中國科學院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

横向束流动力学 (第三节)

苑尧硕

上节回顾

- 在只有二极磁铁和四极磁铁的情况下，Betatron方程可以简化为Hill方程

- 简化条件：1.只有二极磁铁和四极磁铁，2. 动量 p=p0 (无能散)

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\rho+x}{\rho^2}=-\frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2 \qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{B_x}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

- （水平）二极磁铁情形 $B_y=B_0 \quad B_x=0$

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{x}{\rho^2}=0$$

- 其中 $\frac{1}{\rho}$ 量纲为m^{-2},，表现为水平方向上的弱聚焦力

上节回顾

- 在只有二极磁铁和四极磁铁的情况下，Betatron方程可以简化为Hill方程

- 简化条件：1.只有二极磁铁和四极磁铁，2. 动量 p=p0 (无能散)

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\rho+x}{\rho^2}=-\frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2 \qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{B_x}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

- （水平）二极磁铁情形 $B_y=B_0 \quad B_x=0$

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{x}{\rho^2}=0$$

- 其中 $\frac{1}{\rho}$ 量纲为m^{-2},，表现为水平方向上的弱聚焦力

上节回顾

- 四极磁铁情形 $B_y = B_1 x$ $B_x = B_1 y$ $\rho = \infty$

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = -\frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{B_x}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{B_1 x}{B\rho} = 0 \qquad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{B_1 y}{B\rho} = 0$$

$$x'' + K_x(s) = 0 \qquad K_x = \frac{B_1}{B\rho} \qquad y'' + K_y(s) = 0 \qquad K_y = -\frac{B_1}{B\rho}$$

- 可以看出，水平和垂直两个方向上的聚焦系数 $K_x = -K_y$

一个方向为聚焦力，另外一个方向必为散焦力

上节回顾

- **Betatron方程（横向振荡方程）电场为零 & 横向磁场**

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\rho+x}{\rho^2}=-\frac{B_y}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2 \qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{B_x}{B\rho}\frac{p_0}{p}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

