



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所

Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

横向束流动力学

第六节

苑尧硕

上节回顾

➤ 加速器中n个元件的传输矩阵

- 假设全环由N个加速周期节组成, 每个周期节长度L, 由n个磁铁元件组成

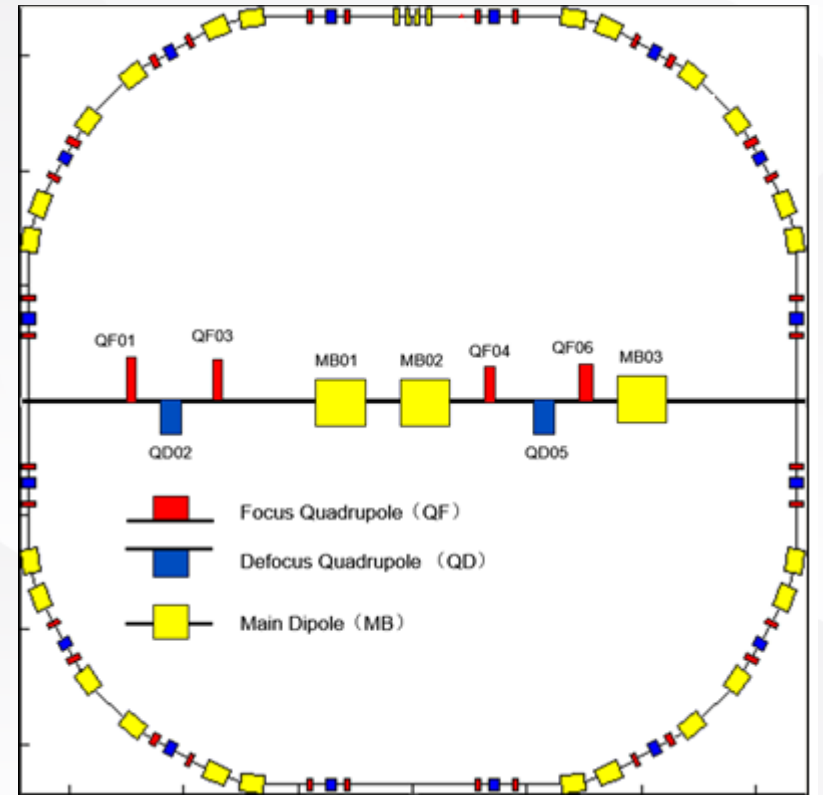
$$M(s) \equiv M(s+L) \quad \tilde{M}(s) = M_n \dots M_2 M_1$$

- 注意: 传输矩阵运算中元件的顺序与束流线中的排列顺序**相反**

➤ 线性传输: $M(s_2 | s_0) = M(s_2 | s_1)M(s_1 | s_0)$

➤ 传输矩阵运算满足**结合律**

➤ 传输矩阵运算不满足**交换律**



中国散裂中子源快循环同步环
由四个周期节组成

上节回顾

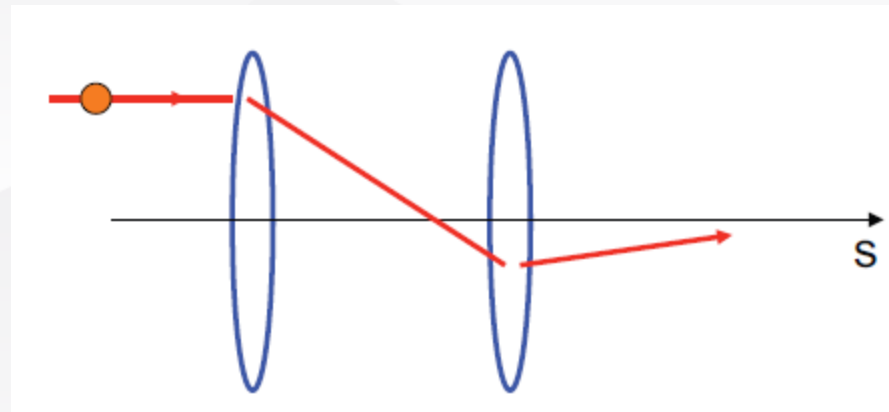
- doublet结构: 长度为L 的漂移段分隔开的两个四极磁铁

$$M_{doublet} = M_2 M_{drift} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1 f_2} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{若取 } f_1 = -f_2 = f_0 \quad M_{doublet} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{l_0}{f_0^2} & l_0 \\ -\frac{l_0}{f_0^2} & 1 + \frac{l_0}{f_0} \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_0}{f_1 f_2}$$



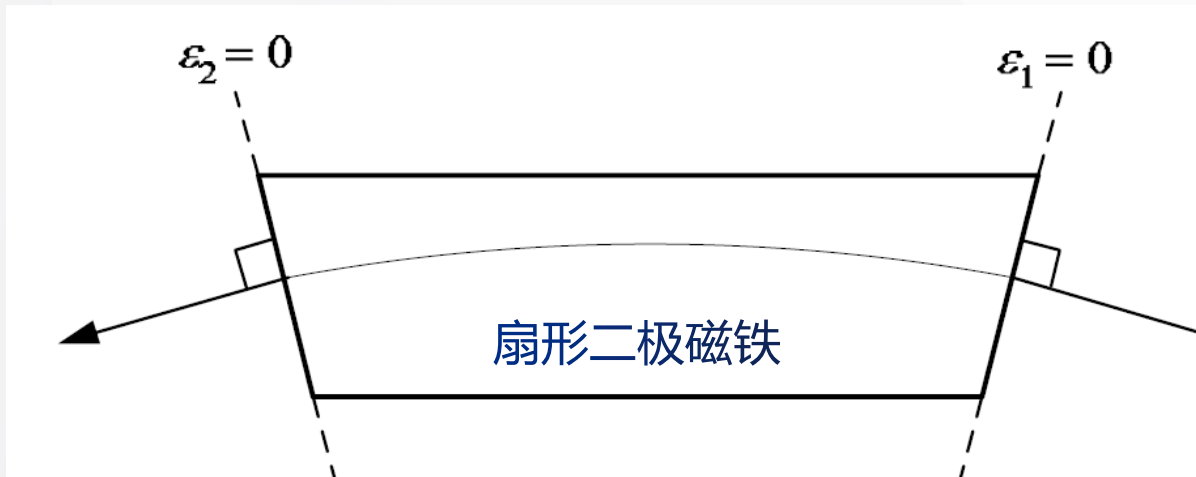
- 如果 f_1, f_2 在水平和垂直方向上的符号相反, 可以实现在水平和垂直两个方向上聚焦。

