

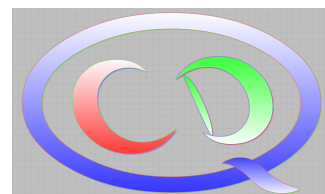
Image

强子物理导论课程讲义

作者：郭奉坤

时间：2023 年

版本：0.1



草稿

前言

blabla

作者
2023 年

目录

第 1 章 QCD 的对称性	1
1.1 QCD 的严格与近似对称性	3
1.2 手征对称性	5
1.3 强子谱中的 SU(3) 对称性	8
1.4 对称性的 Wigner-Weyl 实现和 Nambu-Goldstone 实现	10
1.5 手征对称性的自发破缺	12
1.5.1 线性 σ 模型	13
1.5.2 Goldstone 玻色子的导数耦合	15
1.6 介子的量子数与 PDG 命名规则	17
1.7 重夸克对称性	19
1.8 重夸克对称性在强子谱中的应用	22
1.8.1 重介子	22
1.8.2 双重四夸克态	25
1.8.3 类粲偶素	26
1.8.4 隐粲五夸克态	31
1.8.5 再看重夸克对称性	33
1.8.6 重强子对相互作用的有效拉氏量	35
1.9 大 N_c 展开与 OZI 规则	37
1.9.1 大 N_c 极限下的介子	38
1.9.2 OZI 规则	41
参考文献	44
第 2 章 手征微扰论	52
2.1 赝标介子的手征微扰论	53
2.1.1 Goldstone 玻色子场的参数化	53
2.1.2 领头阶的手征微扰论	55
2.1.3 赝 Goldstone 玻色子的质量	57
2.1.4 手征微扰论中的虚光子	60
2.1.5 $\pi\pi$ 散射	61

2.2	含物质场的手征微扰论	66
2.2.1	物质场的手征变换	66
2.2.2	重介子手征微扰论	70
2.3	手征微扰论的次领头阶修正	72
2.3.1	$\mathcal{O}(p^4)$ 阶的 π 介子质量	76
	参考文献	78
第 3 章	散射理论	83
3.1	S 矩阵和么正性	83
3.1.1	无自旋粒子分波振幅的么正关系	85
3.1.2	解析性与因果性	88
3.2	共振态: Breit-Wigner 参数化与 Flatté 参数化	90
3.3	色散关系与末态相互作用	94
3.3.1	色散关系简介	94
3.3.2	末态相互作用: Watson 定理和 Omnès 解	96
3.3.3	三体末态的末态相互作用	98
3.4	复合粒子与强子分子态	100
3.4.1	Low 方程与 T 矩阵的留数	102
3.4.2	Weinberg 复合度关系	103
	参考文献	104
附录 A	常用公式	108
A.1	Pauli 矩阵	108
A.2	Gell-Mann 矩阵	108
索 引		110

第 1 章 QCD 的对称性

QCD 的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G^{a,\mu\nu}G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{q}_f^i (i\not{D}_{ij} - m_f\delta_{ij})q_f^j + \frac{g_s^2\theta}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G^{a,\mu\nu}G^{a,\alpha\beta}, \quad (1.1)$$

其中 q_f^i 为夸克场, $i = 1, 2, 3$ (通常表示为 r, g 和 b) 为颜色指标, $f = u, d, s, c, b, t$ 为夸克的味指标, $a = 1, 2, \dots, 8$ 为胶子场的颜色指标, 表示胶子有 8 种颜色; 重复的指标表示对指标求和 (其中对味指标的求和已经明显写出). $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ 为全反对称 Levi-Civita 张量, 我们取其符号约定为 $\epsilon_{0123} = +1$. 胶子场强张量为

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i g_s [A_\mu, A_\nu], \quad A_\mu \equiv A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, \quad (1.2)$$

λ_a 为 Gell-Mann 矩阵, $\lambda_a/2$ 为 SU(3) 群的生成元. $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$, 规范协变导数为

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda_{ij}^a}{2} A_\mu^a, \quad (1.3)$$

g_s 为耦合常数.

QCD 的一个重要特点是在渐近自由. QCD 的精细结构常数 $\alpha_s \equiv g_s^2/(4\pi)$ 随着能标的跑动为:

$$\frac{d\alpha_s(\mu)}{d\log\mu^2} = -\alpha_s [b_0\alpha_s + \mathcal{O}(\alpha_s^2)], \quad (1.4)$$

其中 $b_0 = (11N_c - 2N_f)/(12\pi) > 0$, $N_c = 3$ 为夸克颜色的数目, N_f 为夸克味的数目. 可以看到, α_s 随着能标的升高越来越小 (见图 1.1), 从而在能标远大于 Λ_{QCD} 使得 QCD 可以在此区域内能够微扰展开; 而随着能标的降低, α_s 越来越大, 使得在能标大约为 Λ_{QCD} 的低能 (红外) 区域内 QCD 完全非微扰. Λ_{QCD} 的值可从 2018 年版《粒子数据表》^[1] 中关于 QCD 的综述中找到: $\Lambda_{\text{QCD}, \overline{\text{MS}}}^{(3)} = (332 \pm 17) \text{ MeV}$, $\Lambda_{\text{QCD}, \overline{\text{MS}}}^{(4)} = (292 \pm 16) \text{ MeV}$. 这里 $\overline{\text{MS}}$ 表示重整化的修正最小减除方案 (modified minimal subtraction scheme), 上标里的数字表示圈图计算中考虑的夸克味的数目.

前面已经讲到, QCD 在低能区的非微扰本质对我们精确理解强子结构及其相互作用造成

表 1.1: 标准模型中夸克的电荷和质量. 其中, 电荷单位为质子电荷 e , 夸克质量取自最新版的《粒子数据表》^[2]. u, d, s 夸克质量为 $\overline{\text{MS}}$ 减除方案下能标为 $\mu \approx 2 \text{ GeV}$ 时的质量, c, b 夸克质量为 $\overline{\text{MS}}$ 方案下的跑动质量, t 夸克质量来源于实验直接测量.

夸克味	u	d	s	c	b	t
电荷 (e)	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
质量 (MeV)	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$	93^{+11}_{-5}	1270 ± 20	4018^{+30}_{-20}	$(172.76 \pm 0.30) \times 10^3$

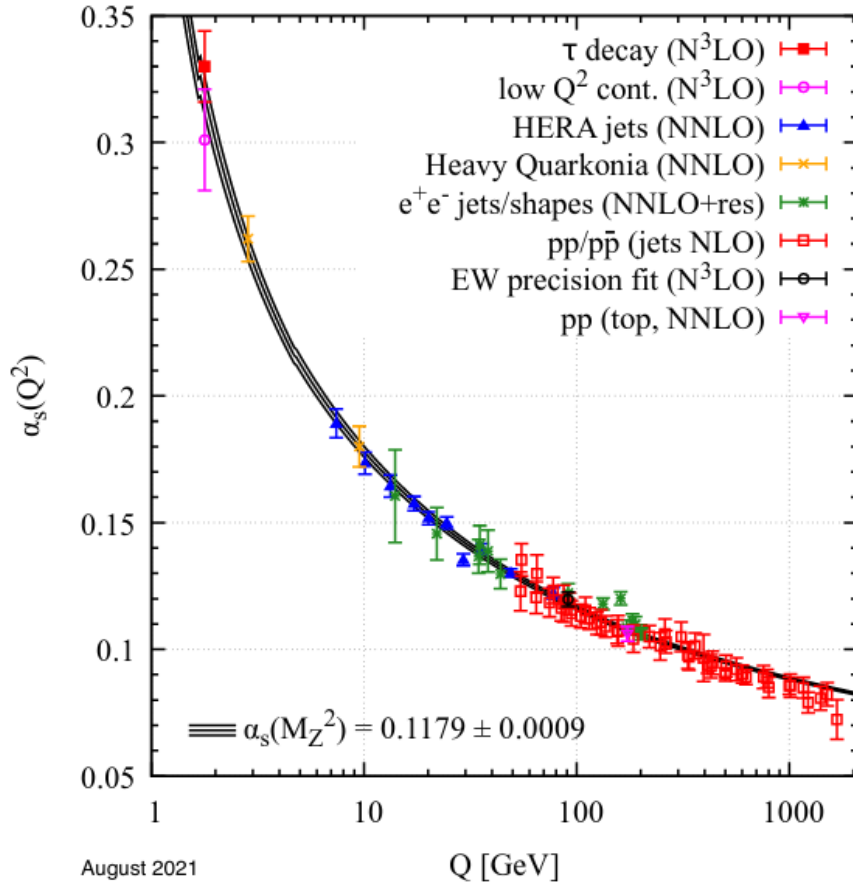


图 1.1: QCD 耦合常数 α_s 随能标的跑动. 取自《粒子数据表》^[2] 中关于 QCD 的综述.

了障碍并带来挑战. 研究非微扰强相互作用常用的理论方法包括以下几种:

- 唯象模型, 如夸克模型, QCD 求和规则等:

在夸克模型中, 所考虑的自由度并不是 QCD 拉氏量里的流夸克和胶子, 而是组分夸克, 其质量并不是表 1.1 中给出的流夸克质量, 而是所谓的组分夸克质量. 对于质量小于 Λ_{QCD} 的轻夸克来说, 组分夸克的质量远大于流夸克质量, 通常通过拟合强子磁矩或者强子质量谱来确定 (参见第 ?? 章 [赵老师讲的部分]).

在 QCD 求和规则中, 非微扰的 QCD 效应被参数化为一系列真空凝聚, 如夸克凝聚, 胶子凝聚, 夸克胶子混合凝聚等. 对于给定的关联函数, 利用 QCD 的算符乘积展开在深度类空区将之表达为微扰 QCD 部分以及各种真空凝聚的和, 而在类时区, 则可用强子质量和衰变常数等表示出来. 接下来, 利用色散关系建立两个区域之间的联系, 从而估算出强子性质相关的物理量.

