Majorana 旋量场专题

第一节　Majorana 旋量场基础

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

B 站账号：行星状星云

第二届江门中微子暑期学校

中国科学院大学杭州高等研究院

2025 年 8 月 17 日至 24 日

旋量表示

Dirac 矩阵是一组满足如下反对易关系的 4×4 矩阵 γ^μ $(\mu=0,1,2,3)$：

$$\boxed{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\equiv\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}=2g^{\mu\nu}}$$

最后一步省略了 4×4 单位矩阵 $\mathbf{1}$，而 $g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$ 是度规的逆

这些 Dirac 矩阵满足

$$\gamma^\mu\gamma^\nu=2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu;\quad \gamma^\mu\gamma^\nu=-\gamma^\nu\gamma^\mu\ (\mu\neq\nu)$$
$$(\gamma^0)^2=\mathbf{1},\quad (\gamma^i)^2=-\mathbf{1},\quad (\gamma^0)^\dagger=\gamma^0,\quad (\gamma^i)^\dagger=-\gamma^i$$

以 Dirac 矩阵的对易子定义一组 4×4 矩阵 $\boxed{\mathcal{S}^{\mu\nu}\equiv\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}$，则它们满足

Lorentz 代数关系 $[\mathcal{S}^{\mu\nu},\mathcal{S}^{\rho\sigma}]=\mathrm{i}(g^{\nu\rho}\mathcal{S}^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}\mathcal{S}^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}\mathcal{S}^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}\mathcal{S}^{\nu\rho})$

因而 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 必定是 Lorentz 群某个表示的生成元矩阵

以 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 生成的表示称为旋量表示，它是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的一个投影表示，也是相应覆盖群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的一个线性表示

旋量表示中的固有保时向 Lorentz 变换

♌ 一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 在 **Lorentz 群**的矢量表示中生成固有保时向的有限变换

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right), \quad (\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta})$$

🏫 这组参数在旋量表示中生成固有保时向的有限变换

$$\boxed{D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)}$$

🏨 从而推出 $\boxed{D^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}D(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}}$，将此式看作旋量表示中 **Dirac 矩阵** γ^{μ} 的固有保时向 **Lorentz 变换规则**，那么 γ^{μ} 是一个 **Lorentz 矢量**

♐ 进一步引入 4×4 **矩阵** $\boxed{\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}$，它满足

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}, \quad (\gamma^5)^{\dagger} = \gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^{\mu}\} = 0$$

旋量表示的基底

在**固有保时向 Lorentz 变换** $D(\Lambda)$ 的作用下，有

$$D^{-1}(\Lambda)\,\mathbf{1}\,D(\Lambda) = \mathbf{1}, \qquad D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) = \gamma^5$$

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \qquad D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

$$D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu} D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}, \qquad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\mathcal{S}^{\mu\nu}$$

矢量表示中的**宇称变换矩阵**是 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$

旋量空间中相应的**宇称变换矩阵**可定义为 $\boxed{D(\mathcal{P}) = \gamma^0}$，从而

$$D^{-1}(\mathcal{P})\,\mathbf{1}\,D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}, \qquad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^5,$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \qquad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta}$$

可见，集合 $\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ 是由**标量 1**、**赝标量** γ^5、**极矢量** γ^μ、**轴矢量** $\gamma^\mu\gamma^5$ 和 **2 阶反对称张量** $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的，这些矩阵的变换性质**各不相同**

总共有 **16 个线性独立的矩阵**，可作为**基底**展开旋量空间中**任意**一个 4×4 矩阵

Dirac 旋量场

- 在 **Lorentz 群旋量表示空间**中，被**变换矩阵** $D(\Lambda)$ 作用的列矢量称为 **Dirac 旋量**
- 由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 **矩阵**，**Dirac 旋量** ψ_a 应当具有 **4 个分量** $(a=1,2,3,4)$
- 相应的**固有保时向 Lorentz 变换**为 $\boxed{\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b}$
- 隐去旋量指标 a 和 b，上式简化为 $\psi' = D(\Lambda)\psi$
- 如果 ψ_a 依赖于**时空坐标** x^μ，它就成为 **Dirac 旋量场** $\psi_a(x)$
- 设**固有保时向 Lorentz 变换** Λ 在 **Hilbert 空间**中诱导出来的**线性幺正变换**为 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda)\,|\Psi\rangle$，则**矢量场算符** $A^\mu(x)$ 的 Lorentz 变换是

$$A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

- 类比于上式，**Dirac 旋量场算符** $\psi_a(x)$ 的 **Lorentz 变换**形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$$

与 Lorentz 变换相关的线性空间

线性空间名称	矢量表示空间	旋量表示空间
维度	4 维	4 维
空间中元素	Lorentz 矢量 A^μ	Dirac 旋量 ψ_a
Lorentz 群生成元	$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta)$	$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
固有保时向 Lorentz 变换	$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right)$	$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)$

线性空间名称	Hilbert 空间	场空间
维度	无限维	无限维
空间中元素	态矢 $\vert\Psi\rangle$	场 $\phi(x)$、$A^\mu(x)$、$\psi_a(x)$
Lorentz 群生成元	算符 $J^{\mu\nu}$	$\hat{L}^{\mu\nu} = \mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$
固有保时向 Lorentz 变换	$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)$	$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\hat{L}^{\mu\nu}\right)$

Weyl 表象

利用 Pauli 矩阵 $\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

以 $\mathbf{1}$ 表示 2×2 单位矩阵，将 Dirac 矩阵表示成 2×2 分块形式：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$$

