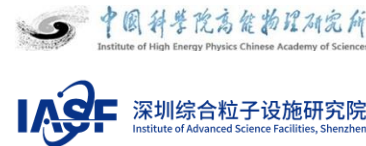




中山大學  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



# 横向束流动力学

## 第四节

---

苑尧硕

## ➤ 传输矩阵

$$\vec{z}(s) = M(s | s_0) \vec{z}(s_0)$$

从 $s_0$ 到 $s$ 的传输矩阵(注意顺序)

## ➤ 线性元件的矩阵形式

- 漂移节
- 聚焦四极磁铁
- 散焦四极磁铁
- 二极磁铁

- 传输矩阵是加速器lattice（或者元件）的属性，而不是粒子束流的属性。
- 利用传输矩阵，可以计算出粒子通过该元件后粒子**运动状态（位置和角度）**的改变。

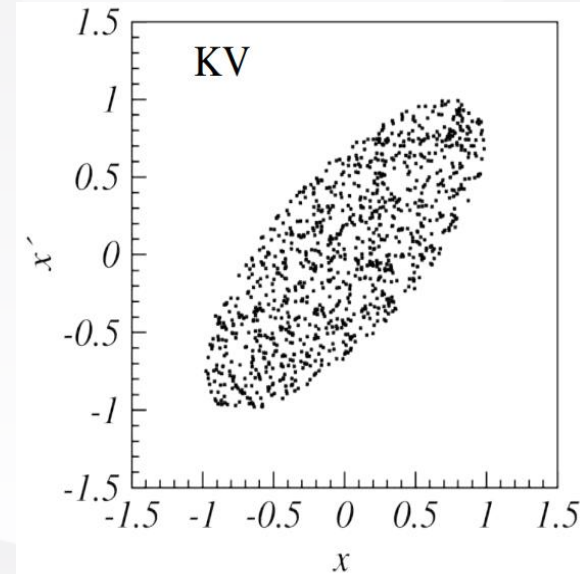
## 本节内容

- 粒子经过传输矩阵的计算
- 传输矩阵的薄透镜近似
- 多个元件的传输矩阵
- 二极磁铁的边缘聚焦效应
- 传输矩阵的稳定性

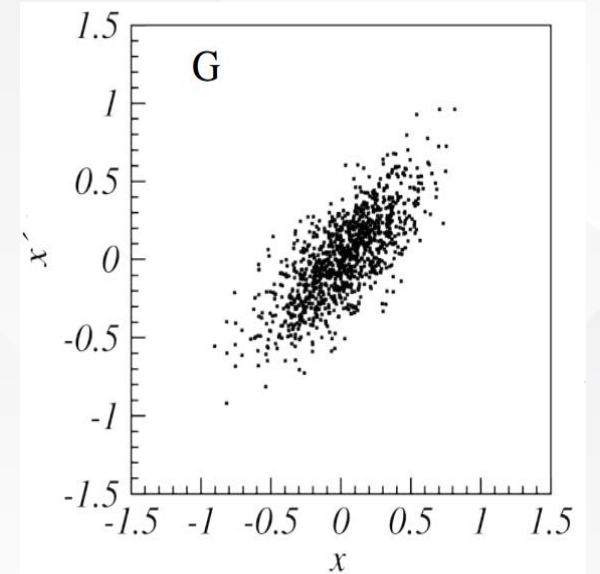
## 相空间

- $x$ 和 $x'$  构成二维水平平面相空间
- $y$ 和 $y'$  构成二维垂直平面相空间
- $x, x', y$ 和 $y'$  构成四维横向相空间

$$x' \equiv \frac{dx}{ds}$$



K-V分布 (均匀分布)



高斯分布

# ➤ 粒子经过传输矩阵在相空间中的运动

## ➤ 粒子经过传输矩阵的计算

$$\vec{x} = M_x \vec{x}_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{x,11} & m_{x,12} \\ m_{x,21} & m_{x,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = M_y \vec{y}_0$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{y,11} & m_{y,12} \\ m_{y,21} & m_{y,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

## ➤ 粒子经过传输矩阵在相空间中的运动

- 例1 已知某四极磁铁在水平方向的聚焦强度为 $K_0$ ，粒子进入该四极磁铁前水平坐标为 $(x_0, x_0')$ ，垂直坐标为 $(y_0, y_0')$

求经过该四极磁铁后粒子位置和角度**在水平和垂直方向上发生**的改变

## ➤ 粒子在相空间中的运动

- 例1 已知某四极磁铁在水平方向的聚焦强度为 $K_0$ ，粒子进入该四极磁铁前水平坐标为 $(x_0, x_0')$ ，垂直坐标为 $(y_0, y_0')$ ，