- 基于第一性原理的格点 QCD:

考虑欧式空间里的 QCD, 将时空离散化, 写出在连续极限下与 QCD 一致的作用量. 在超级计算机上, 利用蒙特卡洛方法进行极大维度的路径积分, 计算各种非微扰的物理量. 格点 QCD 的计算通常有以下系统误差需要考虑: 1) 格子大小是有限的, 即时空体积是

有限的, 而现实世界的时空是无限大的 (对强作用来说); 2) 两个相邻格点之间的格距是有限的, 而现实世界的时空是连续的; 3) 在很多格点计算中, 轻夸克质量的取值大于其物理值, 因此, 要将计算结果外推到物理的夸克质量情形 (此过程称为手征外推).

- 有效场论:

如果我们考察的物理系统中可以构造出一个无量纲的小量, 那么我们便可以构造按照其幂次展开的有效场论. 通常, 这样的小量可以选为一个小的能量或动量标度和一个大的能量或动量标度之间的比值. 这样, 我们便可以逐阶进行计算, 在截断到有限阶时可以估计忽略掉高阶贡献带来的误差. 同时, 我们要求有效场论具有的对称性与底层理论 (本书中为 QCD) 的严格或近似对称性一致, 并通过构造满足这些对称性最普遍的拉氏量, 从而保证有效场论的计算结果是模型无关的. 我们将在第 2 章中介绍 QCD 最重要的低能有效场论: 手征微扰论.

- 色散关系:

基于么正性 (即几率守恒) 和解析性 (即因果性) 等基本原理构造. 解析性将不同运动学区间的物理量联系起来, 么正性将产生过程和散射过程的物理量联系起来. 我们将在第 3 中介绍色散关系.

在研究非微扰强相互作用时, 经常需要结合使用上述不同方法. 例如, 我们可以利用手征微扰论将格点 QCD 在非物理的轻夸克质量上计算的物理量进行手征外推, 利用非相对论有效场论研究与格点 QCD 计算相关的有限体积的效应; 而有效场论中的未知参数 (称为低能常数) 则可以通过格点 QCD 来计算, 在没有相关格点 QCD 计算结果的时候, 也可以通过夸克模型等唯象方法来估计; 在一些情况下, 通过色散关系构造的散射振幅在低能区可以匹配到手征有效场论的振幅, 从而限制前者的参数; 对实验数据进行分析的时候, 也可以通过考虑对称性的限制和色散关系来构造分波分析需要的振幅.

本章中, 我们将介绍 QCD 的近似对称性及其在研究强子结构中的应用.

1.1 QCD 的严格与近似对称性

QCD 的拉氏量 (1.1) 具有如下严格对称性: Lorentz 对称性; SU(3) 色规范对称性; 电荷共轭 (C) (将粒子变成它们的反粒子) 不变; 如果 θ 严格为 0, 那么还有宇称变换 (P) 不变和电荷-宇称联合变换 (CP) 不变.

下面我们讲一下拉氏量 (1.1) 中各项的宇称变化. 利用场的宇称变换性质:

$$q_f(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \gamma^0 q_f(t, -\vec{x}), \quad G_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} G^{\mu\nu}(t, -\vec{x}), \quad (1.5)$$

我们可以验证 (1.1) 中前两项是宇称变换下不变的:^{1.1}

$$\begin{aligned}
 G^{a,\mu\nu}(t, \vec{x}) G_{\mu\nu}^a(t, \vec{x}) &\stackrel{P}{\mapsto} G_{\mu\nu}^a(t, -\vec{x}) G^{a,\mu\nu}(t, -\vec{x}), \\
 \bar{q}_f(t, \vec{x}) (i\not{D} - m_f) q_f(t, \vec{x}) &\stackrel{P}{\mapsto} \bar{q}_f(t, -\vec{x}) \gamma^0 (iD_\mu \gamma_\mu - m_f) \gamma^0 q_f(t, -\vec{x}) \\
 &= \bar{q}_f(t, -\vec{x}) (iD_\mu \gamma^\mu - m_f) q_f(t, -\vec{x}) \\
 &= \bar{q}_f(t, -\vec{x}) (i\not{D} - m_f) q_f(t, -\vec{x}), \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

其中, 在宇称变换下, 矢量的空间分量改变符号, 时间分量不变. 对于协变导数就有 $D^\mu \stackrel{P}{\mapsto} D_\mu$, 注意这里我们将上指标变成了下指标. 这是因为我们采取的是 Minkowski 空间的度规, 其度规张量 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. 改变矢量的空间分量的符号相当于将 $g_{\mu\nu}$ 作用于其上: $D_\mu = g_{\mu\nu} D^\nu$. 然而, 最后一项, 即所谓的 θ 项却会改变符号, 即其 P 和 CP 联合变换都为奇 (P-odd, CP-odd):

$$\begin{aligned}
 G^{a,\mu\nu}(t, \vec{x}) \tilde{G}_{\mu\nu}^a(t, \vec{x}) &\equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{a,\mu\nu}(t, \vec{x}) G^{a,\alpha\beta}(t, \vec{x}) \\
 &\stackrel{P}{\mapsto} -G^{a,\mu\nu}(t, -\vec{x}) \tilde{G}_{\mu\nu}^a(t, -\vec{x}), \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

此处, 我们用到了 Levi-Civita 张量的性质: $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$; 这是由于我们考虑的是 4 维时空, 即 1 维时间和 3 维空间, 因此利用闵氏时空的度规张量将它的所有指标都同时升或降将改变其符号. 可以看到, 只有当 $\theta = 0$ 时, QCD 的拉氏量才是 P 和 CP 不变的. 目前, 通过测量中子的电偶极矩的上限给出来的 θ 与夸克质量矩阵 $\mathcal{M}_q$ 的相位的线性组合^{1.2}为

$$\bar{\theta} \equiv \theta + \arg(\det \mathcal{M}_q) \lesssim 10^{-10}. \tag{1.8}$$

然而, 由于 $\bar{\theta}$ 是一个无量纲的参数, 没有理由要求它一定为零, 因此它的值如此之小以至于目前还没发现一个非零的中子电偶极矩是令人困惑的. 这个问题被称为强 CP 问题, 目前还没有一个很好的解答. 在提出的解决方案中, 有一个建议最轻的夸克 (即 u 夸克) 是无质量的, 然而, 我们在第 2.1 节中通过分析轻赭标介子的质量会看到这个可能性与实验不符. 另一个有很大影响的方案为轴子 (axion) 模型^[3-4], 由于轴子也是一种暗物质候选者, 因此, 对于轴子的研究以及实验寻找是目前的热点方向; 我们也将第 2 章习题 2.2 中进行简要的介绍.

除了上述严格对称性之外, QCD 还具有一些近似对称性. 从表 1.1 中可以看到, 质量较轻的三种味的夸克的质量远小于 Λ_{QCD} , 而质量较大的夸克的味则远大于 Λ_{QCD} :

$$m_{u,d,s} \ll \Lambda_{\text{QCD}} \ll m_{c,b,t}. \tag{1.9}$$

我们将 u, d, s 夸克称为轻夸克, 将 c, b, t 夸克称为重夸克 (顶夸克由于其衰变宽度很大, 不能形成近稳定的强子, 接下来我们将不再考虑). 轻夸克部分存在近似的手征对称性及其自发破

^{1.1} 我们说拉氏量在某种变换下不变, 实际上指的是相应的作用量 $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ 不变.

^{1.2} 由于 $U(1)_A$ 反常, 夸克质量矩阵的整体相位总是可以转为 $G^{a,\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a$ 项, 因此只有这个线性组合才是可观测量.

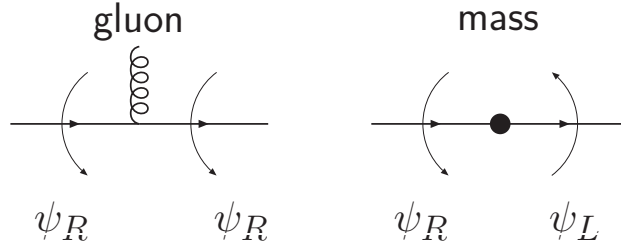


图 1.2: 夸克的动能项及其与胶子的相互作用不改变其手性, 而其质量项则将左手和右手的部分耦合起来.

缺, 而重夸克部分则有近似的重夸克对称性. 我们在本章下面的几节中将分别讲述.

1.2 手征对称性

考虑 u, d, s 3 个味的轻夸克 ($N_f = 3$), 这部分的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{light}} = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f (i \not{D} - m_f) q_f = \bar{q} (i \not{D} - \mathcal{M}_q) q, \quad (1.10)$$

这里, 我们将轻夸克场和夸克质量项写成了矩阵形式:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_q = \text{diag}(m_u, m_d, m_s) \equiv \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

我们定义左手 (P_L) 和右手 (P_R) 投影算符:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5). \quad (1.12)$$

利用 Dirac γ 矩阵的性质, $(\gamma_5)^2 = 1$, $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ 和 $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, 容易证明它们满足下列性质:

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad P_L + P_R = 1, \quad (1.13)$$

$$P_L^\dagger = P_L, \quad P_R^\dagger = P_R. \quad (1.14)$$

$P_{L,R}$ 作用在旋量空间, 与味空间对易. 按照下式分解夸克场:

$$q = q_L + q_R, \quad q_L \equiv P_L q, \quad q_R \equiv P_R q, \quad (1.15)$$

$$\bar{q}_L = q_L^\dagger \gamma^0 = q^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 = \bar{q} P_R, \quad \bar{q}_R = \bar{q} P_L. \quad (1.16)$$

我们会发现在夸克的动能项中,

$$i \bar{q} \not{D} q = i \bar{q}_L \not{D} q_L + i \bar{q}_R \not{D} q_R, \quad (1.17)$$

而夸克的质量项则会将左手和右手的部分耦合起来 (如图 1.2 所以):

$$\bar{q} \mathcal{M}_q q = \bar{q}_L \mathcal{M}_q q_R + \bar{q}_R \mathcal{M}_q q_L. \quad (1.18)$$

因此, 如果忽略夸克的质量, 那么夸克场的左手和右手的部分会退耦.

