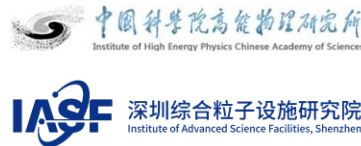




中山大學  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



# 横向束流动力学

## 第五节

---

苑尧硕

### ➤ 传输矩阵

$$\vec{z}(s) = M(s | s_0) \vec{z}(s_0)$$

从 $s_0$ 到 $s$ 的传输矩阵(注意顺序)

### ➤ 线性元件的矩阵形式

- 漂移节
- 聚焦四极磁铁
- 散焦四极磁铁
- 二极磁铁

- 传输矩阵是加速器lattice（或者元件）的属性，而不是粒子束流的属性。
- 利用传输矩阵，可以计算出粒子通过该元件后粒子**运动状态（位置和角度）**的改变。

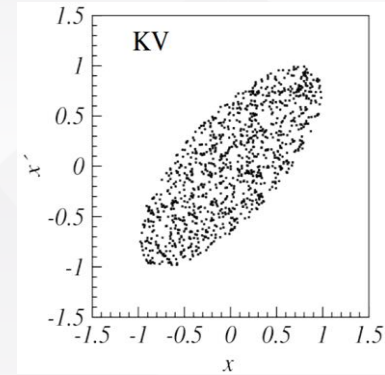
## 粒子经过传输矩阵的计算

$$\vec{x} = M_x \vec{x}_0$$

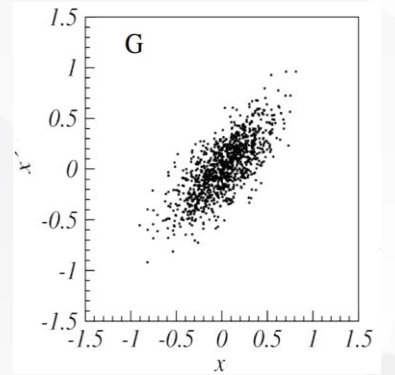
$$\vec{y} = M_y \vec{y}_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{x,11} & m_{x,12} \\ m_{x,21} & m_{x,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{y,11} & m_{y,12} \\ m_{y,21} & m_{y,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$



K-V分布 (均匀分布)



高斯分布

## 传输矩阵

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_z} (s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{K_z}} \sin \sqrt{K_z} (s - s_0) \\ -\sqrt{K_z} \sin \sqrt{K_z} (s - s_0) & \cos \sqrt{K_z} (s - s_0) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## 上节回顾

粒子在四维横向相空间中的运动可表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

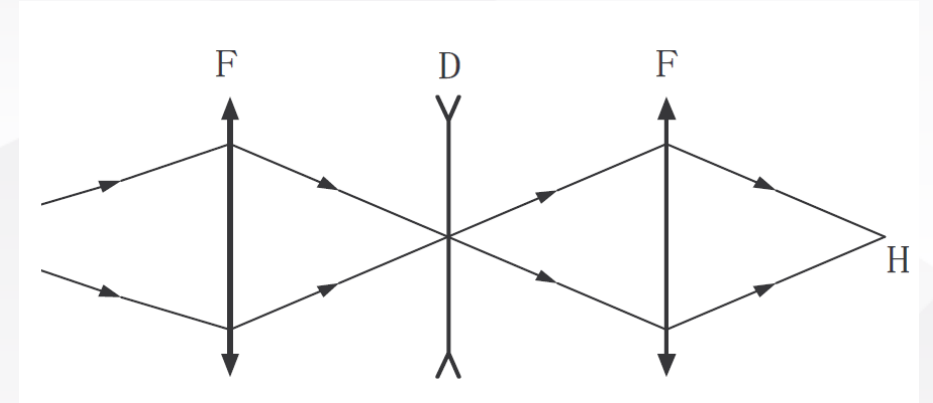
x和y之间的耦合项

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sinh \sqrt{K_0} l \\ 0 & 0 & \sqrt{K_0} \sinh \sqrt{K_0} l & \cosh \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

## 薄透镜近似

聚焦  $M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

散焦  $M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$



## ➤ 上节回顾：传输矩阵的计算

➤ 例1：已知漂移节的传输矩阵  $M_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $l = s - s_0$ ，和粒子的初始坐标  $x = x_0$ ,  $x' = x_0'$

