和壁电流探测器等束流诊断设备。

13.3 任务描述: 计算该环形加速器的基本束流光学参数组成

KEK-DA 的环构成特别简单，8 块组合型偏转铁（二极 + 四极）为统一规格。因此在建模上我们仅需要对组合型二极磁铁及直线节进行建模。

注：该种组合型二极磁铁早期比较常用，当前主要的同步加速器都使用功能分离的纯二极磁铁和四极磁铁。

方法

我们使用传输矩阵的方法进行静思园。由于使用了偏转磁铁且在水平方向进行偏转，在水平方向具有色散，因此我们使用包含色散的 3×3 矩阵。便于直观的展示具体的应用过程，这里使用 Mathematica 进行建模（亦可使用 Matlab、Python 和 C++ 等进行）。具体用到的矩阵定义如下：

13.4 程序步骤

13.4.1 传输矩阵

直线节

$$m_D = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

组合型二极磁铁（聚焦）

$$m_{BF} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\sqrt{K}} \text{Sin}[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\rho K} (1 - \text{Cos}[\sqrt{K}L]) \\ -\sqrt{K} \text{Sin}[\sqrt{K}L] & \text{Cos}[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\rho\sqrt{K}} \text{Sin}[\sqrt{K}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

组合型二极磁铁（散焦）

$$m_{BD} = \begin{pmatrix} \text{Cosh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\sqrt{\text{Abs}[K]}} \text{Sinh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\rho \text{Abs}[K]} (\text{Cosh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] - 1) \\ \sqrt{\text{Abs}[K]} \text{Sinh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \text{Cosh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\rho\sqrt{\text{Abs}[K]}} \text{Sinh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

磁铁参数

组合型偏转铁：F-D-F 类型

每一块偏转磁铁主要包含倾斜面不同的三个部分（F-D-F）以及他们之间极小的过渡段（可视为纯二极磁铁）。图片所示为下半部分，上半部分磁铁为该示意图对称。

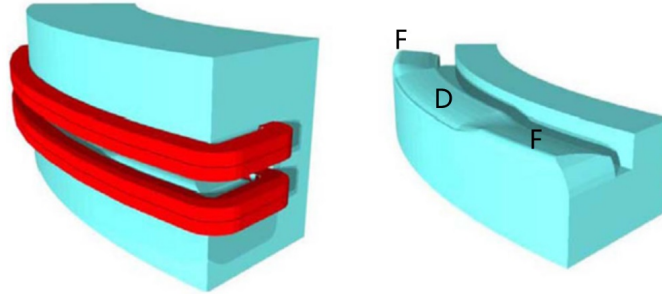


图 84: 组合型偏转磁铁极面示意图。

注: 实际上四极磁铁偏心使用即可提供偏转二极成分; 同样的, 平行的磁面提供纯二极成分, 倾斜磁铁极面即能产生四极成分, 不同的倾斜方向在水平方向提供聚焦或散焦的效果。

组合型偏转铁参数:

$$l_F = 0.6313 \text{ m}$$

$l_H = 0.0352\text{m}$ 过渡节, 视为纯二极磁铁

$$l_D = 1.2589 \text{ m}$$

$$\rho = 3.3 \text{ m}$$

$$k_F = 3.618/\rho$$

$$k_D = -3.639/\rho$$

注: 组合型磁铁 k 值为: $k = k_0 + k_1 = \frac{1}{\rho^2} + k_1$ k_1 为四极磁铁相应 k 值。
漂移节直线长度:

$$l_{\text{drift}} = 2.1206 \text{ m}$$

(in Mathematica:)