上节回顾

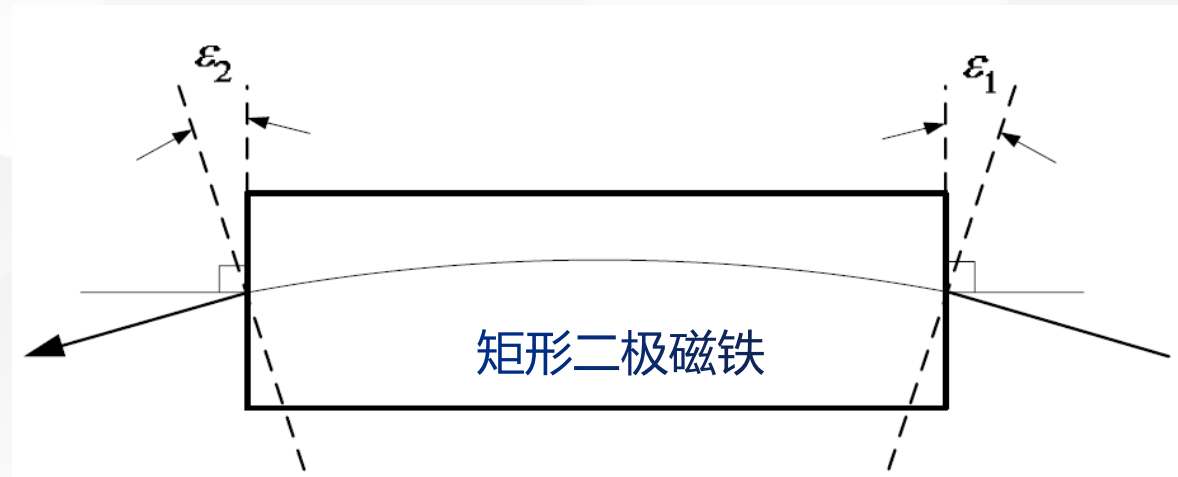
➤ 二极磁铁的边缘聚集效应

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



束流 (粒子) 垂直入射二极磁铁



束流 (粒子) 入射二极磁铁有偏角

上节回顾

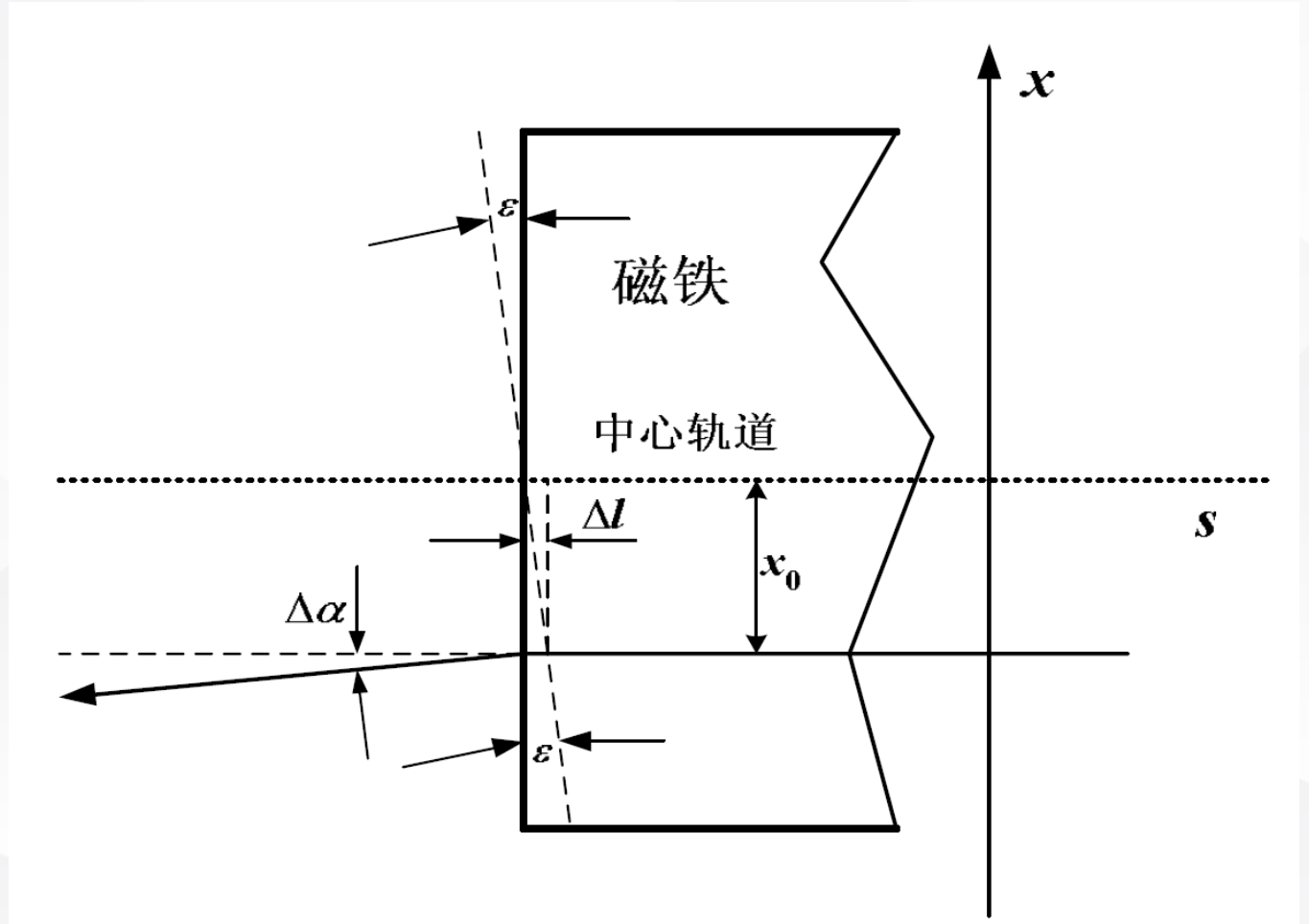
➤ 二极磁铁的边缘场效应

$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

- 水平方向边缘**散焦**

$$M_{edge,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

- 垂直方向边缘**聚焦**



上节回顾

- 考虑边缘聚焦效应后，**矩形二极磁铁**在水平方向整体表现为纯的偏转作用而在垂直方向仍表现为聚焦作用

水平方向

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

垂直方向

$$M_{edge,y} = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & l \\ \frac{\theta}{\rho} & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

上节回顾

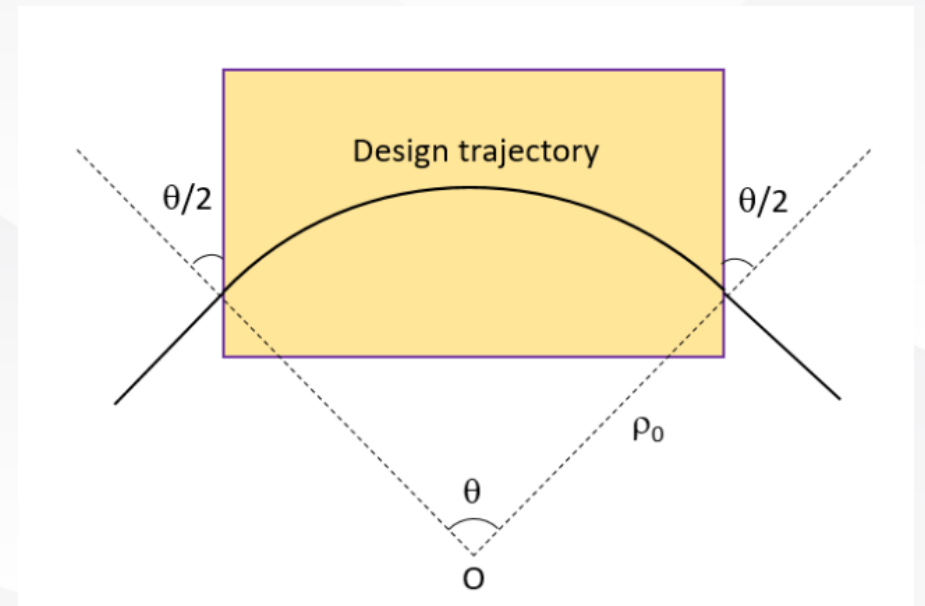
➤ 矩形二极磁铁的总的传输矩阵

$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ 矩形二极磁铁表现为纯的偏转力

$$M_{rect,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \theta/2}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & l \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} (\theta \tan \frac{\theta}{2} - 2) & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



➤ 本节内容

- 粒子传输稳定性条件
- Twiss参数
- 相椭圆、发射度与接受度

➤ 粒子传输的稳定性条件

