

横向束流动力学

第七节

苑尧硕

上节回顾

➤ 粒子传输的稳定性

- 粒子的初始坐标可写为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = av_1 + bv_2$$

- 通过M矩阵传输n圈

$$\begin{pmatrix} x_m \\ x_m' \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2 = ae^{in\phi} v_1 + be^{-in\phi} v_2$$

- λ_1 和 λ_2 保持单位1的充要条件 ϕ 为实数, 或者

$$|\text{Trace}(M)| \leq 2$$

➤ Twiss参数的导出和定义

- 从希尔方程出发

$$z'' + K(s)z = 0$$

解的形式可写为

$$z(s) = A_z \sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z]$$

↑
Twiss参数

↑
Betatron相位

其中

$$\text{相移 } \psi_z(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

上节回顾

➤ 经过一个加速周期后的传输矩阵M变为

$$M(s_1 + L | s_1) = \begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$$

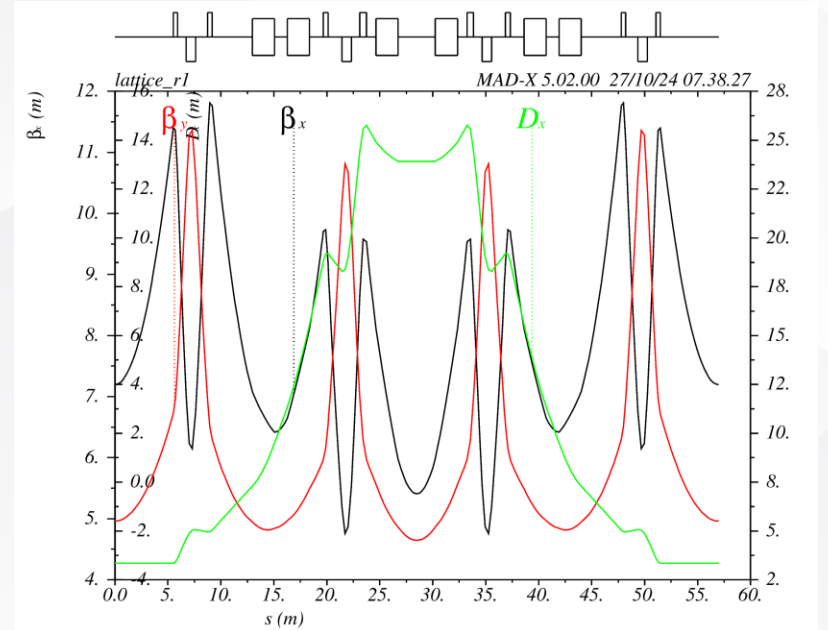
➤ Twiss参数 (Courant-Snyder 函数)

betatron
振荡幅度 $\beta(s)$

振荡斜率 $\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2}$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

- $\beta(s)$ 为betatron振幅函数, 简称**beta函数**
- ϕ 为一个加速周期L内betatron振幅相移, 简称**相移**



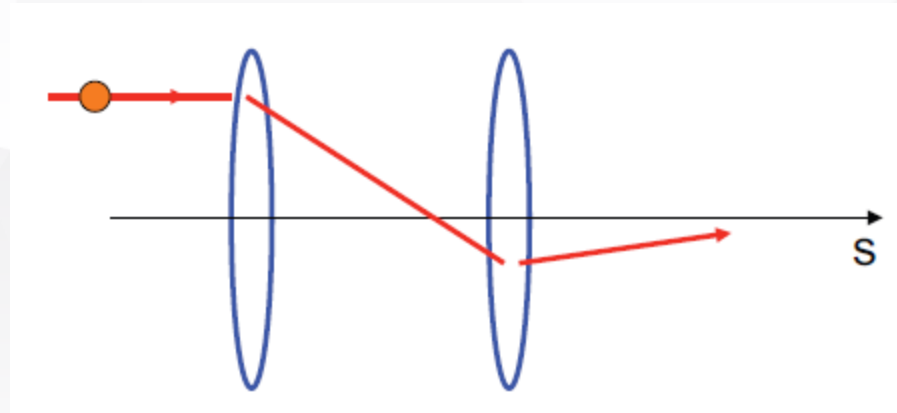
本节内容

- **Twiss参数计算练习**
- **工作点**
- **相椭圆、发射度与接受度**
- **色散效应**

➤ Twiss参数的计算

- 例1 一个doublet结构由强度相同的一个聚焦四极磁铁和一个散焦四极磁铁组成{QF O DF}, 求粒子经过这段doublet的betatron相移

提示:
$$M_{doublet} = M_2 M_{drift} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$$



Twiss参数的计算

- 例1 一个doublet结构由强度相同的一个聚焦四极磁铁和一个散焦四极磁铁组成{QF O DF}, 求粒子经过这段doublet的betatron相移

$$\text{解: } M_{\text{doublet}} = M_2 M_{\text{drift}} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{对比 } \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{和 } \begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_0}{f_1 f_2}$$

可知

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \text{Trace}(M) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{l_0}{f_1 f_2} - \frac{l_0}{f_2} \right)$$

