光前动力学中三体系统的相对论波函数

朱智敏

中国科学院近代物理研究所

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук

Main Collaborators: V. A. Karmanov, 张子祺, 付开宇

Based on [arXiv: 2503.18788]

July 14th, 2025 @ 桂林

Contents

- What is light-front dynamics?
- Why do we need relativistic dynamics?
- Three-body Faddeev equation
  - Three-fermion system
  - Helium-3
- Results

Contents

- What is light-front dynamics?
- Why do we need relativistic dynamics?
- Three-body Faddeev equation
  - Three-fermion system
  - Helium-3
- Results

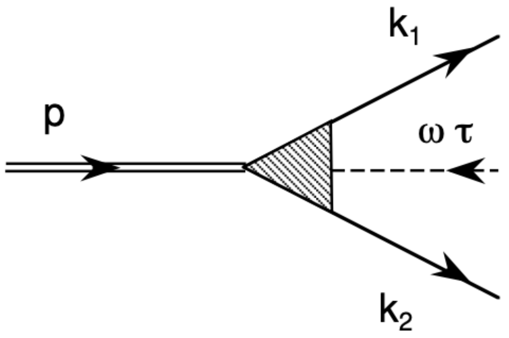
显式协变光前动力学（Explicitly covariant LFD）

V.A. Karmanov, JETP, 44 (1976) 201.

J. Carbonell, B. Desplanques, V.A. Karmanov, J.-F. Mathiot, Phys. Reports, 300 (1998) 215

在**显式协变光前动力学**(ECLFD)中，我们不预先固定**光前面的方向**(不选择特定的光前时间切片，如 $x^+ = t + z$)，而是引入一个广义的光前向量ω^μ，满足$\omega^2 = 0$。该向量用于定义光前量子化的平面$\omega \cdot x = 0$。通过保留ω^μ作为一个自由参数，我们在整个计算推导过程中能够显式保持洛伦兹协变性。

我们考虑一个两粒子组成的束缚态(如夸克-反夸克体系)，其束缚态四动量为p^μ，质量为M，组分粒子的四动量分别为k_1^μ和k_2^μ。在光前动力学框架下，所有粒子被视为在壳的，即$k_i^2 = m^2$。此时束缚态和组分粒子之间只在横向和纵向方向上保持动量守恒，系统与组分粒子的“-”动量($k^- = k^0 - k^z$)并不守恒。



❑ 对于该**两体束缚态**，在显式协变光前动力学框架下可以写出如下动量关系：

$$k_1 + k_2 = p + \omega\tau,$$

其中，τ是洛伦兹标量，代表“虚粒子”能量修正，描述了四动量中沿ω^μ方向的分量(即类似于标准LFD中$k^- = k^0 - k^3$的分量)在顶点处的不守恒程度。

❑ 对于**三体束缚态**，有类似关系：

$$k_1 + k_2 + k_3 = p + \omega\tau.$$

光前动力学的优点

✓ **真空简单**

光前动力学中的真空态简单。在相互作用理论中，自由哈密顿量的本征态（即“裸真空”）同时也是全哈密顿量(包含相互作用)的本征态。这意味着不需要引入复杂的真空结构或处理大量虚粒子对的涨落，从而极大简化了束缚态问题中的非微扰处理。这种特性在等时量子化框架下往往是难以实现的。

✓ **波函数保持洛伦兹协变性**

在光前动力学框架中，纵向和横向方向的洛伦兹Boosts是运动学的，光前波函数在这些变换下保持不变。

✓ **Fock态物理图像清晰**

光前动力学下，系统态矢在 Fock 空间中展开。每一阶 Fock 分量(如$q\bar{q}$，qqq，$qqqg$，$qqqq\bar{q}$等)代表一组具体的组态，其展开系数为相应组态下的概率幅或者称为**光前波函数**。这种展开形式不仅物理图像清晰，而且容易计算实验观测量。

✓ **容易计算强子结构等观测量**

许多关键的物理观测量，例如强子的三维结构函数—TMD和GPD，都是在光前时间下定义的。光前动力学为这类观测量提供了天然且一致的计算框架，使得对强子内部结构的刻画更为方便。

Contents

- What is light-front dynamics?
- Why do we need relativistic dynamics?
- Three-body Faddeev equation
  - Three-fermion system
  - Helium-3
- Results

为什么考虑相对论效应?

Relativistic dynamics vs. non-relativistic dynamics

Wick-Cutkosky模型：两个质量为m的组分粒子构成系统，粒子之间交换零质量波色子。

相对论动力学方程

在相对论框架(ECLFD)下，系统的本征方程可以表示为:

$$\left[4\left(\vec{k}^2+m^2\right)-M^2\right]\psi(\vec{k},\vec{n})=-\frac{m^2}{2\pi^3}\int\frac{d^3k'}{\varepsilon_{k'}}V\left(\vec{k},\vec{k}',\vec{n},M^2\right)\psi\left(\vec{k},\vec{n}\right),$$

这里，$\vec{k}$是相对动量，$\vec{n}=\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$是光前向量，$M$是系统的总质量。

无质量波色子交换势较为复杂

$$V=-\frac{4\pi\alpha}{\left(\vec{k}'-\vec{k}\right)^2-\left(\vec{n}\cdot\vec{k}'\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{k}\right)\frac{\left(\varepsilon_{k'}-\varepsilon_k\right)^2}{\varepsilon_{k'}\varepsilon_k}+\left(\varepsilon_{k'}^2+\varepsilon_k^2-\frac{1}{2}M^2\right)\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{k}'}{\varepsilon_k'}-\frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{\varepsilon_k}\right|}$$

在**弱耦合极限**(α较小)下，可以求出波函数的解析解:

$$\psi_{LFD}\left(\vec{k},\vec{n}\right)=\frac{8\sqrt{\pi m}\kappa^{5/2}}{\left(\vec{k}^2+\kappa^2\right)^2\left(1+\frac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{\varepsilon_k}\right)}$$

其中，$\kappa^2=mB$，B是结合能$B=m\alpha^2/4$。

Mangin-Brinet and J. Carbonell, Phys. Lett., B474 (2000) 237.

为什么考虑相对论效应?

Relativistic dynamics vs. non-relativistic dynamics

Wick-Cutkosky模型：两个质量为m的组分粒子构成系统，粒子之间交换零质量波色子。

Mangin-Brinet and J. Carbonell, Phys. Lett., B474 (2000) 237.