➤ 例1 证明希尔方程

$$z''(s) + K_z(s)z(s) = 0$$

其朗斯基行列式满足:

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2 = 1$$

粒子传输的稳定性条件

例1 证明希尔方程

$$z''(s) + K_z(s)z(s) = 0$$

其朗斯基行列式满足:

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2 = 1$$

证明: 希尔方程的解为

$$z(s) = z(s_0) \cos[\sqrt{K_z}(s-s_0)] + z'(s_0) \frac{1}{\sqrt{K_z}} \cos[\sqrt{K_z}((s-s_0))]$$

$$z'(s) = -z(s_0) \sqrt{K_z} \sin[\sqrt{K_z}(s-s_0)] + z'(s_0) \cos[\sqrt{K_z}((s-s_0))]$$

$$u(s) = C(s)u(s_0) + S(s)z'(s_0) \quad u'(s) = C'(s)u(s_0) + S'(s)u'(s_0)$$

$$W(s) = W(s_0) = C_0 S_0' - C_0' S_0 = 1$$

$$W(s) = [\det M] W(s_0)$$

粒子传输的稳定性条件

- 假设某环形加速器由P个长度为L的周期性加速结构组成，粒子在环中运行一圈的传输矩阵为

$$M(s+L|s) = \tilde{M}(s)$$

$$M(s+PL|s) = [\tilde{M}(s)]^P$$

- 粒子经过m圈的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = [M(s)]^{mP} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

- 设二维矩阵M的两个特征值为 λ_1 和 λ_2 , v_1 和 v_2 为对应的特征向量

$$M\lambda_1 = v_1\lambda_1 \quad M\lambda_2 = v_2\lambda_2$$

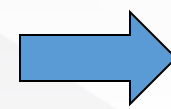


稳定平衡

不稳定平衡

- 稳定性条件:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = finite$$



对传输矩阵M (加速器的物理设计) 有什么要求?