求经过该四极磁铁后粒子位置和角度**在水平和垂直方向上发生**的改变

解：四极磁铁的传输矩阵可写为

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \quad M_y = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0} l \\ \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0} l & \cosh \sqrt{K_0} l \end{pmatrix}$$

粒子在水平和垂直方向运动方程的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = M_y \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

# 粒子在相空间中的运动

粒子在四维横向相空间中的运动可表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

x和y之间的耦合项

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0} l \\ 0 & 0 & \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0} l & \cosh \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

# 传输矩阵的薄透镜近似

## 四极磁铁的薄透镜近似 (束流光学)

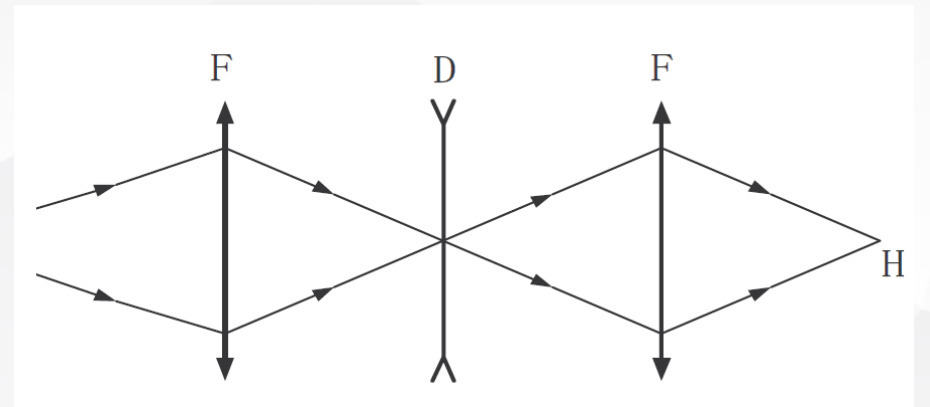
当四极磁铁的长度较短时,  $l \rightarrow 0$  并且  $K \rightarrow \infty$

$Kl$ 为常数

传输矩阵 $M$ 可以简化为

$$\text{聚焦 } M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{散焦 } M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

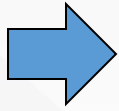
$f$ 为聚焦长度  $f = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{|K|l}$



## ➤ 传输矩阵的薄透镜近似

- 四极磁铁薄透镜近似下，粒子穿过四极磁铁后，位置保持不变，而动量发生改变

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ x' &= -\frac{1}{f} x_0 + x_0' \end{aligned}$$

(粒子受到了一个聚焦的 “kick” )

## ➤ 传输矩阵的薄透镜近似

- 如果假定 $f > 0$ , 则聚焦四极铁可以表示为

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

(粒子受到了一个聚焦的 “kick” )

- 散焦四极铁表示为

$$M_D = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0} l \\ \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0} l & \cosh \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

## ➤ 传输矩阵的薄透镜近似

- 例2 计算在薄透镜近似条件下，二极磁铁的传输矩阵形式

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

提示：薄透镜近似  $\theta \ll 0$

## ➤ 传输矩阵的薄透镜近似

- 例2 计算在薄透镜近似条件下，二极磁铁的传输矩阵

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 解答:  $\theta \ll 0$        $\cos \theta = 1$        $\sin \theta = \theta$        $\rho \theta = l$

二极磁铁的传输矩阵M可以简化为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 二极磁铁的传输矩阵为漂移节 (较弱聚焦和偏转作用都被忽略了)

# 薄透镜与厚透镜

## 四极磁铁的厚透镜形式

$$\begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0} l \\ 0 & 0 & \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0} l & \cosh \sqrt{K_0} l \end{pmatrix}$$