非相对论极限

当动量远小于质量($k \ll m$)时，系统退化为非相对论情形。此时势函数退化为库仑势：

$$V \to V_{NR} = -\frac{4\pi\alpha}{\left(\vec{k}' - \vec{k}\right)^2}.$$

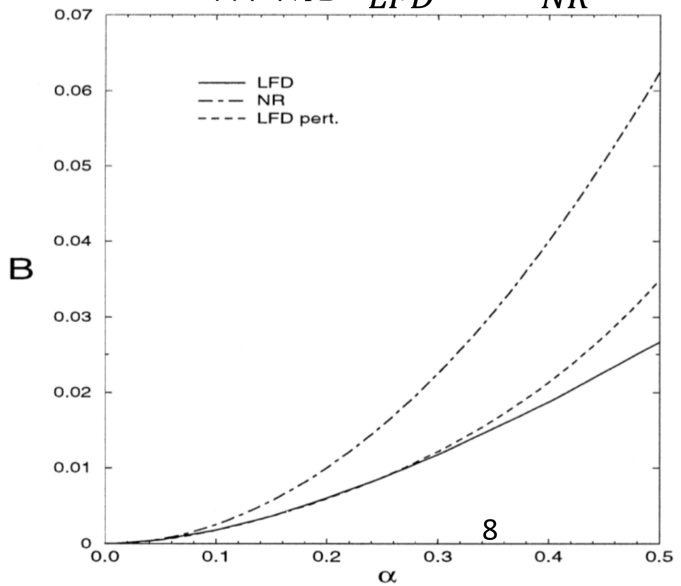
对应的波函数也退化为

$$\psi_{LFD}\left(\vec{k}\right) = \frac{8\sqrt{\pi m}\kappa^{5/2}}{\left(\vec{k}^2+\kappa^2\right)^2\left(1+\frac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{\varepsilon_k}\right)} \to \psi_{NR}\left(\vec{k}\right) = \frac{8\sqrt{\pi m}\kappa^{5/2}}{\left(\vec{k}^2+\kappa^2\right)^2},$$

这与量子力学中的氢原子基态波函数形式一致。

- ✓ 非相对论极限下，ψ_{LFD}与ψ_{NR}一致。
- ✓ V_{LFD} vs. V_{NR}：相对论效应在**动量较大**时出现。
- ✓ 结合能B_{LFD} vs. B_{NR}：相对论效应在**动量较大**或**强耦合**时显著。

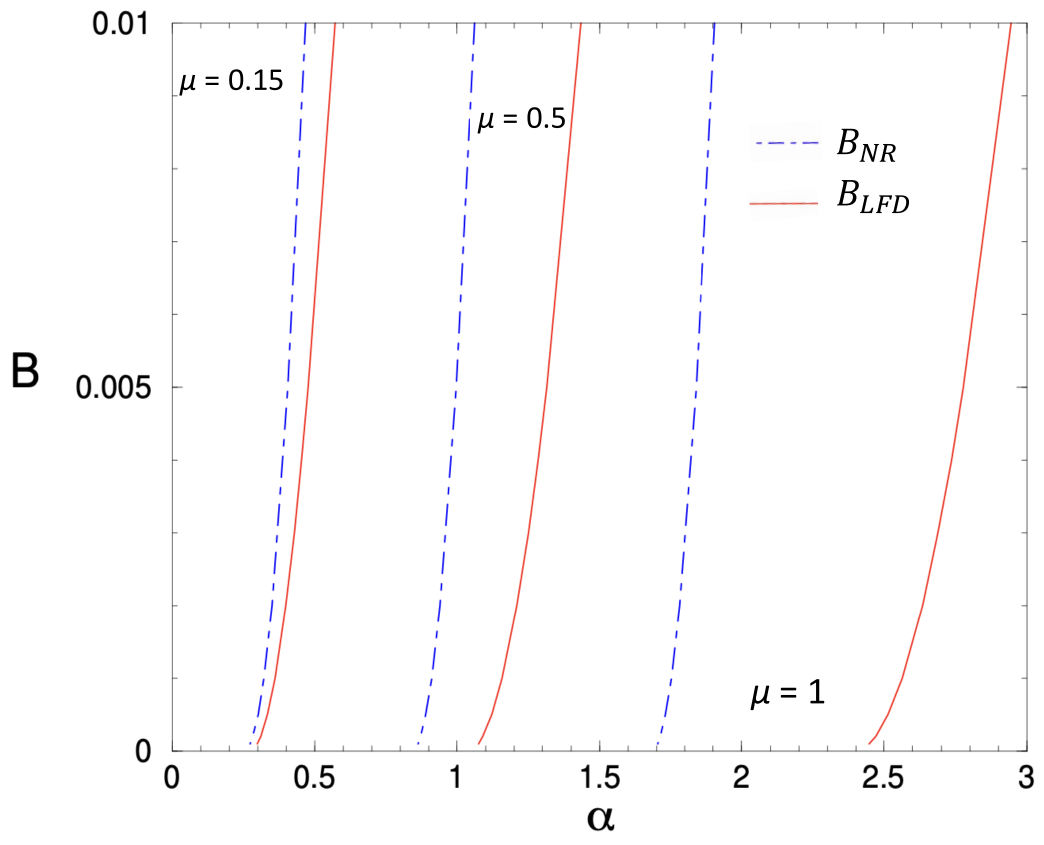
结合能B_{LFD} vs. B_{NR}



什么时候考虑相对论效应?

Wick-Cutkosky模型(质量为μ的粒子交换)：

Mangin-Brinet and J. Carbonell, Phys. Lett., B474 (2000) 237.



改变交换粒子的质量μ会显著改变系统的动力学行为。 当μ较大时，即使耦合强度较小，相对论效应也会变得非常显著，表现为B_{NR}与B_{LFD}之间的差异较大。这是因为大质量交换粒子传递的相互作用具有短程性，需要更高动量的虚粒子参与，从而增强了相对论修正效应。反之，当μ减小时，相对论效应逐渐减弱，在光前动力学框架下的弱耦合系统会更接近非相对论极限。

核物理中Bonn单介子交换势的媒介粒子是典型的重介子。在这个介子交换势中，它们的质量可能也会导致显著的相对论效应，原子核理论的精确描述至关重要。

总的来说，**相对论效应不仅取决于耦合常数的大小，还取决于媒介粒子质量。** 在构建模型时，若忽略重媒介粒子交换带来的相对论效应，可能会导致理论预言出现显著偏差。因此，在处理涉及大质量交换粒子的系统时，需要考虑相对论修正。

Contents

- What is light-front dynamics?
- Why do we need relativistic dynamics?
- Three-body Faddeev equation
  - Three-fermion system
  - Helium-3
- Results

三体束缚态相对论波函数 $J^P=\frac{1}{2}^+$

三体Faddeev波函数

对于一个由三个全同费米子组成的系统，其完整波函数Ψ需要满足**全反对称性**要求。我们采用Faddeev分解方法：

$$\Psi(1,2,3)=\Phi_{12}(1,2,3)+\Phi_{12}(2,3,1)+\Phi_{12}(3,1,2),$$

其中每个Faddeev分量Φ_{12}具有**特定交换的反对称性**：

$$\Phi_{12}(1,2,3)=-\Phi_{12}(2,1,3),\Phi_{12}(2,3,1)=-\Phi_{12}(3,2,1)\ ,\Phi_{12}(3,1,2)=-\Phi_{12}(1,3,2).$$

这种构造保证了总波函数Ψ(1,2,3)的完全反对称性。

三体运动方程

三体系统的动力学由以下方程描述：

$$(H_0-M^2)\Psi=-\Psi\cdot K_{12}-\Psi\cdot K_{23}-\Psi\cdot K_{31}.$$

考虑交换对称性，在光前动力学框架下，Faddeev分量Φ_{12}满足，

$$(\mathcal{M}-M^2)\Phi_{12}(1,2,3)=\sum_{s_1's_2'}\int\frac{dx_2'd^2R_{2\perp}'}{(2\pi)^3 2x_1'x_2'}\mathcal{K}_{12}(1',2';1,2)$$
$$\times[\Phi_{12}(1',2',3)+\Phi_{12}(2',3,1')+\Phi_{12}(3,1',2')].$$