利用 (1.5), 宇称将左 (右) 手场变成右 (左) 手场:

$$\begin{aligned} q_R(t, \vec{x}) &\xrightarrow{P} P_R \gamma^0 q(t, -\vec{x}) = \gamma^0 P_L q(t, -\vec{x}) = \gamma^0 q_L(t, -\vec{x}), \\ q_L(t, \vec{x}) &\xrightarrow{P} \gamma^0 q_R(t, -\vec{x}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

我们对左手和右手的夸克场分别做整体的连续变换:

$$q_L \mapsto L q_L, \quad q_R \mapsto R q_R, \quad (1.20)$$

其中 L 和 R 是分别作用在左右手夸克场上的味空间的 3×3 的矩阵. 如果 L 和 R 是么正矩阵, 即是 $U(3)$ 群的群元, 那么夸克的动能项 (1.17) 保持不变, 即

$$i \bar{q}_L \not{D} q_L \mapsto i \bar{q}_L L^\dagger \not{D} L q_L = i \bar{q}_L \not{D} q_L \quad (1.21)$$

意味着 $L^\dagger L = 1$; 类似地, $R^\dagger R = 1$. 因此, 它们可以写为

$$\begin{aligned} L &= \exp(i\alpha_L) \equiv \exp\left(i \sum_{a=1}^8 \alpha_L^a T^a + i\alpha_L^0\right), \\ R &= \exp(i\alpha_R) \equiv \exp\left(i \sum_{a=1}^8 \alpha_R^a T^a + i\alpha_R^0\right), \end{aligned} \quad (1.22)$$

其中, $\alpha_{L,R}$ 为 3×3 的厄密矩阵, $T^a = \lambda^a/2$ ($a = 1, \dots, 8$) 是 $SU(3)$ 群的生成元, λ^a 是 Gell-Mann 矩阵, 见附录 A.2. 因此, 忽略掉 u, d, s 轻夸克质量的 QCD 的作用量具有手征对称性: $U(3)_L \times U(3)_R$.

根据 Noether 定理: 如果作用量具有某种连续对称性, 则一定存在与此变换相应的守恒流, 满足流守恒方程. $U(N)$ 群的生成元的个数为 N^2 , 因此上述手征对称性对应的 Noether 守恒流的个数为 $9 + 9 = 18$. 守恒流为:

$$J_L^{a,\mu} = \bar{q}_L \gamma^\mu T^a q_L, \quad J_R^{a,\mu} = \bar{q}_R \gamma^\mu T^a q_R, \quad a = 0, 1, 2, \dots, 8, \quad (1.23)$$

其中, T^0 是味空间 3×3 的单位矩阵, 它们满足流守恒方程:

$$\partial_\mu J_L^{a,\mu} = 0, \quad \partial_\mu J_R^{a,\mu} = 0. \quad (1.24)$$

为方便起见, 我们构造有确定宇称的流. 为此, 我们将对轻夸克场的手征变换改写为:^{1.3}

$$\begin{aligned}
 q &= q_L + q_R \xrightarrow{U(3)_L \times U(3)_R} e^{i\alpha_L} \frac{1-\gamma_5}{2} q + e^{i\alpha_R} \frac{1+\gamma_5}{2} q \\
 &= (1 + i\alpha_L + \cdots) \frac{1-\gamma_5}{2} q + (1 + i\alpha_R + \cdots) \frac{1+\gamma_5}{2} q \\
 &= q + \frac{i}{2} (\alpha_L + \alpha_R) q + \frac{i}{2} \gamma_5 (\alpha_R - \alpha_L) q + \cdots \\
 &= e^{i\alpha_V} e^{i\alpha_A \gamma_5} q \\
 &= \underbrace{e^{i\sum_{a=1}^8 \alpha_V^a T^a}}_{SU(3)_V} \underbrace{e^{i\sum_{a=1}^8 \alpha_A^a T^a \gamma_5}}_{SU(3) \text{ 的轴矢部分}} \underbrace{e^{i\alpha_V^0}}_{U(1)_V} \underbrace{e^{i\alpha_A^0 \gamma_5}}_{U(1)_A} q,
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

其中, $\alpha_V \equiv \frac{1}{2}(\alpha_L + \alpha_R)$, $\alpha_A \equiv \frac{1}{2}(\alpha_R - \alpha_L)$, $\alpha_V^0 \equiv \frac{1}{2}(\alpha_L^0 + \alpha_R^0)$, $\alpha_A^0 \equiv \frac{1}{2}(\alpha_R^0 - \alpha_L^0)$, 即 $U(3)_L \times U(3)_R = SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$. 相应的 18 个守恒流及其宇称变换为 (矢量和轴矢的名称变来源于它们不同的宇称变换性质):

$$SU(3) \text{ 矢量流: } V_\mu^a = J_R^{a,\mu} + J_L^{a,\mu} = \bar{q}\gamma_\mu T^a q \xrightarrow{P} V^{a,\mu}, \quad a = 1, \dots, 8, \tag{1.26}$$

$$SU(3) \text{ 轴矢流: } A_\mu^a = J_R^{a,\mu} - J_L^{a,\mu} = \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 T^a q \xrightarrow{P} -A^{a,\mu}, \quad a = 1, \dots, 8, \tag{1.27}$$

$$U(1)_V \text{ 矢量流: } V_\mu = J_R^\mu + J_L^\mu = \bar{q}\gamma_\mu q \xrightarrow{P} V^\mu, \tag{1.28}$$

$$U(1)_A \text{ 轴矢流: } A_{5\mu} = J_R^\mu - J_L^\mu = \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 q \xrightarrow{P} -A_5^\mu. \tag{1.29}$$

V_μ^a , A_μ^a 和 V_μ 在经典和量子层次都满足流守恒方程:

$$\partial^\mu V_\mu^a = 0, \quad \partial^\mu A_\mu^a = 0, \quad \partial^\mu V_\mu = 0. \tag{1.30}$$

$U(1)_V$ 矢量流的守恒荷

$$Q_V \equiv \int d^3\vec{x} V^0(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{x} q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x}) \tag{1.31}$$

是夸克数算符, 即 $U(1)_V$ 对称性对应于重子数或夸克数守恒. 然而, 由于量子效应, $U(1)_A$ 轴矢流的散度却是不为零的 (见图 1.3):

$$\partial_\mu A_5^\mu = \frac{N_f g_s^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^a \tag{1.32}$$

即 $U(1)_A$ 轴矢流的散度不为零. 这被称为 $U(1)_A$ 反常, 也叫 ABJ (Adler, Bell, Jackiew) 反常^[5-6]. 因此, 即使我们在构造 QCD 的拉氏量时不包括 (1.1) 中的 θ 项, 由于圈图修正, 对夸

^{1.3}要注意到, 虽然有些文献中将所有的 $e^{i\sum_{a=1}^8 \alpha_A^a T^a \gamma_5}$ 变换的集合写为 $SU(3)_A$, 但它们实际上并不构成一个群:

$$e^{i\alpha_{A_1}^a T^a \gamma_5} e^{i\alpha_{A_2}^b T^b \gamma_5} = \exp \left\{ i(\alpha_{A_1}^a + \alpha_{A_2}^a) T^a \gamma_5 - \frac{1}{2} \alpha_{A_1}^a \alpha_{A_2}^b [T^a, T^b] + \cdots \right\},$$

其中第二项并不包含 γ_5 , 即连续进行两次这样的变换给出来的新的变换并不在这个集合中, 不满足群的封闭的性质. 我们用到了 Baker-Compbell-Hausdorff 公式:

$$e^X e^Y = \exp \left(X + Y + \frac{1}{2} [X, Y] + \cdots \right).$$

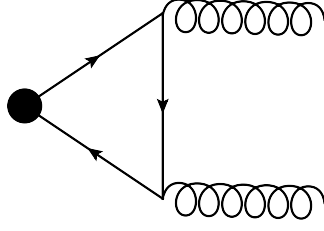


图 1.3: 轴矢流与两个胶子的耦合.

克场做 $U(1)_A$ 转动也会对 QCD 的作用量带来 $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}$ 形式的项.

对称性意味着相应的守恒荷与 QCD 的哈密顿量对易, 即

$$Q_V^a = Q_L^a + Q_R^a, \quad Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a, \quad [Q_{V,A}^a, \mathcal{H}_{\text{QCD}}^0] = 0, \quad (1.33)$$

此处 $a = 1, \dots, 8$, $\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0$ 表示忽略掉夸克质量项的 QCD 的哈密顿量密度, Q_R^a 和 Q_L^a 分别指左手和右手 SU(3) 守恒流对应的守恒荷,

$$Q_L^a = \int d^3\vec{x} J_L^{a,0}(t, \vec{x}), \quad Q_R^a = \int d^3\vec{x} J_R^{a,0}(t, \vec{x}), \quad (1.34)$$

Q_V^a 和 Q_A^a 则分别是矢量流和轴矢流的守恒荷,

$$Q_V^a = \int d^3\vec{x} V^{a,0}(t, \vec{x}), \quad Q_A^a = \int d^3\vec{x} A^{a,0}(t, \vec{x}), \quad (1.35)$$

它们满足对易关系:

$$[Q_V^a, Q_V^b] = if^{abc} Q_V^c, \quad [Q_V^a, Q_A^b] = if^{abc} Q_A^c, \quad [Q_A^a, Q_A^b] = if^{abc} Q_V^c, \quad (1.36)$$

其中 f^{abc} 是 SU(3) 群的结构常数. 左手和右手流的守恒荷满足下列对易关系:

$$[Q_R^a, Q_R^b] = if^{abc} Q_R^c, \quad [Q_L^a, Q_L^b] = if^{abc} Q_L^c, \quad [Q_R^a, Q_L^b] = 0, \quad (1.37)$$

与 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的李代数相同.

下面我们不再考虑 $U(1)_V$ 和 $U(1)_A$ 的部分, 只关注 $SU(3)_L \times SU(3)_R$.

1.3 强子谱中的 SU(3) 对称性

下面我们来看一下 QCD 的近似对称性 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 是否反应在了强子谱中.