## 四极磁铁的薄透镜形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

# 多个元件的传输矩阵

➤ 环形加速器通常由**周期性加速结构**组成的，周长  $C = NL$

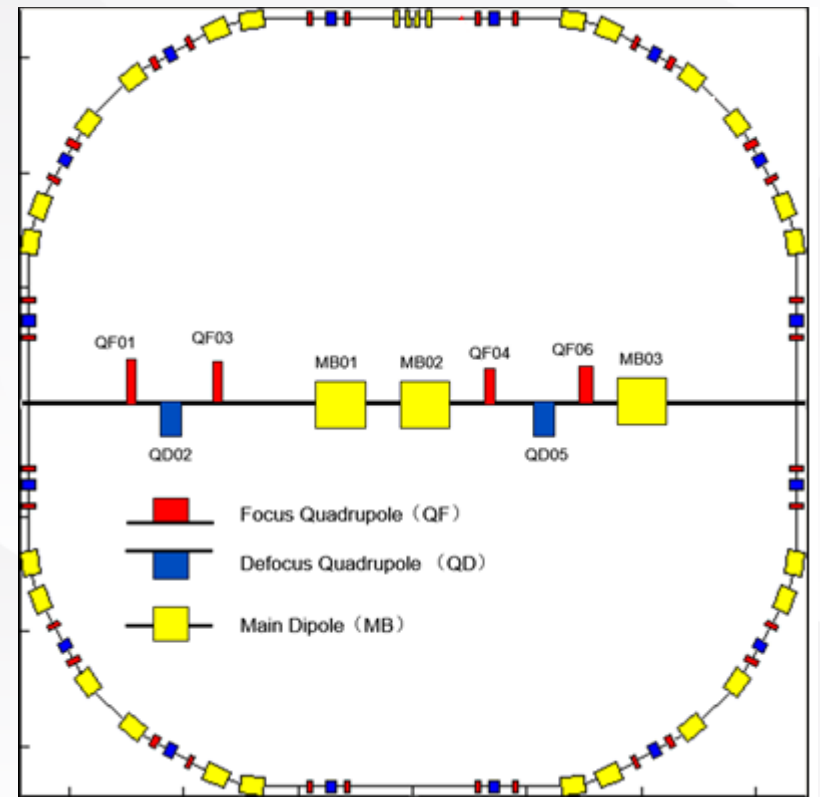
- 假设全环由N个加速周期节组成，每个周期节由n个磁铁元件组成

$$M(s) \equiv M(s + L)M(s) = M_n \dots M_2 M_1$$

- 经过P个相同的周期节，传输矩阵可写为

$$M(s + PL)M(s) = [M(s)]^P$$

➤ 注意：传输矩阵运算中元件的顺序与束流线中的排列顺序**相反**



中国散裂中子源快循环同步环  
由四个周期节组成

## ➤ 多个元件的传输矩阵

➤ 线性传输:  $M(s_2 | s_0) = M(s_2 | s_1)M(s_1 | s_0)$

➤ 例3 已知从s0到s1和从s1到s2这两段的传输矩阵分别为

$$M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求从s0到s2的传输矩阵。

## ➤ 多个元件的传输矩阵

例3 已知从 $s_0$ 到 $s_1$ 和从 $s_1$ 到 $s_2$ 这两段的传输矩阵分别为

$$M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求从 $s_0$ 到 $s_2$ 的传输矩阵。

解：

$$M(s_2 | s_0) = M(s_2 | s_1)M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意矩阵相乘的顺序

## ➤ 多个元件的传输矩阵

➤ 行列式  $\det M = 1$  (朗斯基行列式不显含时间)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

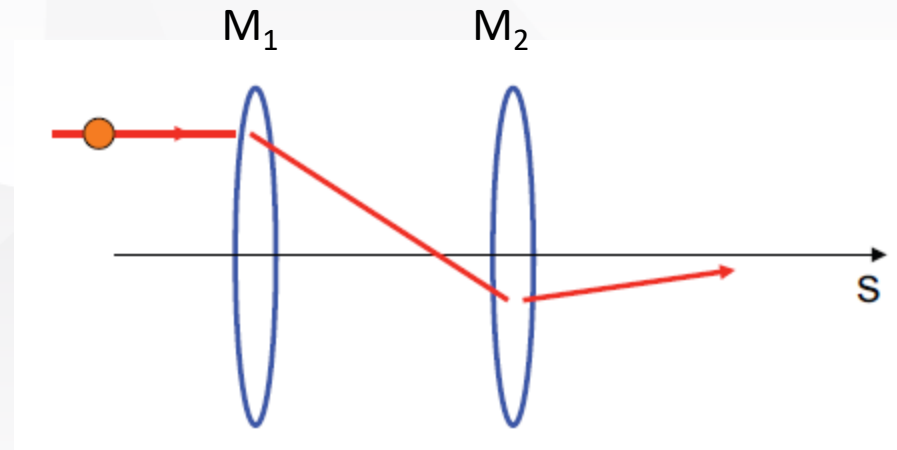
➤ 传输矩阵运算满足结合律

$$M = M_3 M_2 M_1 = M_{32} M_1 = M_3 M_{21} \quad M_{32} = M_3 M_2 \quad M_{21} = M_2 M_1$$

## ➤ 多个元件的传输矩阵

- 利用传输矩阵，可以设计加速器的聚焦结构（**束流动力学设计**）

例4 构造一个doublet结构：长度为 $L$ 的漂移段分隔开的两个四极磁铁



## ➤ 多个元件的传输矩阵

例4 构造一个doublet结构：长度为L的漂移段分隔开的两个四极磁铁

$$M_{doublet} = M_2 M_{drift} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1 f_2} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$