Twiss参数的计算

➤ 例2 证明：一般地，s1到s2的传输矩阵可用Twiss参数表示为

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix}$$

提示： $\beta = \omega^2$ $\alpha = -\frac{\beta'}{2}$

Twiss参数的计算

➤ 例2 证明：一般地，s1到s2的传输矩阵可用Twiss参数表示为

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi & \omega_1 \omega_2 \sin \psi \\ -\frac{(1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2')}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi & \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi + \alpha_1 \sin \psi) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi \\ -\frac{(1 + \alpha_1 \alpha_2)}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin \psi - \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \right) \cos \psi & \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi - \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix}$$

➤ Twiss参数的计算

- 例3 求FODO结构 {QF/2 O QD O QF/2} 的Twiss参数

➤ Twiss参数的计算

➤ 例3 求FODO结构 {QF/2 O QD O QF/2} 的Twiss参数

$$\begin{aligned} M_{FODO} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0^2}{2f} \right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f} \right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Twiss参数的计算

➤ 对比 $\begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0^2}{2f}\right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f}\right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \cos \phi + \alpha \sin \phi & \beta \sin \phi \\ -\gamma \sin \phi & \cos \phi - \alpha \sin \phi \end{pmatrix}$

可知 $\cos \phi = \frac{1}{2} \text{Trace}(M) = 1 - \frac{l_0^2}{2f^2}$ $\beta_F = \frac{2l_0^2 \left[1 + \sin \frac{\phi}{2}\right]}{\sin \phi}$ $\alpha_F = 0$

➤ 计算结果为该FODO结构**入口处**和**出口处**的Twiss参数

- 经过长度为L的周期性加速结构的betatron的相移为

$$\phi_z = \psi_z(s+L) - \psi_z(s) = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

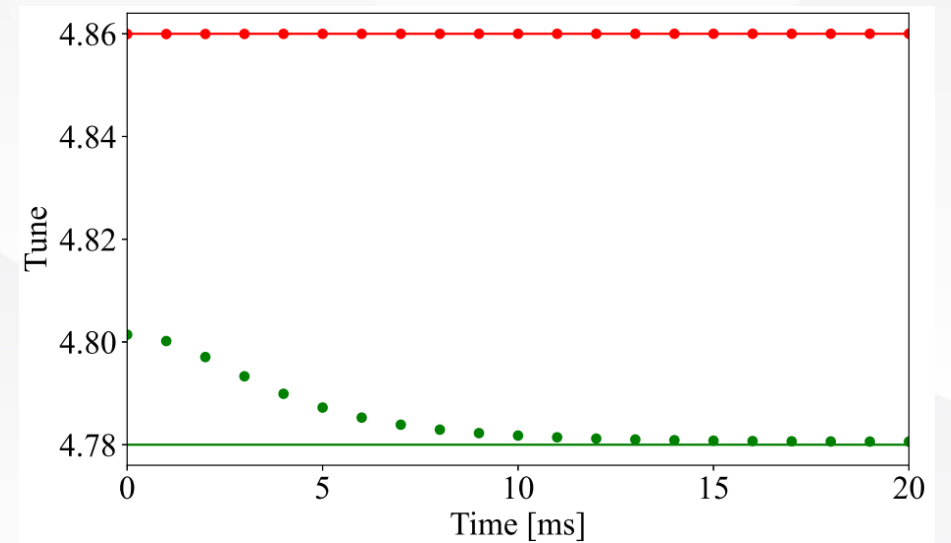
- 若环形加速器的周长为L，包含N个周期性加速器结构，则经过全环的相移为

$$N\phi_z = \psi_z(s+NL) - \psi_z(s) = \int_s^{s+NL} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

- 工作点 Q_z 可定义为(全环的Betatron相移)

$$Q_z = \frac{N\phi_z}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

- 工作点的调节和优化对加速器的运行有着关键作用



散裂中子源RCS环的水平 and 垂直工作点

➤ 回到希尔方程

$$z'' + K(s)z = 0$$

$$K(s+L) = K(s)$$

其解为

$$z(s) = A_z \sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z]$$

↑
Twiss参数

↑
Betatron相位

➤ 求不变量 A_z 表示形式

相椭圆

➤ 从希尔方程出发,

$$z'' + K(s)z = 0$$

$$K(s+L) = K(s)$$

其解为

$$z(s) = A_z \sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z]$$

↑
Twiss参数

↑
Betatron相位

则

$$\alpha(s)z(s) + \beta(s)z'(s) = -A_z \sqrt{\beta_z(s)} \sin[\psi_z(s) + \xi_z]$$

$$z^2 + (\alpha z + \beta z')^2 = A_z^2 \beta$$

$$\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2} \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