前面已经讲到, 强子可以填充到不同的 SU(3) 味多重态里. 例如, u, d, s 轻夸克处于 SU(3) 味群的基础表示, 一对正反轻夸克可以形成 SU(3) 八重态和一个 SU(3) 单态 (如图 1.4 所示), 即

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1. \quad (1.38)$$

表 1.2 列出了一些轻强子的夸克组分和质量, 同一个多重态中的强子质量相差都不大. 特别

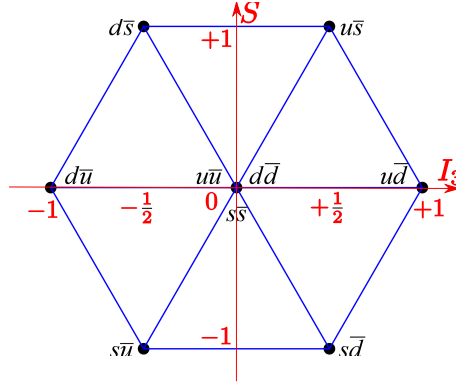


图 1.4: 正反夸克对形成的介子 SU(3) 八重态和单态. $u\bar{u}, d\bar{d}$ 和 $s\bar{s}$ 组成一个同位旋 $I = 1$, 同位旋第 3 分量 $I_3 = 0$ 的八重态中的介子 $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$, 一个 $I = 0$ 的 SU(3) 单态 $(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$, 与一个 $I = 0$ 的八重态介子 $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$. 横轴表示 I_3 , 纵轴表示奇异数 S .

是, 同一个同位旋多重态里的强子质量通常最多只有几个 MeV 的差别, 例如^{[2], 1.4}

$$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = (4.5936 \pm 0.0005) \text{ MeV}, \quad m_{K^0} - m_{K^\pm} = (3.937 \pm 0.028) \text{ MeV}, \quad (1.39)$$

$$m_{\rho^0} - m_{\rho^\pm} = (-0.7 \pm 0.8) \text{ MeV}, \quad m_{K^{*0}} - m_{K^{*\pm}} = (6.7 \pm 1.2) \text{ MeV}, \quad (1.40)$$

其它一些强子的同位旋劈裂参见表 1.2 以及《粒子数据表》^[2]. 在所有的强子中, π 介子的质量最小, 而且远小于其他任何强子的质量. 我们接下来会看到这个现象有具有深刻的原因.

考虑一个包含轻夸克的单粒子强子态 $|\psi_\alpha\rangle$, 其质量为 m , 宇称为 η_P ,

$$\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0 |\psi_\alpha\rangle = m |\psi_\alpha\rangle, \quad P |\psi_\alpha\rangle = \eta_P |\psi_\alpha\rangle. \quad (1.41)$$

由 (1.27) 可知, 轴矢荷 Q_A^a 在宇称变化下改变符号, 可得 $Q_A^a |\psi_\alpha\rangle$ 的宇称与 $|\psi_\alpha\rangle$ 相反:

$$P Q_A^a |\psi_\alpha\rangle = P Q_A^a P^{-1} P |\psi_\alpha\rangle = -Q_A^a \eta_P |\psi_\alpha\rangle = -\eta_P Q_A^a |\psi_\alpha\rangle. \quad (1.42)$$

由 (1.33) 可知 $Q_A^a |\psi_\alpha\rangle$ 的质量与 $|\psi_\alpha\rangle$ 相同:

$$\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0 Q_A^a |\psi_\alpha\rangle = Q_A^a \mathcal{H}_{\text{QCD}}^0 |\psi_\alpha\rangle = m Q_A^a |\psi_\alpha\rangle. \quad (1.43)$$

然而, 实验上观测到的最轻的自旋宇称为 $J^P = \frac{1}{2}^-$ 的核子激发态为 $N^*(1535)$, 括号中的数字即是其以 MeV 为单位的大约的质量, 远大于表 1.2 中列出来的质子和中子的质量. 与 π 介子宇称相反其余量子数相同的最轻的介子为 $a_0(980)$, 其质量远大于 π 介子的质量. 如此大的质量差很难让人相信它们可以被看成近似简并的粒子. 因此, 强子谱中并没有出现质量简并或近似简并但是宇称相反的强子对 (parity doublet), 也就是说 QCD 拉氏量的近似对称性 $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ 并没有在强子谱中体现出来. 我们不禁要问其原因何在.

^{1.4}这里矢量介子的同位旋劈裂与从表 1.2 中计算得到的不同, 原因在于它们的实验数据来源不同.

表 1.2: 一些轻强子的夸克组分和质量^[2]. 最后一列给出的是不同质量测量的来源过程.

$J^{P(C)}$	强子	夸克组分	质量 (MeV)	备注
0^{-+}	π^+/π^-	$u\bar{d}/d\bar{u}$	139.57039 ± 0.00018	
	π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	134.9768 ± 0.0005	
	K^+/K^-	$u\bar{s}/s\bar{u}$	493.677 ± 0.016	
	$K^0/\bar{K}^0$	$d\bar{s}/s\bar{d}$	497.611 ± 0.013	
	η	$\sim \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	547.862 ± 0.017	
	η'	$\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	957.78 ± 0.06	
1^{--}	ρ^+/ρ^-	$u\bar{d}/d\bar{u}$	775.11 ± 0.34	τ 衰变和 e^+e^- 对撞
			766.5 ± 1.1	强生过程 (hadroproduction)
	ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	775.26 ± 0.23	e^+e^- 对撞
			769.2 ± 0.9	光生过程 (photoproduction)
	K^{*+}/K^{*-}	$u\bar{s}/s\bar{u}$	891.67 ± 0.26	强生过程
			895.5 ± 0.8	τ 轻子衰变
	$K^{*0}/\bar{K}^{*0}$	$d\bar{s}/s\bar{d}$	895.55 ± 0.20	
	ω	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	782.66 ± 0.13	
$\frac{1}{2}^{+}$	ϕ	$s\bar{s}$	1019.461 ± 0.016	
	质子 p	uud	938.272081 ± 0.000006	
	中子 n	udd	939.565413 ± 0.000006	
	Λ^0	uds	1115.683 ± 0.006	
	Σ^+	uus	1189.37 ± 0.07	
	Σ^0	uds	1192.642 ± 0.024	
	Σ^-	dds	1197.449 ± 0.030	
	Ξ^0	uss	1314.86 ± 0.20	
	Ξ^-	dss	1321.71 ± 0.07	

1.4 对称性的 Wigner-Weyl 实现和 Nambu-Goldstone 实现

粒子态通过产生算符作用到真空上来构造, 因此讨论对称性需要考虑一个重要的问题: 作用量的对称性一定是真空的对称性吗?

我们考虑一个系统, 其作用量具有某种连续对称性 G , 守恒荷为 Q^a ($a = 1, \dots, N_G$, N_G 为生成元的个数). 从 (1.36) 和 (1.37) 可以看到, Q^a 的群论结构与生成元 T^a 相同, 因此可以将 Q^a 看做群的生成元. 相应的转动为 $U \equiv \exp(iQ^a\alpha^a)$. 作用量具有这种对称性意味着哈密顿量在 U 的作用下不变, 即

$$U\mathcal{H}U^{-1} = \mathcal{H}, \quad [Q^a, \mathcal{H}] = 0. \quad (1.44)$$

因此,

$$0 = [Q^a, \mathcal{H}]|0\rangle = Q^a \underbrace{\mathcal{H}|0\rangle}_{=0} - \mathcal{H}Q^a|0\rangle \Rightarrow \mathcal{H}Q^a|0\rangle = 0. \quad (1.45)$$

上式意味着作用量的对称性作用在真空上有两种不同的可能性.

- 如果 $Q^a|0\rangle = 0$, 那么真空在 U 的作用下不变: $U|0\rangle = (1 + iQ^a\alpha^a + \dots)|0\rangle = |0\rangle$. 这种情况称为 Wigner-Weyl 实现.

考虑某个单粒子态, 由相应的产生算符作用到真空上产生: $b_\alpha^\dagger|0\rangle$. 这个态是哈密顿量的本征态, 粒子质量对应于哈密顿量的本征值:

$$\mathcal{H}b_\alpha^\dagger|0\rangle = m_\alpha b_\alpha^\dagger|0\rangle. \quad (1.46)$$

考虑一个无穷小转动 $U = 1 + iQ^a\epsilon^a + \mathcal{O}(\epsilon^2)$,

$$\begin{aligned} Ub_\alpha^\dagger|0\rangle &= Ub_\alpha^\dagger U^{-1}U|0\rangle = Ub_\alpha^\dagger U^{-1}|0\rangle = (1 + iQ^a\epsilon^a) b_\alpha^\dagger (1 - iQ^a\epsilon^a)|0\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= b_\alpha^\dagger|0\rangle + i\epsilon^a [Q^a, b_\alpha^\dagger]|0\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= b_\alpha^\dagger|0\rangle + i\epsilon^a (T^a)_{\alpha\beta} b_\beta^\dagger|0\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (1.47)$$

即对这个态做转动得到这个粒子所在的多重态里单粒子态的线性组合, 其中 $(T^a)_{\alpha\beta}$ 是组合系数.^{1.5} Wigner-Weyl 模式的对称性是线性实现的.

转动后得到的态也是哈密顿量的本征态, 且本征值与 ψ_α 相同:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}Ub_\alpha^\dagger|0\rangle &= U\mathcal{H}U^{-1}Ub_\alpha^\dagger|0\rangle = U\mathcal{H}b_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &= m_\alpha Ub_\alpha^\dagger|0\rangle. \end{aligned} \quad (1.49)$$

也就是说如果对称性是以 Wigner-Weyl 模式实现的, 那么真空在这种对称性下不变, 粒子谱里也会出现简并的通过对称性联系的单粒子态.