求经过漂移节后粒子**位置**和**角度**的改变

## 上节回顾：传输矩阵的计算

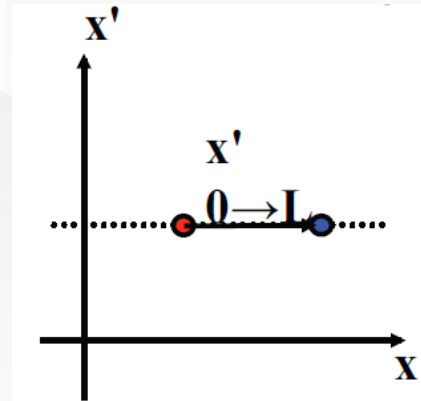
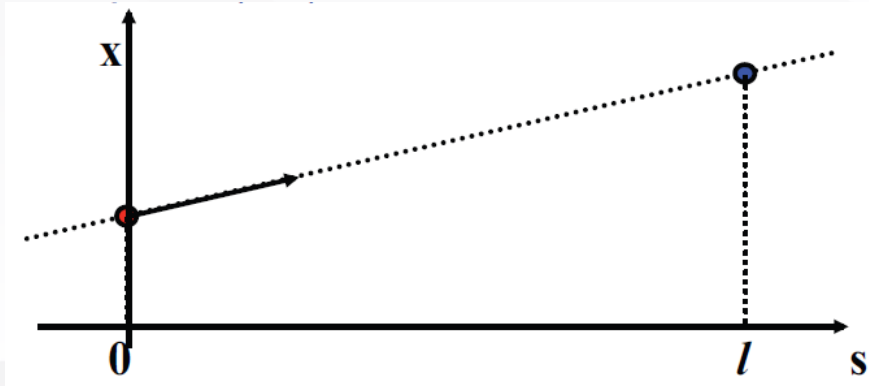
➤ 例1：已知漂移节的传输矩阵  $M_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $l = s - s_0$ ，和粒子的初始坐标  $x = x_0$ ， $x' = x_0'$

求经过漂移节后粒子**位置**和**角度**的改变

解：通过  $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$  可得

$$x = x_0 + lx_0'$$

$$x' = x_0'$$



**粒子经过漂移节后，只有横向位置发生改变**

## 上节回顾：传输矩阵的计算

➤ 例2：已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标  $x=x_0$ ,  $x' = x_0'$

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix}$$

求经过该四极磁铁后粒子**位置**和**角度**的改变

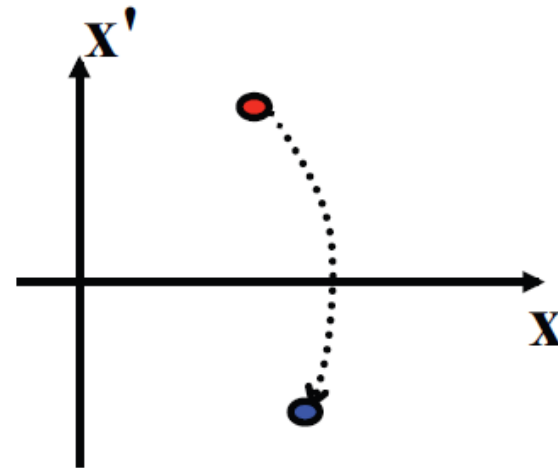
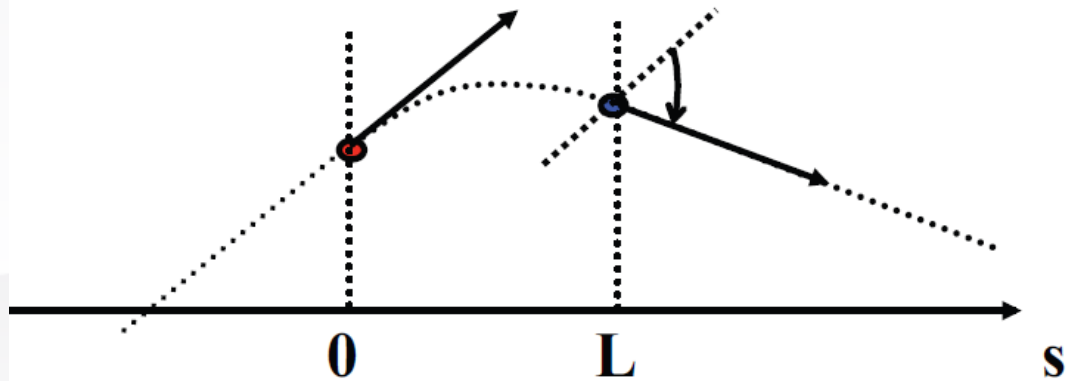
## 上节回顾：传输矩阵的计算

➤ 例2：已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标  $x=x_0$ ,  $x' = x_0'$