- **希尔方程 无能散，线性元件（二极或四极磁铁）**

水平方向

$$x''+K_x(s)x=0$$

其中 $K_x(s)=\dfrac{1}{\rho^2}+K_1(s)$

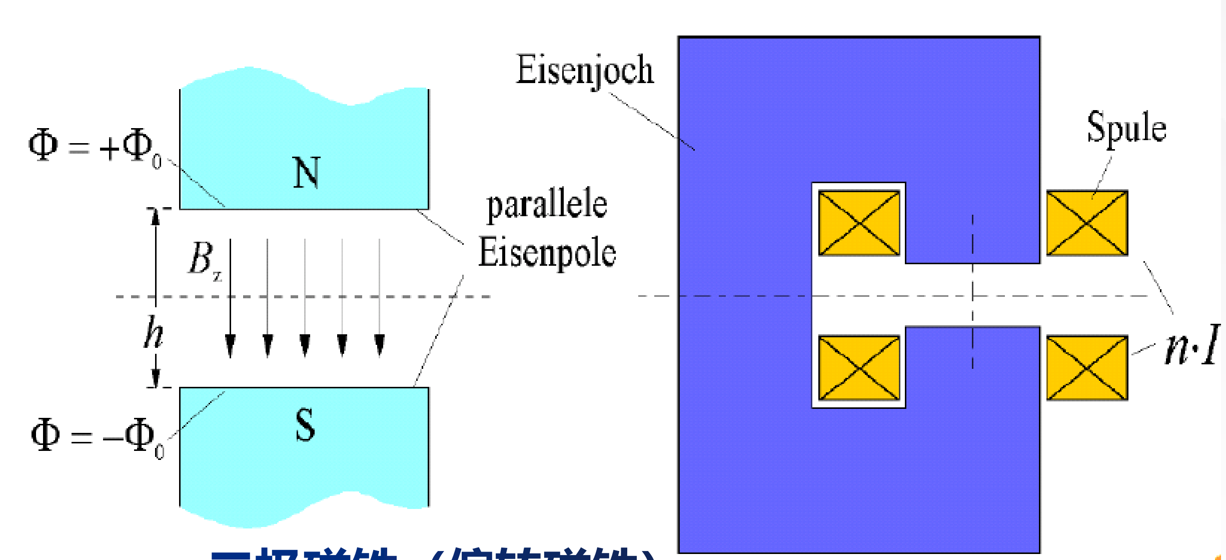
$$K_1(s)=\mp\frac{B_1(s)}{B\rho}$$

垂直方向

$$y''+K_y(s)y=0$$

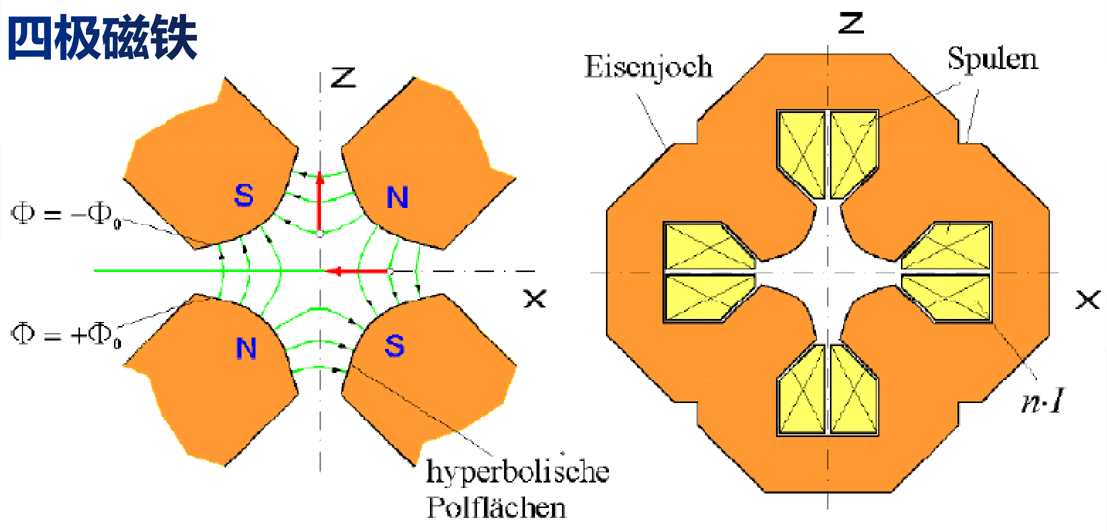
$$K_y(s)=-K_1(s)$$

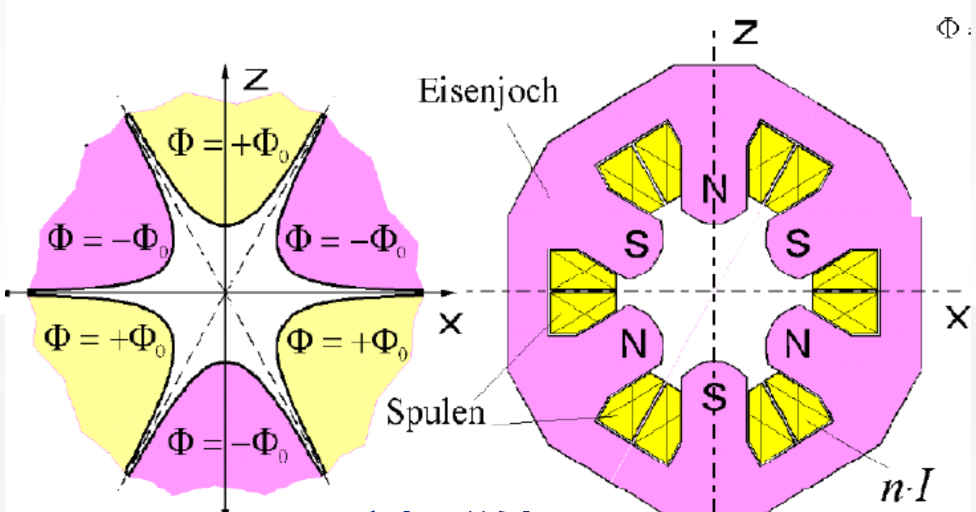
上节回顾



二极磁铁（偏转磁铁）

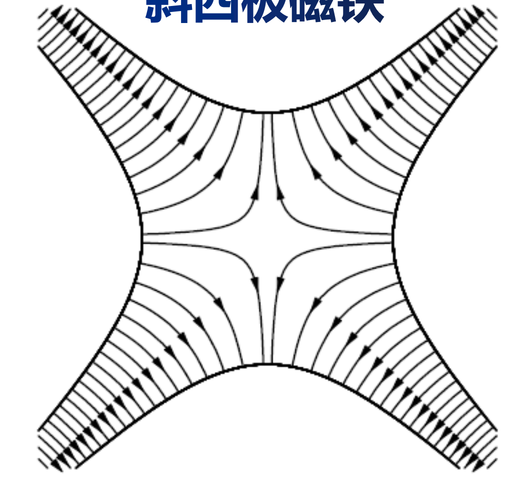
四极磁铁





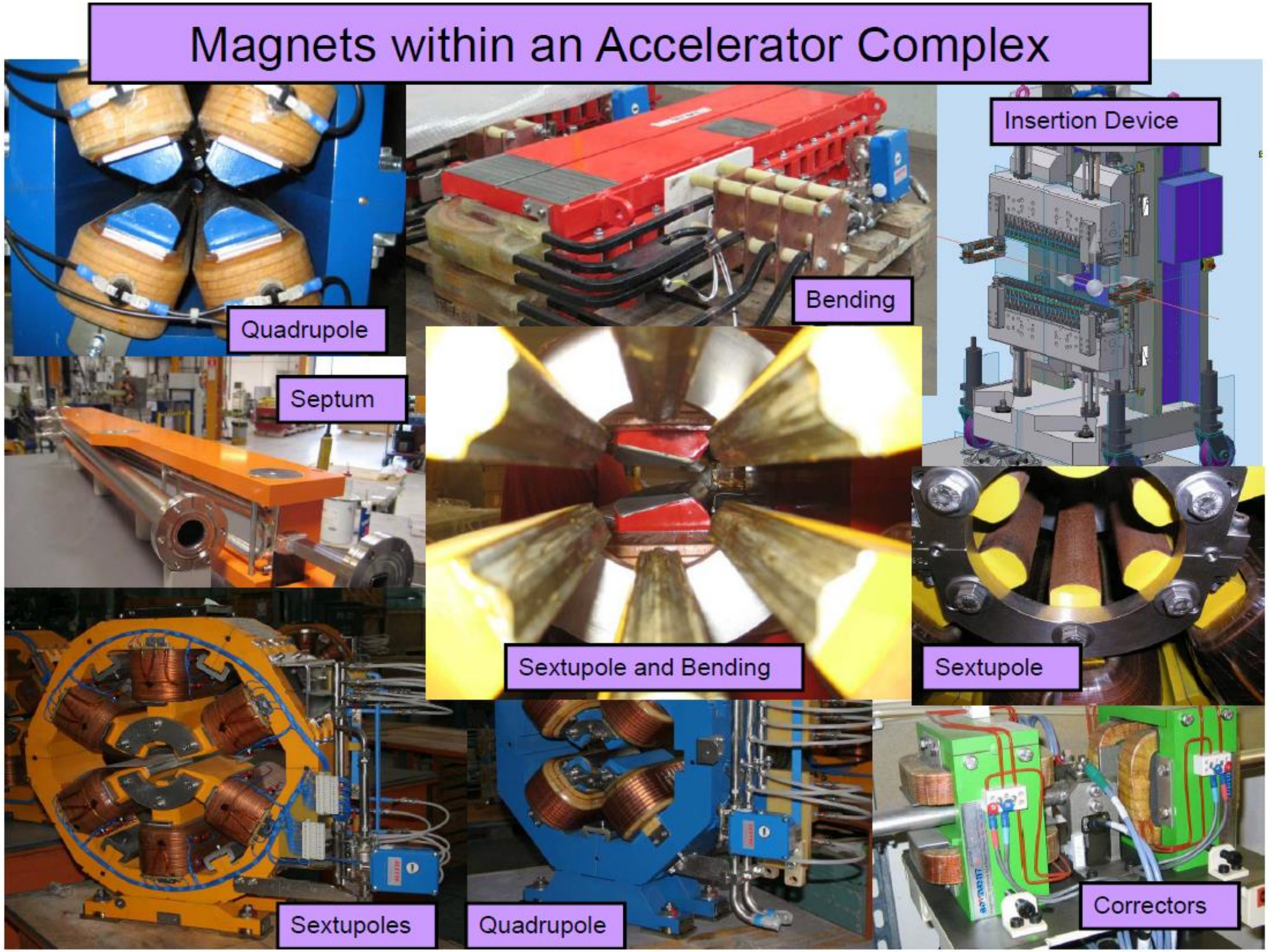
六极磁铁

斜四极磁铁



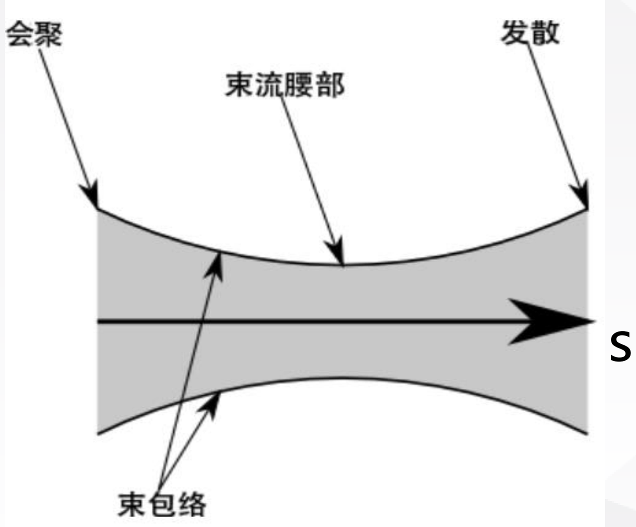
上节回顾

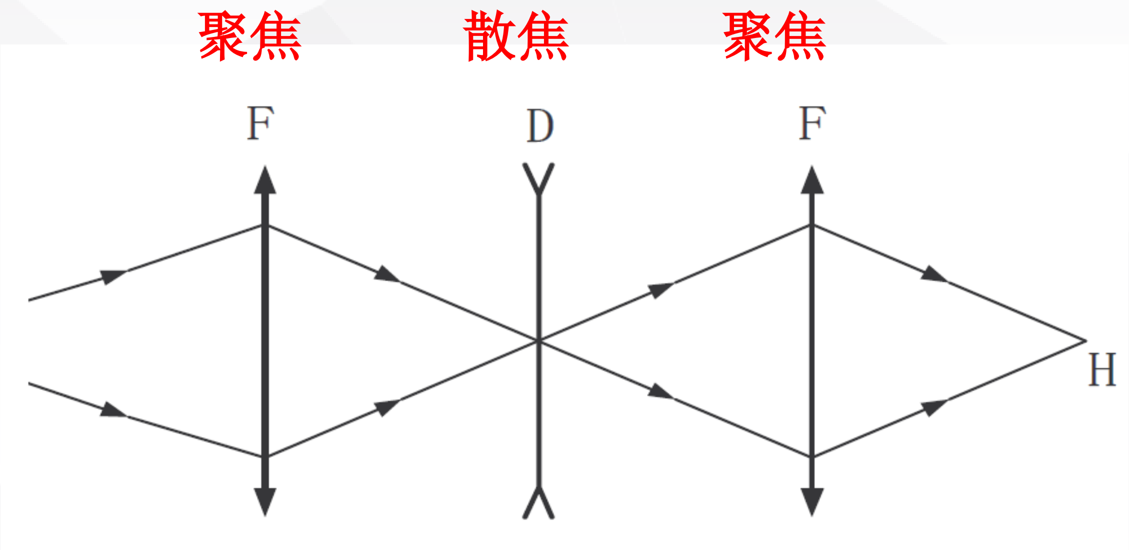
➢ 组成加速器的不同类型的**电磁铁元件**