(* Transfer Matrix definition *)

$$\text{MatrixDrift } [L_-] := \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{MatrixBending}[K_-, L_-] := \begin{pmatrix} \cos[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\sqrt{K}}(1 - \cos[\sqrt{K}L]) \\ -\sqrt{K} \sin[\sqrt{K}L] & \text{Cos} \begin{bmatrix} \sqrt{K} & L \end{bmatrix} & \sin[\sqrt{K}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{MatrixF}[K_-, L_-] := \begin{pmatrix} \text{Cos}[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\sqrt{K}} \text{Sin}[\sqrt{K}L] & \frac{1}{\rho K}(1 - \text{Cos}[\sqrt{K}L]) \\ -\sqrt{K} \text{Sin} \begin{bmatrix} \sqrt{K} & L \end{bmatrix} & \text{Cos} \begin{bmatrix} \sqrt{K} & L \end{bmatrix} & \frac{1}{\rho \sqrt{K}} \text{Sin}[\sqrt{K}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(* k > 0*)

$$\text{MatrixD}[K_-, L_-] := \begin{pmatrix} \text{Cosh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\sqrt{\text{Abs}[K]}} \text{Sinh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\rho \text{Abs}[K]}(\text{Cosh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] - 1) \\ \sqrt{\text{Abs}[K]} \text{Sinh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \text{Cosh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] & \frac{1}{\rho \sqrt{\text{Abs}[K]}} \text{Sinh}[\sqrt{\text{Abs}[K]}L] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(* k < 0*)

13.4.2 周期性传输矩阵的构建与关键参数计算

周期性传输矩阵

(* transfer matrix for focus section, K < 0 *)

```
MF = MatrixF[k0 + k1F,
  FsectionLength]; (* compound type, gradient magnet*)
MH = MatrixBending[k0, HsectionLength];
MD = MatrixD[k0 + k1D,
  DsectionLength]; (* compound type, gradient magnet*)
Mdrift = MatrixDrift[driftSectionLength];

(* Transfer matrix for a period*)
Mperiod = MF . MH . MD . MH . MF . Mdrift;
```

相移与工作点计算

```
PeriodPhaseAdvance = ArcCos[(Mperiod[[1, 1]] + Mperiod[[2, 2]])/2];
tune = PeriodPhaseAdvance*8/(2 pi)
```

13.4.3 周期性 Twiss 参数及色散函数计算

Twiss 参数计算:

$$\begin{pmatrix} \cos[\Delta\phi] + \alpha \sin[\Delta\phi] & \beta \sin[\Delta\phi] \\ -\gamma \sin[\Delta\phi] & \cos[\Delta\phi] - \alpha \sin[\Delta\phi] \end{pmatrix}$$

thus:

$$\beta_0 = \text{Mperiod}[[1, 2]] / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}]$$

$$\alpha_0 = 0.5 (\text{Mperiod}[[1,1]] - \text{Mperiod}[[2,2]]) / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}]$$

$$\gamma_0 = -\text{Mperiod}[[2,1]] / \sin[\text{PeriodPhaseAdvance}]$$

色散函数计算:

$$\begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix}$$

thus,

$$\text{Solve} \left[\begin{pmatrix} D \\ dD \\ 1 \end{pmatrix} == \text{Mperiod} \cdot \begin{pmatrix} D \\ dD \\ 1 \end{pmatrix}, \{D, dD\} \right]$$

13.5 程序拓展: 任意点 s 处的 Twiss 参数计算 (周期性条件方法)

以任意点为起点构建传输矩阵

(* Transfer matrix for a period *)

```
TransferMatrixY[s_] := Piecewise[{
  {MatrixDrift[s - M[[1]]],
   M[[1]] <= s < M[[2]]}, {MatrixD[-k1F, s - M[[2]]] . MdriftY,
   M[[2]] <= s < M[[3]]}, {MatrixDrift[s - M[[3]]] . MFY . MdriftY,
   M[[3]] <= s < M[[4]]}, {MatrixF[-k1D, s - M[[4]]] . MHY . MFY .
   MdriftY,
   M[[4]] <= s < M[[5]]}, {MatrixDrift[s - M[[5]]] . MDY . MHY .
   MFY . MdriftY,
   M[[5]] <= s < M[[6]]}, {MatrixD[-k1F, s - M[[6]]] . MHY . MDY .
   MHY . MFY . MdriftY, M[[6]] <= s <= M[[7]]}
}, {s, M[[1]], M[[7]]}];
```

TransferMatrix[s_] :=

要点:

- 判断 s 所处位置 (磁铁)