- 如果 $Q^a|0\rangle \neq 0$, 即 $U|0\rangle \neq |0\rangle$, 那么 (1.45) 必定意味着

$$\mathcal{H}(Q^a|0\rangle) = 0, \quad \mathcal{H}U|0\rangle = 0. \quad (1.50)$$

这种情况称为 Nambu-Goldstone 实现. 既然 $U|0\rangle \neq |0\rangle$, 那么真空在变换后必定产生了一些粒子. (1.50) 意味着这些粒子与真空简并, 是无质量的. 产生的无质量粒子的个数等于使得 $Q^a|0\rangle \neq 0$ 的生成元的个数, 这些粒子被称为 Goldstone 玻色子. 这时, 我们说对称性发生了自发破缺. Goldstone 定理:

对于每一个自发破缺的连续对称性的生成元 Q^a , $Q^a|0\rangle \neq 0$, 都必定存在一个无质量的粒

^{1.5}之所以用生成元的符号 T^a 表示, 是因为它满足对称群 G 的李代数:

$$[Q^a, Q^b] b_\alpha^\dagger|0\rangle = [T^a, T^b]_{\alpha\beta} b_\beta^\dagger|0\rangle = if^{abc} (T^c)_{\alpha\beta} b_\beta^\dagger|0\rangle, \quad (1.48)$$

其中用到了守恒荷的对易关系, 见 (1.37).

子.

由于真空无自旋, $J = 0$, 宇称 (P) 和 C 宇称都是正的, 因此, Goldstone 玻色子的量子数 J^{PC} 与 Q^a 的量子数相同.

1.5 手征对称性的自发破缺

现在回顾 (1.43), 如果将 $Q_A^a |\psi_\alpha\rangle$ 解释为单粒子态, 那么就需要有 $Q_A^a |0\rangle = 0$:

$$Q_A^a b_\alpha^\dagger |0\rangle = [Q_A^a, b_\alpha^\dagger] |0\rangle + b_\alpha^\dagger Q_A^a |0\rangle = (t^a)_{\alpha\beta} b_{\beta-}^\dagger |0\rangle, \quad (1.51)$$

其中 $b_{\beta-}^\dagger$ 是与 $|\psi_\alpha\rangle$ 宇称相反态的产生算符, 即对称性以 Wigner-Weyl 的模式实现. 而 1.3 节中提到的强子谱中缺乏近似简并而宇称相反的强子态则意味着手征对称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ ($N_f = 2, 3$) 是以 Nambu-Goldstone 模式实现的, 即虽然 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 是 QCD 拉氏量的近似对称性, 但它并不是真空和强子谱的对称性.^{1.6} 表 1.2 显示强子谱的近似对称性是矢量的 $SU(N_f)$, 即 QCD 的手征对称性自发破缺到了它的矢量子群:

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \xrightarrow{\text{SSB}} SU(N_f). \quad (1.52)$$

强相互作用世界里并没有无质量的强子. 既然手征对称性发生了自发破缺, 那么相应的 Goldstone 玻色子在哪里呢? 轴矢流的守恒荷 Q_A^a 没有任何 Lorentz 指标, 具有负宇称和正的 C 宇称, 所以, 手征对称性自发破缺的 Goldstone 玻色子的量子数为 $J^{PC} = 0^{-+}$, 与赝标介子的相同. Goldstone 玻色子的个数为破缺的对称性对应的生成元的个数: $N_f^2 - 1$. 而从表 1.2 中可以看到, 最轻的赝标介子八重态 $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0$ 和 η (尤其是 π 介子同位旋三重态) 的质量远小于其它强子. 因此, 它们是很好的手征对称自发破缺的 Goldstone 玻色子的候选者: 3 个 π 介子是 $SU(2)_L \times SU(2)_R \xrightarrow{\text{SSB}} SU(2)$ 的 Goldstone 玻色子, 上述赝标介子八重态则是 $SU(3)_L \times SU(3)_R \xrightarrow{\text{SSB}} SU(3)$ 的 Goldstone 玻色子. 因为 QCD 中夸克不是严格无质量的, 所以这些 Goldstone 玻色子也获得了不为零的质量, 它们有时也被称为赝 Goldstone 玻色子 (pseudo-Goldstone bosons).

目前, 如何从 QCD 出发解析证明手征对称性必定会发生自发破缺仍是未解决的问题.

^{1.6} 自发破缺的对称性并没有像明显破缺一样真正被破坏掉, 它只是被隐藏起来了, 仍然在系统的动力学中发挥着强大的作用. 这一点我们从下面的简单的线性 σ 模型中看到.

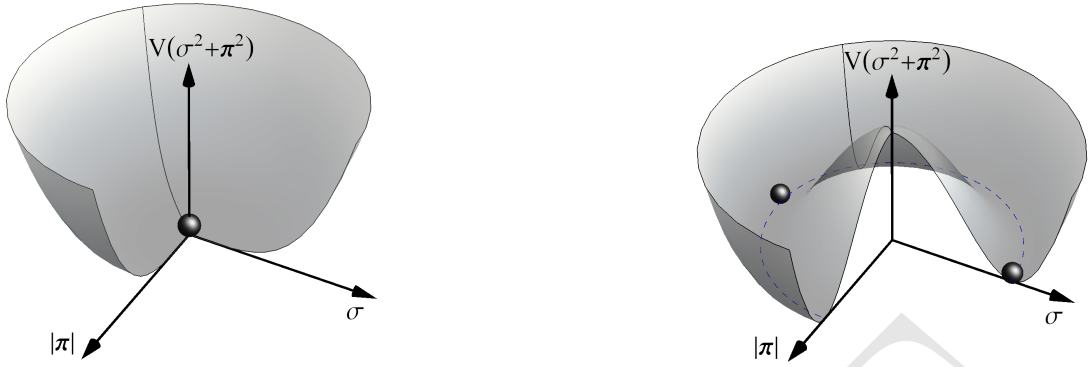


图 1.5: $v^2 \leq 0$ 和 $v^2 > 0$ 两种情况下的 $V(\Phi)$.

1.5.1 线性 σ 模型

具有 $O(4)$ 对称的线性 σ 模型的拉氏量:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{LSM}} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - V(\Phi), \\ V(\Phi) &= \frac{\lambda}{4} (\Phi^T \Phi - v^2)^2, \quad \text{其中 } \Phi^T = (\sigma, \pi_1, \pi_2, \pi_3),\end{aligned}\tag{1.53}$$

$\Phi^T \Phi = \sigma^2 + \vec{\pi}^2$. $v^2 \leq 0$ 和 $v^2 > 0$ 两种情况下的势能 $V(\Phi)$ 示意图图 1.5.

当 $v^2 > 0$ 时, $\sigma = \pi_a = 0$ 不对应于 $V(\Phi)$ 的极小值, 即不对应于理论的真空. $V(\Phi)$ 的极小值位于

$$\Phi_{\min}^T \Phi_{\min} = v^2, \tag{1.54}$$

真空是简并的, 我们选择一个方向让 $\Phi_{\min} = (v, 0, 0, 0)^T$. 虽然拉氏量 (1.53) 具有 $O(4)$ 对称性, 真空仅具有 $O(3)$ 对称性. 因此发生了对称性自发破缺: $O(4) \rightarrow O(3)$.

量子场应该在真空构型上做扰动来得到. 让 $\Phi = \Phi_{\min} + (\sigma', \pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$, 拉氏量 (1.53) 变为

$$\mathcal{L}_{\text{LSM}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma' \partial^\mu \sigma' - \frac{\lambda}{4} (\sigma'^2 + \pi_a \pi_a + 2v\sigma')^2. \tag{1.55}$$

由于实标量场的质量项在拉氏量中的形式应为 $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$, 因此, 从这个拉氏量我们可以发现理论中存在 3 个无质量的 Goldstone 玻色子: π_1, π_2, π_3 ; 存在一个有质量的 σ' 粒子, 其质量为

$$m_{\sigma'}^2 = 2\lambda v^2. \tag{1.56}$$

此外, 拉氏量 (1.55) 还包含五种相互作用耦合项: $(\sigma')^4, (\pi_a \pi_a)^2, (\sigma')^3, \sigma' \pi_a \pi_a$ 和 $(\sigma')^2 \pi_a \pi_a$, 它们仅取决于两个参数 λ 和 v . 这是对称性带来的结果, 由此对于给定的散射过程, 不同的相互作用项对振幅的贡献会相互抵消.

我们以 $\pi_3(p_1) \pi_3(p_2) \rightarrow \pi_3(p_3) \pi_3(p_4)$ 为例来看一下. 这个过程的树图散射 Feynman 图

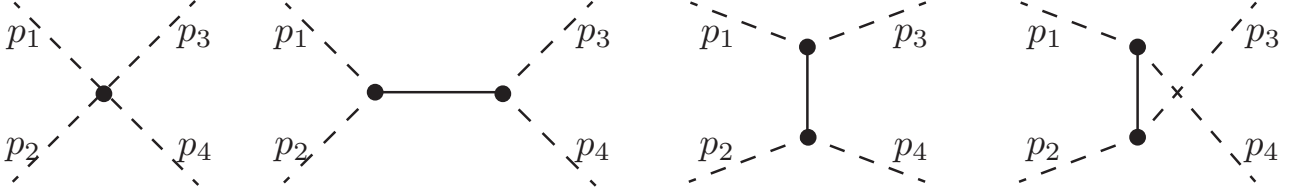


图 1.6: 线性 σ 模型中 $\pi_3(p_1)\pi_3(p_2) \rightarrow \pi_3(p_3)\pi_3(p_4)$ 散射在树图阶的 Feynman 图. 从左到右分别为接触项, s -道, t -道和 u -道 σ' 交换的贡献, 其中虚线表示 π_3 , 实线表示 σ' .

如图 1.6 所示由 4 项不同的贡献组成. 对于 $2 \rightarrow 2$ 的散射过程, 四个动量 $p_i (i = 1, \dots, 4)$ 可以组成 $C_4^2 = 6$ 个 Lorentz 不变的变量,^{1.7} 由于能动量守恒 $(p_1 + p_2)^\mu = (p_3 + p_4)^\mu$ 给出 4 个限定条件, 因此, 一共只有两个独立的 Lorentz 不变的变量. 通常, 我们定义 Mandelstam 变量 s, t, u :

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad (1.57)$$

容易证明, 它们满足关系

$$s + t + u = \sum_i p_i^2 = \sum_i m_i^2, \quad (1.58)$$

其中第二个等式只对壳粒子成立.