其中  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_0}{f_1 f_2}$

若取  $f_1 = -f_2 = f_0$   $M_{doublet} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{l_0}{f_0^2} & l_0 \\ -\frac{l_0}{f_0^2} & 1 + \frac{l_0}{f_0} \end{pmatrix}$

- 如果 $f_1, f_2$ 在水平和垂直方向上的符号相反，可以实现在水平和垂直两个方向上聚焦。

## ➤ 多个元件的传输矩阵

练习 (线性传输矩阵) 证明: 聚焦力为  $-1/f$  的四极磁铁可以分为两个聚焦力为  $-1/2f$  的传输矩阵

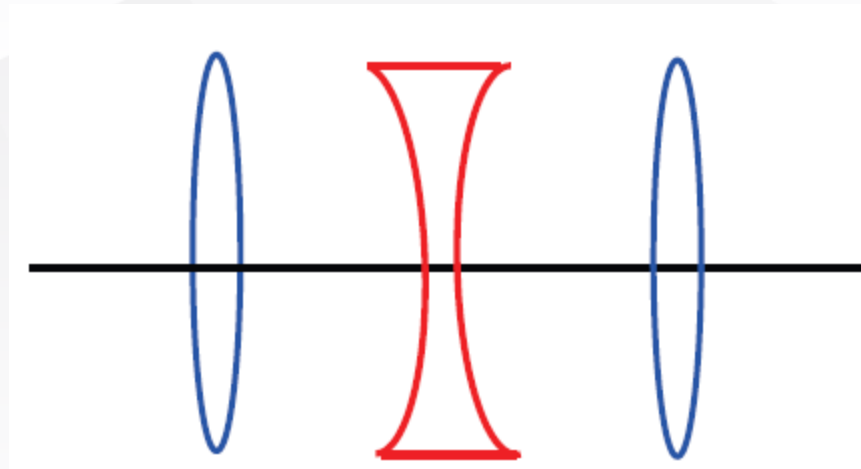
$$M_{QF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{QF/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{QF} = M_{QF/2} M_{QF/2}$$

## ➤ 多个元件的传输矩阵

例5 构造一个triplet结构：长度为 $l_0$ 的漂移段分隔开的两个四极磁铁

QF/2 L QD L QF/2



## ➤ 多个元件的传输矩阵

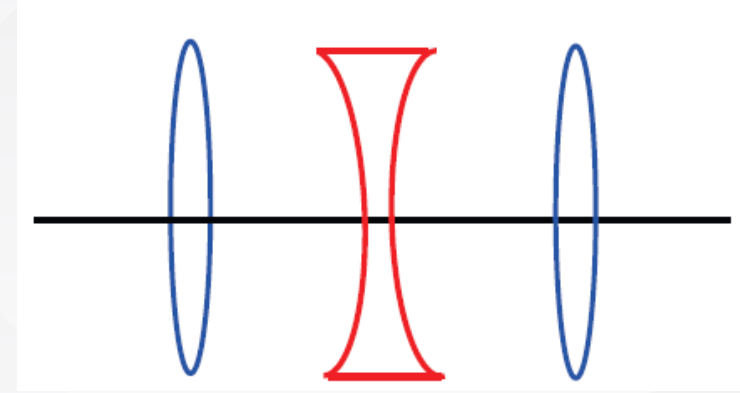
例5 构造一个triplet结构：长度为 $l_0$ 的漂移段分隔开的两个四极磁铁

解：  $M_{triplet} = M_{QF/2} M_{drift} M_{QD} M_{drift} M_{QF/2}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{f} & 2l_0 \left[ 1 - \frac{l_0}{2f_2} \right] \\ -\frac{2}{f} \left[ 1 - \frac{l_0}{2f_1} \right] & 1 - \frac{2l_0}{f} \end{pmatrix}$$

其中  $\frac{1}{f} = \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} - \frac{l_0}{4f_1f_2}$



## ➤ 多个元件的传输矩阵

➤ triplet属于FODO结构

➤ 若令  $f_1 = -f_2 = f_0$  则  $\frac{1}{f} = \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} - \frac{l_0}{4f_1f_2} = \frac{l_0}{4f_0^2}$

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f_0^2} & 2l_0 \left[ 1 + \frac{l_0}{2f_0} \right] \\ -\frac{l_0}{2f_0^2} \left[ 1 - \frac{l_0}{2f_0} \right] & 1 - \frac{l_0^2}{2f_0^2} \end{pmatrix}$$