- 计算以该位置为起点的周期性解

13.6 计算结果讨论

整个 KEK-DA 环由 8 个相同的周期构成，因此我们仅需要计算单个周期的参数即可。

x 方向 Twiss 参数

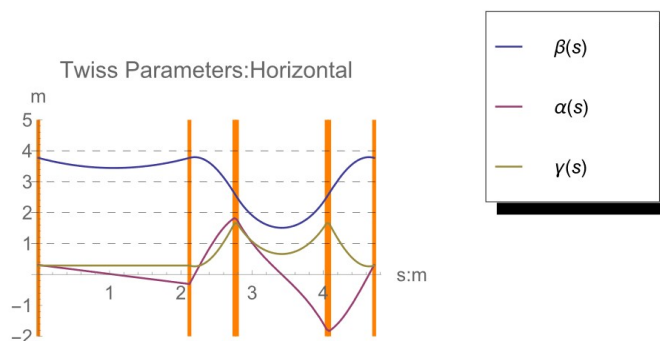


图 85: x 方向 Twiss 参数。

横向工作点: 2.17

x 方向色散函数

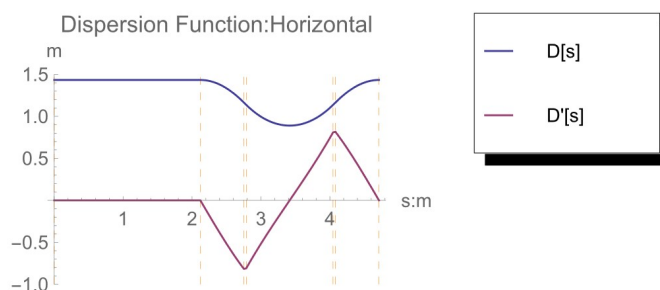


图 86: x 方向色散函数。

y 方向 Twiss 参数

在此例子中，磁铁为组合型二极磁铁。该种磁铁在早期小型加速器中有所使用。当前一般使用单独的二极磁铁（偏转）和四极磁铁（聚焦）进行设计。需要注意传输矩阵的定义方式和其中 K 值的计算和定义方法（参考前述束流动力学部分）。

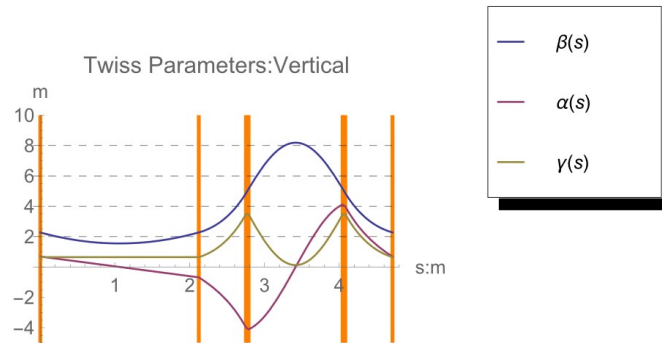


图 87: y 方向 Twiss 参数。

此外，对于环形加速器来说，前述章节讨论过的许多重要的参数，比如穿越能量、动量压缩因子和色品等，均建立在基本的 Twiss 参数计算的基础上，留作大作业中的练习。

讨论与思考:

关于编程与计算语言的选择:

Matlab, Octave, Mathematica

Python, C/C++

Fortran

14 射频直线加速器：基础

典型的射频直线加速器由带电粒子源及直线加速器主体构成。主体部分包含加速结构及用于横向约束的磁铁组成。为了给加速结构提供加速电压用于加速束流，通常使用速调管作为功率源。为保证不同系统之间的同步运转，一般射频控制系统或低电频系统用于控制和调整加速结构及速调管的功率及相位等信息。

除此之外，典型的射频直线加速器还包括控制、电源、真空、束测、准直和工艺水电等多个相对通用的系统，提供束流加速和传输所需的条件。

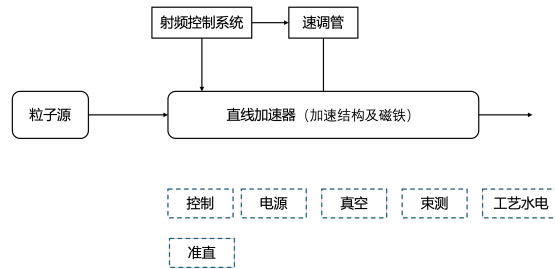


图 88: 射频直线加速器的系统构成。

在加速结构上，可分为相互独立的腔体与包含多个加速单元结构的腔体。相互独立的腔体可单独调节加速幅值及相位，拥有较大的灵活性，但一般加速效率相对较低。相比之下，同一个结构如果包含多个加速单元，则制作相对容易而且加速效率也较高。典型的独立腔体一般为低 β 的超导加速结构，包含数个加速单元。常见的多加速单元结构如用于加速电子的行波管加速器，可以有几十上百个加速单元。