- $\mathcal{M}$ & M— free LF energy & bound state mass
- x_i & $\vec{R}_{i\perp}$ — longitudinal momentum fraction & trans. momentum
- $\mathcal{K}_{12}$ — kernel of interaction between the particle 12

三体束缚态相对论波函数 $J^P = \frac{1}{2}^+$

三费米子体系的自旋结构

对于三个自旋1/2的费米子系统($J^P = \frac{1}{2}^+$)，其自旋空间具有如下特征，

- 每个费米子自旋投影： $s_i = \pm\frac{1}{2}$
- 体系总自旋： $s = \pm\frac{1}{2}$

由此产生的自旋可能性为：

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16,$$

这意味着我们需要处理16个独立的波函数分量$\Phi^s_{s_1 s_2 s_3}$来描述系统。

宇称守恒的特殊性

在非相对论情况下，三体光前波函数的宇称守恒不会减少独立组分的数量。这与两体系统形成鲜明对比。

✓ 对于三体问题，我们引入一个**赝标量**C_{ps}来构造具有确定P宇称的态，

$$C_{\mathrm{ps}} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma} k_{1\mu} k_{2\nu} p_\rho \omega_\gamma}{\left|\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma} k_{1\mu} k_{2\nu} p_\rho \omega_\gamma\right|}.$$

轻重子体系？三体核子(^{3}He,^{3}H)体系？

✓ 引入同位旋自由度。

三体束缚态相对论波函数 $J^P = \frac{1}{2}^+$

Faddeev分量$\Phi_{12}^{s}, s_1 s_2 s_3$自旋分解：
自旋基的选取具有任意性，不同基矢之间可以通过**线性变换**互相表示。

❖ **自旋基χ_n**(具有确定角动量的自旋基函数)：

$$\Phi_{12}(1,2,3) = \sum_{n=1}^{16} \psi_n(1,2,3)\chi_n(1,2,3)\,.$$

χ_n的形式为：

波函数

$$\chi_n = c_n \sum_{\kappa} \left[\bar{u}_{s_1}(k_1) O_n^{(A\kappa)} \bar{u}(k_2)\right]\left[\bar{u}_{s_3}(k_3) O_n^{(B\kappa)} u^s(p)\right].$$ （多项）

满足正交归一条件$\int d\Omega_{\vec{p}} d\Omega_{\vec{q}}\, \chi_n^{\dagger}\, \chi_{n'} = \delta_{nn'}$.

❖ **自旋基V_{ij}:**

$$\Phi_{12}(1,2,3) = \sum_{i,j=1}^{4} g_{12,ij}(1,2,3) V_{12,ij}(1,2,3)$$

V_{ij}的形式更简单：

波函数

$$V_{ij} = \left[\bar{u}_{s_1}(k_1) T_i U_c \bar{u}(k_2)\right]\left[\bar{u}_{s_3}(k_3) S_j u^s(p)\right].$$ （单项）

正交归一性更简单：

$$\frac{1}{2} V_{i'j'}^{\dagger}\, V_{ij} = \delta_{ii'}\, \delta_{jj'}.$$

三体束缚态相对论波函数 $J^P = \frac{1}{2}^+$

波函数的运动学变量依赖关系

由于运动学变量的约束条件：

$$\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp} + \vec{k}_{3\perp} = 0, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

和旋转对称性，每个自旋波函数分量ψ依赖于五个标量：

$$\psi = \psi\left(|\vec{k}_{1\perp}|, |\vec{k}_{2\perp}|, \vec{k}_{1\perp} \cdot \vec{k}_{2\perp}; x_1, x_2\right).$$

三费米子系统求解维度

- 三费米子系统自由度：

$$16_{\text{Discrete}} + 5_{\text{Continuous}}$$

- 矩阵维数：

$$Dim = [16 \times N^5]^2$$

其中N是每个连续变量的离散化点数。

[arXiv: 25xx.xxxxx]

Helium-3 $J^P I = \frac{1}{2}^+ \frac{1}{2}$

Helium-3的自旋-同位旋结构与Faddeev分解

Helium-3是由两个质子和一个中子组成的三核子系统，具有以下特征：

- 每个费米子自旋投影： $s_i = \pm\frac{1}{2}$
- 质子,中子同位旋投影： $I_{3,p} = +\frac{1}{2}, I_{3,n} = -\frac{1}{2}$
- 体系总自旋： $s = \pm\frac{1}{2}$
- 体系总同位旋： $I = +\frac{1}{2}$：
  - $\xi^{(0)}(1,2,3) = C^{00}_{\frac{1}{2}\tau_1,\frac{1}{2}\tau_2} C^{\frac{1}{2}\tau}_{00,\frac{1}{2}\tau_3}$ 对应pair-12同位旋单态($t = 0$)
  - $\xi^{(1)}(1,2,3) = C^{1\tau_{12}}_{\frac{1}{2}\tau_1,\frac{1}{2}\tau_2} C^{\frac{1}{2}\tau}_{1\tau_{12},\frac{1}{2}\tau_3}$ 对应pair-12同位旋三重态($t = 1$)

我们采用Faddeev方法将波函数分解为两个同位旋部分(分别对应$t = 0,1$)：

$$\Phi_{12}(1,2,3) = \sum_{i,j=1}^{4} g^{(0)}_{12,ij}(1,2,3) V_{12,ij}(1,2,3) \xi^{(0)}(1,2,3) + \sum_{i,j=1}^{4} g^{(1)}_{12,ij}(1,2,3) V_{12,ij}(1,2,3) \xi^{(1)}(1,2,3)$$

Helium-3求解维度

- 三费米子系统自由度：

$$16_{\text{Discrete}} \times 2_{\text{isospin}} + 5_{\text{Continuous}}$$

- 矩阵维数：

$$Dim = [32 \times N^5]^2$$

其中N是每个连续变量的离散化点数。

[arXiv: 2503.18788]

Kernels

Case 1：三费米子玩具模型

❑ 最简单的标量玻色子交换:

$$\mathcal{K}_{12} = g^2 \Pi_{12}(Q^2)\left[\bar{u}^{s_1}(k_1) u^{s_1'}(k_1')\right]\left[\bar{u}^{s_2}(k_2) u^{s_2'}(k_2')\right],$$

标量耦合，计算相对简单。

Case 2：Helium-3

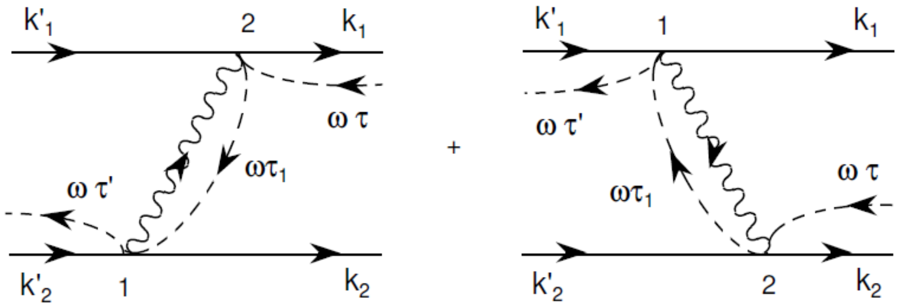
❑ Bonn势单介子交换:

R. Machleidt, K. Holinde and Ch. Elster, Phys. Reports 149 (1987) 1

$$\mathcal{K}_{12} = \sum_{meson} \Pi_{12}(Q^2)\left[\bar{u}^{s_1}(k_1) O_1 u^{s_1'}(k_1')\right]\left[\bar{u}^{s_2}(k_2) O_2 u^{s_2'}(k_2')\right]$$

媒介粒子包括:

- 赝标量介子(π, η)
- 标量介子(σ, δ)
- 矢量介子(ρ, ω)



LFD下的传播子:

$$\Pi_{12} = \frac{\theta(\omega\cdot(k_1 - k_1'))}{\mu^2 - (k_1 - k_1')^2 + 2\tau\omega\cdot(k_1 - k_1') - i\epsilon} + \frac{\theta(\omega\cdot(k_1' - k_1))}{\mu^2 - (k_1' - k_1)^2 + 2\tau'\omega\cdot(k_1' - k_1) - i\epsilon}$$

[arXiv: 2503.18788]

三体Faddeev方程组与数值挑战

Helium-3的三体Faddeev方程组

通过对Faddeev方程进行自旋和同位旋基投影，我们得到Helium-3的耦合积分方程组：

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}^2 - M^2) g^{t}_{12;ij}(1,2,3) \\
&= \sum_{i'j't'} \int \frac{\mathrm{d}^2 R'_{2\perp} \mathrm{d}x'_2}{(2\pi)^3 2x'_1 x'_2} g^{t'}_{12;i'j'}(1',2',3) W^{i'j't'}_{ijt}{}_{(12)}(1',1;2',2;3) \\
&+ \sum_{i'j't'} \int \frac{\mathrm{d}^2 R'_{2\perp} \mathrm{d}x'_2}{(2\pi)^3 2x'_1 x'_2} g^{t'}_{12;i'j'}(3,1',2') W^{i'j't'}_{ijt}{}_{(31)}(1',1;2',2;3) \\
&+ \sum_{i'j't'} \int \frac{\mathrm{d}^2 R'_{2\perp} \mathrm{d}x'_2}{(2\pi)^3 2x'_1 x'_2} g^{t'}_{12;i'j'}(2',3,1') W^{i'j't'}_{ijt}{}_{(23)}(1',1;2',2;3).
\end{aligned}
$$

其中，核函数$W_{ijt}^{i'j't'}$包含复杂的Dirac矩阵迹：

$$
W^{i'j't'}_{ijt}{}_{(31)} \propto \mathbf{Tr}\Big[(\hat{k}_2 + m) O_2 (\hat{k}'_2 + m) S_{j'}(2')(\hat{p} + M)\bar{S}_j(3)(\hat{k}_3 + m) T'_{i'}(3,1',2')(-\hat{k}'_1 + m)\tilde{O}_1(-\hat{k}_1 + m)\tilde{\bar{T}}_i(1,2,3)\Big]
$$

这一方程组系统性地描述了

- ✓ **三体关联**：通过三个积分项完整包含所有两体相互作用
- ✓ **同位旋选择**：标记pair-12的同位旋(单态/三重态)

数值挑战

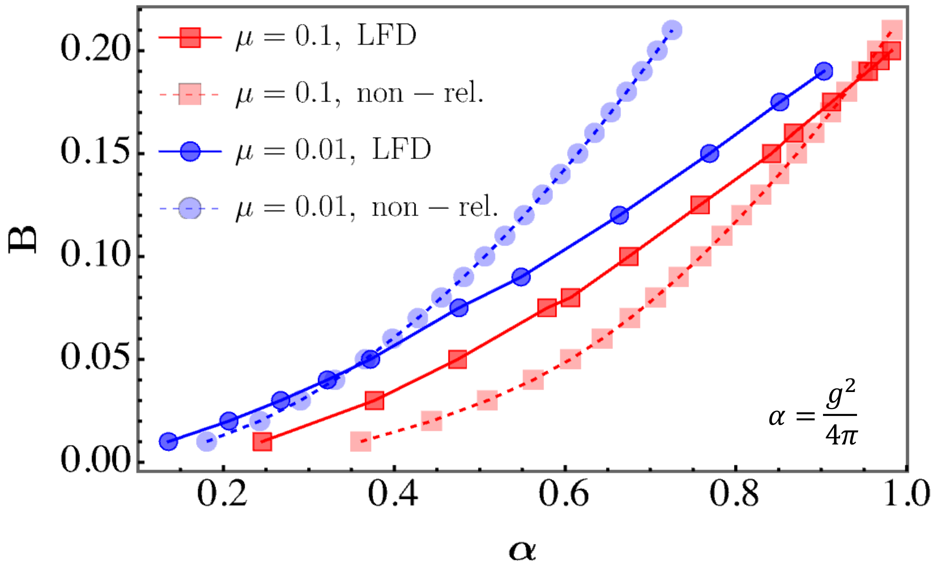
- ❖ 如何高效处理大自由度问题?
- ❖ 如何高效计算核函数?

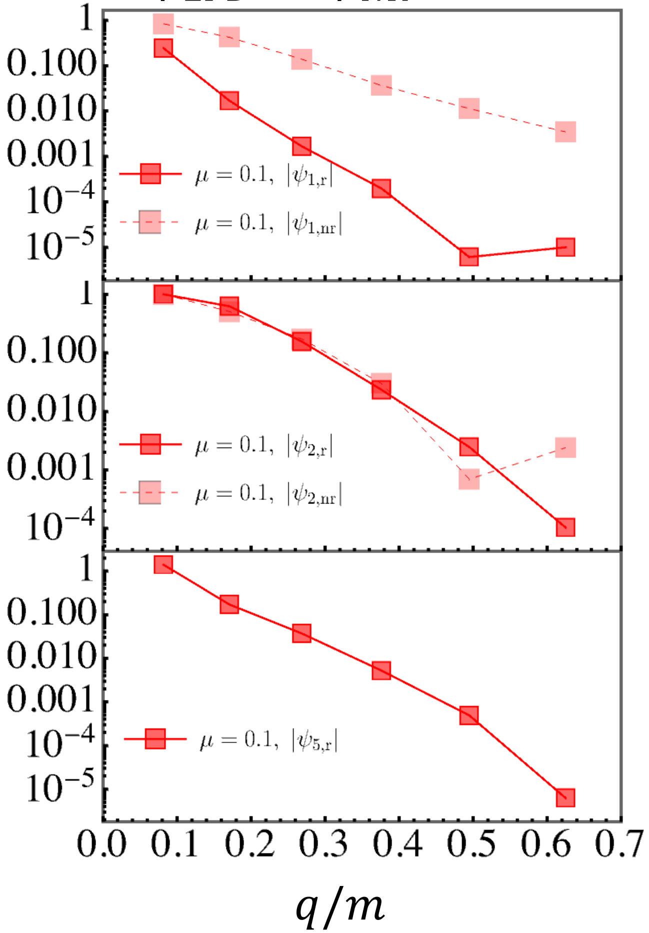
[arXiv: 2503.18788]