Dirac 矩阵有多种表示方式，以上表示方式称为 Weyl 表象，也称为手征表象

用单位矩阵 $\mathbf{1}$ 和 Pauli 矩阵定义 $\boxed{\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})}$ 和 $\boxed{\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})}$，从而

$$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}}$$

生成元矩阵表达为 $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \dfrac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \dfrac{\mathrm{i}}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

自旋角动量

旋量表示中的**自旋角动量矩阵**为

$$\mathcal{S}^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{S}^{jk} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}$$

即 $\mathcal{S}^i$ 是两个 **SU(2) 群基础表示生成元** $\tau^i = \dfrac{\sigma^i}{2}$ 的**直和**

因此 $\mathcal{S}^i$ 所属 **SU(2) 群线性表示**是两个 **SU(2) 基础表示**的**直和**

用自旋角动量矩阵构造的**二阶 Casimir 算符**为

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^2 = \mathcal{S}^i\mathcal{S}^i = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^i & \\ & \sigma^i\sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\mathbf{1}_{4\times 4} = s(s+1)\mathbf{1}_{4\times 4}$$

可见，**Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的**自旋量子数**是 $\boxed{s = \frac{1}{2}}$

量子化之后，$\psi(x)$ 描述**自旋为 $\frac{1}{2}$** 的粒子

Dirac 共轭和旋量双线性型

- 定义 $\psi(x)$ 的 **Dirac 共轭** $\boxed{\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0}$

- 由于 $D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda)$，$\bar{\psi}(x)$ 的 **Lorentz 变换**为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)$$

- 这样一来，$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 **Lorentz 标量**：

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

- 像 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 这样同时包含 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的量称为**旋量双线性型** (spinor bilinear)

- 利用 $\bar{\psi}(x)$ 还能构造 **Lorentz 协变**的其它旋量双线性型：
  - $\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)$ 是 **Lorentz 赝标量**
  - $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 是 **Lorentz 极矢量**，$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 是 **Lorentz 轴矢量**
  - $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是 **2 阶反对称 Lorentz 张量**

Dirac 方程

- 此外，包含**时空导数**的**旋量双线性型** $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 **Lorentz 标量**，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x)$$
$$= \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$$

- 利用 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\psi$ 写下**自由 Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 的 **Lorentz 不变拉氏量**

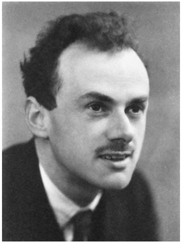
$$\boxed{\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi}$$

- 其中 $m > 0$ 是 Dirac 旋量场的**质量**
- 根据 **Euler-Lagrange 方程**推出 $\psi(x)$ 的经典运动方程

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

- 上式就是 **Dirac 方程**，标明**旋量指标**的形式为

$$[\mathrm{i}(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0$$



Paul Dirac
(1902–1984)

Weyl 旋量

❤️ 在 **Weyl 表象**中，**旋量表示生成元矩阵** $\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$

是**分块对角**的，因而可将旋量表示分解为**两个 2 维表示**的**直和**

🌊 把**四分量 Dirac 旋量场** ψ 分解为两个**二分量旋量场** η_{L} 和 η_{R}：$\psi = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$

🦞 这样的二分量旋量称为 **Weyl 旋量**

🐠 η_{L} 称为**左手** (left-handed) **Weyl 旋量**，η_{R} 称为**右手** (right-handed) **Weyl 旋量**

🐡 利用 $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}$ 将 **Dirac 方程**化为

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{R}} - m\eta_{\mathrm{L}} \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{L}} - m\eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

🦈 即得两个相互**耦合**的方程 $\begin{cases} \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{L}} - m\eta_{\mathrm{R}} = 0 \\ \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_{\mathrm{R}} - m\eta_{\mathrm{L}} = 0 \end{cases}$

Weyl 方程

💛 如果 $m=0$，两个方程就各自**独立**了：

$$\mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_\mathrm{L}=0,\quad \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_\mathrm{R}=0$$

🏝 这两个独立方程称为 **Weyl 方程**

🌴 可见，**非零质量** m 的存在将**左手**和**右手 Weyl 旋量场**耦合起来

🩴 **自旋角动量矩阵**的**直和分解** $\mathcal{S}^i=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}$ 表明

⛱ **左手**和**右手 Weyl 旋量**各对应于一个 **SU(2) 群基础表示**

🏖 当 $m=0$ 时，量子化之后的 $\eta_\mathrm{L}(x)$ 和 $\eta_\mathrm{R}(x)$ 各自描述**自旋为 $\frac{1}{2}$** 的粒子

Hermann Weyl
(1885–1955)

平面波展开式

在 **Weyl 表象**中，满足 Dirac 方程 $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ 的 **Dirac 旋量场平面波展开式**可以表达为

$$\boxed{\psi(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]}$$

- $\mathbf{p}$ 是动量，$E_\mathbf{p} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$ 是相应的能量，$\lambda = \pm$ 是**归一化**的螺旋度 (helicity)
- $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 是**湮灭算符**，$b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 是**产生算符**，而且 $a_{\mathbf{p},\lambda} \neq b_{\mathbf{p},\lambda}$
- 平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 取为

$$u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix},\quad v(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}$$

- 其中 $\omega_\lambda(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}$，**二分量螺旋态** $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 满足 $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda\,\xi_\lambda(\mathbf{p})$
- 从而，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 分别是本征值为 λ 和 $-\lambda$ 的**螺旋度本征态**
- 于是，可以用 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 分别产生**螺旋度**为 λ 的 **Dirac 正费米子**和**反费米子**