求经过该四极磁铁后粒子**位置**和**角度**的改变

解：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$



粒子经过四极磁铁后，只有横向位置和角度均发生改变

## 本节内容

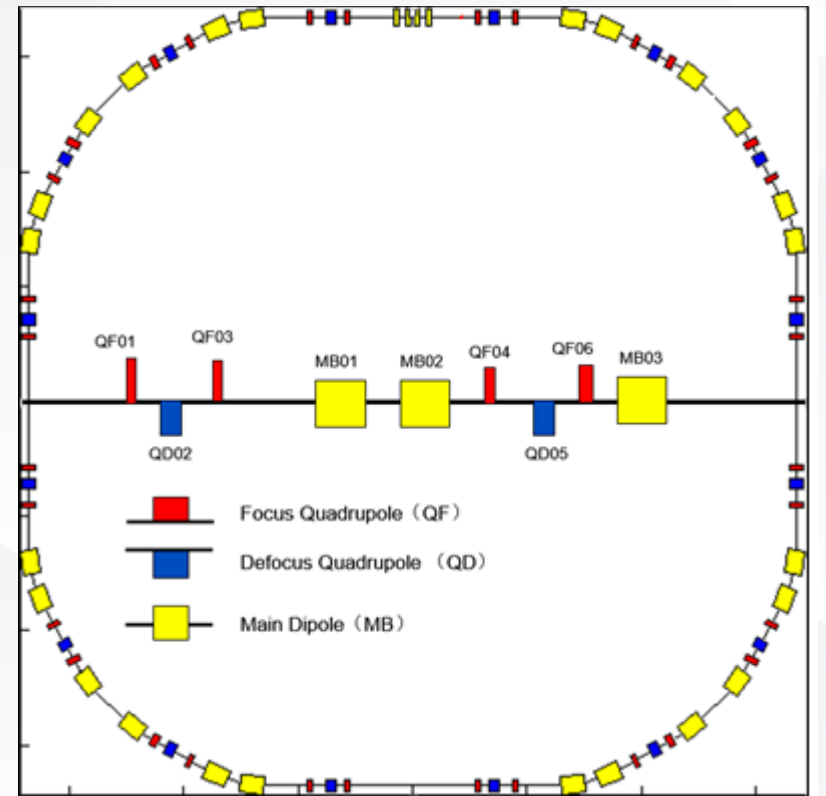
- 多个元件的矩阵传输
- 二极磁铁的边缘聚焦效应
- 传输矩阵的稳定性条件

# 多个元件的传输矩阵

- 环形加速器通常由**周期性加速结构**组成的，周长  $C = NL$ 
  - 假设全环由N个加速周期节组成，每个周期节长度L, 由n个磁铁元件组成

$$M(s) \equiv M(s + L) \quad \tilde{M}(s) = M_n \dots M_2 M_1$$

- 注意：传输矩阵运算中元件的顺序与束流线中的排列顺序**相反**



中国散裂中子源快循环同步环  
由四个周期节组成

## ➤ 多个元件的传输矩阵

➤ 线性传输:  $M(s_2 | s_0) = M(s_2 | s_1)M(s_1 | s_0)$

➤ 经过P个相同的周期节, 传输矩阵可写为

$$M(s + PL) = M(s)M(s) \cdots M(s) = [\tilde{M}(s)]^P$$

➤ 经过周长为  $C = NL$  的全环的传输矩阵可写为

$$M(s + NL) = [\tilde{M}(s)]^N$$

• 经过m圈  $[\tilde{M}(s)]^{mN}$

## ➤ 多个元件的传输矩阵

➤ 例3 已知从 $s_0$ 到 $s_1$ 和从 $s_1$ 到 $s_2$ 这两段的传输矩阵分别为

$$M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求从 $s_0$ 到 $s_2$ 的传输矩阵。

## ➤ 多个元件的传输矩阵

例3 已知从 $s_0$ 到 $s_1$ 和从 $s_1$ 到 $s_2$ 这两段的传输矩阵分别为

$$M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求从 $s_0$ 到 $s_2$ 的传输矩阵。

解：

$$M(s_2 | s_0) = M(s_2 | s_1)M(s_1 | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_1 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_2 - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意矩阵相乘的顺序

## ➤ 多个元件的传输矩阵

➤ 行列式  $\det M = 1$  (朗斯基行列式不显含时间)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

➤ 传输矩阵运算满足**结合律**

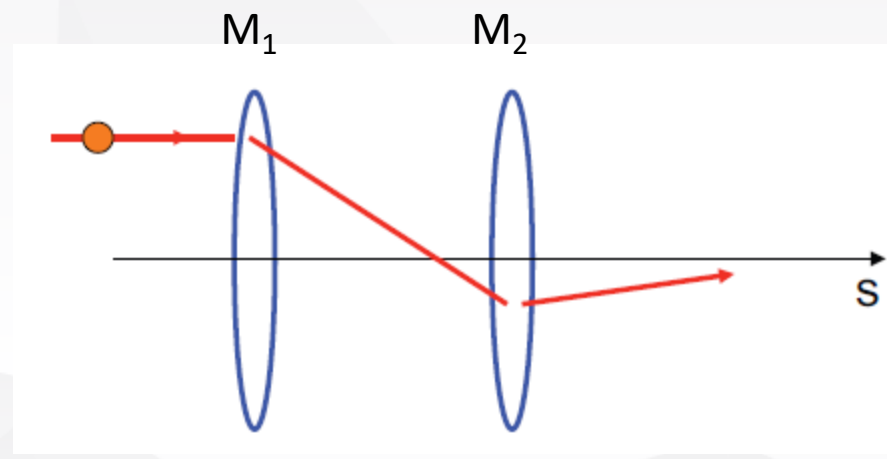
$$M = M_3 M_2 M_1 = M_{32} M_1 = M_3 M_{21} \quad \text{其中} \quad M_{32} = M_3 M_2 \quad M_{21} = M_2 M_1$$

• 是否满足交换律??