Contents

- What is light-front dynamics?
- Why do we need relativistic dynamics?
- Three-body Faddeev equation
  - Three-fermion system
  - Helium-3
- Results

三体费米子系统 LFD *vs.* NR (preliminary result)





结合能B=0.05的如下运动学变量下的波函数

- 纵向动量分数：$x_1 = x_2 = 1/3$，
- 横向动量：模长 $k_{1\perp} = q, k_{2\perp} = 0.08$
  夹角$\langle \vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp} \rangle = 1.8$

结合能B_{LFD} vs. B_{NR}

✓ 结合能随耦合常数 α 快速增长，但相对论效应会抑制强耦合区的结合能，显示强耦合体系中相对论修正的必要性。

✓ 轻质量μ粒子交换导致强束缚，Yukawa势的长程性增强。

波函数ψ_{LFD} vs. ψ_{NR}(pure S wave)

1. 低动量区域($q \ll m$)

✓ 相对论波函数主导分量(S wave)与非相对论的一致

✓ 波函数呈现典型的S波主导特征

✓ 出现新的自旋波函数分量

2. 高动量区域($q \to m$)

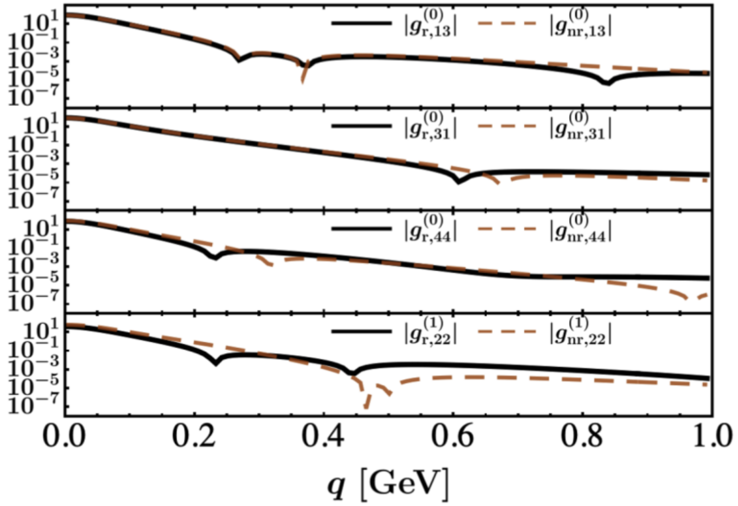
✓ 相对论修正使主导分量(S wave)出现显著变化

✓ 出现新的自旋波函数分量

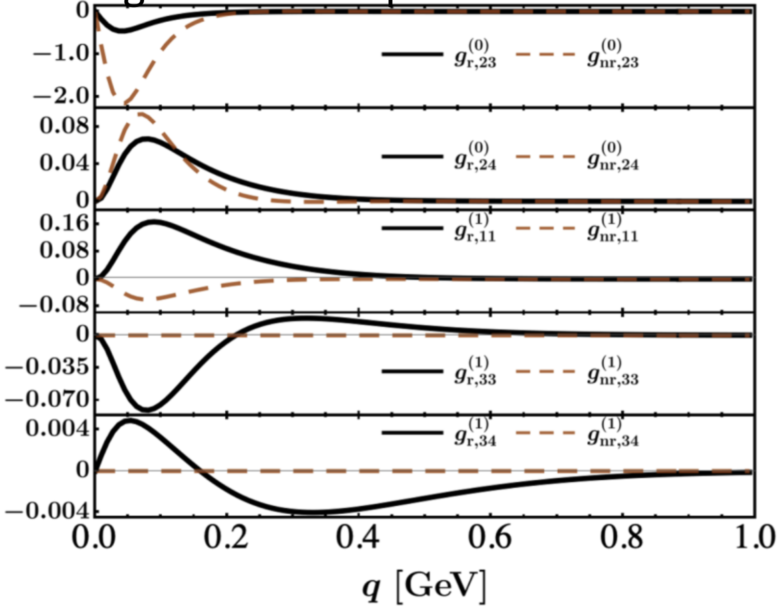
Helium-3: $g_{ij}(q)$

波函数$g_{LFD,ij}$ vs. $g_{NR,ij}$

Dominating components:



Insignificant components:



我们选取如下运动学变量

- 纵向动量分数：$x_1 = x_2 = 1/3$
- 横向动量：

模长$k_{1\perp} = k_{2\perp} = q$

夹角$\langle \vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp} \rangle = \langle \vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{3\perp} \rangle = \frac{2\pi}{3}$