可得

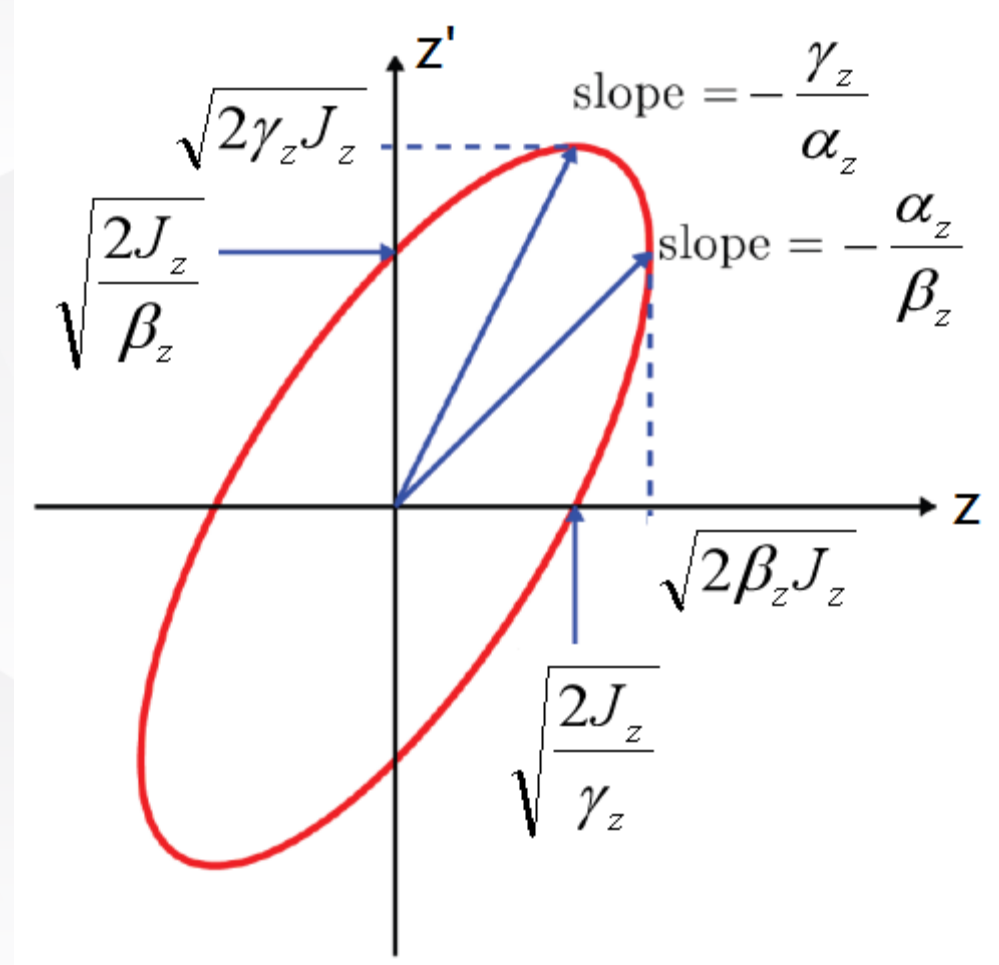
$$A_z^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$$

相椭圆

$$A^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$$

$$J_z = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}[\gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)]$$

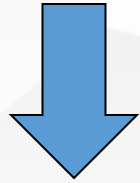
➤ 相椭圆面积 $S = \frac{\pi A^2}{\sqrt{\beta\gamma - \alpha^2}} = \pi A^2 = 2\pi J$



➤ 相椭圆

➤ 在相空间中,

- ✓ 粒子在某一位置处的运动状态表示为一个点
- ✓ 每一个粒子的一个周期的运动对应一个闭合的相椭圆, 相椭圆的面积保持不变
- ✓ 不同的粒子对应的相椭圆的面积不同

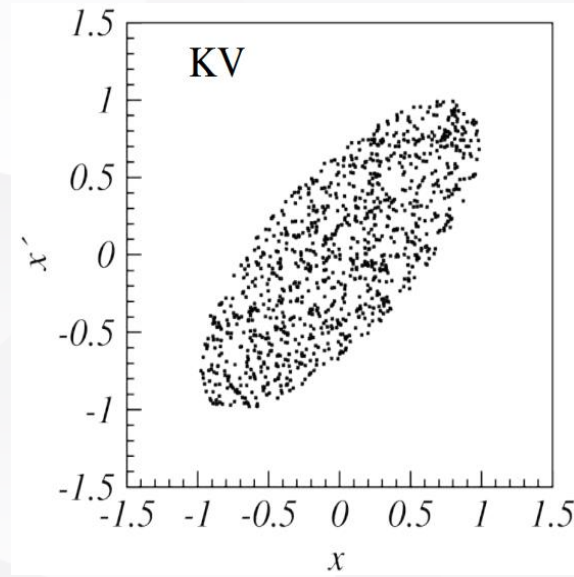


多粒子情形

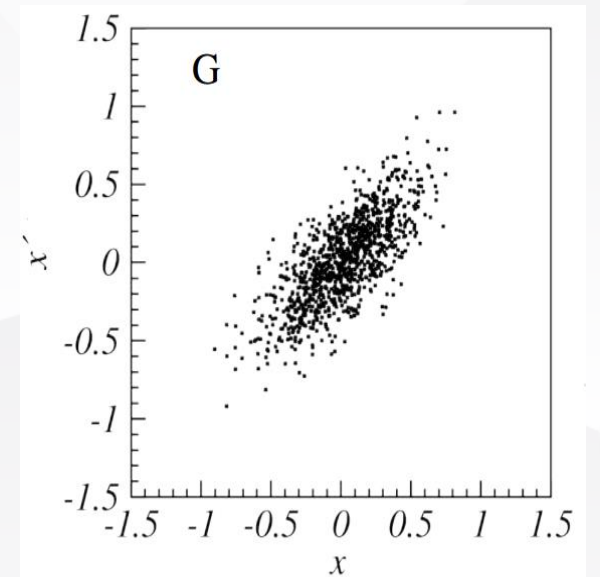
- ✓ 在某位置处, 一群粒子构成的束流在相空间中占据一个椭圆, 这个椭圆的面积称为束流的发射度