Jordan-Wigner 量子化

为得到正定的哈密顿量算符，需采用等时反对易关系进行 Jordan-Wigner 量子化：

$$\{\psi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)\}=\mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad \{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=\{\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)\}=0$$

相应的产生湮灭算符反对易关系为

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=0$$
$$\{b_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad \{b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=0$$
$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{b_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=0$$

自由拉氏量 $\mathcal{L}=\mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\bar\psi\psi$ 在 $\mathrm{U}(1)$ 整体变换 $\psi'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x)$ 的作用下保持不变，即理论具有 $\mathrm{U}(1)$ 整体对称性，其中 q 是 Dirac 旋量场携带的 $\mathrm{U}(1)$ 荷

由 Noether 定理给出的 $\mathrm{U}(1)$ 守恒流算符是 $J^\mu=q\bar\psi\gamma^\mu\psi$，满足 $\partial_\mu J^\mu=0$

正费米子态（$\mathrm{U}(1)$ 荷为 $+q$）和反费米子态（$\mathrm{U}(1)$ 荷为 $-q$）分别定义为

$$|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle\equiv\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle,\quad |\mathbf{p}^-,\lambda\rangle\equiv\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$$

手征性

🔧 下面探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

📒 在 **Weyl 表象**中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_{L} 和**右手投影矩阵** P_{R}，

$$\boxed{P_{\mathrm{L}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathrm{R}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}}$$

📝 它们是**厄米**的，而且具有**投影性** $P_{\mathrm{L}}^2 = P_{\mathrm{L}}$，$P_{\mathrm{R}}^2 = P_{\mathrm{R}}$，**正交性** $P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}} = \mathbf{0}$ 和**完备性** $P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{R}} = \mathbf{1}$，由 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 得 $P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{R}}$，$P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{\mathrm{L}}$

手征性

下面探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的**螺旋度**之间的关系

在 **Weyl 表象**中利用 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ 引入**左手投影矩阵** P_L 和**右手投影矩阵** P_R，

$$P_\mathrm{L} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_\mathrm{R} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

它们是**厄米**的，而且具有**投影性** $P_\mathrm{L}^2 = P_\mathrm{L}$，$P_\mathrm{R}^2 = P_\mathrm{R}$，**正交性** $P_\mathrm{L}P_\mathrm{R} = P_\mathrm{R}P_\mathrm{L} = \mathbf{0}$ 和**完备性** $P_\mathrm{L} + P_\mathrm{R} = \mathbf{1}$，由 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ 得 $P_\mathrm{L}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_\mathrm{R}$，$P_\mathrm{R}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_\mathrm{L}$

将 **Dirac 旋量场** ψ 分解为**左手 Weyl 旋量场** η_L 和**右手 Weyl 旋量场** η_R

左手的四分量**旋量场**定义为
$$\psi_\mathrm{L} \equiv P_\mathrm{L}\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_\mathrm{L} \\ \eta_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\mathrm{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

右手的四分量**旋量场**定义为
$$\psi_\mathrm{R} \equiv P_\mathrm{R}\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_\mathrm{L} \\ \eta_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_\mathrm{R} \end{pmatrix}$$

我们称**左手旋量场**和**右手旋量场**具有**相反**的**手征性**，而**左右手投影矩阵**正好挑选出具有**相应手征性**的 Weyl 旋量场分量

左右手投影分解

- 将 $1 \pm \gamma^5$ 的**简化**地写成 $1 \pm \gamma^5$，**左手**旋量场 ψ_L 的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_\mathrm{L} = (\psi_\mathrm{L})^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2}[(1-\gamma^5)\psi]^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger(1-\gamma^5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger\gamma^0(1+\gamma^5) = \bar{\psi}P_\mathrm{R}$$

- 同理得**右手**旋量场 ψ_R 的 Dirac 共轭为 $\bar{\psi}_\mathrm{R} = \bar{\psi}P_\mathrm{L}$

左右手投影分解

- 将 $1\pm\gamma^5$ 的**简化**地写成 $1\pm\gamma^5$，**左手**旋量场 ψ_{L} 的 Dirac 共轭为

$$\bar\psi_{\mathrm{L}}=(\psi_{\mathrm{L}})^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}[(1-\gamma^5)\psi]^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger(1-\gamma^5)\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger\gamma^0(1+\gamma^5)=\bar\psi P_{\mathrm{R}}$$

- 同理得**右手**旋量场 ψ_{R} 的 Dirac 共轭为 $\bar\psi_{\mathrm{R}}=\bar\psi P_{\mathrm{L}}$
- 对包含若干个 Dirac 矩阵的**旋量场双线性型**进行**左右手投影分解**，得

$$\begin{aligned}
\bar\psi\psi &= \bar\psi(P_{\mathrm{L}}+P_{\mathrm{R}})\psi=\bar\psi(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}\\
\bar\psi\gamma^\mu\psi &= \bar\psi\gamma^\mu(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}\psi+\bar\psi P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu P_{\mathrm{R}}\psi=\bar\psi_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}\\
\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\psi &= \bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\mathrm{R}}\\
\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi &= \bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\mathrm{R}}
\end{aligned}$$

包含**偶数**（**奇数**）个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型**耦合**手征性**相反**（**相同**）的旋量场

- 拉氏量中的 Dirac 旋量场**质量项**分解为 $-m\bar\psi\psi=-m(\bar\psi_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}})$
- 把上式看作**微扰**，那么 **质量** m 将**左手旋量场** ψ_{L} 与**右手旋量场** ψ_{R} **耦合**起来