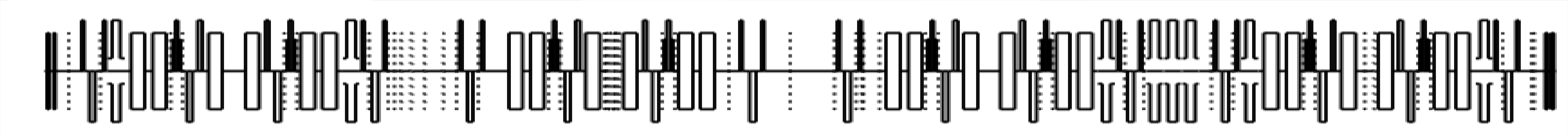


上节回顾

- 利用交变梯度排列四极磁铁来进行聚焦的加速器叫强聚焦加速器，是现代高能加速器的基础。







磁铁元件在加速器中的排列--lattice

本节内容

- 传输矩阵
- 传输矩阵的计算和性质（例题）
- 粒子运动在相空间中的表示

传输矩阵

- 希尔方程中的聚焦系数$K_{x,y}(s)$为分段函数，满足周期性条件

$$\boxed{z''+K_z(s)z=0 \qquad K_z(s+L)=K_z(s)}$$

- 通解 $z(s)=a_1\sin(\sqrt{K_z}s)+a_2\cos(\sqrt{K_z}s)$

  或者 $z(s)=a\cos(\sqrt{K_z}s+b)$ （K_z>0情形）

- a1和a2由初值（$z=z_0$, $z'=z_0'$）决定。

加速器中磁铁为周期性排列

传输矩阵

- 复习：一阶线性齐次常系数微分方程组表示为矩阵形式

$$\frac{dx_1}{ds} = a_{11}x_1(s) + a_{12}x_2(s) + a_{13}x_3(s)$$

$$\frac{dx_2}{ds} = a_{21}x_1(s) + a_{22}x_2(s) + a_{23}x_3(s)$$