➤ 粒子传输的稳定性条件

- 设二维矩阵M的两个特征值为 λ_1 和 λ_2 , 则有

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{Trace}(M)\lambda + 1 = 0$$

$$\text{Trace}(M) = m_{11} + m_{22}$$

λ 为实数的充要条件为 $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

- 令 $\text{Trace}(M) = \cos(\phi)$ 则两个特征值可表示为 $\lambda_1 = e^{i\phi}$ $\lambda_2 = e^{-i\phi}$

ϕ 为betatron相移

ϕ 为实数 $|\text{Trace}(M)| \leq 2$

,

ϕ 为复数 $|\text{Trace}(M)| \geq 2$

➤ 粒子传输的稳定性条件

- 粒子的初始坐标可写为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 \quad \begin{pmatrix} x_m \\ x_m' \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2 = ae^{in\phi} v_1 + be^{-in\phi} v_2$$

- λ_1 和 λ_2 保持单位1的充要条件 ϕ 为实数, 或者

$$|\text{Trace}(M)| \leq 2$$

- 线性系统的稳定性条件与初值 (x_0, x_0') 无关, 与加速器的结构有关

➤ Floquet定理

$$K(s+L) = K(s) \quad \Rightarrow \quad \psi(s+L) = \psi(s) \quad \omega(s+L) = \omega(s)$$

- 从希尔方程出发

$$z'' + K(s)z = 0$$

$$K(s+L) = K(s)$$

- 其解的形式可写为

$$z(s) = a\omega(s)e^{i\psi(s)}$$

$$z^*(s) = a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$$

➤ 证明: Betatron包络方程

$$\omega'' + K\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0$$

$$\psi' = \frac{1}{\omega^2}$$

提示: 解的形式为

$$z(s) = a\omega(s)e^{i\psi(s)}$$

$$z^*(s) = a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$$

➤ 例2 (本节课后作业) 证明: 由 s_1 到 s_2 的传输矩阵可表示为

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix}$$

其中在 s_1 处, $\omega(s_1) = \omega_1$, 在 s_2 处, $\omega(s_2) = \omega_2$

$$\psi = \psi(s_2) - \psi(s_1)$$

提示: 希尔方程任意解可表示为 $z(s) = a\omega(s)e^{i\psi(s)}$ 和 $z^*(s) = a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$ 的线性叠加

- 对传输矩阵 $M(s_2|s_1)$ 应用周期性条件, 令 $s_2=s_1+L$, 则有

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad \omega_1' = \omega_2' = \omega'$$

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi(s_1 + L) - \psi(s_1) = \phi$$

- 传输矩阵 $M(s_2|s_1)$

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix}$$

变为

$$M(s + L | s) = \begin{pmatrix} \cos \phi - \omega \omega' \sin \phi & \omega^2 \sin \phi \\ -\frac{(1 + \omega^2 \omega'^2)}{\omega^2} \sin \phi & \cos \phi + \omega \omega' \sin \phi \end{pmatrix}$$

➤ 若定义

$$\omega^2 = \beta$$

$$\alpha = -\omega\omega' = -\frac{\beta'}{2}$$

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

$$M(s_1 + L | s_1) = \begin{pmatrix} \cos \phi - \omega\omega' \sin \phi & \omega^2 \sin \phi \\ -\frac{(1 + \omega^2 \omega'^2)}{\omega^2} \sin \phi & \cos \phi + \omega\omega' \sin \phi \end{pmatrix}$$

➤ 传输矩阵M变为 (练习)

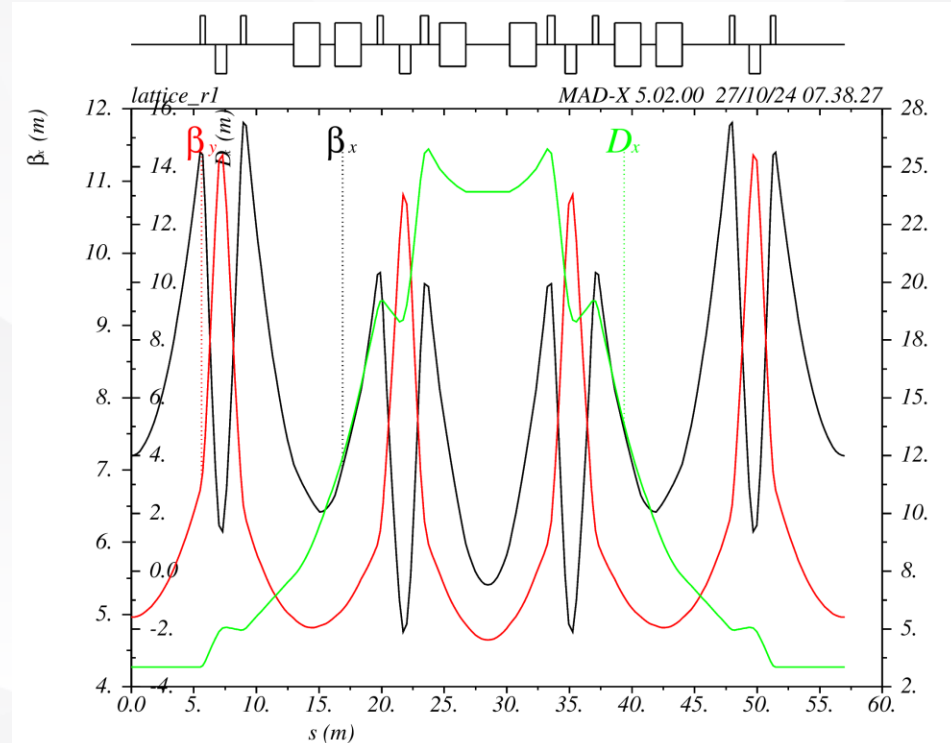
$$M(s_1 + L | s_1) = \begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$$

- 经过一个加速周期后的传输矩阵M变为

$$M(s_1 + L | s_1) = \begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\omega^2 = \beta \quad \psi' = \frac{1}{\omega^2} \quad \rightarrow \quad \phi = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta(s)}$$

- $\beta(s)$ 为betatron振幅函数，简称**beta函数**
- ϕ 为一个加速周期L内betatron振幅相移，简称**相移**



➤ 练习:

包络方程 $\omega'' + K\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0$

↓ $\beta = \omega^2$

$$\frac{1}{2}\beta'' + K\beta - \frac{1}{\beta} \left[1 + \left(\frac{\beta'}{2} \right)^2 \right] = 0$$