14.1 真空中平面波的主要性质及参数

真空中的平面波如图所示，其主要参数如下：

时间参数: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ 空间参数: $k = 2\pi/\lambda_z$ 空间与时间的关系: $v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \lambda_z f = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 波阻抗: $\eta = \frac{E_+}{H_+} = -\frac{E_-}{H_-}$, 真空中为 377Ω 功率流及储能: $S_z = \frac{1}{2}E_+^2/\eta, \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{\mu H^2}{2}$

圆柱波导内电磁场传播

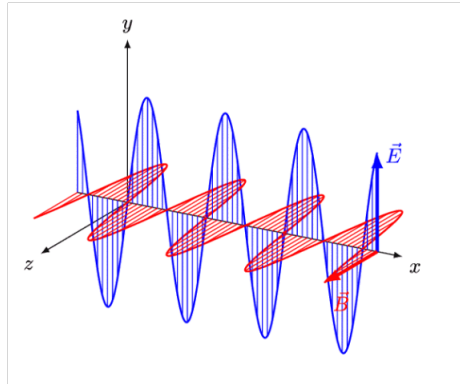


图 89: 真空中传输的平面波。

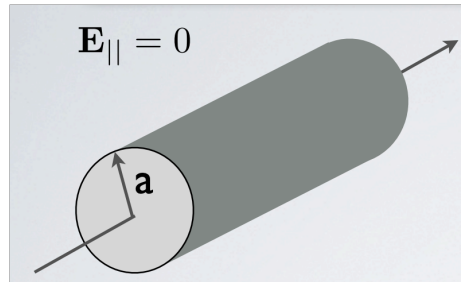


图 90: 圆柱波导。

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (4)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \quad (6)$$

极坐标下令 $E_{||} = 0$,

$$E_z = E_0 J_0(k_C r) e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \quad (7)$$

$$E_r = j \frac{k_z}{k_c} E_0 J_1(k_C r) e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \quad (8)$$

$$H_\phi = j \frac{k}{Z_0 k_c} E_0 J_1(k_C r) e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \quad (9)$$

电磁场边界问题的解通常会包含贝塞尔函数，其具体取值作图如下。实际工作中一般通过软件直接进行计算。

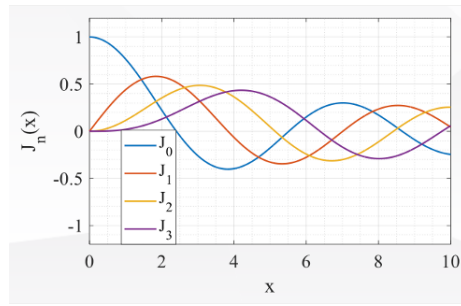


图 91: 贝塞尔函数。

与自由真空内不同, 多种不同模式 (频率等) 的电磁场均可在波导内传播可用于加速的模式为中心轴上为电场 E_z (最简单的为 TM01 模) 定义”相速度” (v_{ph}), 及色散关系

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_c^2 \quad v_{ph} = \lambda_p f = \omega/k$$