所谓的 s -道, t -道和 u -道依次如图 1.6 后 3 个图所示.

从拉氏量 (1.55), 我们可以得到与此散射过程相关的 Feynman 规则:

$$\begin{aligned} & \text{Contact term: } -i \frac{\lambda}{4} \cdot 4! = -6i\lambda, \\ & \text{Exchange terms: } -i \frac{\lambda}{4} 4v \cdot 2 = -2iv\lambda, \end{aligned}$$

其中, 因为同一个顶点上出现了多个 π_3 , 它们是全同玻色子, 我们需要考虑多种可能的 Wick 收缩相应的对称因子, 即第一行中的因子 $4!$ 和第二行中的因子 2 .

利用上面的 Feynman 规则, 我们可以得到 $\pi_3(p_1)\pi_3(p_2) \rightarrow \pi_3(p_3)\pi_3(p_4)$ 的树图振幅:

$$\begin{aligned} i\mathcal{A} &= -i6\lambda + \frac{i(-2i\lambda v)^2}{s - (2\lambda v^2)} + \frac{i(-2i\lambda v)^2}{t - (2\lambda v^2)} + \frac{i(-2i\lambda v)^2}{u - (2\lambda v^2)} \\ &= -i6\lambda + \frac{i}{2\lambda v^2} (2\lambda v)^2 \left(3 + \frac{s+t+u}{2\lambda v^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{p_\pi^4}{m_{\sigma'}^4}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{p_\pi^4}{m_{\sigma'}^4}\right). \end{aligned} \quad (1.59)$$

这里, 我们用到了 $s+t+u=0$ (因为 π_3 是无质量的), 并且考虑小能动量的情形, 即 $p_i^2 \ll m_{\sigma'}^2$, 将散射振幅做了 Taylor 展开. 我们发现不同的图的贡献很大程度上都相互抵消掉了, 导致

^{1.7} 散射过程初末态粒子在壳, Lorentz 不变量 $p_i^2 = m_i^2$ 取值是固定的.

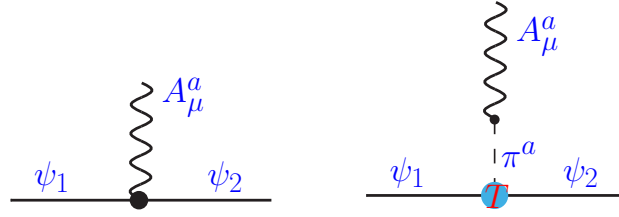


图 1.7: 自发破缺的对称性的流与任意强子 ψ_1 和 ψ_2 的相互作用, 此处 $\psi_{1,2}$ 也可指多个强子. 左图不含 Goldstone 玻色子 π^a 的单粒子极点, 右图则包含.

$\pi_3\pi_3$ 弹性散射的振幅在低能区直到 $\mathcal{O}(p_i^2)$ 都为零.

总结一下我们从线性 σ 模型中发现的几个现象:

- 只要真空是简并的, 就会发生对称性的自发破缺; 此处的自发对称破缺为 $O(4) \rightarrow O(3)$.
- 连续对称性的自发破缺产生了无质量的 Goldstone 玻色子, 其个数与发生了自发破缺的对称性的生成元的个数相同; 因为 $O(N)$ 群的生成元个数为 $N(N-1)/2$, 此处 Goldstone 玻色子的个数为 3.
- 存在某个 Hermitian 算符, 其真空期望值不为零; 此处为 $\langle \sigma \rangle = v$.
- Goldstone 玻色子在其零动量的低能极限下不发生相互作用.

1.5.2 Goldstone 玻色子的导数耦合

下面我们论证涉及到 Goldstone 玻色子的强作用振幅在低能极限 ($p \rightarrow 0$) 下必定为零, 即 Goldstone 玻色子的耦合形式必定是导数耦合的.

由

$$\langle \pi^a | Q_A^a | 0 \rangle = \int d^3x \langle \pi^a | A_0^a(x) | 0 \rangle \neq 0 \quad (1.60)$$

可知对应于自发破缺的对称性的流作用到真空上可以产生 Goldstone 玻色子, 因此, 下面的矩阵元不为零, 根据 Lorentz 结构它可以写为:

$$\langle \pi^b | A_\mu^a | 0 \rangle = -iq_\mu F_\pi \delta^{ab}, \quad (1.61)$$

其中 F_π 是具有质量量纲的一个量, 称为 π 介子的衰变常数. 流 A_μ^a 与任意强子之间的强相互作用 (只要对称性允许) 有不包含和包含 Goldstone 玻色子 π^a 的单粒子极点两种贡献, 如图 1.7 所示. 因此, 其相应的矩阵元可以写为:

$$\langle \psi_1 | A_\mu^a(0) | \psi_2 \rangle = R_\mu^a + F_\pi q_\mu \frac{1}{q^2} \mathcal{T}^a, \quad (1.62)$$

其中, $\mathcal{T}^a$ 是 Goldstone 玻色子与 $\psi_1\psi_2$ 耦合的振幅. 将上式两侧同与流携带的四动量 q^μ 收缩, 利用流守恒方程 (即使对称性已经自发破缺了, 所对应的流仍然满足流守恒方程), $q^\mu A_\mu^a = 0$,

可以得到

$$q^\mu R_\mu^a + F_\pi \mathcal{T}^a = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{q^\mu \rightarrow 0} \mathcal{T}^a = 0. \quad (1.63)$$

即 Goldstone 玻色子与物质场 (非规范场或 Goldstone 玻色子的场) 以及 Goldstone 玻色子之间的耦合在低能极限 $q^\mu \rightarrow 0$ 时为零, 即 Goldstone 玻色子的耦合必须是导数形式的.

 **习题 1.1** 从拉氏量 (1.55) 出发, 证明

$$\mathcal{A}(\pi_3 \sigma' \rightarrow \pi_3 \sigma') = \mathcal{O}\left(\frac{p_\pi^2}{m_\sigma^2}\right). \quad (1.64)$$

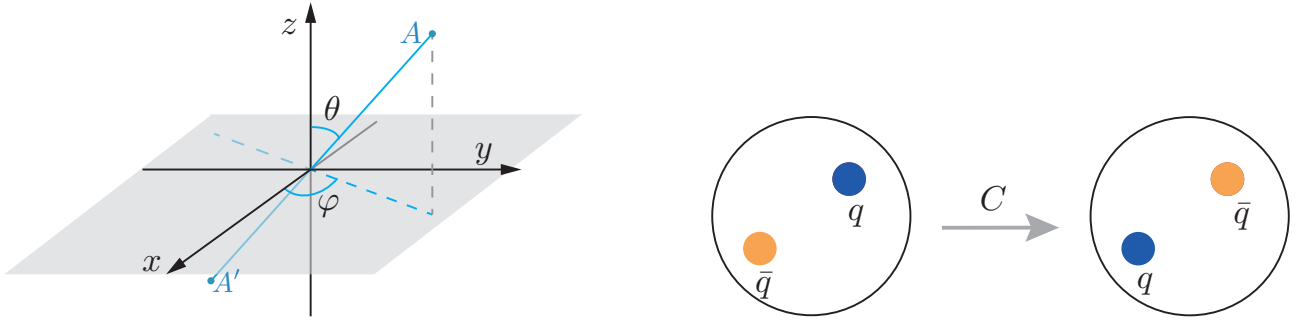


图 1.8: 左图为宇称变换示意图: 在宇称变换下, A 点变到 A' 点, 其立体角 (θ, φ) 变为 $(\pi - \theta, \pi + \varphi)$. 右图为 C 宇称变换示意图.

1.6 介子的量子数与 PDG 命名规则

在此插播介绍由一对正反夸克组成的介子的量子数以及粒子数据组 (Particle Data Group, PDG) 的命名规则.

如图 1.8 左图所示, 在宇称变换下, 立体角 (θ, φ) 变为 $(\pi - \theta, \pi + \varphi)$. 介子的坐标空间波函数中包含的球谐函数满足性质:

$$Y_{Lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^L Y_{Lm}(\theta, \varphi), \quad (1.65)$$

而且正反费米子的宇称相反, 因此, 轨道角动量为 L 的正反费米子对的宇称为 $P = (-1)^{L+1}$.

重子数, 电荷, 同位旋第 3 分量 I_3 , 奇异数, 粲数和底数等为相加性量子数. 相加性量子数为零的介子是 C 宇称的本征态. 考虑这样的由一对正反夸克组成的介子, 其中的正反夸克互为反粒子, 在 C 宇称变换下, 它们互换位置. 因此, 其空间波函数的变化与上述宇称变换带来的效应相同, 给出 $(-1)^{L+1}$ 的因子. 同时, 它们的自旋空间波函数也会有变化. 如果正反夸克的总自旋 $S = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_q \downarrow_{\bar{q}} - \downarrow_q \uparrow_{\bar{q}}\rangle \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_{\bar{q}} \downarrow_q - \downarrow_{\bar{q}} \uparrow_q\rangle; \quad (1.66)$$

而如果总自旋为 $S = 1$ (例如考虑自旋第 3 分量为 0 的自旋波函数),

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_q \downarrow_{\bar{q}} + \downarrow_q \uparrow_{\bar{q}}\rangle \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_{\bar{q}} \downarrow_q + \downarrow_{\bar{q}} \uparrow_q\rangle. \quad (1.67)$$

因此, 自旋空间波函数的变化可以带来的因子可以写为 $(-1)^{S+1}$. 于是, 正反夸克对组成的介子的 C 宇称为

$$C = (-1)^{L+1} (-1)^{S+1} = (-1)^{L+S}. \quad (1.68)$$

对于 $S = 0$ 的介子, 能够形成的量子数包括

$$J^{PC} = \text{偶}^{-+}, \quad \text{奇}^{+-}. \quad (1.69)$$

表 1.3: 现在的 PDG 对不显含奇异夸克或重夸克的介子的命名规则^[2]. 括号中显示的是目前尚无实验报道的介子, ψ^* 表示粲偶素命名中有个特例: J/ψ .