$$\frac{dx_3}{ds} = a_{31}x_1(s) + a_{32}x_2(s) + a_{33}x_3(s)$$

$\Rightarrow$ 矩阵形式 $\dfrac{d\vec{x}}{ds} = A\vec{x}(s)$

- 解为 $\vec{x}(s) = e^{A(s-s_0)}\vec{x}(s_0)$

传输矩阵

- n 阶常微分方程可以化为 n 个一阶常微分方程组成的方程组

$$\vec{z}(s)=\begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} \qquad \vec{z}(s)=\boxed{M(s\,|\,s_0)}\vec{z}(s_0)$$

从s_0到s的传输矩阵(注意顺序)

注意：z,z′ 不是一对正则共轭坐标量

- 传输矩阵由初值 $\vec{z}(s_0)$ 确定

传输矩阵的计算

- 希尔方程

$$z''+K_z(s)z=0$$

通解为

$$
\begin{cases}
z(s)=a_1\sin(\sqrt{K_z}s)+a_2\cos(\sqrt{K_z}s) & K_z>0 \\
z(s)=a_1 s+a_2 & K_z=0 \\
z(s)=a_1\sinh(\sqrt{-K_z}s)+a_2\cosh(\sqrt{-K_z}s) & K_z<0
\end{cases}
$$

在s=s_0处的初值为 $z(s_0), z'(s_0)$

传输矩阵的计算

- $K_z>0$ 情形的传输矩阵

$$z''+K_z(s)z=0 \qquad z(s)=a_1\sin(\sqrt{K_z}s)+a_2\cos(\sqrt{K_z}s)$$

$$z(s_0)=a_1\sin(\sqrt{K_z}s_0)+a_2\cos(\sqrt{K_z}s_0)$$

$$z'(s_0)=a_1\sqrt{K_z}\cos(\sqrt{K_z}s_0)-a_2\sqrt{K_z}\sin(\sqrt{K_z}s_0)$$

传输矩阵的计算

$$z(s)=z(s_0)\cos[\sqrt{K_z}(s-s_0)]+z'(s_0)\frac{1}{\sqrt{K_z}}\cos[\sqrt{K_z}((s-s_0))]$$

$$z'(s)=-z(s_0)\sqrt{K_z}\sin[\sqrt{K_z}(s-s_0)]+z'(s_0)\cos[\sqrt{K_z}((s-s_0))]$$