束流的发射度

- 在线性元件构成的环形加速器中，束流的（面积）发射度不变----**刘维尔定理**
- 束流的发射度的面积是由离子源决定的

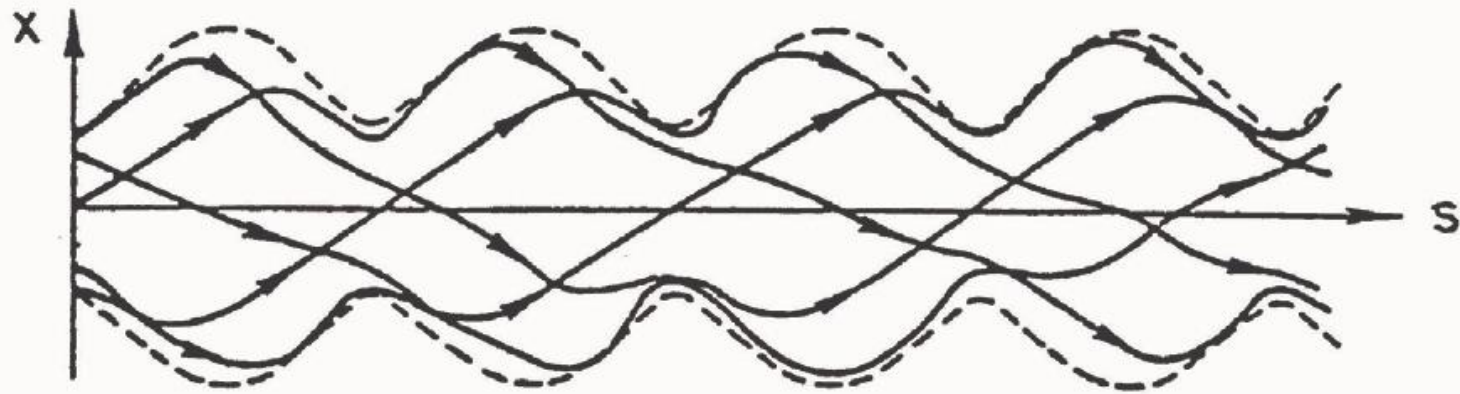
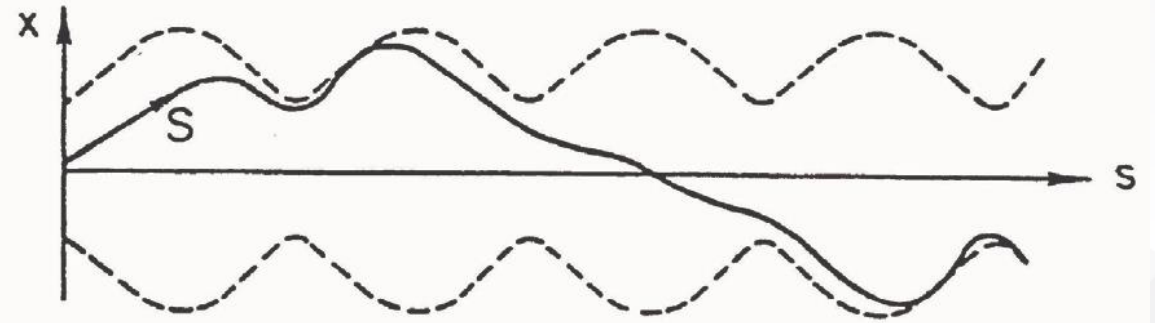
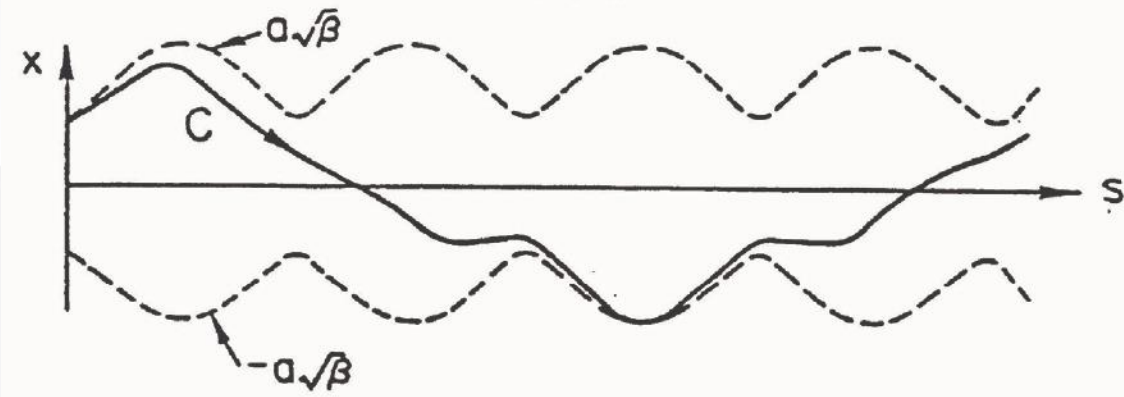