➤ 利用传输矩阵, 可以设计加速器的聚焦结构 (**束流动力学设计**)

## ➤ 多个元件的传输矩阵

例4 构造一个doublet结构：长度为L的漂移段分隔开的两个四极磁铁



## ➤ 多个元件的传输矩阵

例4 构造一个doublet结构：长度为L的漂移段分隔开的两个四极磁铁

$$M_{doublet} = M_2 M_{drift} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1 f_2} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$

其中  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_0}{f_1 f_2}$

若取  $f_1 = -f_2 = f_0$   $M_{doublet} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{l_0}{f_0^2} & l_0 \\ -\frac{l_0}{f_0^2} & 1 + \frac{l_0}{f_0} \end{pmatrix}$

- 如果 $f_1, f_2$ 在水平和垂直方向上的符号相反，可以实现在水平和垂直两个方向上聚焦。

## ➤ 多个元件的传输矩阵

练习 (线性传输矩阵) 证明: 聚焦力为  $-1/f$  的四极磁铁可以分为两个聚焦力为  $-1/2f$  的传输矩阵

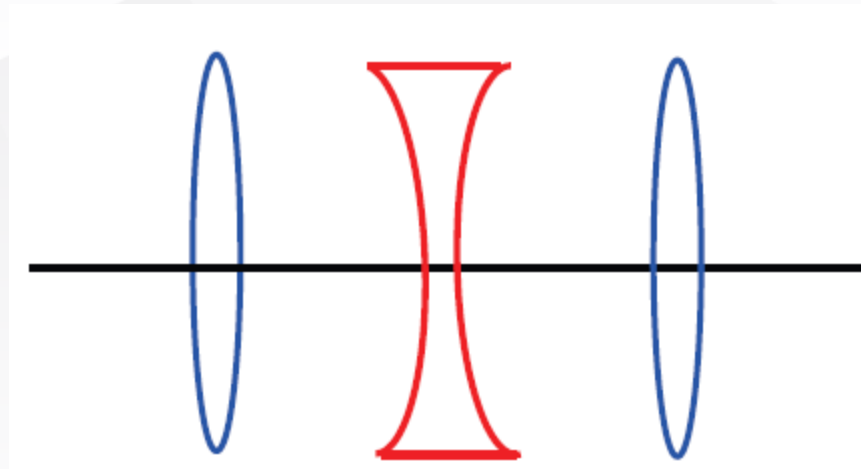
$$M_{QF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{QF/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{QF} = M_{QF/2} M_{QF/2}$$

## ➤ 多个元件的传输矩阵

例5 构造一个triplet结构：长度为 $l_0$ 的漂移段分隔开的两个四极磁铁

QF/2 L QD L QF/2



## ➤ 多个元件的传输矩阵

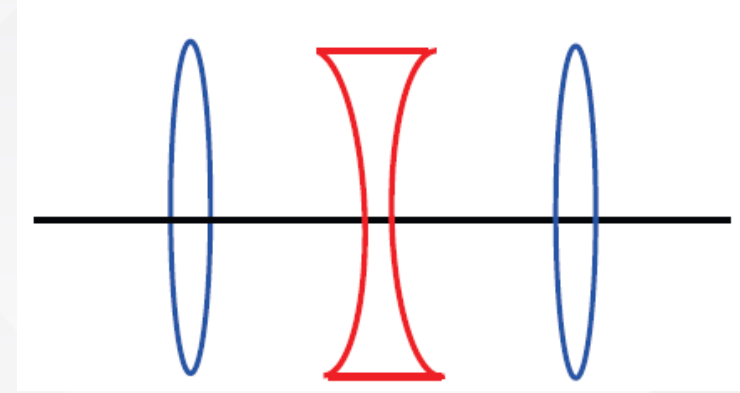
例5 构造一个triplet结构：长度为 $l_0$ 的漂移段分隔开的两个四极磁铁

解：  $M_{triplet} = M_{QF/2} M_{drift} M_{QD} M_{drift} M_{QF/2}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_0}{f} & 2l_0 \left[ 1 - \frac{l_0}{2f_2} \right] \\ -\frac{2}{f} \left[ 1 - \frac{l_0}{2f_1} \right] & 1 - \frac{2l_0}{f} \end{pmatrix}$$

其中  $\frac{1}{f} = \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} - \frac{l_0}{4f_1f_2}$



## ➤ 多个元件的传输矩阵

➤ triplet属于FODO结构

➤ 若令  $f_1 = -f_2 = f_0$  则  $\frac{1}{f} = \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} - \frac{l_0}{4f_1f_2} = \frac{l_0}{4f_0^2}$

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f_0^2} & 2l_0 \left[ 1 + \frac{l_0}{2f_0} \right] \\ -\frac{l_0}{2f_0^2} \left[ 1 - \frac{l_0}{2f_0} \right] & 1 - \frac{l_0^2}{2f_0^2} \end{pmatrix}$$