通过对比,可以确定矩阵各个元素

$$\vec{z}(s)=M(s\,|\,s_0)\vec{z}(s_0)$$

$$z(s)=m_{11}z(s_0)+m_{12}z'(s_0)$$

$$z'(s)=m_{21}z(s_0)+m_{22}z'(s_0)$$

➢ 传输矩阵为

$$\boxed{M(s\,|\,s_0)=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{K_z}(s-s_0) & \frac{1}{\sqrt{K_z}}\sin\sqrt{K_z}(s-s_0)\\ -\sqrt{K_z}\sin\sqrt{K_z}(s-s_0) & \cos\sqrt{K_z}(s-s_0)\end{pmatrix}}$$

传输矩阵的计算

- 散焦四极磁铁 $K_z<0$情形（课后作业）

$$M(s|s_0)=\begin{pmatrix} \cosh\sqrt{-K_z}(s-s_0) & \frac{1}{\sqrt{-K_z}}\sinh\sqrt{-K_z}(s-s_0) \\ \sqrt{-K_z}\sinh\sqrt{-K_z}(s-s_0) & \cosh\sqrt{-K_z}(s-s_0) \end{pmatrix}$$

- 漂移节 $K_z=0$情形

$$M(s|s_0)=\begin{pmatrix} 1 & s-s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 提示

$$\sinh(A-B)=\sinh A\cosh B-\cosh A\sinh B$$

$$\cosh(A-B)=\cosh A\cosh B+\sinh A\sinh B$$

传输矩阵的计算

➢ 二极磁铁的传输矩阵

$$M(s|s_0)=\begin{pmatrix} \cos\sqrt{K_z}(s-s_0) & \dfrac{1}{\sqrt{K_z}}\sin\sqrt{K_z}(s-s_0) \\ -\sqrt{K_z}\sin\sqrt{K_z}(s-s_0) & \cos\sqrt{K_z}(s-s_0) \end{pmatrix}$$

- 提示 $K_x=\dfrac{1}{\rho^2}$ $\theta=\dfrac{s-s_0}{\rho}$

传输矩阵的计算

➢ 二极磁铁的传输矩阵的具体形式

$$M(s|s_0)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

传输矩阵的计算

- 传输矩阵是加速器lattice（或者元件）的属性，而不是粒子束流的属性。
- 利用传输矩阵，可以计算出粒子通过该元件后粒子**运动状态**（**位置**和**角度**）**的改变**。

传输矩阵的计算

- 例1：已知漂移节的传输矩阵 $M_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $l = s - s_0$ ，和粒子的初始坐标 x_0, x_0'

  求经过漂移节后粒子**位置**和**角度**的改变

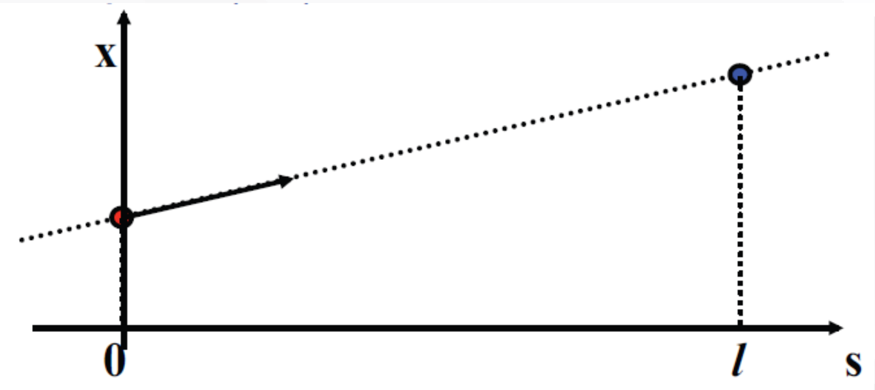
传输矩阵的计算

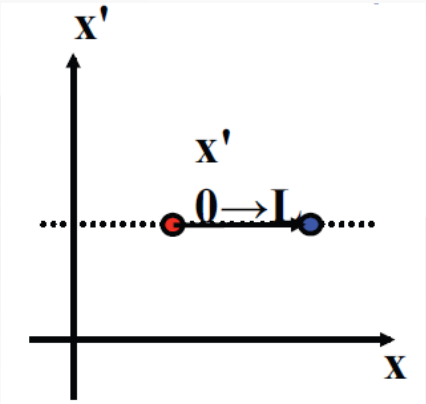
- 例1：已知漂移节的传输矩阵 $M_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $l = s - s_0$ ，和粒子的初始坐标 x=x₀, x′ =x₀′