K-V分布



高斯分布

束流的发射度



束流的**包络**与单粒子的运动

束流的发射度

- 单粒子由 (x, x', y, y') 描述
- 两个粒子由 (x_1, x_1', y_1, y_1') 和 (x_2, x_2', y_2, y_2') 描述
- n 个粒子?
- n^{10} 个粒子??

束流的发射度

描述束流参数的物理量

- 一阶矩 (平均值) $\bar{x} = \langle x_i \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$ $\bar{y} = \langle y_i \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{N}$ $\langle x_i' \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{x_i'}{N}$ $\langle y_i' \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{y_i'}{N}$

一阶矩 \bar{x} 的物理意义: **束流横截面的中心**

- 二阶矩 $\sigma_x^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \right)^2$

二阶矩的物理意义: **束流RMS横向尺寸**

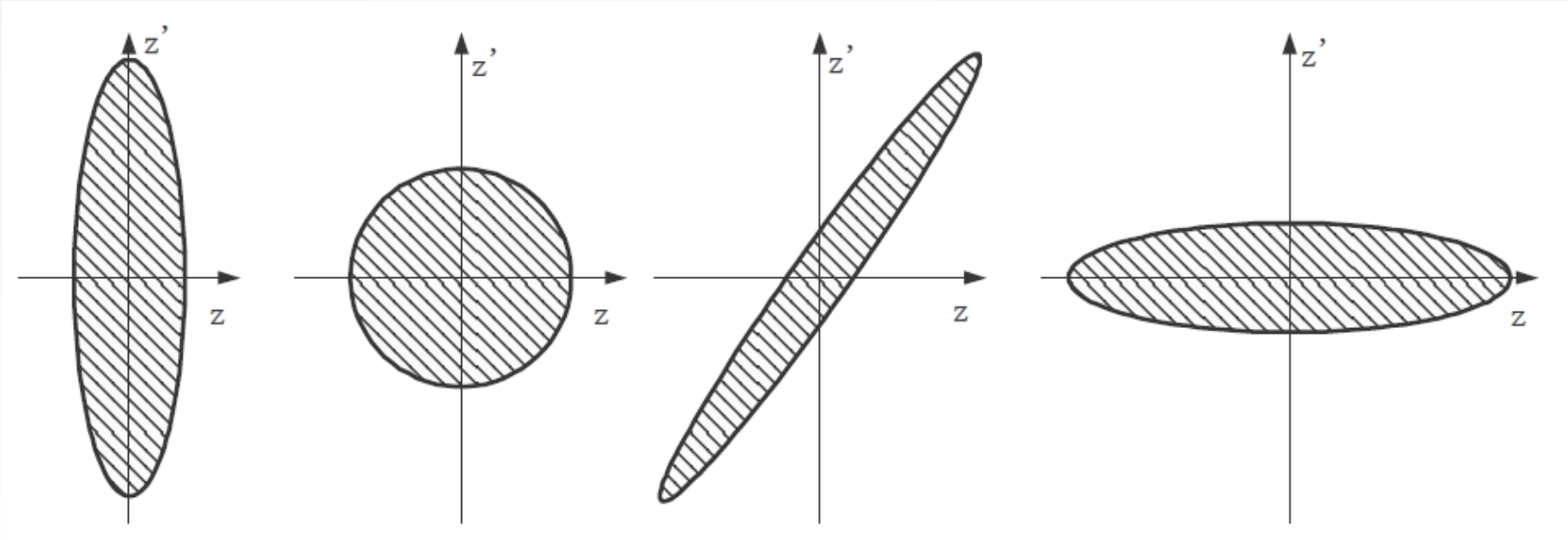
RMS: 均方根 (Root Mean Square)

束流的发射度

- 利用二阶矩，可以定义**均方根 (rms) 发射度**

$$\mathcal{E}_{rms,x} = \sqrt{\sigma_x \sigma_{x'} - \sigma_{xx'}^2}$$

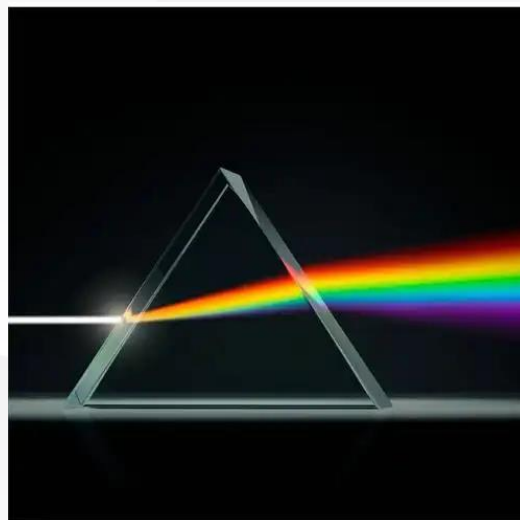
- 在线性元件传输过程中，发射度的面积是不变的



束流在经历环形加速器中的不同元件时束流相空间椭圆形状 (发射度) 的变化

➤ 色散效应

- 自然界中的色散效应是指复色光分解为单色光而形成光谱的现象。由于不同频率的光具有不同的折射率，各种色光的传播方向会有不同程度的偏折，从而形成光谱。



三棱镜



彩虹

(图片来自于网络)