➤ 可以看出, 如果  $f_0 > l_0/2$ , 则triplet 在水平和垂直方向都是聚焦的

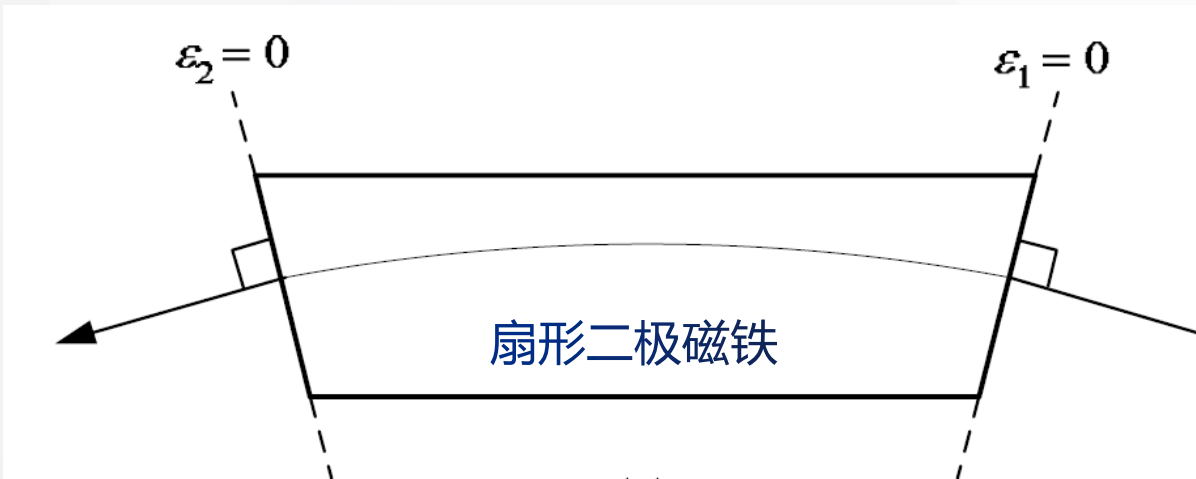
$$\frac{1}{f_x} = \frac{l_0}{2f_0^2} \left( 1 - \frac{l_0}{2f_0} \right) \qquad \frac{1}{f_y} = \frac{l_0}{2f_0^2} \left( 1 + \frac{l_0}{2f_0} \right)$$

# ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

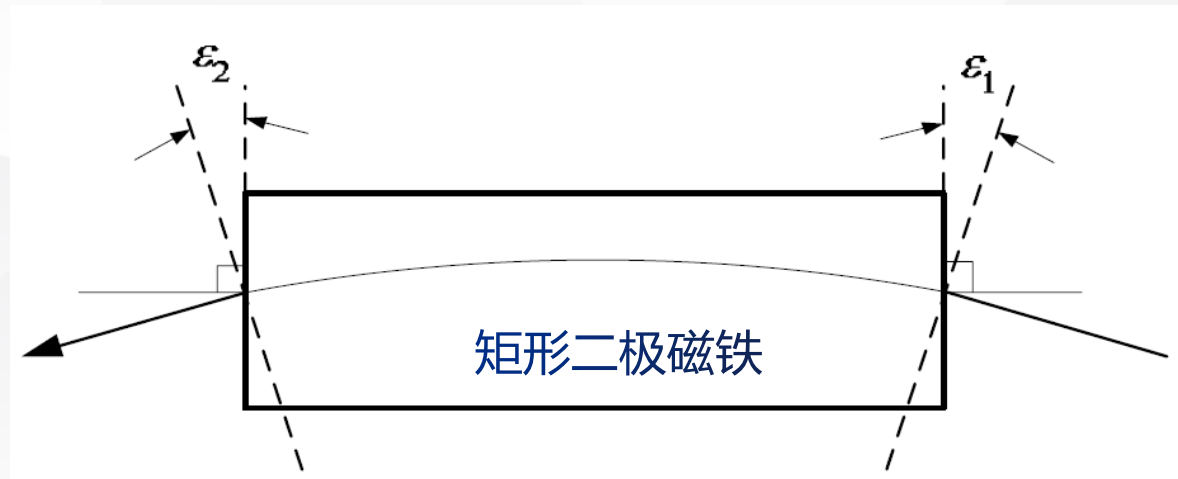
➤ 二极磁铁的传输矩阵为

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



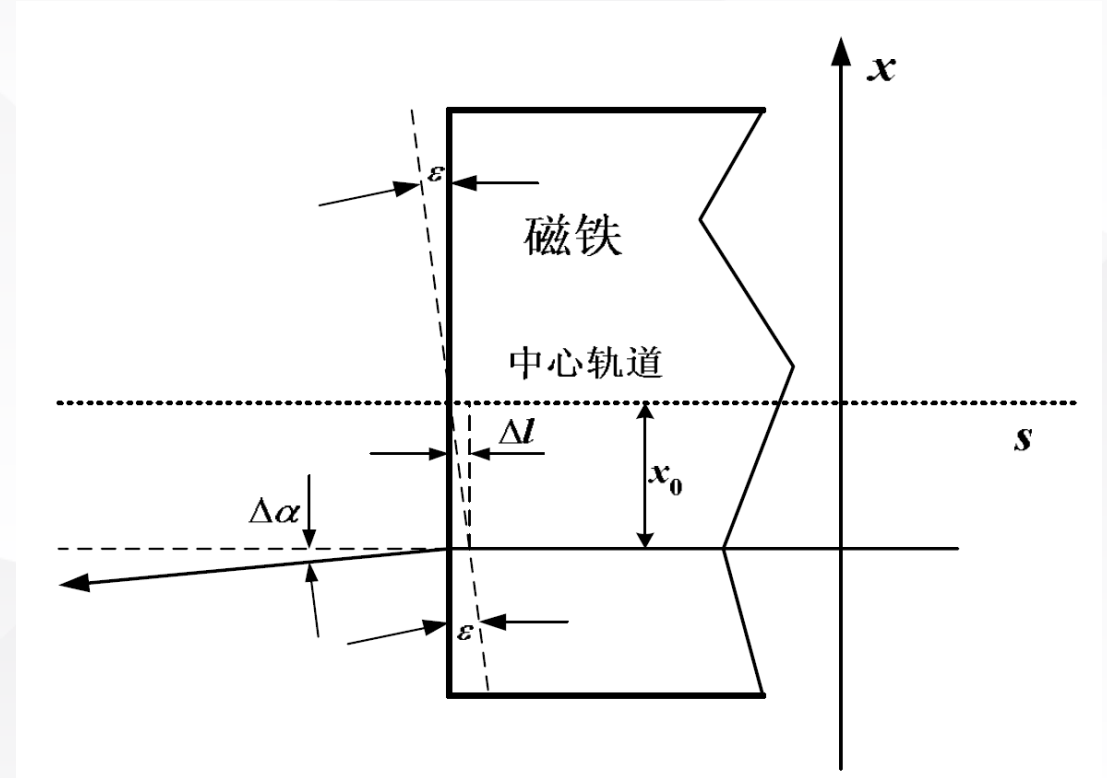
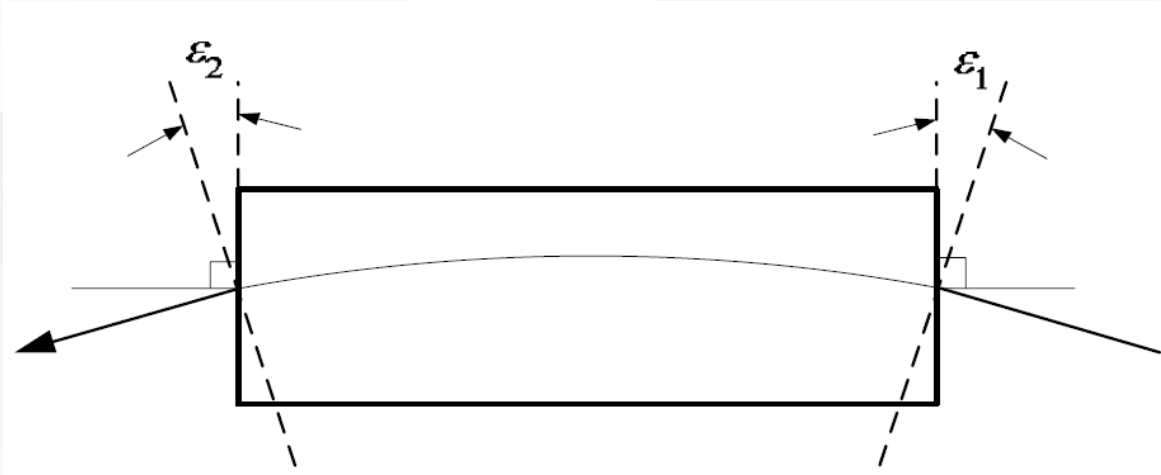
束流 (粒子) 垂直入射二极磁铁