高能极限

- 在**高能极限**下，**忽略**旋量场的**质量** m，则 $E_{\mathbf{p}} \simeq |\mathbf{p}|$
- 故 $\omega_+(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + |\mathbf{p}|} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$，$\omega_-(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} - |\mathbf{p}|} \simeq 0$
- 按照 5.4.2 小节中平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式，有

$$u(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} \xi_-(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix} -\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

- 此时，**螺旋度不同**的 u 和 v 显示出**不同手征性**
- $u(\mathbf{p},+)$ 和 $v(\mathbf{p},-)$ 是**右手**的，$u(\mathbf{p},-)$ 和 $v(\mathbf{p},+)$ 是**左手**的
- 可见，高能极限下**手征性等价于螺旋度**
- 注意，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态，与**螺旋度为 λ 的正费米子**相关
- $v(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与**螺旋度为 λ 的反费米子**相关

旋量系数的左右手投影

- 由于高能极限下 $u(\mathbf{p},-)$ 和 $v(\mathbf{p},+)$ 是左手的，$u(\mathbf{p},+)$ 和 $v(\mathbf{p},-)$ 是右手的
- 用投影矩阵作用，得

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-) \simeq u(\mathbf{p},-), & u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+) \simeq u(\mathbf{p},+)\\
u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},+) \simeq 0, & u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},-) \simeq 0\\
v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+) \simeq v(\mathbf{p},+), & v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-) \simeq v(\mathbf{p},-)\\
v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},-) \simeq 0, & v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},+) \simeq 0
\end{aligned}
$$

- 相应的 Dirac 共轭满足

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}} \simeq \bar{u}(\mathbf{p},-), & \bar{u}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}} \simeq \bar{u}(\mathbf{p},+)\\
\bar{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq 0, & \bar{u}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq 0\\
\bar{v}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) &= \bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq \bar{v}(\mathbf{p},+), & \bar{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) &= \bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq \bar{v}(\mathbf{p},-)\\
\bar{v}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) &= \bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}} \simeq 0, & \bar{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) &= \bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}} \simeq 0
\end{aligned}
$$

高能极限下的手征旋量场

将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 上，得到高能极限下手征旋量场的平面波展开式

$$\psi_{\mathrm{L}}(x) = P_{\mathrm{L}}\psi(x) \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[u(\mathbf{p},-)a_{\mathbf{p},-}e^{-ip\cdot x} + v(\mathbf{p},+)b^\dagger_{\mathbf{p},+}e^{ip\cdot x}\right]$$

$$\psi_{\mathrm{R}}(x) = P_{\mathrm{R}}\psi(x) \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[u(\mathbf{p},+)a_{\mathbf{p},+}e^{-ip\cdot x} + v(\mathbf{p},-)b^\dagger_{\mathbf{p},-}e^{ip\cdot x}\right]$$

相应的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x) = [\psi_{\mathrm{L}}(x)]^\dagger\gamma^0 \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[\bar{u}(\mathbf{p},-)a^\dagger_{\mathbf{p},-}e^{ip\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},+)b_{\mathbf{p},+}e^{-ip\cdot x}\right]$$

$$\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x) = [\psi_{\mathrm{R}}(x)]^\dagger\gamma^0 \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[\bar{u}(\mathbf{p},+)a^\dagger_{\mathbf{p},+}e^{ip\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},-)b_{\mathbf{p},-}e^{-ip\cdot x}\right]$$

在高能极限下，忽略质量，那么，

- 左手旋量场 $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 描述左旋极化的正费米子和右旋极化的反费米子
- 右手旋量场 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 描述右旋极化的正费米子和左旋极化的反费米子
- $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 成为两个相互独立的场

标准模型中的中微子

作为对高能极限的微扰，质量项 $-m(\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}} + \bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}})$ 耦合着左旋极化 $(\lambda = -)$ 与右旋极化 $(\lambda = +)$ 的正费米子，也耦合着左旋极化与右旋极化的反费米子

因此，可以利用质量来翻转螺旋度

在标准模型中，每一种无质量中微子由一个左手旋量场

$$\psi_{\mathrm{L}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[u(\mathbf{p}, -) a_{\mathbf{p},-} e^{-ip\cdot x} + v(\mathbf{p}, +) b^\dagger_{\mathbf{p},+} e^{ip\cdot x} \right]$$

描述

相应地，以 $a^\dagger_{\mathbf{p},-}$ 算符产生的粒子是左旋正中微子，以 $b^\dagger_{\mathbf{p},+}$ 算符产生的粒子是右旋反中微子，它们互为正反粒子

标准模型中**没有**由右手旋量场描述的中微子

旋量系数的左右手投影

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q},-)u(\mathbf{p},-) &\simeq \bar{u}(\mathbf{q},-)P_\mathrm{R}P_\mathrm{L}u(\mathbf{p},-)=0\\
\bar{u}(\mathbf{q},+)u(\mathbf{p},+) &\simeq \bar{u}(\mathbf{q},+)P_\mathrm{L}P_\mathrm{R}u(\mathbf{p},+)=0\\
\bar{v}(\mathbf{q},-)v(\mathbf{p},-) &\simeq \bar{v}(\mathbf{q},-)P_\mathrm{L}P_\mathrm{R}v(\mathbf{p},-)=0\\
\bar{v}(\mathbf{q},+)v(\mathbf{p},+) &\simeq \bar{v}(\mathbf{q},+)P_\mathrm{R}P_\mathrm{L}v(\mathbf{p},+)=0
\end{aligned}$$

此时两个旋量系数之间夹着**零**个 Dirac 矩阵，**不能耦合相同螺旋度**，只能耦合**相反**螺旋度，这是左右手投影分解式 $\bar{\psi}\psi=\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}+\bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$ 在旋量系数上的体现