➤ 可以看出, 如果  $f_0 > l_0/2$ , 则triplet 在水平和垂直方向都是聚焦的

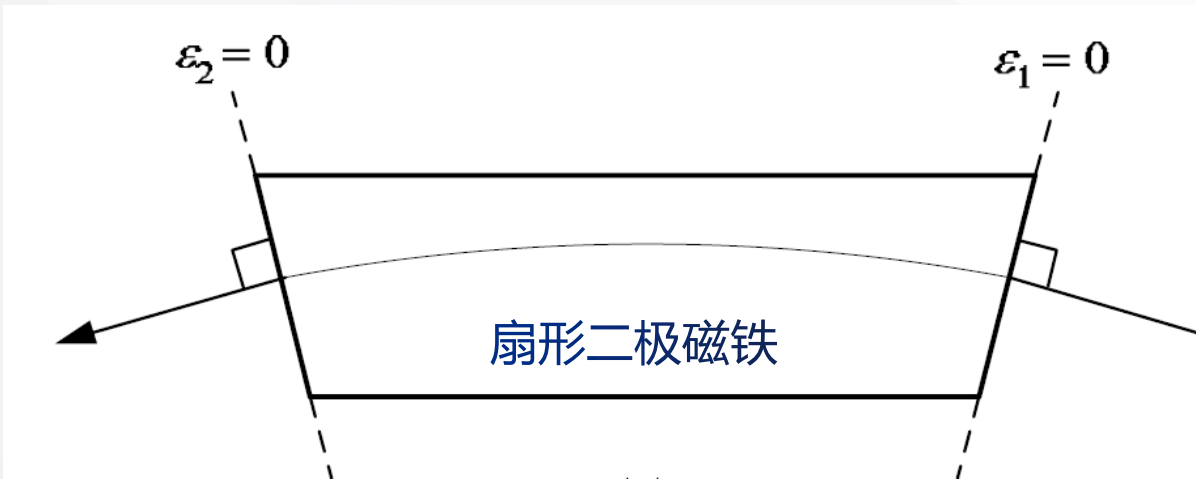
$$\frac{1}{f_x} = \frac{l_0}{2f_0^2} \left( 1 - \frac{l_0}{2f_0} \right) \qquad \frac{1}{f_y} = \frac{l_0}{2f_0^2} \left( 1 + \frac{l_0}{2f_0} \right)$$

# ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

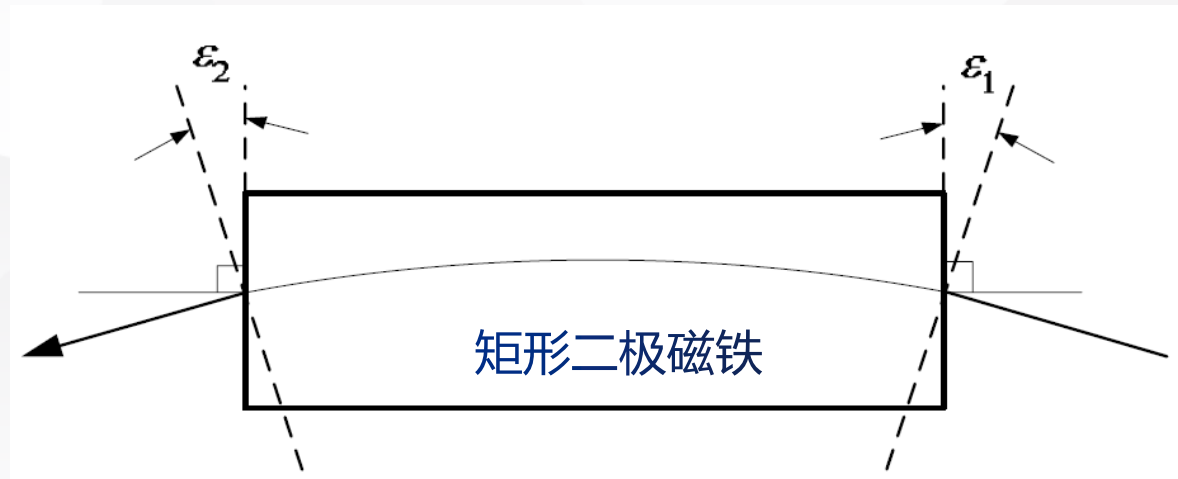
➤ 二极磁铁的传输矩阵为

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



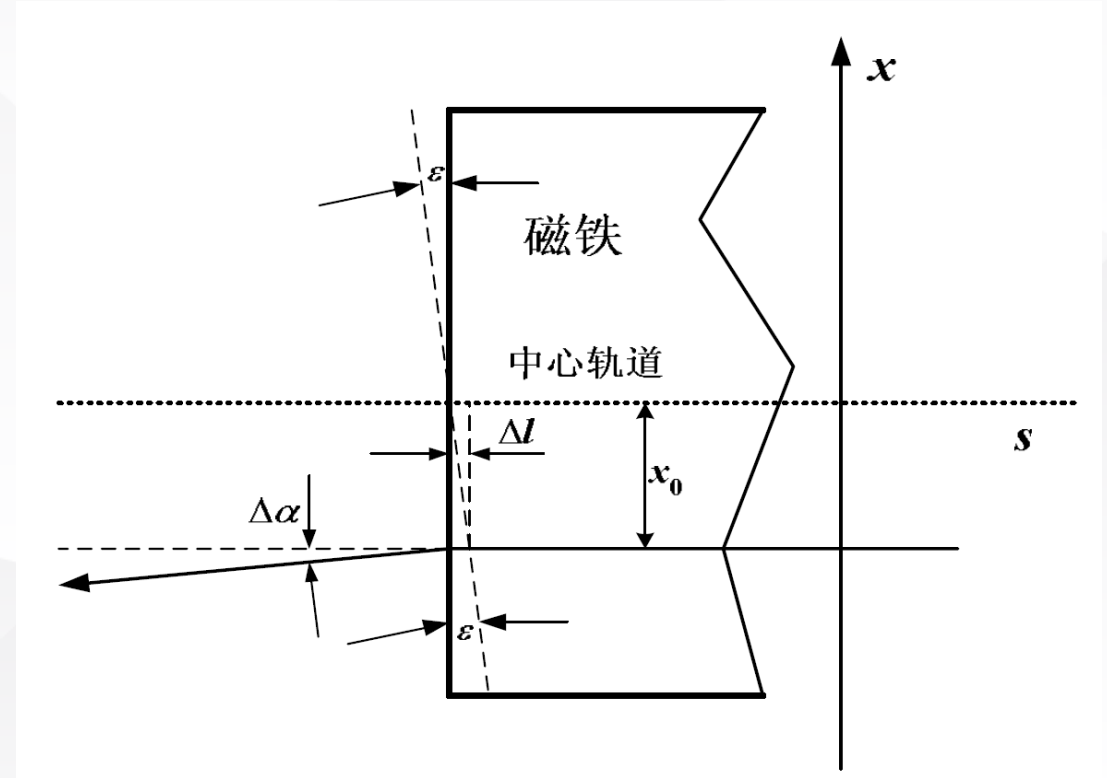
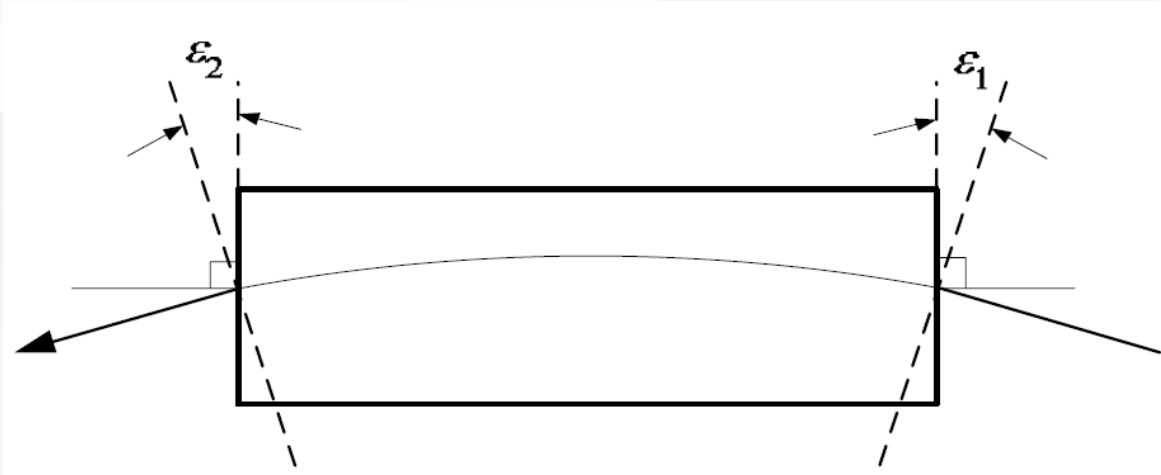
束流 (粒子) 垂直入射二极磁铁



束流 (粒子) 入射二极磁铁有偏角

## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

- 当没有垂直入射（离开）二极磁铁时，会产生边缘聚焦/散焦效应



- 由薄透镜近似，可知

$$\Delta l = x_0 \tan \varepsilon$$

$$x = x_0$$

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta l}{\rho} = x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho}$$

$$x' = x_0' + x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho}$$

## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

➤ 练习 已知粒子在水平相空间的坐标为  $(x_0, x_0')$ ，经过二极磁铁的边缘后的变化为

$$x = x_0$$

$$x' = x_0' + x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho}$$

求相应的传输矩阵

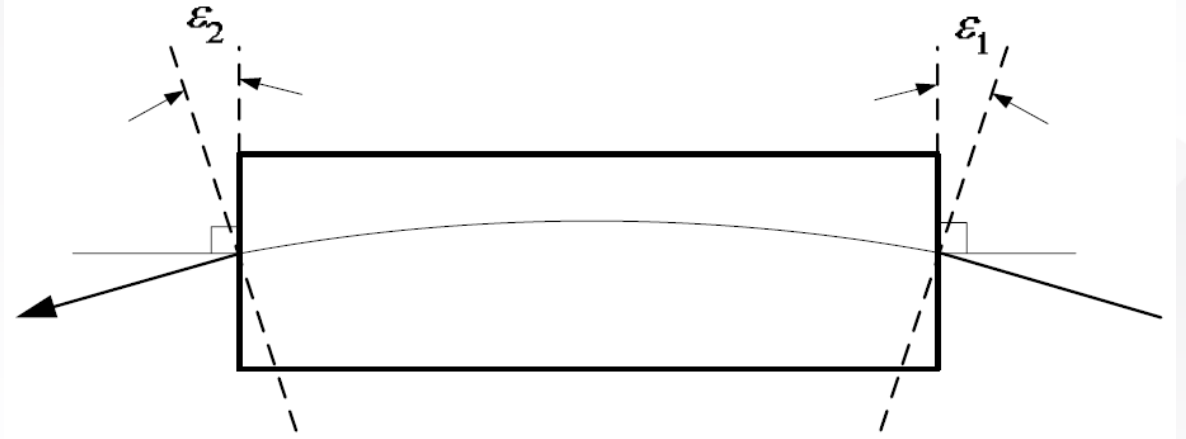
## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