束流 (粒子) 入射二极磁铁有偏角

## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

- 当不垂直入射（离开）二极磁铁时，会产生边缘聚焦效应



- 由薄透镜近似，可知

$$\Delta l = x_0 \tan \epsilon$$

$$x = x_0$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta l}{\rho} = x_0 \frac{\tan \epsilon}{\rho}$$

$$x' = x_0' + x_0 \frac{\tan \epsilon}{\rho}$$

## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

➤ 练习 已知粒子  $(x, x_0)$  经过二极磁铁的边缘后的变化为

$$x = x_0$$

$$x' = x_0' + x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho}$$

求相应的传输矩阵

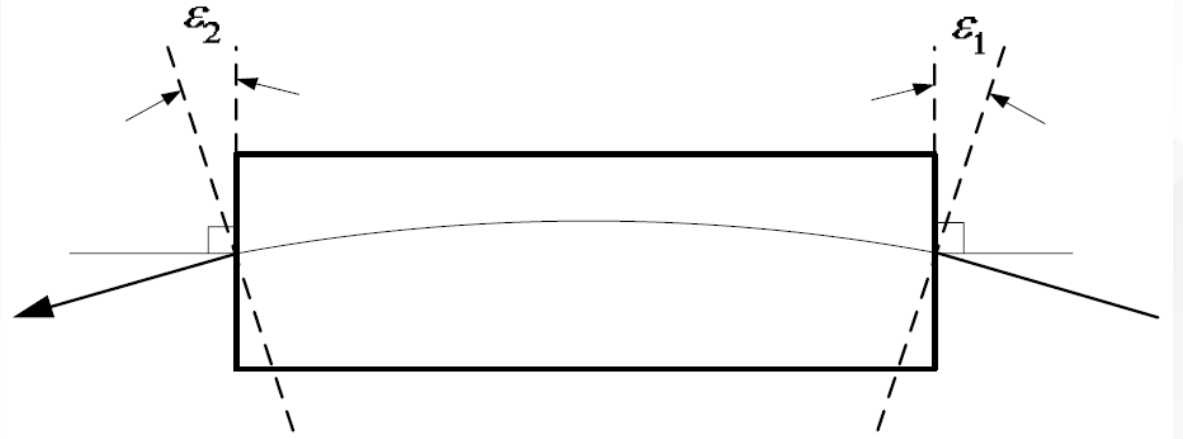
## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

➤ 练习 已知粒子  $(x, x_0)$  经过二极磁铁的边缘后的变化为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

可知相应的传输矩阵为

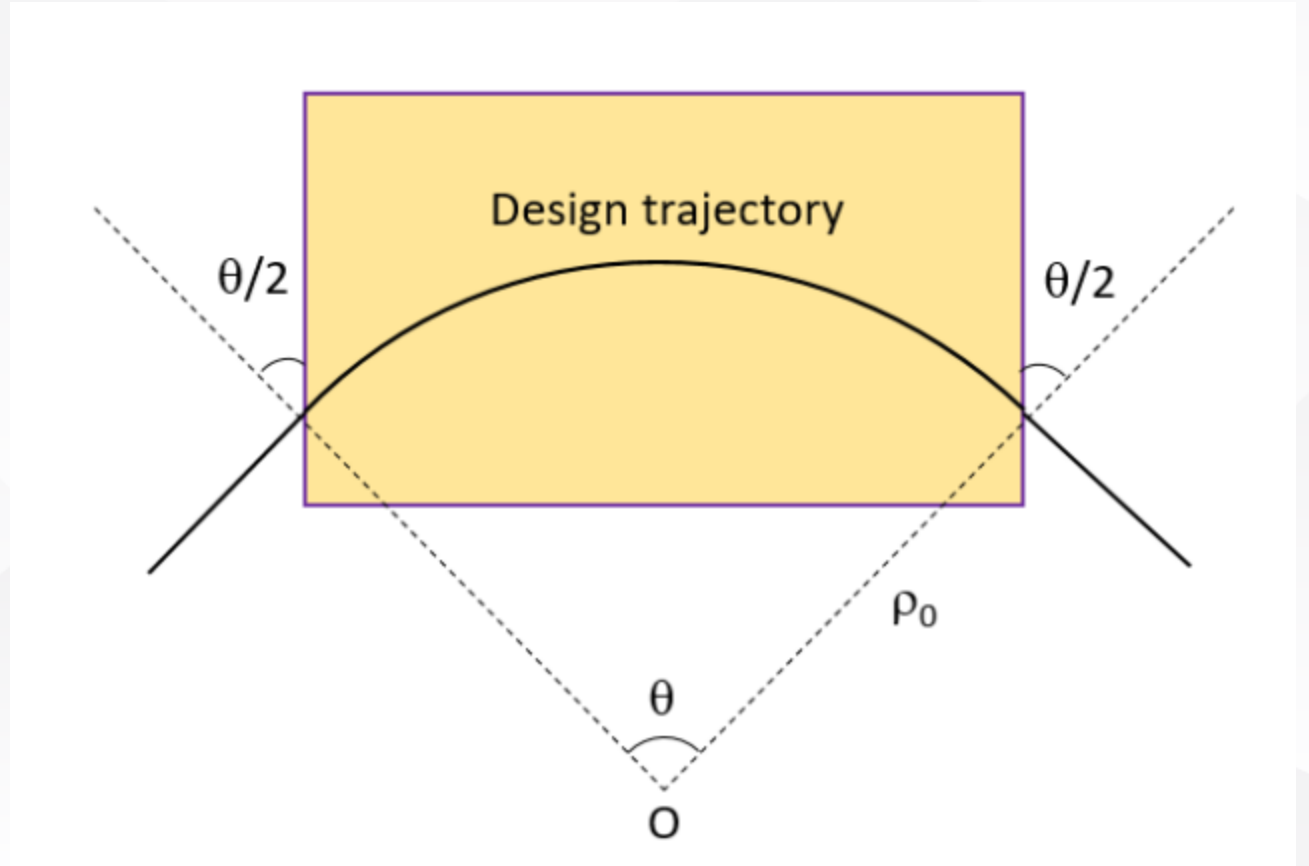
$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$



## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

例6 证明**矩形**二极磁铁的水平方向的传输矩阵为

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

例6 证明矩形二极磁铁的传输矩阵为

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

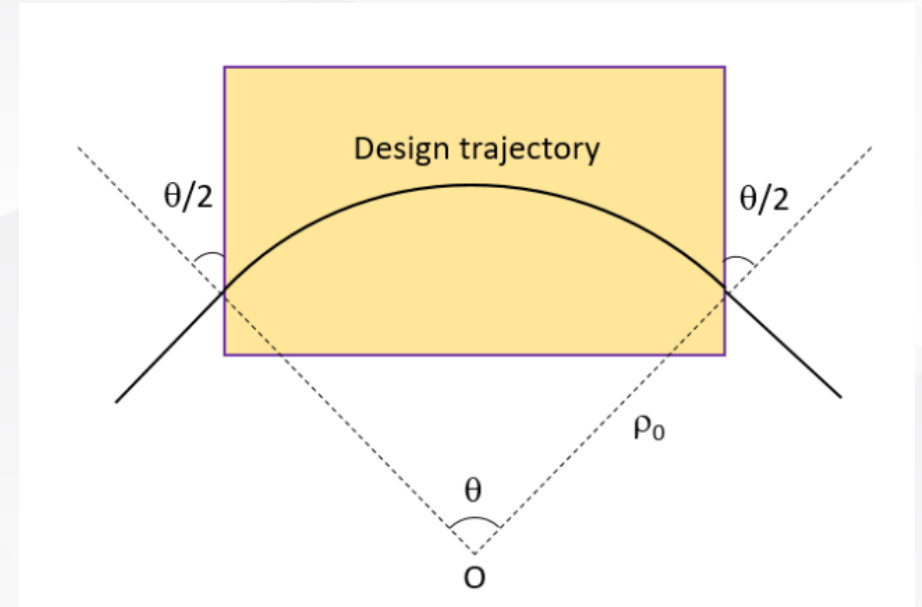
证明： 矩形二极磁铁的水平方向的边缘聚焦传输矩阵为

$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

则矩形二极磁铁的总的传输矩阵可写为

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证毕。



# 粒子传输的稳定性条件

- 假设某环形加速器由P个长度为L的周期性加速结构组成，粒子在环中运行一圈的传输矩阵为

$$M(s + PL | s) = [M(s)]^P$$

- 粒子经过m圈的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = [M(s)]^{mP} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

- 设二维矩阵M的两个特征值为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ,  $v_1$  和  $v_2$  为对应的特征向量

$$M\lambda_1 = v_1\lambda_1 \quad M\lambda_2 = v_2\lambda_2$$



- 稳定性条件:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \text{finite} \quad \rightarrow$$

对传输矩阵M（加速器的设计）有什么要求？

## ➤ 粒子传输的稳定性条件

- 设二维矩阵M的两个特征值为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  , 则有

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{Trace}(M)\lambda + 1 = 0$$

$$\text{Trace}(M) = m_{11} + m_{22}$$

$\lambda$  为实数的充要条件为  $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

- 令  $\text{Trace}(M) = \cos(\phi)$  则两个特征值可表示为  $\lambda_1 = e^{i\phi}$      $\lambda_2 = e^{-i\phi}$

$\phi$ 为betatron相移

$\phi$ 为实数  $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

,

$\phi$ 为复数  $|\text{Trace}(M)| \geq 2$

## 粒子传输的稳定性条件

- 粒子的初始坐标可写为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 \quad \begin{pmatrix} x_m \\ x_m' \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2 = ae^{in\phi} v_1 + be^{-in\phi} v_2$$

- $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  保持单位1的充要条件  $\phi$ 为实数, 或者

$$|\text{Trace}(M)| \leq 2$$

- 线性系统的稳定性条件与初值  $(x_0, x_0')$  无关, 与加速器的结构有关

# ➤ 粒子传输的稳定性条件