一般地，有

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, &\quad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0\\
\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, &\quad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0\\
\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, &\quad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0\\
\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu v(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0, &\quad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\lambda)\simeq 0
\end{aligned}$$

C 变换

- 除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

- 电荷共轭变换**将正反粒子互相转换**，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反 $\mathrm{U}(1)$ 荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度**没有影响**

C 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)

电荷共轭变换**将正反粒子互相转换**，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反 U(1) 荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度**没有影响**

1. 在具有**电荷共轭对称性**的**量子理论**中，电荷共轭变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的**线性幺正变换**

$$\boxed{|\Psi'\rangle = C\,|\Psi\rangle}$$

2. 这个变换称为 ***C* 变换**

3. C 是**自身的逆变换算符**，满足

$$C^\dagger = C^{-1} = C$$

因而 C 算符是**厄米**的

Dirac 旋量场的 C 变换

现在讨论自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换

C 变换在互换正反粒子的同时，不改变动量 $\mathbf{p}$ 和螺旋度 $\lambda=\pm$，因此将正费米子态 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle$ 转化成反费米子态 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle$，

$$C\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle=\zeta_C\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$$

其中 ζ_C 是复的相位因子，满足 $|\zeta_C|=1$

出现 ζ_C 的原因是相差一个相位因子的归一化态矢描述相同的物理。由此推出

$$C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C^* b_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C^* a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C a_{\mathbf{p},\lambda}$$

$\psi(x)$ 平面波展开式的 C 变换为

$$\begin{aligned}C^{-1}\psi(x)C &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[u(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}Ce^{-ip\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}Ce^{ip\cdot x}\right]\\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta_C^*\,u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+\zeta_C^*\,v(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]\end{aligned}$$

螺旋态关系式

- 为了得到 $\psi(x)$ 的**电荷共轭场**，需要探讨 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 之间**相互转换**的关系
- 在 **Weyl 表象**中，对 $\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$ 进行**转置**，得

$$\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}^{*}(\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}^{*}(\mathbf{p})\end{pmatrix},\quad \bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^{*}(\mathbf{p})\\ \lambda\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^{*}(\mathbf{p})\end{pmatrix}$$

- 将**螺旋态** $\xi_{\lambda}(\mathbf{p})$ 的具体形式取为

$$\xi_{+}(\mathbf{p})=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix},\quad \xi_{-}(\mathbf{p})=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}-p^1+\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}$$

- $\mathrm{i}\sigma^2=\begin{pmatrix} & 1\\ -1 & \end{pmatrix}$ 对 $\xi_{\lambda}^{*}(\mathbf{p})$ 的作用为 $\mathrm{i}\sigma^2\xi_{+}^{*}(\mathbf{p})=-\xi_{-}(\mathbf{p})$ 和 $\mathrm{i}\sigma^2\xi_{-}^{*}(\mathbf{p})=+\xi_{+}(\mathbf{p})$
- 归纳得到

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi_{\lambda}^{*}(\mathbf{p})=-\lambda\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}),\quad \mathrm{i}\sigma^2\xi_{-\lambda}^{*}(\mathbf{p})=\lambda\xi_{\lambda}(\mathbf{p})$$

电荷共轭场

引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$\boxed{\mathcal{C} \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}}$$

就可以导出平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 之间的转换关系式：

$$\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p},\lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p},\lambda)$$

电荷共轭场

引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$\boxed{\mathcal{C} \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}}$$

就可以导出平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 之间的转换关系式：

$$\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} -\omega_\lambda(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p},\lambda)$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u(\mathbf{p},\lambda)$$

于是，$\psi(x)$ 的 C 变换化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda \left[\zeta_C^*\, u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \zeta_C^*\, v(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda \left[\zeta_C^*\, \mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \zeta_C^*\, \mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] = \zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x)$$

这里 $\boxed{\psi^{\mathrm{C}}(x) \equiv \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)}$ 便是 $\psi(x)$ 的**电荷共轭场**

电荷共轭矩阵的性质

现在研究**电荷共轭矩阵 $\mathcal{C}$** 的性质

利用 $(\sigma^2)^{\mathrm{T}} = -\sigma^2$、$\gamma^0$ 的厄米性、γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$，有

$$\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}} & \\ & \mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^{\dagger} = -\mathrm{i}(\gamma^2)^{\dagger}(\gamma^0)^{\dagger} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0 = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^{\dagger}\mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = \mathbf{1}$$

可见，$\mathcal{C}$ 是**幺正矩阵**，满足

$$\boxed{\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{\dagger} = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}}$$

电荷共轭矩阵的性质

现在研究**电荷共轭矩阵** $\mathcal{C}$ 的性质

利用 $(\sigma^2)^{\mathrm{T}} = -\sigma^2$、$\gamma^0$ 的厄米性、γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$，有

$$\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}} & \\ & \mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^{\dagger} = -\mathrm{i}(\gamma^2)^{\dagger}(\gamma^0)^{\dagger} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0 = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^{\dagger}\mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = \mathbf{1}$$

可见，$\mathcal{C}$ 是**幺正矩阵**，满足

$$\boxed{\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{\dagger} = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}}$$

Pauli 矩阵满足 $\sigma^2\sigma^1\sigma^2 = \mathrm{i}\sigma^2\sigma^3 = -\sigma^1 = -(\sigma^1)^{\mathrm{T}}$、$\sigma^2\sigma^2\sigma^2 = \sigma^2 = -(\sigma^2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\sigma^2\sigma^3\sigma^2 = \mathrm{i}\sigma^1\sigma^2 = -\sigma^3 = -(\sigma^3)^{\mathrm{T}}$，归纳得到 $\sigma^2\mathbf{1}\sigma^2 = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ 和 $\sigma^2\boldsymbol{\sigma}\sigma^2 = -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$，因此