  求经过漂移节后粒子**位置**和**角度**的改变

解： 通过 $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$ 可得 $x = x_0 + l x_0'$

$x' = x_0'$





粒子经过漂移节后，只有横向位置发生改变

传输矩阵的计算

- 例2：已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标 $x=x_0$，$x'=x_0'$

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K_0}l & \frac{1}{\sqrt{K_0}}\sin\sqrt{K_0}l \\ -\sqrt{K_0}\sin\sqrt{K_0}l & \cos\sqrt{K_0}l \end{pmatrix}$$

求经过该四极磁铁后粒子**位置**和**角度**的改变

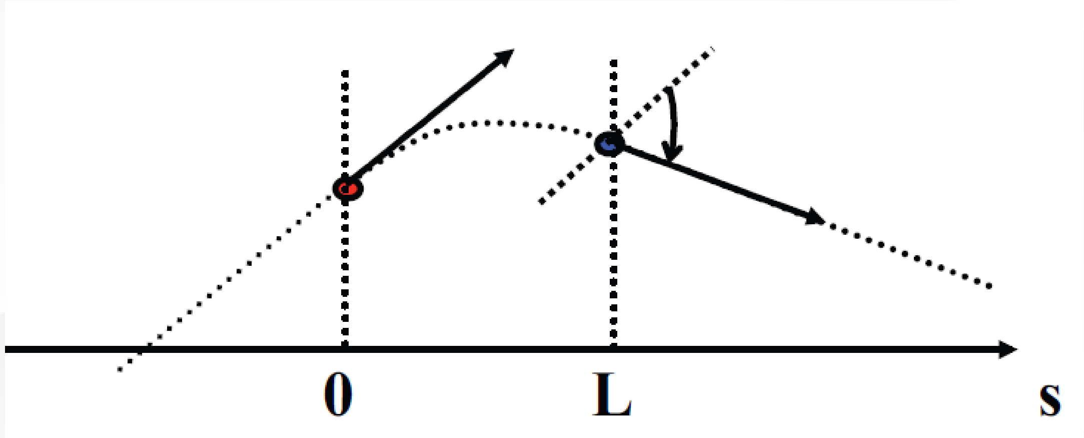
传输矩阵的计算

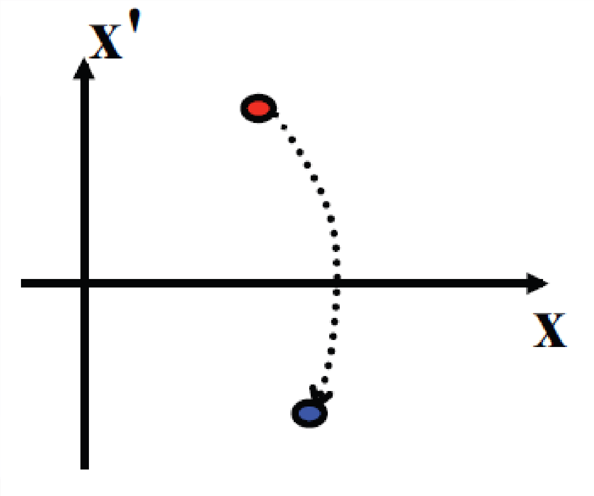
- 例2：已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标 $x=x_0$， $x'=x_0'$

  求经过该四极磁铁后粒子**位置**和**角度**的改变

解：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K_0}l & \frac{1}{\sqrt{K_0}}\sin\sqrt{K_0}l \\ -\sqrt{K_0}\sin\sqrt{K_0}l & \cos\sqrt{K_0}l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$





粒子经过四极磁铁后，只有横向位置和角度均发生改变

粒子在相空间中的表示

- 定义：广义坐标和广义动量联合表示的多维空间

例如 (x,p_x) 构成一个水平方向的二维相空间，(y,p_y) 构成垂直方向的二维相空间

(x,y,p_x,p_y) 构成一个横向四维相空间

- 实际上，用**坐标** x 和**角度**x’ 构成的相空间更为方便

$$x' \equiv \frac{dx}{ds}$$