	$J^{PC} = 0^{-+}$	1^{+-}	1^{--}	0^{++}
	2^{-+}	3^{+-}	2^{--}	1^{++}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
最小夸克组分				
$u\bar{d}, u\bar{u} - d\bar{d}, d\bar{u} \ (I = 1)$	π	b	ρ	a
$d\bar{d} + u\bar{u}$ 及/或 $s\bar{s} \ (I = 0)$	η, η'	h, h'	ω, ϕ	f, f'
$c\bar{c}$	η_c	h_c	ψ^*	χ_c
$b\bar{b}$	η_b	h_b	Υ	χ_b
含 $c\bar{c}$, $I = 1$	(Π_c)	Z_c	R_c	(W_c)
含 $b\bar{b}$, $I = 1$	(Π_b)	Z_b	(R_b)	(W_b)

对于 $S = 1$ 的介子, 能够形成的量子数包括

$$J^{PC} = \underbrace{1^{--}}_{L=0}, \underbrace{(0, 1, 2)^{++}}_{L=1}, \underbrace{(1, 2, 3)^{--}}_{L=2}, \dots \quad (1.70)$$

可以看到, 有些 J^{PC} 组合是 (1.69) 和 (1.70) 没有包含的, 这些被称为奇特量子数 (exotic quantum numbers). 具有这种量子数的介子无法由正反夸克对作为价夸克形成, 因此是奇特强子 (exotic hadron). 对它们的寻找几十年来一直是高能物理实验的重要目标之一. 奇特量子数包括:

$$J^{PC} = 0^{--}, \text{ 偶}^{+-}, \text{ 奇}^{-+}. \quad (1.71)$$

根据介子的 J^{PC} 和同位旋量子数, PDG 对各种介子命名, 如表 1.3 所示. 具有奇特量子数的介子的命名规则是类似的, 例如具有 $J^{PC} = 1^{-+}$ 的同位旋为 1 的介子被称为 π_1 , 如 $\pi_1(1400)$ ^[2].

需要指出的是, 虽然一个同位旋多重态中带电的粒子与中性粒子属于同一个味多重态, 但是只有其中相加性量子数为 0 的粒子具有确定的 C 宇称, J^{PC} 中的 C 宇称部分才有意义. 对于一个包含相加性量子数为 0 的同位旋多重态, 只有其中同位旋第 3 分量 $I_3 = 0$ 的粒子是 C 宇称的本征态, 即具有确定的 C 宇称, 其余粒子互为反粒子, C 宇称变换将 $I_3 = m$ 的粒子变为 $I_3 = -m$ 的粒子. 因此, 我们还经常引入另一个量子数, G 宇称, 其定义为:

$$G = Ce^{-i\pi I_2}, \quad (1.72)$$

其中, C 表示 C 宇称, I_2 为同位旋 y 分量的算符; 即我们将粒子态在同位旋空间绕 y 轴转动 180° , 然后再将之变为它的反粒子. 参照图 1.8 中左图所示的坐标系, 容易想象绕 y 轴旋转 180° 的后果也是将 $I_3 = m$ 的态变成 $I_3 = -m$ 的态; 这样的变换在进一步做 C 变换后

又变回了 $I_3 = m$ 的态, 只是跟变换前的态相比这时可能会有一个相位因子的差别. 也就是说, G 算符与同位旋算符是对易的, $[G, \vec{I}] = 0$, 同一个同位旋多重态中的粒子具有相同的 G 宇称. 我们可以选取其中电中性的粒子来确定整个同位旋多重态的 G 宇称.

对于同位旋为 I , $I_3 = m$ 的态来说, 在同位旋空间沿 y 轴的转动可表示为

$$e^{-i\pi I_2}|I m\rangle = \sum_{m'} d_{m'm}^I(\pi)|I m'\rangle = (-1)^{I-m}|I, -m\rangle, \quad (1.73)$$

其中, $d_{m'm}^I(\alpha) \equiv \langle I m' | \exp(-i I_2 \alpha) | I m \rangle$ 为转动矩阵的矩阵元, 我们用到了它的性质: $d_{m'm}^I(\pi) = (-1)^{I-m} \delta_{m, -m'}$. 考虑同位旋 3 分量 $m = 0$ 的介子, $(-1)^{I-m} = (-1)^I$; 其价夸克为一对互为反粒子的正反夸克, 由 (1.68) 可知其 $C = (-1)^{L+S}$. 因此, 我们可以得到包含这样的介子的同位旋多重态的 G 宇称:

$$G = (-1)^{L+S+I}. \quad (1.74)$$

例如, π 介子: $G(\pi) = -1$; ρ 介子: $G(\rho) = 1$; ω 介子: $G(\omega) = -1$; n 个 π 介子的系统: $G(n\pi) = (-1)^n$.

对于 C 宇称守恒的强相互作用过程, 可以简单地通过判断 G 宇称是否守恒来判断同位旋是否守恒.

1.7 重夸克对称性

与轻夸克不同, 粲夸克和底夸克的质量远大于 Λ_{QCD} . 所以当研究的物理过程中涉及到的能标度为 $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ 时, 我们便可以将 Λ_{QCD}/m_Q 看做一个小量 (其中, m_Q 表示重夸克质量) 做幂级数展开. 领头阶由重夸克极限 ($m_Q \rightarrow \infty$) 给出, 此时, 存在重夸克对称性. 实际情况下, 重夸克对称性是近似的对称性, 分为以下几种: 重夸克自旋对称性 (heavy quark spin symmetry, HQSS), 重夸克味对称性 (heavy quark flavor symmetry, HQFS) 和重反夸克-双夸克对称性 (heavy antiquark-diquark symmetry, HADS).

重夸克自旋对称性: 与重夸克自旋相关的相互作用正比于其磁矩:

$$\propto \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{B}^a}{m_Q} \xrightarrow{m_Q \rightarrow \infty} 0, \quad (1.75)$$

其中, $\vec{\sigma}$ 为重夸克的自旋算符, $\vec{B}^a$ 为色磁场, 因此, 重夸克的自旋在重夸克极限下退耦. 考虑一个包含重夸克的系统, 其总角动量包含三部分: 重夸克的自旋 $\vec{s}_Q$, 轻自由度 (包括轻夸克和胶子) 的自旋 $\vec{s}_q$ 和轨道角动量 $\vec{L}$:

$$\vec{J} = \vec{S}_Q + \vec{L} + \vec{s}_q \equiv \vec{S}_Q + \vec{s}_\ell. \quad (1.76)$$

在重夸克极限下, 因为重夸克的自旋退耦, 所以总角动量守恒意味着轻自由度的总角动量 $\vec{s}_\ell$ 守恒, 是好量子数. 于是, 我们可以利用 s_ℓ 对包含重夸克的强子分类, 属于同一个自旋多重态的重味强子或重夸克偶素的质量在重夸克极限下是简并的. 举例说明如下 (见表 1.4):

- S 波重介子: 包括 $J^P = 0^-$ 的赝标重介子和 $J^P = 1^-$ 的矢量重介子, 它们组合成一个自旋多重态; 例如基态粲介子 (D, D^*) 以及基态底介子 ($\bar{B}, \bar{B}^*$). 轻夸克的自旋为 $s_q = \frac{1}{2}$, 轨道角动量为 $L = 0$, 它们耦合得到 $s_\ell = \frac{1}{2}$, 宇称为 $P = (-1)^{L+1} = -$, 因此, S 波重介子的量子数可以写为 $s_\ell^P = \frac{1}{2}^-$, 这里的 P 指的是整个介子的宇称.
- P 波重介子: $L = 1$, 宇称为 $+$; 轻夸克自旋与轨道角动量耦合有两种, 因此, P 波重介子有两种不同的自旋多重态, 分别为 $s_\ell^P = \frac{1}{2}^+$ 和 $\frac{3}{2}^+$. $s_\ell^P = \frac{1}{2}^+$ 的粲介子多重态中包含 $J^P = (0^+, 1^+)$ 的介子 (D_0^*, D_1); $s_\ell^P = \frac{3}{2}^+$ 的多重态中包含 $J^P = (1^+, 2^+)$ 的介子 (D_1, D_2^*). 底介子类似.
- 包含一个重夸克的 S 波重子: 包括 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 和 $\frac{3}{2}^+$ 的基态重重子. 两个轻夸克的总自旋 $s_q = 0$ 或 1 , 轨道角动量为 0 , 因此, 也存在两类自旋多重态, 其量子数分别为 $s_\ell^P = 0^+$ 和 1^+ . 考虑夸克组分为 Qud 的重子 Λ_Q 和 Σ_Q , 它们的同位旋分别为 $I = 0$ 和 $I = 1$. 考虑同位旋对称性, u, d 夸克可以看做全同粒子, Fermi-Dirac 统计要求它们的波函数必须全反对称. 波函数包含色空间, 味 (此处为同位旋) 空间, 坐标空间和自旋空间四部分. 色空间的波函数总是全反对称的, 基态重子的坐标空间波函数为 S 波, 是对称的, 总同位旋为 0 (1) 的两个轻夸克的同位旋空间波函数是反对称 (对称) 的. 因此, Λ_Q (Σ_Q) 中的两个轻夸克的自旋波函数反对称 (对称), 为 $s_q = 0(1)$; 也就是说, Λ_Q 和 Σ_Q 分别有 $s_\ell^P = 0^+$ 和 $s_\ell^P = 1^+$. 前者为自旋单态, 没有自旋伴子; 而后者 s_ℓ 与重夸克的自旋耦合之后, 其自旋多重态中会有 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 和 $J^P = \frac{3}{2}^+$ 两种重子.
- S 波重夸克偶素: 其中不含轻夸克, 因此 $s_\ell = 0$. S 波粲偶素的自旋多重态中包含自旋单态赝标介子 η_c 和自旋三重态矢量介子 J/ψ . 此处, 自旋单态和三重态指的是正反重夸克对的总自旋分别为 0 和 1 .
- P 波重夸克偶素: $s_\ell = L = 1$. 对粲偶素来说, 自旋多重态中包含自旋单态介子 h_c (其 $J^{PC} = 1^{+-}$) 和自旋三重态介子 χ_{c0}, χ_{c1} 和 χ_{c2} (其 J^{PC} 分别为 $0^{++}, 1^{++}$ 和 2^{++}).