色散效应

➤ Betatron运动方程

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{B_x}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$B_y = B_1 x$$

$$B_x = B_1 y$$



简化条件: 1. 只有二极磁铁和四极磁铁
2. 动量 $p=p_0$ (无能散)

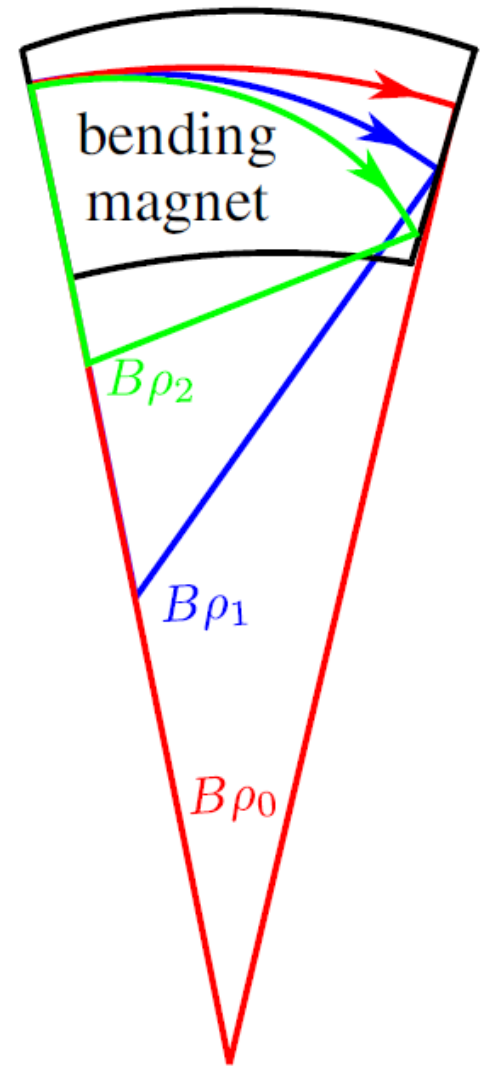
➤ 希尔方程

$$x'' + K_x(s) = 0$$

$$y'' + K_y(s) = 0$$

$$K_x = B_0 \mp \frac{B_1}{B\rho}$$

$$K_y = \pm \frac{B_1}{B\rho}$$



➤ 色散效应

➤ 实际束流中的粒子的动量是不同的，即束流具有**能散**或**动量分散**

➤ 通常束流的动量散度 $\delta \equiv \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p} \leq 10^{-3}$

➤ 当考虑动量分散时，

$$x'' - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \quad x'' + \left(\frac{1 - \delta}{\rho^2(1 + \delta)} - \frac{K(s)}{(1 + \delta)} \right) x = \left(\frac{\delta}{\rho(1 + \delta)} \right)$$

色散效应

考虑色散效应后的“希尔方程”

$$x'' + \left(\frac{1-\delta}{\rho^2(1+\delta)} - \frac{K(s)}{(1+\delta)} \right) x = \frac{\delta}{\rho(1+\delta)}$$

若令 $x = x_\beta(s) + D_x(s)\delta$

上式可分成两项

$$x_\beta'' + (K_x(s) + \Delta K_x(s))x_\beta = 0$$

其中 $K_x = \frac{1}{\rho^2} - K(s)$

$$D_x'' + (K_x(s) + \Delta K_x(s))D_x = \frac{1}{\rho} + O(\delta)$$

$$\Delta K_x = \left[-\frac{2}{\rho^2} + K(s) \right] \delta + O(\delta^2)$$

➤ 色散效应

➤ 忽略色品项, 色散方程定义为

$$D_x'' + K_x(s)D_x = \frac{1}{\rho}$$

➤ 周期性条件 $D_x(s+L) = D_x(s)$ $D_x'(s+L) = D_x'(s)$

色散效应

色散函数的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} D(s_2) \\ D'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} D(s_1) \\ D'(s_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$$

或者

$$\begin{pmatrix} D(s_2) \\ D'(s_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(s_2 | s_1) & \bar{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(s_1) \\ D'(s_1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

漂移节和四极铁 $\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

二极磁铁 $\bar{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho K_x} (1 - \cos \sqrt{K_x} s) \\ \frac{1}{\rho \sqrt{K_x}} \sin \sqrt{K_x} s \end{pmatrix}$