1. 低动量区域$(q \ll m)$

✓ 相对论主导组分与非相对论结果高度吻合

✓ 验证了理论在非相对论极限下的自洽性

✓ 出现新的自旋波函数分量

2. 高动量区域$(q \to m)$

✓ 出现显著的相对论修正

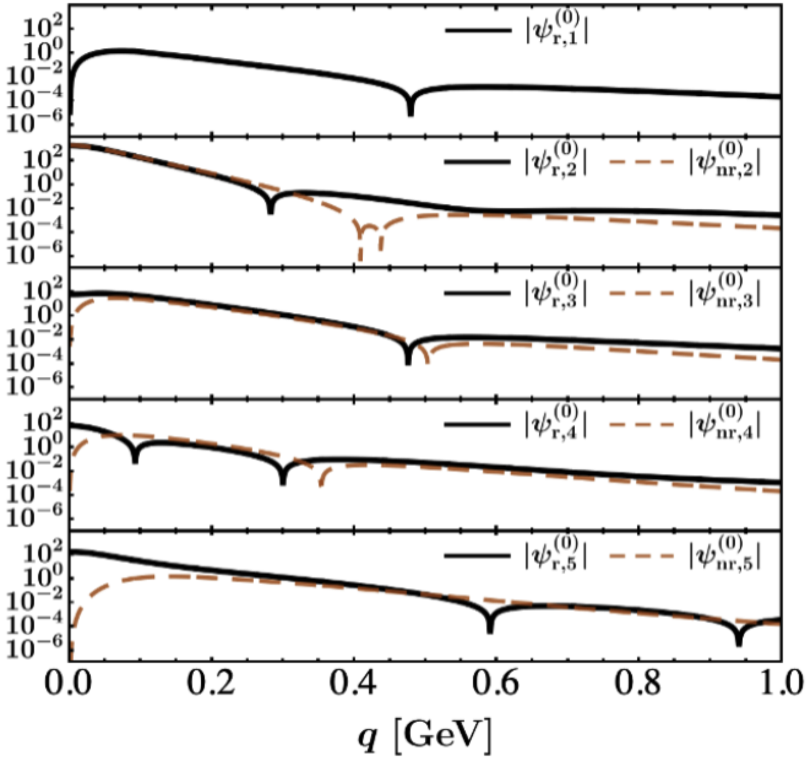
✓ 出现新的自旋波函数分量

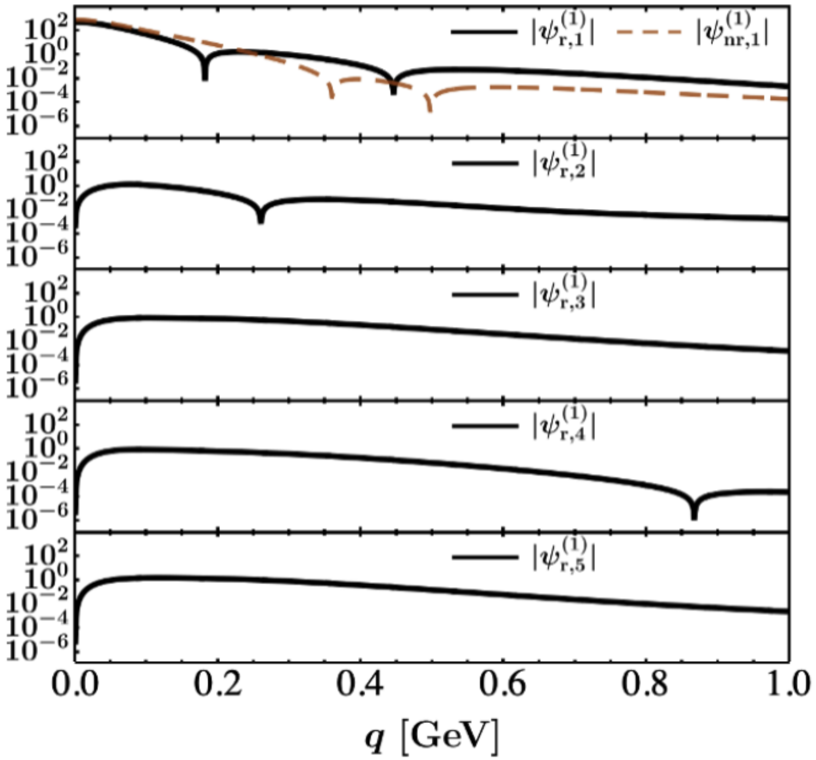
Helium-3: $\psi(q)$

两种自旋波函数的线性表示:

$$\sum_{n=1}^{16} M_{ij,n}\psi_n = g_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,4.$$

波函数$\psi_{LFD,n}$ vs. $\psi_{NR,n}$





我们选取如下运动学变量

- 纵向动量分数:
  $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$
- 横向动量:

模长$k_{1\perp} = q, k_{2\perp} = 0.05$
夹角$\langle \vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp} \rangle = \pi/2$

1. 低动量区域($q \ll m$)

✓ 相对论主导组分与非相对论结果高度吻合
✓ 验证了理论在非相对论极限下的自洽性
✓ 出现新的自旋波函数分量

2. 高动量区域($q \to m$)

✓ 出现显著的相对论修正
✓ 出现新的自旋波函数分量

近代物理研究所 BLFQ团队

团队成员
1名研究员、3名副研究员、1名助理研究员、6名博士后、
13名研究生、多名实习生

世界级核物理专家
美J. P. Vary教授

世界级核物理专家
俄V. Karmanov教授

欢迎专家学者来惠州交流！

Conclusion

- ❖ 光前动力学（LFD）及其显式协变形式能很方便并高效地求解强子问题。
- ❖ 相对论动力学与非相对论近似相比能提供更丰富的物理信息，但代价是需要处理更高的自由度维度与更复杂的数值计算过程。
- ❖ 理论体系具有自洽性，在非相对论能区，相对论解可自然退耦为非相对论形式。
- ❖ 在强耦合区域，相对论修正效应将起决定性作用，此时必须考虑完整的相对论动力学。

感谢会务组的精心组织，同时感谢留学基金委的资助！

请各位老师批评指正！

Back up

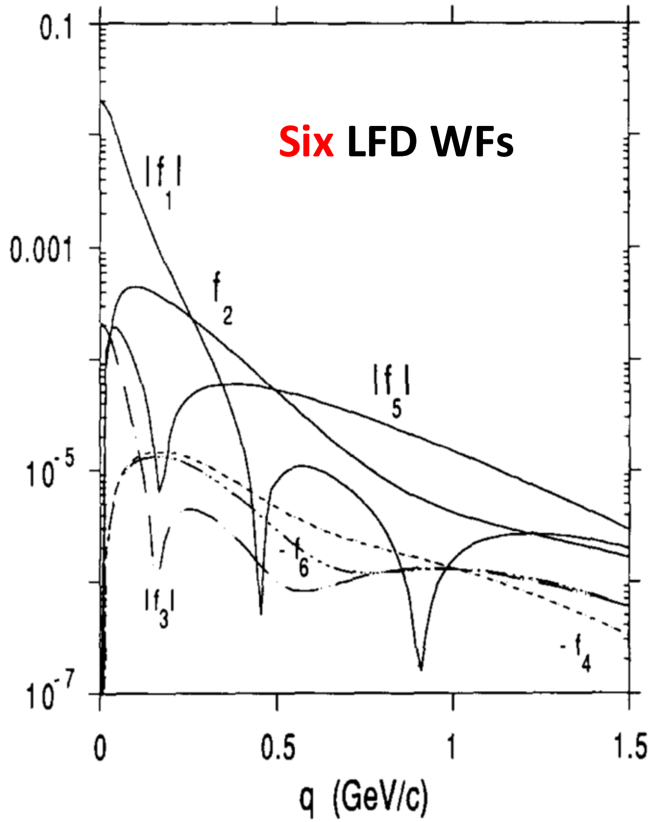
相对论氘核系统($J^P I = 1^+0$)：

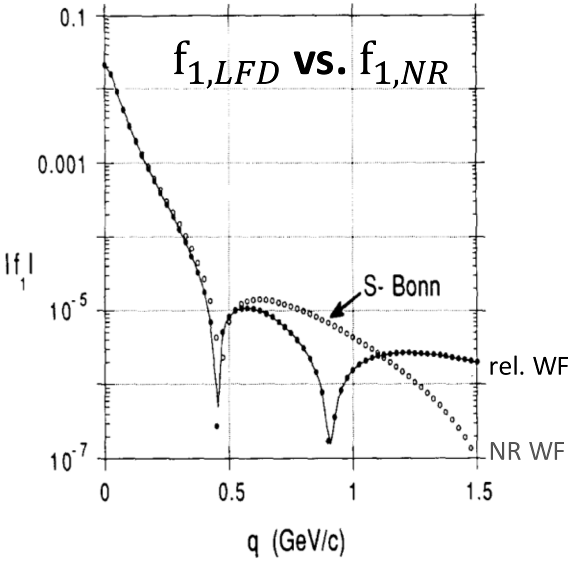
J. Carbonell, V.A. Karmanov, Nuclear Physics A 581 (1994) 625-653

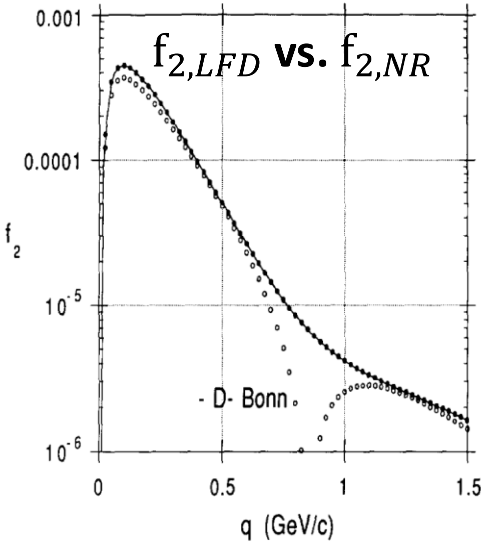
氘核LFD WF *vs.* NR WF

- ❑ 非相对论氘核波函数：仅有两个组分 S-wave和D-wave
- ❑ 相对论氘核波函数：包含六个组分

$$6 = 2_{\text{spin}} \times 2_{\text{N spin}} \times 3_{\text{D spin}} / 2_{\text{P-parity}}$$