其中 ω_c 为截止频率对于圆柱波导, 对应的波长 $\lambda_c = 2.61b$, b 为圆柱波导半径。

如图所示的色散关系又叫传播特性曲线, 其他关键参数例如群速度与相速度在图上的关系亦有注明。

下图为圆波导中电场和磁场的一种可能分布。用于加速时, 通常在行进方向上希望电场 E 比较集中, 而在远离束流中心的地方一般磁场较为集中。

圆柱波导中电磁场的传播, 当 $\omega > \omega_c$, 可延 z 方向传播, 在截止频率以下时, 电磁场将被迅速吸收, 无法传播。

14.2 用于电子加速的行波管加速结构

注意到通常 $v_{ph} > c$, 为了能与带电粒子保持同步 (即加速相位与参考粒子保持一致), 我们需要降低相速度。通常我们通过在圆柱波导中增加“阻碍”的

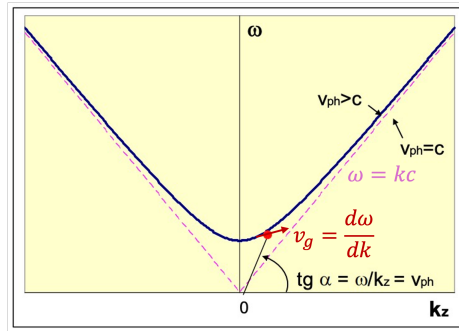


图 92: 传输特性曲线。

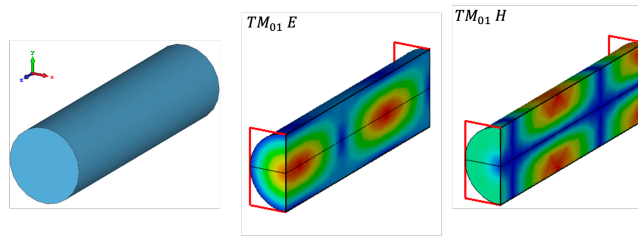


图 93: 截止频率之上时圆柱波导中电磁场传播。

方法来降低电磁场的相速度。盘片中间留孔便于微波功率和加速时束流自身的传输。

根据加速单元的长度与微波长度之间的关系（注意相应的截止频率），如下图所示的两种模式（电场）在传播特性曲线上的关系亦有不同。

假设按 $l = \lambda_p/2$ 设置盘片：

- Mode-A 与 Mode-B 对应的波将出现分离 - Mode-A 将有一个特定频率满足 $v_{ph} \sim c$, 可用于加速电子

下图即为一个典型的用于加速电子的行波管加速结构，其基本原理即为上述在圆柱波导中增加盘片降低相速度的方式。功率从上游功率馈入口进入结构当中，在结构中建立电磁场用于束流加速，多余的功率从下游输出至负载。在输入输出附近的单元需特殊设计用于匹配功率输入与输出。束流经由上下游末端的小孔进入结构当中。