➤ 希尔方程

$$z'' + K(s)z = 0 \quad K(s + L) = K(s)$$

➤ 其解的形式

$$z(s) = a\omega(s)e^{i\psi(s)} \quad z^*(s) = a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$$

$$z(s) = a\sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z] \quad \text{其中}$$

$$\text{相移 } \psi_z(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

➤ Twiss参数 (Courant-Snyder 函数)

betatron
振荡幅度 $\beta(s)$

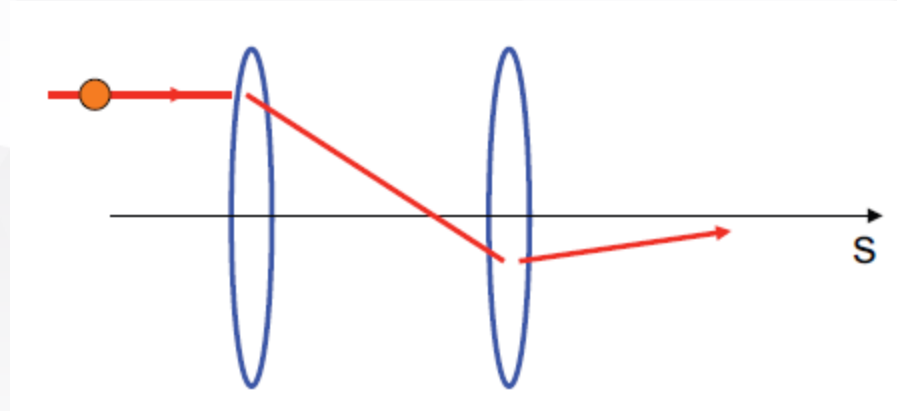
振荡斜率 $\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2}$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

➤ Twiss参数是描述机器属性的一组参数，与粒子的状态无关

- 例3 一个doublet结构由强度相同的一个聚焦四极磁铁和一个散焦四极磁铁组成{QF O DF}, 求粒子经过这段doublet的betatron相移

提示:
$$M_{doublet} = M_2 M_{drift} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$$



- 例3 一个doublet结构由强度相同的一个聚焦四极磁铁和一个散焦四极磁铁组成{QF O DF}, 求粒子经过这段doublet的betatron相移

解: $M_{doublet} = M_2 M_{drift} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$

其中 $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_0}{f_1 f_2}$

对比 $\begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1 f_2} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$

可知 $\cos \phi = \frac{1}{2} \text{Trace}(M) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{l_0}{f_1 f_2} - \frac{l_0}{f_2} \right)$

➤ 例4 证明：一般地，s1到s2的传输矩阵可用Twiss参数表示为

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix}$$

提示： $\beta = \omega^2$ $\alpha = -\frac{\beta'}{2}$

➤ 例4 证明：一般地，s1到s2的传输矩阵可用Twiss参数表示为

$$\begin{aligned}
 M(s_2 | s_1) &= \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi + \alpha_1 \sin \psi) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi \\ -\frac{(1 + \alpha_1 \alpha_2)}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin \psi - \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \right) \cos \psi & \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi - \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- 例5 求FODO结构 {QF/2 O QD O QF/2} 的Twiss参数

➤ 例5 求FODO结构 {QF/2 O QD O QF/2} 的Twiss参数

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0^2}{2f} \right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f} \right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

➤ 对比 $\begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0^2}{2f}\right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f}\right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$


可知 $\cos \phi = \frac{1}{2} \text{Trace}(M) = 1 - \frac{l_0^2}{2f^2}$ $\beta_F = \frac{2l_0^2 \left[1 + \sin \frac{\phi}{2}\right]}{\sin \phi}$ $\alpha_F = 0$

➤ 计算结果为该FODO结构**入口处**和**出口处**的Twiss参数

➤ 作业 已知一个FODO结构 {QF/2 O QD O QF/2}的传输矩阵为

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

求在QD出口处的Twiss参数 (β , α , γ)

提示: {QF/2 O QD O QF/2}  {QD/2 O QF O QD/2}

- 经过长度为L的周期性加速结构的betatron的相移为

$$\phi_z = \psi_z(s+L) - \psi_z(s) = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

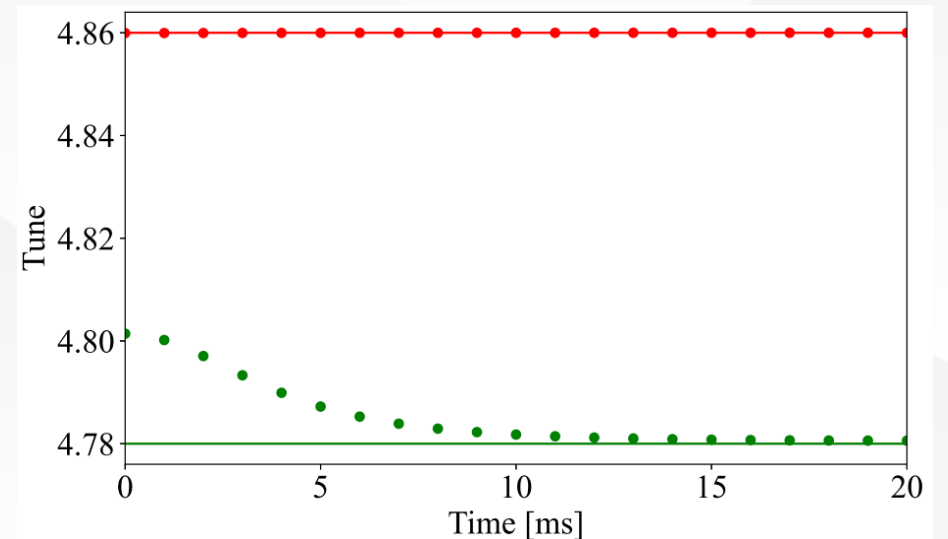
- 若环形加速器的周长为L，包含P个周期性加速器结构，则经过全环的相移为

$$P\phi_z = \psi_z(s+PL) - \psi_z(s) = \int_s^{s+PL} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

- 工作点Q可定义为

$$Q_z = \frac{P\phi_z}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

- 工作点的调节和优化对加速器的运行有着关键作用



散裂中子源水平和垂直工作点

➤ 再回到希尔方程

$$z'' + K(s)z = 0$$

$$K(s+L) = K(s)$$

其解为

$$z(s) = A_z \sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z]$$

↑
Twiss参数

↑
Betatron相位

则

$$\alpha(s)z(s) + \beta(s)z'(s) = -A_z \sqrt{\beta_z(s)} \sin[\psi_z(s) + \xi_z]$$

$$z^2 + (\alpha z + \beta z')^2 = A_z^2 \beta$$

$$\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2} \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