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^{\mathrm{T}}, \quad \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 = (\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}$$

Dirac 矩阵的电荷共轭变换

利用 $\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = (\bar{\sigma}^\mu)^{\mathrm{T}}$ 和 $\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 = (\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}$ 推出

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} & \sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 \\ \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 & \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} & (\bar{\sigma}^\mu)^{\mathrm{T}} \\ (\sigma^\mu)^{\mathrm{T}} & \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sigma^2)^2 & \\ & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

即得 γ^μ 和 γ^5 关于 $\mathcal{C}$ 的**相似变换性质**

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}, \quad \mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C} = \gamma^5$$

由于 $\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$，这两个式子等价于

$$\boxed{\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad \mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \gamma^5}$$

$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的运动方程

如果 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 携带**电荷** Q，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

其中 A_μ 是**电磁场**。对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0，得

$$0 = \psi^\dagger[(\gamma^\mu)^\dagger(-\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\gamma^0 = \bar{\psi}[-\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

转置，推出 $[-(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = 0$

$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的运动方程

如果 **Dirac 旋量场** $\psi(x)$ 携带**电荷** Q，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0$$

其中 A_μ 是**电磁场**。对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0，得

$$0 = \psi^\dagger[(\gamma^\mu)^\dagger(-\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\gamma^0 = \bar{\psi}[-\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]$$

转置，推出 $[-(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = 0$

利用 $\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}$，将上式化为

$$0 = [\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m\,\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}]\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{-1}[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\,\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}$$

从而得到**电荷共轭场** $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的**运动方程**

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\psi^{\mathrm{C}} = 0$$

对比 $\psi(x)$ **的运动方程**，可以看出 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 确实携带**相反**的**电荷** $-Q$

$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 携带的 U(1) 荷

- 实际上，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 携带的**任何 U(1) 荷**都与 $\psi(x)$ **相反**
- 如果 $\psi(x)$ 携带某种 U(1) **荷** q，在相应 U(1) **整体变换**的作用下，有

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x)$$

- 那么，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的变换为

$$(\psi^{\mathrm{C}})' = (\psi')^{\mathrm{C}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi\right)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}(\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi})^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi)^{\dagger}\gamma^{0}]^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\psi^{\mathrm{C}}$$

- 可见，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 携带的相应 U(1) **荷**是 $-q$

$\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换

根据 $\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{\dagger} = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^{\mu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^{\mu}$

电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)$ 的 **Dirac 共轭**为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{\mathrm{C}} &= (\psi^{\mathrm{C}})^{\dagger}\gamma^{0} = (\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}})^{\dagger}\gamma^{0} = [(\gamma^{0})^{\mathrm{T}}(\bar{\psi}\mathcal{C}^{\mathrm{T}})^{\dagger}]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^{0})^{\mathrm{T}}(\psi^{\dagger}\gamma^{0}\mathcal{C}^{\dagger})^{\dagger}]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^{0})^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^{0}\psi]^{\mathrm{T}} \\ &= [\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^{0})^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^{0}\psi]^{\mathrm{T}} = -(\mathcal{C}\gamma^{0}\gamma^{0}\psi)^{\mathrm{T}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x) = \psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}}$$

$\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换

根据 $\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^\mu$

电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)$ 的 **Dirac 共轭**为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{\mathrm{C}} &= (\psi^{\mathrm{C}})^\dagger\gamma^0 = (\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}})^\dagger\gamma^0 = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}(\bar{\psi}\mathcal{C}^{\mathrm{T}})^\dagger]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}(\psi^\dagger\gamma^0\mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^0\psi]^{\mathrm{T}} \\ &= [\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^0\psi]^{\mathrm{T}} = -(\mathcal{C}\gamma^0\gamma^0\psi)^{\mathrm{T}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x) = \psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}}$$

于是 $C^{-1}\bar{\psi}C = C^\dagger\psi^\dagger C\gamma^0 = (C^{-1}\psi C)^\dagger\gamma^0 = (\zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}})^\dagger\gamma^0 = \zeta_C\bar{\psi}^{\mathrm{C}} = \zeta_C\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$

也就是说，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 及其 Dirac 共轭场 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换是

$$\boxed{C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x) = \zeta_C^*\,\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x) = \zeta_C\psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}}$$

仿照 $\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x) = \psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}$ 的推导，由 $\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = v(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = u(\mathbf{p},\lambda)$ 得

$$\bar{v}(\mathbf{p},\lambda) = u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}, \quad \bar{u}(\mathbf{p},\lambda) = v^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}$$

一般旋量双线性型的 C 变换

🐻 考虑**一般**旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$，其中 Γ 是**旋量空间**中的**任意** 4×4 **矩阵**，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = C^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\bar{\psi}\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi$$

📹 最后一步进行了**转置**，需要注意的是，**转置两个旋量场**会**交换**两者的位置，为了与**反对易关系**相匹配，必须引进一个额外的**负号**

一般旋量双线性型的 C 变换

考虑**一般**旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$，其中 Γ 是**旋量空间**中的**任意** 4×4 **矩阵**，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = C^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\bar{\psi}\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi$$

最后一步进行了**转置**，需要注意的是，**转置两个旋量场**会**交换**两者的位置，为了与**反对易关系**相匹配，必须引进一个额外的**负号**

从而，由 $\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\mathrm{C}}\psi(x)$$

其中 $\boxed{\Gamma^{\mathrm{C}} \equiv \mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}}$ 可视为矩阵 Γ 的**电荷共轭变换**