➤ 练习 已知粒子  $(x, x_0)$  经过二极磁铁的边缘后的变化为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

可知相应的传输矩阵为

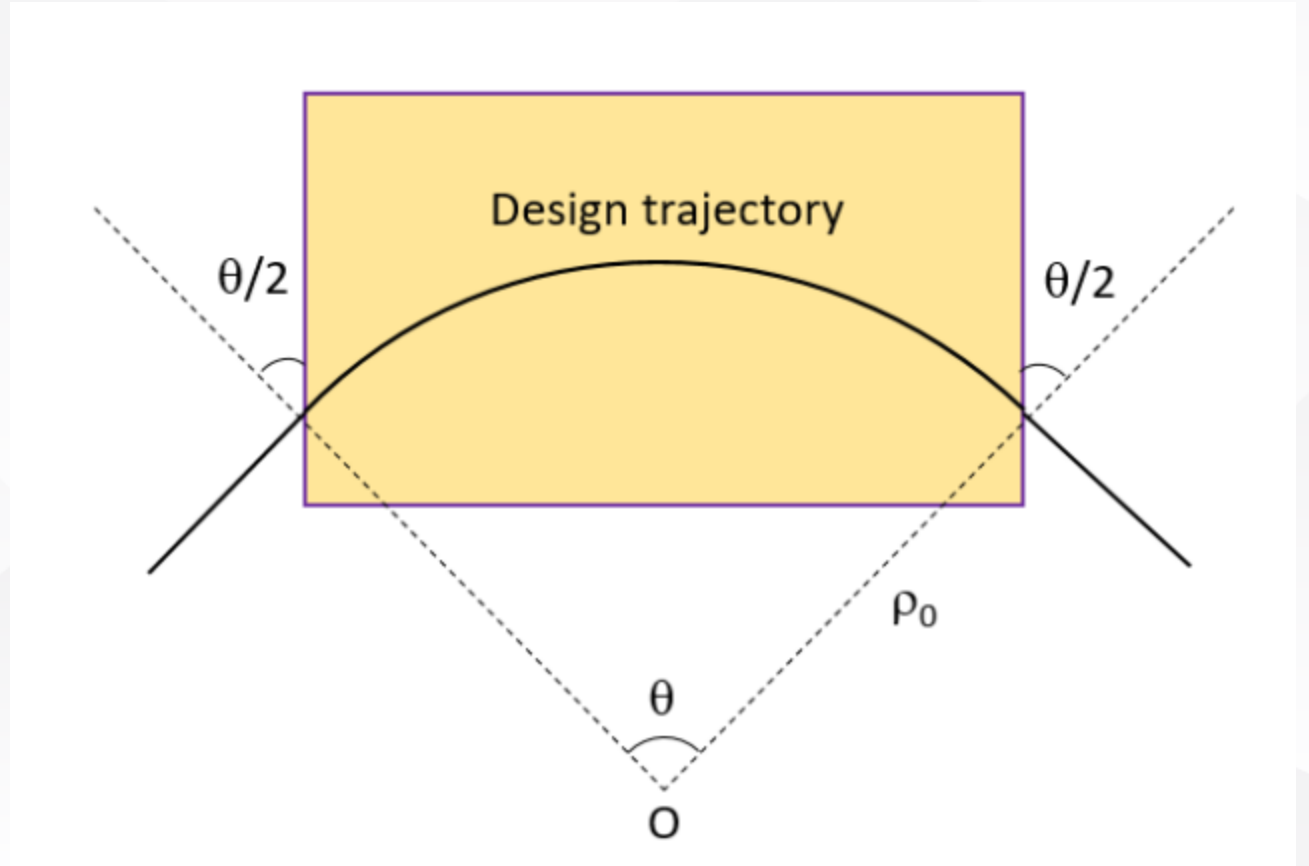
$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$



## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

例6 证明**矩形**二极磁铁的水平方向的传输矩阵为

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

例6 证明矩形二极磁铁的水平方向传输矩阵为

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

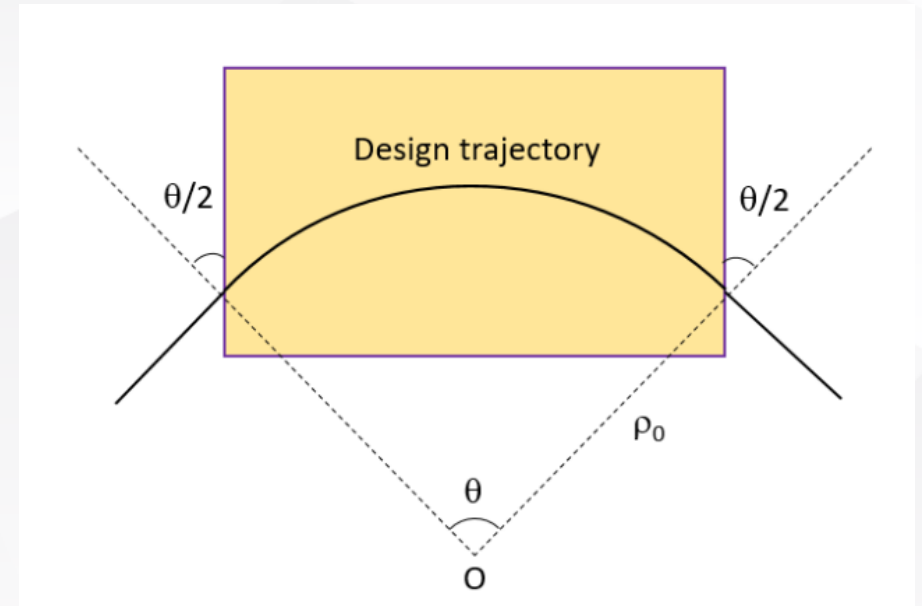
证明： 矩形二极磁铁的水平方向的边缘聚焦传输矩阵为

$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

则矩形二极磁铁的总的传输矩阵可写为

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证毕。



## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

练习：证明矩形二极磁铁的垂直方向传输矩阵为

$$M_{edge,y} = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & l \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} (\theta \tan \frac{\theta}{2} - 2) & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

练习：证明矩形二极磁铁的垂直方向传输矩阵为

$$M_{edge,y} = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & l \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} (\theta \tan \frac{\theta}{2} - 2) & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

证明：

$$M_{rect,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \theta / 2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \theta / 2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{其中 } l = \rho \theta$$

## ➤ 二极磁铁的边缘聚焦效应

- 考虑边缘聚焦效应后，**矩形**二极磁铁在水平方向整体表现为纯的偏转作用而在垂直方向仍表现为聚焦作用

水平方向

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

垂直方向

$$M_{edge,y} = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & l \\ \frac{\theta}{\rho} & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

## 粒子传输的稳定性条件

➤ 行列式  $\det M = 1$  (朗斯基行列式不显含时间)

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2 = 1$$

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

➤ 希尔方程  $z''(s) + K_z(s)z(s) = 0$

$$z(s) = z(s_0) \cos[\sqrt{K_z}(s - s_0)] + z'(s_0) \frac{1}{\sqrt{K_z}} \cos[\sqrt{K_z}((s - s_0))]$$

$$z'(s) = -z(s_0) \sqrt{K_z} \sin[\sqrt{K_z}(s - s_0)] + z'(s_0) \cos[\sqrt{K_z}((s - s_0))]$$

$$u(s) = C(s)u(s_0) + S(s)z'(s_0) \quad u'(s) = C'(s)u(s_0) + S'(s)u'(s_0)$$

$$W(s) = W(s_0) = C_0 S_0' - C_0' S_0 = 1$$

# 粒子传输的稳定性条件

- 假设某环形加速器由P个长度为L的周期性加速结构组成，粒子在环中运行一圈的传输矩阵为

$$M(s+L|s) = \tilde{M}(s)$$

$$M(s+PL|s) = [\tilde{M}(s)]^P$$

- 粒子经过m圈的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = [M(s)]^{mP} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

- 设二维矩阵M的两个特征值为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ,  $v_1$  和  $v_2$  为对应的特征向量

$$M\lambda_1 = v_1\lambda_1 \quad M\lambda_2 = v_2\lambda_2$$

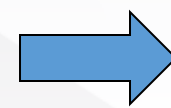


稳定平衡

不稳定平衡

- 稳定性条件:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = finite$$



对传输矩阵M (加速器的物理设计) 有什么要求?

## ➤ 粒子传输的稳定性条件

- 设二维矩阵M的两个特征值为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  , 则有

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{Trace}(M)\lambda + 1 = 0$$

$$\text{Trace}(M) = m_{11} + m_{22}$$

$\lambda$  为实数的充要条件为  $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

- 令  $\text{Trace}(M) = 2 \cos(\phi)$  则两个特征值可表示为  $\lambda_1 = e^{i\phi}$      $\lambda_2 = e^{-i\phi}$

$\phi$ 为betatron相移

$\phi$ 为实数  $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

,

$\phi$ 为复数  $|\text{Trace}(M)| \geq 2$

## ➤ 粒子传输的稳定性条件

- 粒子的初始坐标可写为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 \quad \begin{pmatrix} x_m \\ x_m' \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2 = ae^{in\phi} v_1 + be^{-in\phi} v_2$$

- $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  保持单位1的充要条件  $\phi$ 为实数, 或者

$$|\text{Trace}(M)| \leq 2$$

- 线性系统的稳定性条件与初值  $(x_0, x_0')$  无关, 与加速器的结构有关