可得

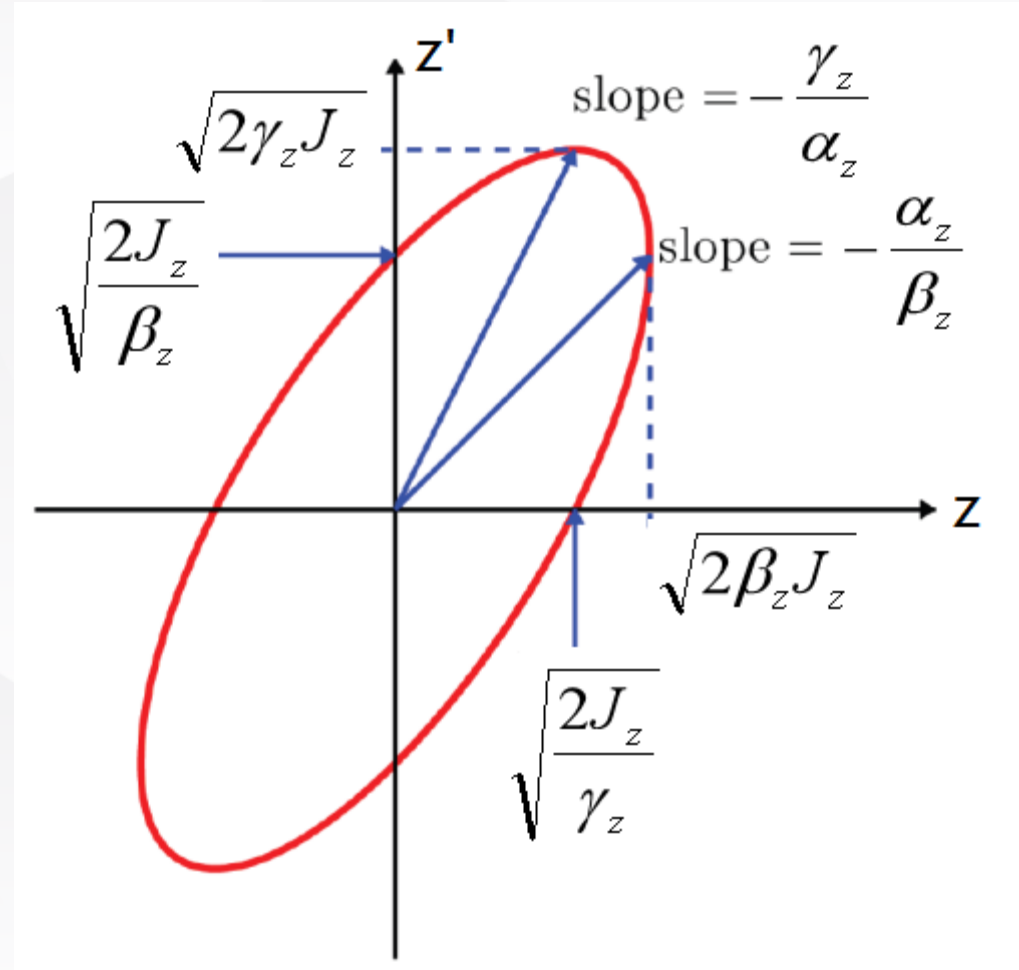
$$A_z^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$$

相椭圆

$$A^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$$

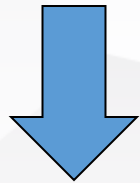
$$J_z = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}[\gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)]$$

➤ 相椭圆面积 $S = \frac{\pi A^2}{\sqrt{\beta\gamma - \alpha^2}} = \pi A^2 = 2\pi J$



➤ 相椭圆

- 每一个粒子对应一个相椭圆，相椭圆的面积保持不变
- 在某位置处，一个粒子在相空间中是一个点，在经过 2π ，为其运动轨迹为一闭合的相椭圆
- 不同的粒子对应的相椭圆的面积不同

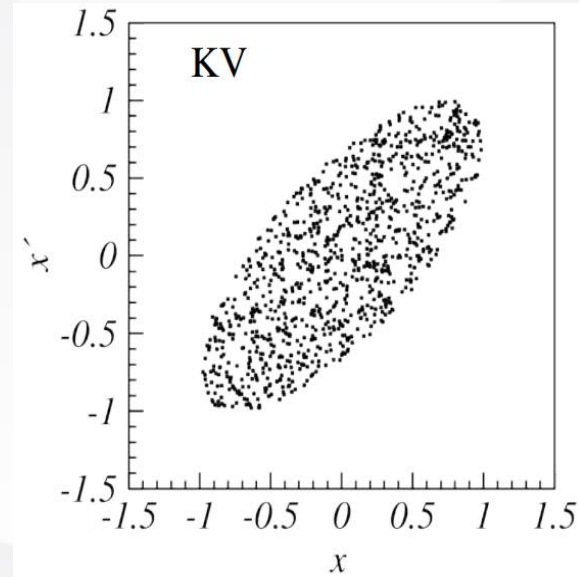


很多粒子情形

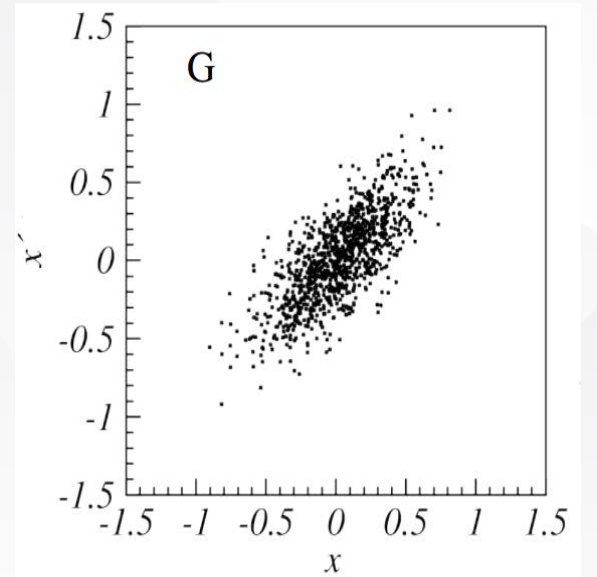
- 在某位置处，一群粒子构成的束流在相空间中占据一个椭圆，这个椭圆的面积称为束流的发射度
- 在线性元件构成的环形加速器中，束流的（面积）发射度不变-----刘维定理