一般旋量双线性型的 C 变换

考虑**一般**旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$，其中 Γ 是**旋量空间**中的**任意** 4×4 **矩阵**，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = C^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\bar{\psi}\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi$$

最后一步进行了**转置**，需要注意的是，**转置两个旋量场**会**交换**两者的位置，为了与**反对易关系**相匹配，必须引进一个额外的**负号**

从而，由 $\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$ 得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\mathrm{C}}\psi(x)$$

其中 $\Gamma^{\mathrm{C}} \equiv \mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$ 可视为矩阵 Γ 的**电荷共轭变换**

根据 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^\mu$ 和 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \gamma^5$，有

$$\mathbf{1}^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\mathbf{1}, \qquad (\mathrm{i}\gamma^5)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\mathrm{i}\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\mathrm{i}\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \qquad (\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\gamma^\mu\gamma^5$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\gamma^\nu\gamma^\mu, \qquad (\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\sigma^{\mu\nu}$$

旋量双线性型的 C 变换

于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$
\begin{aligned}
C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C &= +\bar{\psi}(x)\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)C &= +\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C &= -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C &= +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C &= -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)
\end{aligned}
$$

旋量双线性型的 C 变换

- 于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$
\begin{aligned}
C^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)C &= +\bar{\psi}(x)\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)C &= +\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)C &= -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C &= +\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)\\
C^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C &= -\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)
\end{aligned}
$$

- 拉氏量中的**动能项算符** $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 在 C 变换下化为

$$
\begin{aligned}
C^{-1}\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi C &= \mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}\partial_\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}\partial_\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}}\\
&= -\mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = -\mathrm{i}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned}
$$

- 最后的表达式中第一项是**全散度**，全时空积分后对作用量没有贡献，可以**丢弃**
- 因而上式表明动能项算符在 C 变换下**不变**
- 自由 Dirac 旋量场的**拉氏量** $\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ 具有**电荷共轭不变性**

手征旋量场算符的 C 变换

🦊 由

$$\mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{L/R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mp (\gamma^5)^{\mathrm{T}}]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \mp \gamma^5) = +P_{\mathrm{L/R}}$$

$$\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu P_{\mathrm{L/R}})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}} \mp (\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{T}}]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(-\gamma^\mu \mp \gamma^\mu\gamma^5) = -\gamma^\mu P_{\mathrm{R/L}}$$

可知，**手征旋量场** $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 构造的算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\psi$ 和 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{R}}\psi$ 在 C 变换下**不变**，满足

$$C^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)C = +\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)$$

$$C^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)C = +\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)$$

手征旋量场算符的 C 变换

由
$$\mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{L/R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \mp (\gamma^5)^{\mathrm{T}}]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \mp \gamma^5) = +P_{\mathrm{L/R}}$$
$$\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu P_{\mathrm{L/R}})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}[(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}} \mp (\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{T}}]\mathcal{C} = \frac{1}{2}(-\gamma^\mu \mp \gamma^\mu\gamma^5) = -\gamma^\mu P_{\mathrm{R/L}}$$

可知，手征旋量场 $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$ 构造的算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\psi$ 和 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{R}}\psi$ 在 C 变换下不变，满足
$$C^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)C = +\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)$$
$$C^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)C = +\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)$$

左手流算符 $\boxed{\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}\psi}$ 和右手流算符 $\boxed{\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}} = \bar{\psi}\gamma^\mu P_{\mathrm{R}}\psi}$ 的 C 变换为
$$C^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}(x)C = -\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}(x)$$
$$C^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}(x)C = -\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}(x)$$

两者在 C 变换下相互转化，并出现一个负号

在弱相互作用中，轻子和夸克的左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而电荷共轭对称性遭到破坏

$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的固有保时向 Lorentz 变换

🐻 旋量表示生成元 $\mathcal{S}^{\mu\nu}=\dfrac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$ 满足 $\mathcal{C}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}=\dfrac{1}{2}\mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C}=-\mathcal{S}^{\mu\nu}$

🔵 对于旋量表示中的 Lorentz 逆变换矩阵 $D^{-1}(\Lambda)=\exp(\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}/2)$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[D^{-1}(\Lambda)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C}\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{C}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\right]\mathcal{C}^{-1}\\ &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{C}(\mathcal{S}^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\right]=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)=D(\Lambda)\end{aligned}$$

🖱 在固有保时向 Lorentz 变换下，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 变换为 $\psi'(x')=D(\Lambda)\psi(x)$

⌨ 相应的电荷共轭场变换为

$$\begin{aligned}\psi^{\mathrm{C}\prime}(x') &= \mathcal{C}[\overline{\psi'}(x')]^{\mathrm{T}}=\mathcal{C}\{[D(\Lambda)\psi(x)]^{\dagger}\gamma^0\}^{\mathrm{T}}=\mathcal{C}[\psi^{\dagger}(x)D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0]^{\mathrm{T}}\\ &= \mathcal{C}[\bar{\psi}(x)\gamma^0D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0]^{\mathrm{T}}=\mathcal{C}[\gamma^0D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0]^{\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)=\mathcal{C}[\gamma^0\gamma^0D^{-1}(\Lambda)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\\ &= \mathcal{C}[D^{-1}(\Lambda)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\psi^{\mathrm{C}}(x)=D(\Lambda)\psi^{\mathrm{C}}(x)\end{aligned}$$

📠 可见，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 与 $\psi(x)$ 的变换形式相同，因而它也是一个 Dirac 旋量场

Majorana 旋量场

🐼 如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同，$\psi(x) = \psi^{\mathrm{C}}(x)$，即满足**自共轭条件**

$$\boxed{\psi(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)}$$

🍲 那么，$\psi(x)$ 就是一种**纯中性**的场，**不能携带**任何 $\mathrm{U}(1)$ 荷，称为 **Majorana 旋量场**，上式称为 **Majorana 条件**

🥚 于是，Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)$

Ettore Majorana
(1906–?)