色散效应

➤ 考虑色散效应后，二极磁铁的传输矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

色散项

薄透镜近似后，变为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & l & \frac{1}{2}l\theta \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ 色散效应

➤ 例3 一个FODO为{0.5 QF B QD B 0.5QF }构成, 求这个FODO结构色散函数

提示: 可以利用薄透镜近似

色散效应

➤ 例3 一个FODO为{0.5 QF B QD B 0.5QF }构成, 求这个FODO结构色散函数

提示: 可以利用薄透镜近似

解: 该FODO结构的传输矩阵可表示为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 & \frac{1}{2}l_1\theta \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 & \frac{1}{2}l_1\theta \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

色散效应

➤ 例3 一个FODO为{0.5 QF B QD B 0.5QF }构成, 求这个FODO结构色散函数

提示: 可以利用薄透镜近似

解: 利用色散函数的周期性条件, 可得

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_x' \\ 1 \end{pmatrix}_{s+L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 & \frac{1}{2}l_1\theta \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 & \frac{1}{2}l_1\theta \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_x' \\ 1 \end{pmatrix}_s$$

➤ 粒子加速器中的误差

- 截止目前为理想情况，即各个磁铁元件在加速器中理想地工作
 - 磁铁没有场误差，也没有安装误差，给磁铁供电的电源也没有纹波误差
- 理想粒子（通过磁铁元件中心）的运动轨迹是一个圆环
- 非理想粒子围绕理想粒子作betatron振荡运动

➤ 粒子加速器中的误差

- 在实际的加速器中，由于机械、加工、材料、安装等原因，各种电、磁元件存在各种各样的误差
- 误差是不可避免的，各种误差对束流影响的研究就显得尤其重要
- 主要讨论：二极磁铁和四极磁铁产生的误差

➤ 二极磁铁的误差效应

➤ 二极铁的磁场误差：角度的偏转

➤ 设想在加速器某处存在一个二极铁的磁场误差 ΔB , 其对粒子的**偏角作用 (kick)** 可写为

$$\theta = \Delta B dt / B\rho$$

➤ 在磁场误差的存在下，粒子的运行形成了**新的闭合轨道**

• 经过误差前 $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' - \theta \end{pmatrix}$

• 经过误差后 $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$

➤ 带有误差的全环传输矩阵方程可写为

$$M_x \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' - \theta \end{pmatrix}$$

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu_x & \beta_x \sin 2\pi\nu_x \\ -\gamma_x \sin 2\pi\nu_x & \cos 2\pi\nu_x - \alpha_x \sin 2\pi\nu_x \end{pmatrix}$$

• 其中M为全环的理想传输矩阵

➤ 二极磁铁的误差效应

- 将理想的全环传输矩阵

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu_x & \beta_x \sin 2\pi\nu_x \\ -\gamma_x \sin 2\pi\nu_x & \cos 2\pi\nu_x - \alpha_x \sin 2\pi\nu_x \end{pmatrix}$$

- 代入

$$M_x \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' - \theta \end{pmatrix}$$

- 可得在**误差源**处的粒子闭合轨道的坐标为

$$x_0 = \frac{\beta_x \theta}{2 \sin \pi \nu_x} \cos \pi \nu_x \quad x_0' = \frac{\theta}{2 \sin \pi \nu_x} (\sin \pi \nu_x - \alpha_x \cos \pi \nu_x)$$

➤ 二极磁铁的误差效应

➤ 在全环其他位置处的闭合轨道可由以下计算

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x(s | s_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

• 其中 $M_x(s | s_0)$ 为 s_0 到 s 的 (理想情况的) 传输矩阵

$$M_x(s | s_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \psi + \alpha_0 \sin \psi) & \sqrt{\beta_0 \beta} \sin \psi \\ -\frac{1 + \alpha_0 \alpha}{\sqrt{\beta_0 \beta}} \sin \psi + \frac{\alpha_0 - \alpha}{\sqrt{\beta_0 \beta}} \cos \psi & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \psi - \alpha \sin \psi) \end{pmatrix}$$

➤ 可得在其他位置的横坐标可表示为

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2 \sin \pi \nu} \cos[\pi \nu - |\psi(s) - \psi(s_0)|]$$

➤ 二极磁铁的误差效应

- 二极磁铁误差引起的整数共振

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2 \sin \pi \nu} \cos[\pi \nu - |\psi(s) - \psi(s_0)|]$$

- 当 $\sin \pi \nu = 0$ ，发生整数共振，闭合轨道会无限增长
- 在环形加速器的设计时，应该**避免整数工作点**
- 在工作点为**半整数时**，可以使二极磁铁的误差最小化

四极磁铁的误差效应

- 当有四极磁铁的误差时，Hill方程可写为

$$x'' + [K_0 x + k(s)]x = 0$$

理想四极磁铁
的聚焦强度

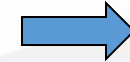
四极磁铁的梯度误差

- 四极磁铁的误差有两个效果

相移（工作点）的改变

beta函数包络的改变（beta-beat）

半整数共振



➤ 四极磁铁的误差效应(工作点的改变)