对于特定的微波频率，设计盘片结构使其 $v_{ph} \sim c$

关于功率：

- 部分在建场时被结构吸收（发热） - 部分用于加速束流（束流负载效应） - 剩余的输出到负载（一般 30% 左右）

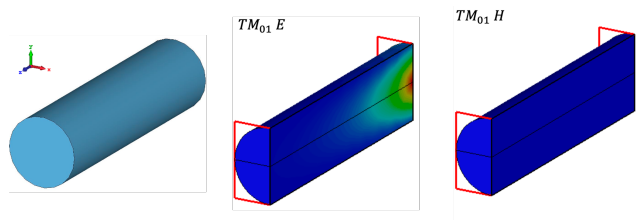


图 94: 截止频率之下时圆柱波导中微波被迅速吸收。

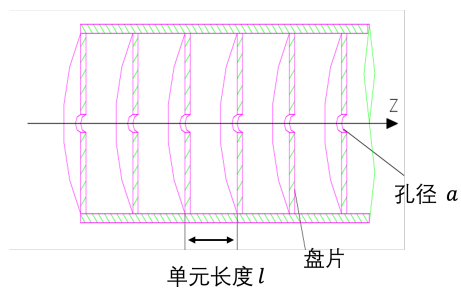


图 95: 在圆柱波导中增加盘片来降低相速度来实现相速度与加速粒子匹配。

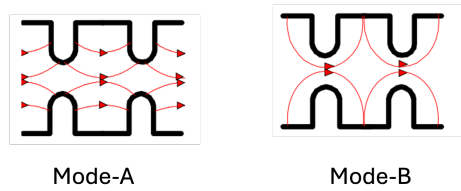


图 96: 圆柱波导中两种可能存在的模式（电场示意）。

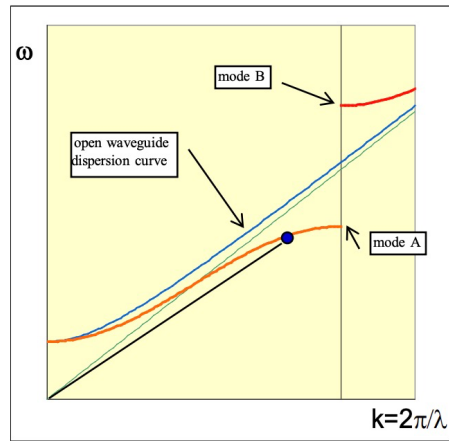


图 97: 加入盘片之后的传播特性曲线。

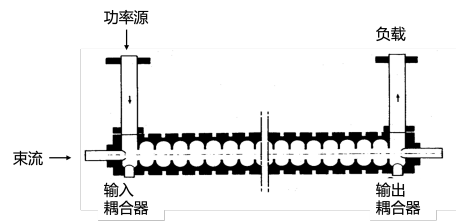


图 98: 用于电子加速的行波管加速结构

15 射频直线加速器：驻波加速结构

通过在圆柱波导中加入盘片的方式我们实现了相速度低于光速可用于带电粒子，即钱问的行波管加速结构。但对于电子这种在加速时速度几乎不变的束流来说是比较合适的（便于保持相位同步）。对于质子重离子来说，由于其速度在加速过程中一直变化，因此行波加速结构就不适合了。下图所示为电子与质子在不同能量下速度的比较。

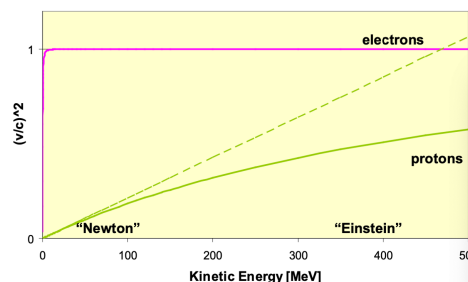


图 99: 电子与质子在不同能量下速度的比较。

比如,双方的静止质量以能量为单位分别是, $m_{0, \text{proton}} = 938.3 \text{ MeV}$, $m_{0, \text{electron}} = 0.511 \text{ MeV}$, 在同样 $\beta = 0.95$ 的情况下, 质子能量需要 2 GeV, 而电子能量只需 1.1 MeV。

因此对于质子重离子, 我们需要重新考虑如何实现同步加速的问题。实际上, 质子重离子的加速, 尤其是低能段速度变化很快的区间, 一直是加速器发展历史上的难题。最开始的方式就是采用高压加速, 因此当时许多大型加速装置的前端, 一直都采用悬浮高压的方式直接将质子重离子加速到 500kV 到 1MeV 左右。直到 20 世纪 70 年代末随着射频四极加速器 RFQ 的提出, 逐渐成为质子重离子加速方式的低能默认方案。在介绍 RFQ 之前, 我们接着前述圆波导讲述一般情况下质子重离子的加速结构。

因为速度变化大, 难以像行波管那样在波和粒子同时运动时让粒子“看到”相同的相位。因此, 如果能使得波本身不往前走, 让粒子“适时”的看到所需的相位就成了质子重离子加速的关键。

在盘片结构的基础上, 将带盘片的行波加速结构的两端设置为金属面, 则:
- 新增了两端电场必须垂直与金属面的边界条件 - 由于在两端有直接的反射, 因此可以接受的模式(频率)为离散的(整数倍), 如下图所示