Majorana 旋量场

Ettore Majorana
(1906–?)

🐼 如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同，$\psi(x)=\psi^{\mathrm{C}}(x)$，即满足**自共轭条件**

$$\boxed{\psi(x)=\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)}$$

🫕 那么，$\psi(x)$ 就是一种**纯中性**的场，**不能携带**任何 $\mathrm{U}(1)$ 荷，称为 **Majorana 旋量场**，上式称为 **Majorana 条件**

🥚 于是，Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)$

🍳 根据 $\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)=\psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}$，Majorana 条件等价于 $\bar{\psi}(x)=\psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}$

🥘 这里没出现 $\psi^{\dagger}(x)$，而出现 $\psi^{\mathrm{T}}(x)$，表明 $\bar{\psi}_a(x)=\psi_b(x)\,\mathcal{C}_{ba}$ 与 $\psi_a(x)$ **线性相关**

🥗 因此，$\bar{\psi}_a(x)$ **并不是独立**于 $\psi_a(x)$ 的场变量，这一点与 Dirac 旋量场**不同**

🍱 根据前面的讨论，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的平面波展开式为

$$\psi^{\mathrm{C}}(x)=\zeta_C C^{-1}\psi(x)C=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]$$

Majorana 费米子

- 将上式与 $\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]$ 比较
- 可知 **Majorana 条件** $\psi(x)=\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 意味着 $b_{\mathbf{p},\lambda}=a_{\mathbf{p},\lambda}$
- 因此，**Majorana 旋量场** $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\boxed{\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]}$$

- **产生湮灭算符**满足**反对易关系**

$$\boxed{\{a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=0}$$

Majorana 费米子

- 将上式与 $\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]$ 比较
- 可知 Majorana 条件 $\psi(x)=\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 意味着 $b_{\mathbf{p},\lambda}=a_{\mathbf{p},\lambda}$
- 因此，Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\boxed{\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}e^{-ip\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}e^{ip\cdot x}\right]}$$

- 产生湮灭算符满足反对易关系

$$\boxed{\{a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}=0}$$

- 类似于实标量场，Majorana 旋量场描述一种纯中性费米子
- 即正费米子与反费米子相同，称为 Majorana 费米子
- $C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C^*b_{\mathbf{p},\lambda}$、$C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}=a_{\mathbf{p},\lambda}$ 表明 $\zeta_C=\zeta_C^*$
- 故 $\boxed{\zeta_C=\pm1}$，也就是说，Majorana 旋量场的 C 宇称要么为偶，要么为奇

Majorana 旋量场双线性型的 C 变换

对于 **Majorana 旋量场**，$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 和 $C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)$ 化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C\psi(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}(x)$$

在 C 变换下，由 Majorana 旋量场组成的**一般**旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 变成

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar{\psi}(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2\,\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) = +\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$$

即**非平庸**的 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 算符的 C **宇称**必须为**偶**

这表明 Majorana 旋量场**不能**构成 C 宇称为**奇**的算符 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 和 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$，即

$$\boxed{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) = 0}$$

由 Majorana 旋量场构成的**非平庸**双线性型则具有与 Dirac 旋量场**相同的 C 变换规则**

自由 Majorana 旋量场拉氏量

- 自由 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{\mathrm{i}}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\frac{1}{2}\,m\bar{\psi}\psi=\frac{\mathrm{i}}{2}\,\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\frac{1}{2}\,m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi}$$

- 应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中 ψ^{T} 扮演的角色跟 ψ **相同**
- 如果将**前后**两个旋量场分别标记为 ψ_1 和 ψ_2，动能项算符可化为

$$\begin{aligned}\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 &= (\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2)^{\mathrm{T}}=-(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi_1\\ &= (\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_1=-(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu\psi_1\end{aligned}$$

- 质量项算符可化为 $\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_2=(\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_2)^{\mathrm{T}}=-\psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi_1=\psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_1$，则

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_1}=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu-\frac{1}{2}\,m\psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C},\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_2}=-\frac{1}{2}\,m\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$$

- ψ_1 和 ψ_2 **都是** ψ，因而

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}=\frac{\mathrm{i}}{2}\,\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu,\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_1}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_2}=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu-m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$$

自由 Majorana 旋量场运动方程

- 根据 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu$ 和 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu - m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$
- **Euler-Lagrange 方程**给出 $0 = \partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu + m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$
- 对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \mathcal{C}\gamma^\mu = -\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\gamma^\mu$，推出

$$0 = \mathrm{i}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\partial_\mu\psi + m\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi = \mathcal{C}^{\mathrm{T}}(-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\psi)$$

自由 Majorana 旋量场运动方程

🐯 根据 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu$ 和 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu - m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$

🧈 **Euler-Lagrange 方程**给出 $0 = \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu + m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$

🧁 对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \mathcal{C}\gamma^\mu = -\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\gamma^\mu$，推出

$$0 = \mathrm{i}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\partial_\mu\psi + m\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi = \mathcal{C}^{\mathrm{T}}(-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\psi)$$

🍰 可见，自由的 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 也满足 **Dirac 方程**

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

🎂 这与上述**平面波展开式**

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

相容