➤ 全环的传输矩阵

$$M_{x0} = \begin{pmatrix} \cos \psi_0 + \alpha_1 \sin \psi_0 & \beta_1 \sin \psi_0 \\ -\gamma_1 \sin \psi_0 & \cos \psi_0 - \alpha_1 \sin \psi_0 \end{pmatrix}$$

• 其中 β_1 α_1 γ_1 为在误差源 s_1 处的lattice函数值

➤ 带有四极铁误差后的额全环的传输矩阵为

$$M_x = M_{x0} m_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi_0 + \alpha_1 \sin \psi_0 - \beta_1 k(s_1) ds_1 \sin \psi_0 & \beta_1 \sin \psi_0 \\ -\gamma_1 \sin \psi_0 - [\cos \psi_0 + \alpha_1 \sin \psi_0] k(s_1) ds_1 & \cos \psi_0 - \alpha_1 \sin \psi_0 \end{pmatrix}$$

➤ 梯度误差的矩阵可写为

$$m(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1) ds_1 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ 四极磁铁的误差效应(工作点的改变)

$$M_x = M_{x0} m_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi_0 + \alpha_1 \sin \psi_0 - \beta_1 k(s_1) ds_1 \sin \psi_0 & \beta_1 \sin \psi_0 \\ -\gamma_1 \sin \psi_0 - [\cos \psi_0 + \alpha_1 \sin \psi_0] k(s_1) ds_1 & \cos \psi_0 - \alpha_1 \sin \psi_0 \end{pmatrix}$$

➤ 由于误差造成的相移改变为

$$\cos \psi - \cos \psi_0 = -\frac{1}{2} \beta(s_1) k(s_1) ds_1 \sin \psi_0 \quad -\Delta \psi \sin \psi_0 = -\frac{1}{2} \beta(s_1) k(s_1) ds_1 \sin \psi_0$$

$$\Delta \psi \approx \frac{1}{2} \beta(s_1) k(s_1) ds_1$$

$$\Delta \nu = \frac{1}{2\pi} \Delta \psi \approx \frac{1}{4\pi} \beta(s_1) k(s_1) ds_1$$

➤ 若全环存在多处误差源, 其综合效果为

$$\Delta \nu = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(s_1) k(s_1) ds_1 = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(s_1) \frac{\Delta B_1(s_1)}{B\rho} ds_1$$

➤ 四极磁铁的误差效应(beta-beat)

➤ 某一个粒子从一个观察点 s_2 出发, 经过误差源 s_1 , 然后回到 s_2 这个全环的传输矩阵可写为

- 无误差 (理想情况) $M_0(s_2) = M(s_2 + C | s_1)M(s_1 | s_2)$

- 有误差时 $M(s_2) = M(s_2 + C | s_1)m(s_1)M(s_1 | s_2)$

➤ 可得由于在 s_1 处的误差, 在 s_2 处造成的beta函数的变化为

$$\Delta\beta_2 \sin \psi_0 = -\frac{1}{2} k_1 ds_1 \beta_1 \beta_2 \cos[2\pi\nu_0 - 2(\psi_2 - \psi_1)]$$

➤ 四极磁铁的误差效应(beta-beat)

- 全环中多个误差源, 在 s_2 处造成的beta函数的变化为

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = -\frac{v_0}{2\sin\psi_0} \oint_C k\beta^2 \cos[2\pi\nu_0 - 2(\psi - \psi_1)] d\psi$$

- 可写为受迫振荡方程形式

$$\frac{d^2}{d\psi^2} \left[\frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} \right] + 4\nu_0^2 \left[\frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} \right] = 2\nu_0^2 \beta^2 k(s)$$

误差源作为驱动力

受迫振荡形式 ➡ 共振可能存在

➤ 四极磁铁的误差效应(半整数共振)

➤ 谐波分析

对误差驱动项 $v_0^2 \beta^2 k(s)$ 进行傅里叶展开

$$v_0^2 \beta^2 k(s) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p e^{jp\phi} \quad J_p = \frac{1}{2\pi} \oint \beta k(s) e^{-jp\phi} ds$$

➤ 受迫振荡的解的形式为

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} = -\frac{v_0}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{J_p e^{jp\phi}}{v_0^2 - (p/2)^2}$$

➤ 四极磁铁的误差效应(半整数共振)

➤ 谐波分析

对误差驱动项 $v_0^2 \beta^2 k(s)$ 进行傅里叶展开

$$v_0^2 \beta^2 k(s) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p e^{jp\phi} \quad J_p = \frac{1}{2\pi} \oint \beta k(s) e^{-jp\phi} ds$$

➤ 受迫振荡的解的形式为

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} = -\frac{v_0}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{J_p e^{jp\phi}}{v_0^2 - (p/2)^2}$$

➤ 四极磁铁的梯度误差会造成半整数共振

- 环形加速器的设计时应避免半整数工作点

➤ 空间电荷效应

- 空间电荷力：电荷之间的库仑力和（运动）电荷之间的吸引力的总和
- 空间电荷力和电荷密度成正比，与速度成反比
- 对于质子长束流，横向和纵向的耦合可以忽略，采用“2.5”维的办法分别计算