注意在上图当中我们将原本的波数 k 以一个周期相位 2π 的形式表示。

在两端封闭的条件下, 波的反复反射和叠加形成了一个驻波场。场的幅值随时间变化。场的最大值和最小值并不会随时间在 z 向上移动。

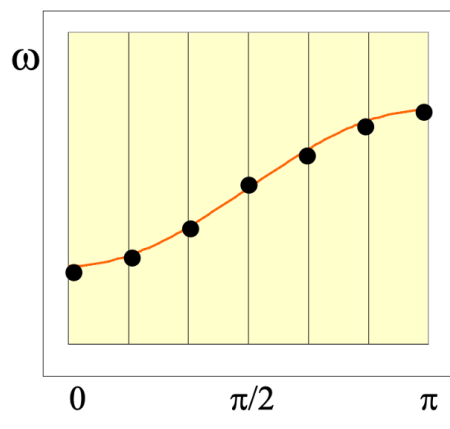


图 100: 驻波条件下的色散关系及相邻单元之间的相移。

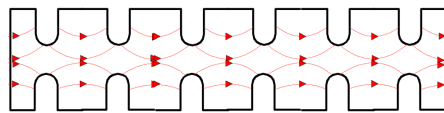


图 101: 驻波条件下的色散关系及相邻单元之间的相移。

在驻波结构中，根据相邻单元之间的相移，其常见的场的模式为下述几种（0 模， $\frac{\pi}{2}$ 模， $\frac{2\pi}{3}$ 模和 π 模等），其对应的电场的分布在 z 轴上如右图所示。相应地，他们的束流同步条件要求满足下述关系：

- 0-mode : $L = \beta\lambda$
- $\pi/2$ mode: $L = \beta\lambda/4$
- π mode: $L = \beta\lambda/2$

那这种驻波结构又如何用来加速质子或者重离子呢。下图为实际驻波结构的示意图。

在实际的驻波结构中，还需考虑以下几点因素：

- 加速效率：对于同一个加速单元（间隙）来说，因为束流穿过间隙时速度会变化，因此应考虑让电场尽量集中（减小间隙大小）
- 功率馈入：无方向性，一般选择从中间馈入功率

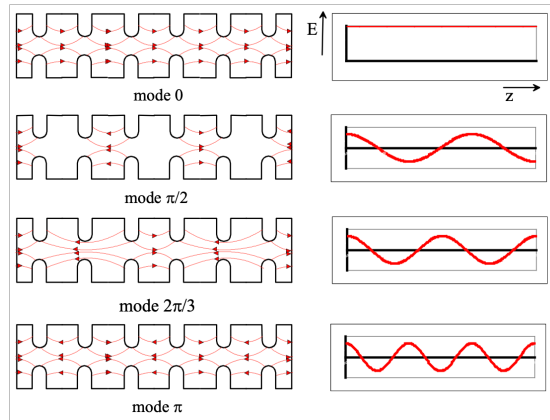


图 102: 驻波结构根据相移区分的不同模式。

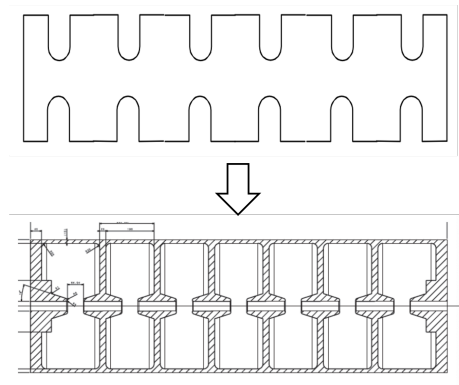


图 103: 两端封闭带盘片的圆波导到实际可用的驻波加速结构。

- 加速单元建的功率耦合：减小间隙的时候倒置相邻单元场的距离变大，因此一般选择在盘片上开孔（如图所示）。当然，如果轴线上耦合足够亦可忽略（例如多 cell 的超导加速结构）。

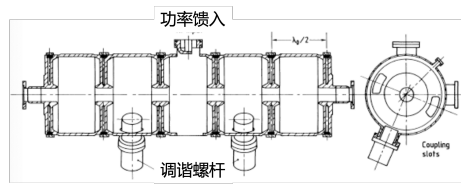


图 104: 更接近实际的完整驻波加速结构。

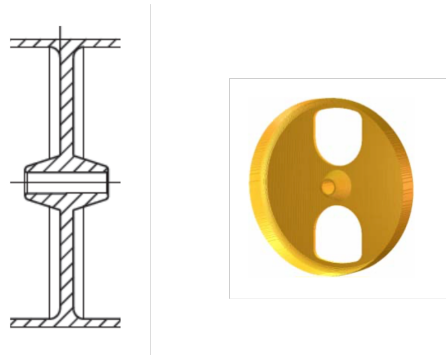


图 105: 驻波加速结构中的盘片设计。

15.1 漂移管加速器 (DTL)