束流的发射度

- 束流的发射度的面积是由离子源决定的
- 束流的发射度的面积是由离子源决定的

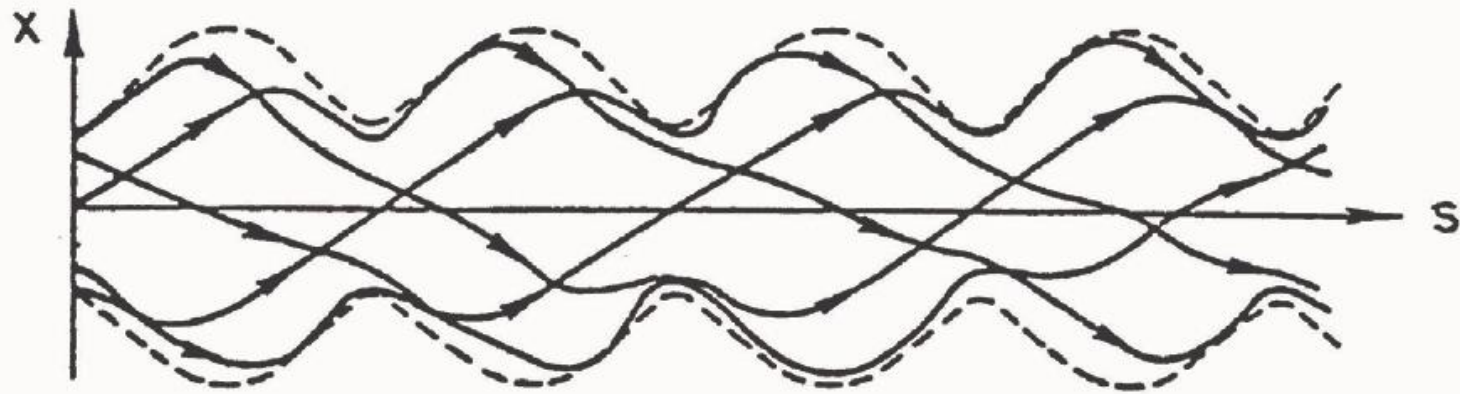
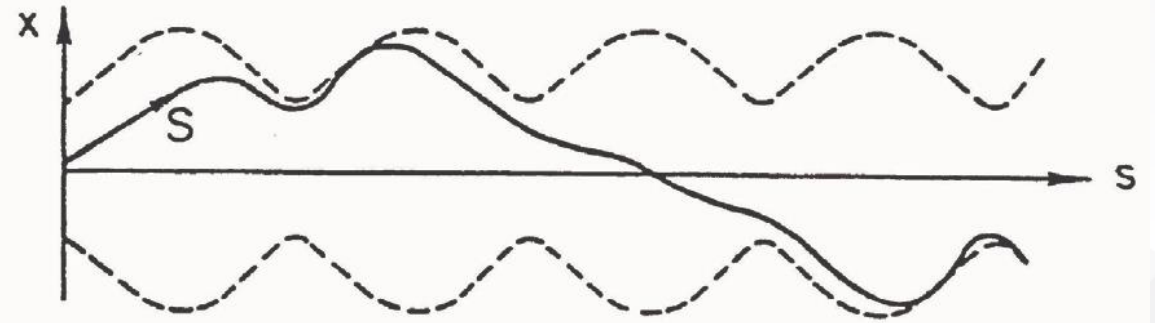
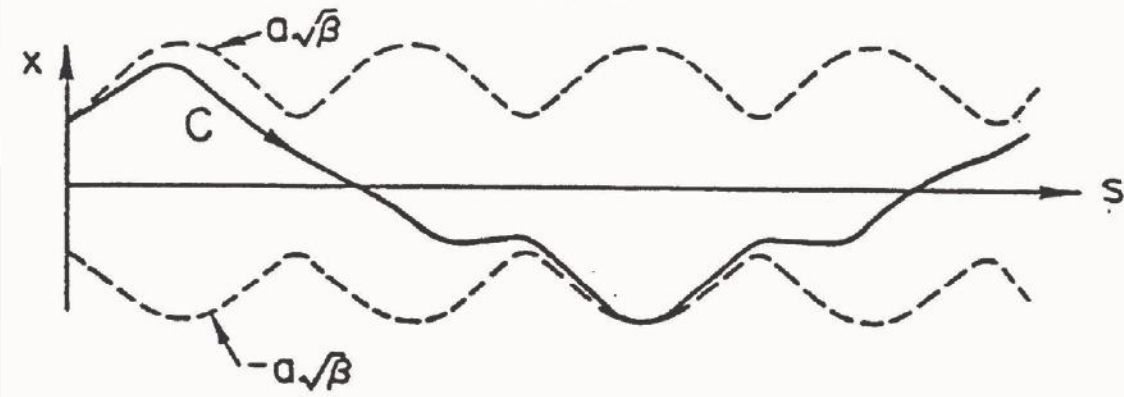


K-V分布



高斯分布

束流的发射度



束流的**包络**与单粒子的运动

束流的发射度

- 单粒子由 (x, x', y, y') 描述
- 两个粒子由 (x_1, x_1', y_1, y_1') 和 (x_2, x_2', y_2, y_2') 描述
- n 个粒子?
- n^{10} 个粒子??