相对论效应的具体表现

- ❖ 主导成分：即使在LFD框架下，S波分量f1仍然占据主导地位。
- ❖ 低动量区域：在小动量转移区域($q \ll m$)，相对论波函数与非相对论解一致。
- ❖ 高动量特征：当$q > 500$MeV/c时，f5分量开始显现其重要性。
- ❖ 实验预测：相对论波函数能为电磁形状因子(EMFF)等观测提供更精确的预测。

S.J. Brodsky, J.R. Hiller, D.S. Hwang, V.A. Karmanov, Phys. Rev. D69 (2004) 076001

Back up

Orthogonal spin basis S_i

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \left(2x_3 - (m + x_3 M)\frac{\hat{\omega}}{\omega\cdot p}\right), \\
s_2 &= \frac{m}{\omega\cdot p}\hat{\omega}, \\
s_3 &= i\left(2x_3 - (m - x_3 M)\frac{\hat{\omega}}{\omega\cdot p}\right)\gamma_5, \\
s_4 &= \frac{im}{\omega\cdot p}\hat{\omega}\gamma_5.
\end{aligned}
$$

$$
\hat{\omega} = \omega_\mu \gamma^\mu,\ x_3 = \frac{\omega\cdot k_3}{\omega\cdot p}.
$$

Define (nucleon No. 3 and ^{3}He):

$$
\begin{aligned}
S^j_{\sigma\sigma_3} &= N^S_j \bar{u}_\sigma(k_3) s_j u_{\sigma_3}(p), \\
\bar{S}^j_{\sigma\sigma_3} &= N^S_j \bar{u}_\sigma(p) \bar{s}_j u_{\sigma_3}(k_3), \quad \bar{s}_j = \gamma_0 s_j^\dagger \gamma_0.
\end{aligned}
$$

Back up

Orthogonal spin basis T_j

$$\begin{aligned} t_1 &= i\left(2\frac{x_1x_2}{x_1+x_2} - \frac{m\hat{\omega}}{\omega\cdot p}\right)\gamma_5, \\ t_2 &= i\frac{m\hat{\omega}}{\omega\cdot p}\gamma_5, \\ t_3 &= \left(2\frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)} + \frac{(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)}\frac{m\hat{\omega}}{\omega\cdot p}\right) \\ t_4 &= \frac{m\hat{\omega}}{\omega\cdot p}, \quad x_{1,2} = \frac{\omega\cdot k_{1,2}}{\omega\cdot p}. \end{aligned}$$

Define (nucleons No. 1 and 2):

$$\begin{aligned} T^i_{\sigma_1\sigma_2} &= N_i^T \bar{u}_{\sigma_1}(k_1) t_i U_c \bar{u}_{\sigma_2}(k_2), \quad U_c = \gamma_2\gamma_0, \\ \bar{T}^i_{\sigma_2\sigma_1} &= N_i^T \bar{u}_{\sigma_2}(k_2) t_i^\dagger U_c \bar{u}_{\sigma_1}(k_1). \end{aligned}$$

Orthogonality: $\sum_{\sigma_1\sigma_2} \bar{T}^i_{\sigma_2\sigma_1} T^{i'}_{\sigma_1\sigma_2} = \delta_{ii'}.$

Back up

Parameters of the exchanged mesons:

	J^π	T	μ (MeV)	$g^2/(4\pi)$ $[f/g]$	Λ (GeV)	n
π	0^-	1	138.03	14.6	1.3	1
η	0^-	0	548.8	5.0	1.5	1
δ	0^+	1	983	1.1075	2	1
σ_0	0^+		720	16.9822	2	1
σ_1	0^+		550	8.2797	2	1
ω	1^-	0	782.6	20.0 [0.0]	1.5	1
ρ	1^-	1	769	0.81 [6.1]	2	2

R. Machleidt, K. Holinde and Ch. Elster, Phys. Reports 149 (1987) 1

Back up

System of equations (Helium-3):

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}^2 - M^2) g^t_{12;ij}(1,2,3) \\
&= \sum_{i'j't'} \int \frac{\mathrm{d}^2 R'_{2\perp}\, \mathrm{d}x'_2}{(2\pi)^3 2x'_1 x'_2} g^{t'}_{12;i'j'}(1',2',3) W^{i'j't'}_{ijt}{}_{(12)}(1',1;2',2;3) \\
&+ \sum_{i'j't'} \int \frac{\mathrm{d}^2 R'_{2\perp}\, \mathrm{d}x'_2}{(2\pi)^3 2x'_1 x'_2} g^{t'}_{12;i'j'}(3,1',2') W^{i'j't'}_{ijt}{}_{(31)}(1',1;2',2;3) \\
&+ \sum_{i'j't'} \int \frac{\mathrm{d}^2 R'_{2\perp}\, \mathrm{d}x'_2}{(2\pi)^3 2x'_1 x'_2} g^{t'}_{12;i'j'}(2',3,1') W^{i'j't'}_{ijt}{}_{(23)}(1',1;2',2;3).
\end{aligned}
$$

Solving system of equations:

$$(\mathcal{M} - M^2) g^t_{12,ij} = \sum_{i'j't'} \int \frac{dx'_2 d^2 R'_{2\perp}}{(2\pi)^3 2x'_1 x'_2} W^{i'j'}_{ij}\, g^{t'}_{12,i'j'}(\mathrm{non-rel.})$$

We substitute the non-relativistic $g^{t'}_{12,i'j'}(\mathrm{non-rel.})$ (= take 1st iteration)

Back up

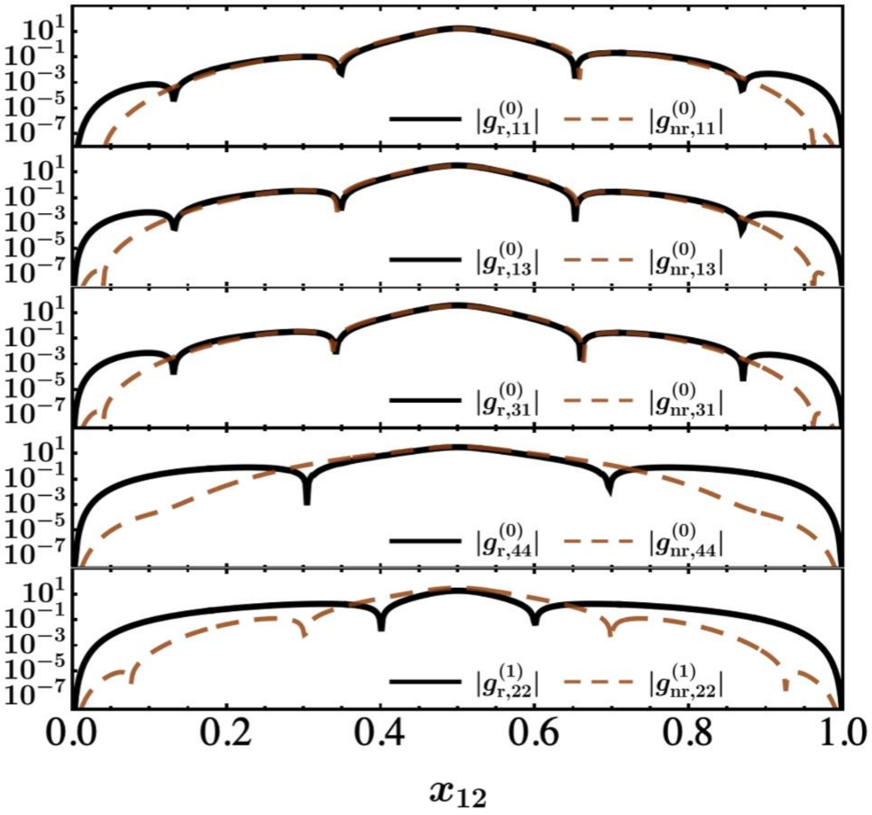
linear representation:

$$\sum_{n=1}^{16} M_{ij,n}\psi_n = g_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,4.$$

$$\begin{aligned} M_{ij,n} &= \frac{1}{2}V_{ij}^{\dagger}\chi_n \\ &= \frac{1}{2}c_n C_{ij}\sum_{\kappa}\mathbf{Tr}[O_n^{(A\kappa)}(\hat{k}_2 - m)\bar{T}_i(\hat{k}_1 + m)] \\ &\times \mathbf{Tr}[O_n^{(B\kappa)}(\hat{p} + M)\bar{S}_j(\hat{k}_3 + m)]. \end{aligned}$$

Helium-3: $g_{ij}(x_{12})$

Dominating components:



- $x_1 = x_{12}(1 - x_3)$
- $x_3 = 1/3$

- $\vec{k}_{1\perp} = (0, 0.05)$ [GeV/c]
- $\vec{k}_{2\perp} = (0.05, 0)$ [GeV/c]
- $\vec{k}_{3\perp} = -\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp}$

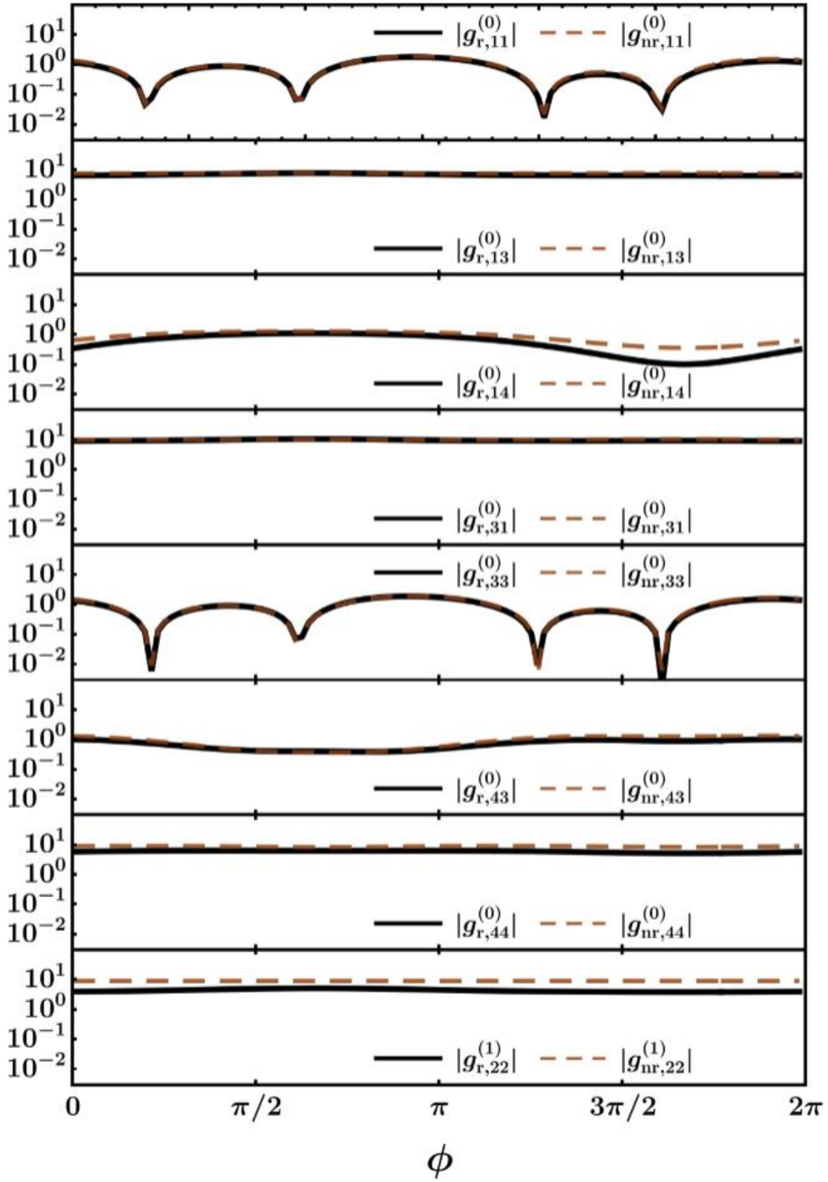
❖ In the $x_{12} \approx 1/2$ regime, the dominant relativistic components align closely with the non-relativistic ones.

❖ Deviations of the dominant components appear once x_{12} grows into the relativistic domain.

❖ Relativistic corrections lead to the deviation of the insignificant components.

Helium-3: $g_{ij}(\phi)$

Dominating components:



$$
\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= (q_{1x}, q_{1y}, q_{1z}) \\
&= (-q_{2x} - q_{3x}, -q_{2y} - q_{3y}, -q_{2z} - q_{3z}), \\
\vec{q}_2 &= (q_{2x}, q_{2y}, q_{2z}) \\
&= (q_2 \sin\theta_2 \cos\phi_2, q_2 \sin\theta_2 \sin\phi_2, q_2 \cos\theta_2), \\
\vec{q}_3 &= (q_{3x}, q_{3y}, q_{3z}) \\
&= (q_3 \sin\theta_3 \cos\phi_3, q_3 \sin\theta_3 \sin\phi_3, q_3 \cos\theta_3), \\
\vec{n} &= (n_x, n_y, n_z) \\
&= (\sin\theta_n \cos\phi, \sin\theta_n \sin\phi, \cos\theta_n).
\end{aligned}
$$

- $\vec{k}_{i\perp} = \vec{q}_i - (\vec{n} \cdot \vec{q}_i)\vec{n}$
- $x_i = \frac{\varepsilon_{q_i} - \vec{n} \cdot \vec{q}_i}{\varepsilon_{q_1} + \varepsilon_{q_2} + \varepsilon_{q_3}}$
- $\theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}, \phi_2 = 0, \phi_3 = \frac{2\pi}{3}, \phi_n = \frac{\pi}{6}$
- $q = 0.1 \ \ [\mathrm{GeV/c}]$ non-relativistic regime

❖ In the non-relativistic regime, the angle-dependence of the dominant relativistic components closely resemble those of the non-relativistic ones.