实际上我们可以发现, 在驻波结构中, 盘片似乎是没有必要的。考虑耦合最大化的话我们甚至可以移除盘片, 这样就形成了一个漂移管直线加速器 (Drift Tube Linac)。

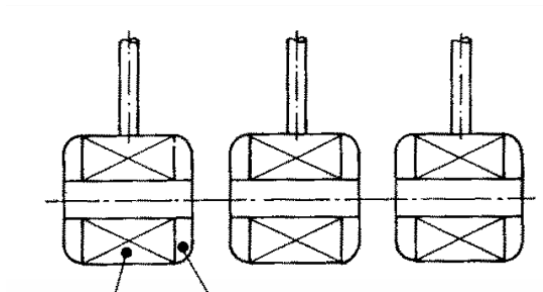


图 106: 漂移管加速器的结构形成。

从 DTL 的场分布可以看出, 相邻单元的相位差为 0 (同时为最大值或最小值), 因此在上述的模式区分中属于 0 模。在这种模式下, 我们需要考虑束流在

离开这个间隙并进入下一个间隙的时候，能够看到合适的加速场。理想情况下，在每一个间隙的中间看到的应当是同一个相位，这个相位我们一般称之为参考相位。在离开加速间隙后，束流进入漂移管中，不受加速电场的影响。

下图为一个实际的 DTL 的结构示意图。我们仅通过一根支撑管将漂移管固定在结构轴线上，几乎移除了所有“盘片”。此外，在漂移管中，我们还可以加入四极磁铁（一般为电流励磁四极磁铁如 CSNS-DTL 或永磁四极磁铁如 CERN-LINAC4）。

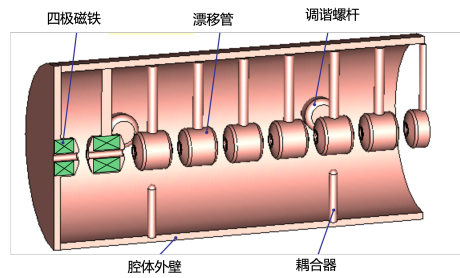


图 107: 漂移管加速器的结构示意图。

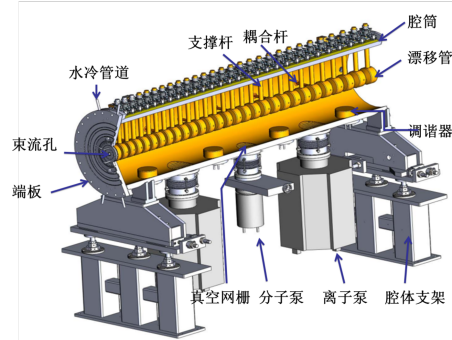


图 108: CSNS 的 DTL 结构整体示意图。

15.2 行波加速结构与驻波加速结构的对比

比较行波加速结构与驻波加速结构，我们可以发现，行波加速结构具有下述特点：

- 单元之间通过轴上孔径实现耦合。射频功率从一端的输入耦合器输入，在结构中和负载上耗散。

表 1: CSNS-DTL 的设计指标参数

参数	数值
工作频率 (MHz)	324
注入能量 (MeV)	3.0
引出能量 (MeV)	80.1
平均束流流强 (μA)	312.5
脉冲重复频率 (Hz)	25
高频脉宽 (μs)	650
高频占空比	1.625%

- 短脉冲，高频（3 GHz）。
- 场梯度为 15-40 MV/m。
- 用于速度接近光速的电子。

相比之下，驻波加速结构：

- 通过狭缝（或开口）实现（单元之间的）耦合。
- 轴上孔径减小，轴上电场强度更高且功率效率得以提升。
- 射频功率来自一个耦合端口，在结构中耗散
- 长脉冲，场梯度为 2 - 5 MV/ m。
- 适用于各种能量的质子、离子和电子。

刘星光

整理

2024 年 12 月 30 日

讲义整理：刘星光苑尧硕日期：2023 年 12 月

讲义更新：刘星光日期：2024 年 12 月