束流的发射度

描述束流参数的物理量

一阶矩 (平均值) $\langle x_i \rangle = \sum_N \frac{x_i}{N}$ $\langle y_i \rangle = \sum_N \frac{y_i}{N}$ $\langle x_i' \rangle = \sum_N \frac{x_i'}{N}$ $\langle y_i' \rangle = \sum_N \frac{y_i'}{N}$

$\langle x_i \rangle$ 和 $\langle y_i \rangle$ 的物理意义: 束流 (横截面) 的中心

二阶矩 $\sigma_x^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = \sum_N \frac{x_i^2}{N} - \left(\sum_N \frac{x_i}{N} \right)^2$

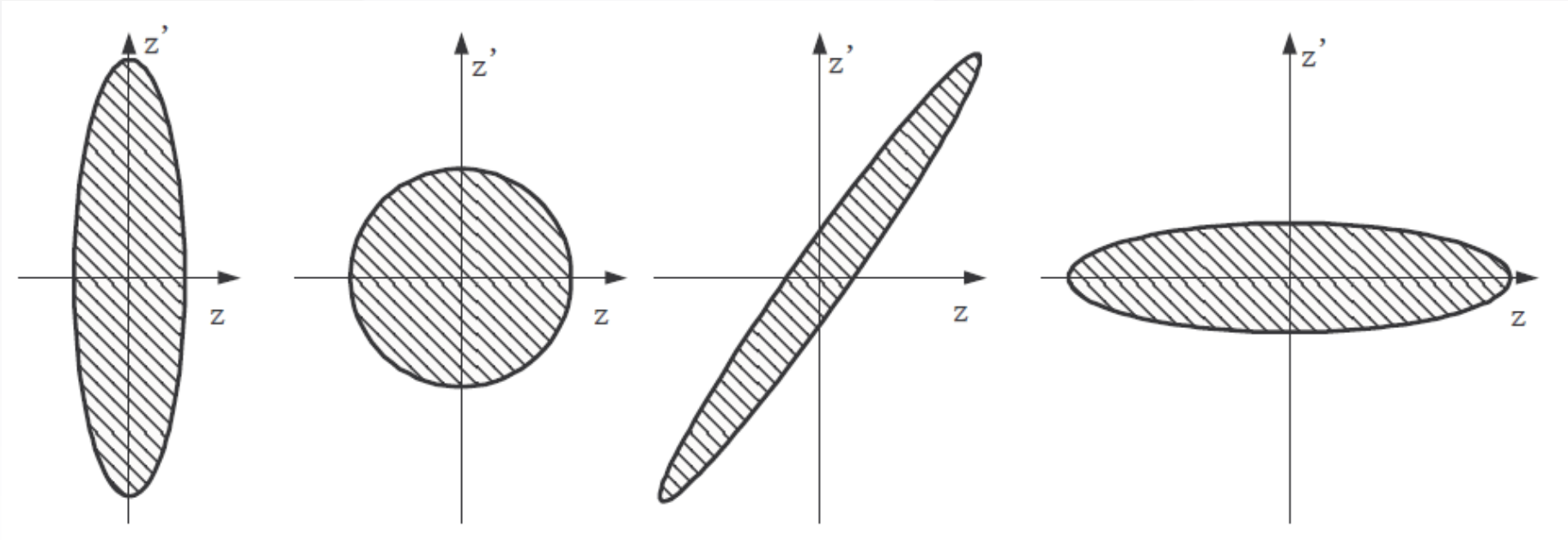
物理意义: 束流rms横向尺寸

束流的发射度

- 利用二阶矩，可以定义方均根（rms）发射度

$$\mathcal{E}_{rms,x} = \sqrt{\sigma_x \sigma_{x'} - \sigma_{xx'}^2}$$

- 在线性元件传输过程中，发射度的面积是不变的

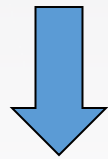


束流在经历环形加速器中的不同元件时束流相空间椭圆形状（发射度）的变化

色散效应

➤ Betatron运动方程

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$



简化条件: 1. 只有二极磁铁和四极磁铁
2. 动量 $p=p_0$ (无能散)

➤ Hill (希尔) 方程

$$x'' + K_x(s) = 0$$

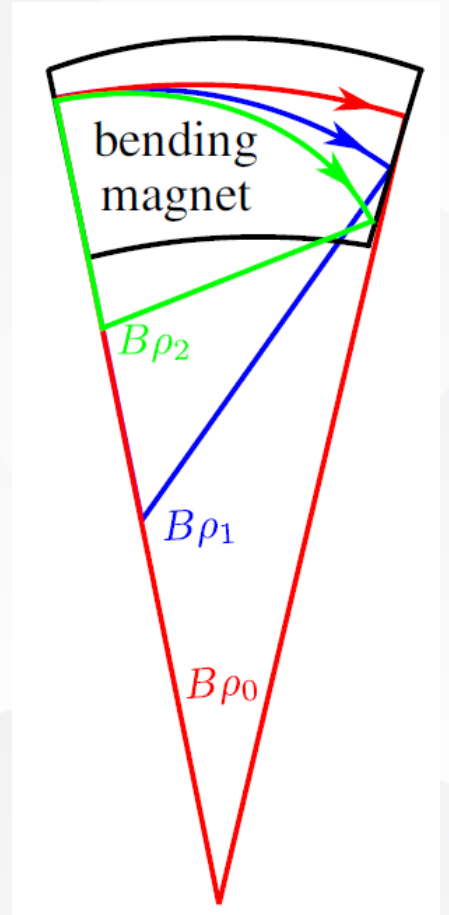
$$y'' + K_y(s) = 0$$

$$K_x = \mp \frac{B_1}{B\rho}$$

$$K_y = \pm \frac{B_1}{B\rho}$$

$$B_x = B_1 y$$

$$B_y = B_1 x$$



➤ 色散效应

➤ 实际束流中的粒子的动量是不同的，即束流具有能散或动量分散

➤ 通常束流的动量散度 $\delta \equiv \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p} \leq 10^{-3}$

➤ 当考虑动量分散时，

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2$$