重夸克味对称性: 在只包含一个重夸克的强子中, 其余的夸克都是轻夸克, 强子内部的动力学能标由非微扰 QCD 的能标 Λ_{QCD} 给出, 也就是说夸克之间交换胶子的能动量为 $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$. 放出或吸收胶子对重夸克的速度带来的改变为

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m_Q} = \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_Q}\right) \xrightarrow{m_Q \rightarrow \infty} 0, \quad (1.77)$$

表 1.4: 一些含粲夸克的强子以及它们的量子数. J 表示该强子的自旋, s_Q 表示其中重夸克部分的自旋, s_ℓ 表示强子自旋中除去重夸克自旋之外的部分, 包括轨道角动量和轻自由度的自旋.

粒子	(D, D^*)	(D_0^*, D_1)	(D_1, D_2^*)	Λ_c	(Σ_c, Σ_c^*)	$(\eta_c, J/\psi)$	$(h_c, \chi_{c0}, \chi_{c1}, \chi_{c2})$
$J^{P(C)}$	$(0^-, 1^-)$	$(0^+, 1^+)$	$(1^+, 2^+)$	$\frac{1}{2}^+$	$(\frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+)$	$(0^{--}, 1^{--})$	$(1^{+-}, 0^{++}, 1^{++}, 2^{++})$
s_Q	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(0, 1)$	$(0, 1, 1, 1)$
s_ℓ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	1

即在重夸克极限下, 单重强子内的重夸克是静止的, 其作用就是提供一个色三重态 (color triplet) 的源 (如果是反重夸克, 则相应为色反三重态). 既然如此, 那么重夸克的质量就无关紧要了, 粲夸克和底夸克的表现现在重夸克极限下就一样了. 这就是重夸克味对称性, 可利用它将动力学能标为 $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ 的包含单个粲夸克和底夸克的系统联系起来.

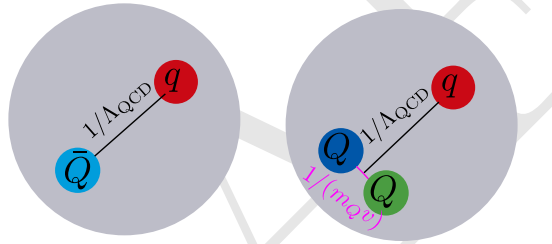


图 1.9: 重介子的尺度约为 $1/\Lambda_{\text{QCD}}$; 双重重子中, 两个重夸克之间的距离尺度约为 $1/(m_Q v)$, 重子的尺度约为 $1/\Lambda_{\text{QCD}}$.

重反夸克-双夸克对称性: 既然重夸克仅是提供色源, 只要其是色 $\text{SU}(3)_c$ 的同样的不可约表示, 在重夸克极限下就可近似等价来处理, 那么我们就可以进一步推广 HQFS. 包含两个重夸克的双重重子中, 由于轻夸克必定是色三重态, 强子整体色单态的限制就意味着这两个重夸克必定处于色反三重态中. 如图 1.9 所示, 它们之间的距离大约是其交换动量大小的倒数 $\sim 1/(m_Q v)$, 其中 v 表示重夸克的速度, 在 m_Q 很大时, 其尺度远小于它们与轻夸克之间的距离, 即 $1/(m_Q v) \ll 1/\Lambda_{\text{QCD}}$, 这两个重夸克可近似看做类点粒子, 形成一个重双夸克 (diquark) 体系, 在重夸克极限下与重反夸克类似. 这便是重反夸克-双夸克对称性^[7], 可利用它将双重重子与包含反重夸克的介子联系起来. 由于双夸克的自旋为整数, 是玻色子; 而单个夸克的自旋为 $1/2$, 是费米子; 这种对称性将它们联系起来, 有时也被称为重夸克的超对称.

1.8 重夸克对称性在强子谱中的应用

自 2003 年以来, 世界各地的高能物理实验中发现了大量性质与夸克模型理论预期不符的共振或者类共振结构, 它们是所谓的奇特强子态的候选者, 从而引发了大量研究. 关于这些研究的内容, 可参见近几年的综述文章 (各有所侧重)^[8-18].

下面我们讨论重夸克对称性在研究重味强子性质中的应用, 侧重于新发现的强子态, 我们将看到利用这些简单的原理就可以得到一些有意义的重要结果.

1.8.1 重介子

基态重介子: 同一个自旋多重态中重味强子质量之间的超精细劈裂 (hyperfine splitting) 反比于重夸克的质量. 因此, 对于基态 S 波的底介子和粲介子来说,

$$\frac{m_{B^*} - m_B}{m_{D^*} - m_D} \simeq \frac{m_c}{m_b} \simeq \frac{m_{D^*} + m_D}{m_{B^*} + m_B}, \quad (1.78)$$

上面第二个约等于号是因为单重强子的质量可以写作 $m_H = m_Q + m_0$, $m_0 = \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$. 于是,

$$\underbrace{m_{B^*}^2 - m_B^2}_{\simeq 0.48 \text{ GeV}^2} \simeq \underbrace{m_{D^*}^2 - m_D^2}_{\simeq 0.55 \text{ GeV}^2}. \quad (1.79)$$

实验测量的数值之间的差别与我们预期的 HQFS 的误差

$$\mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_c} - \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b}\right) = \mathcal{O}(15\%) \quad (1.80)$$

是相符的.

$D_1(2420)$ 和 $D_1(2430)$: 《粒子数据表》^[2]列有两个质量差不多, 但是宽度相差一个量级的具有同样量子数 $J^P = 1^+$ 的粲介子: $D_1(2420)$ 和 $D_1(2430)$, 它们的宽度分别是 $(31.7 \pm 2.5) \text{ MeV}$ 和 $(314 \pm 29) \text{ MeV}$ ^[2]. 为什么它们的衰变宽度会有这么大的差别?

第 1.7 节中提到, P 波重介子有两种不同的自旋多重态, 分别具有 $s_\ell^P = \frac{1}{2}^+$ 和 $\frac{3}{2}^+$ 的量子数. 虽然它们都衰变到同样的末态 $D^*\pi$, 但是在重夸克极限下, 它们的衰变方式不同:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}^+ (D_1) &\rightarrow \frac{1}{2}^- (D^*) + 0^-(\pi) : S\text{波}, \\ \frac{3}{2}^+ (D_1) &\rightarrow \frac{1}{2}^- (D^*) + 0^-(\pi) : D\text{波}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

其中, 括号外的量子数为各粒子的 s_ℓ^P . 两体衰变的衰变宽度的公式为

$$d\Gamma = \frac{|\vec{q}|}{32\pi^2 M^2} \sum_{(\lambda)} |\mathcal{A}_{(\lambda)}|^2 d\Omega, \quad (1.82)$$

其中 M 为初态粒子的质量, m_1, m_2 为末态粒子的质量,

$$|\vec{q}| \equiv \frac{1}{2M} \sqrt{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)} \quad (1.83)$$

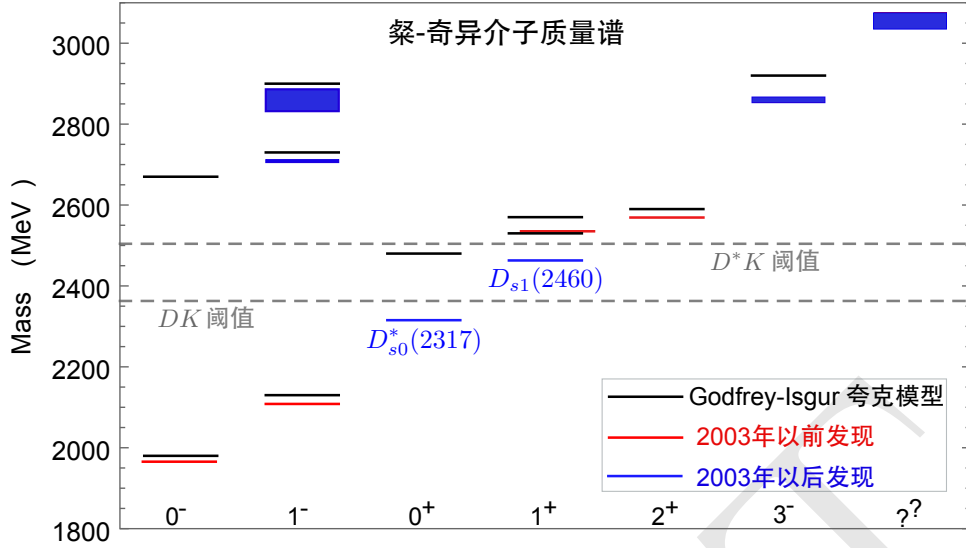


图 1.10: 各 J^P 量子数的粲-奇异介子的质量谱. 黑色的谱线为 Godfrey-Isgur 夸克模型计算的 $c\bar{s}$ 介子质量的理论结果^[22], 红线表示 2003 年以前实验已经发现的介子, 蓝线表示 2003 年以来发现的介子. 阴影表示它们质量的误差, 实验测量值取自《粒子数据表》^[2].

为末态粒子在质心系中的 3 动量的大小, $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$ 是 Källén 函数, $d\Omega = d\varphi d\cos\theta$ 为立体角元, $\mathcal{A}_{(\lambda)}$ 为衰变振幅, $\overline{\sum}_{(\lambda)}$ 表示对末态粒子的极化方向求和, 对初态粒子的极化方向求平均. 令衰变末态之间的轨道角动量为 L , 则 $|\mathcal{A}_{(\lambda)}| \propto |\vec{q}|^L$, 两体衰变的衰变宽度 $\Gamma \propto |\vec{q}|^{2L+1}$. (1.81) 中的 S 和 D 波衰变的宽度分别正比于 $|\vec{q}|$ 和 $|\vec{q}|^5$. 后者与前者相比, 会受到很大的压低, 压低因子为 $(|\vec{q}|/\Lambda)^4 \simeq (0.36 \text{ GeV}/\Lambda)^4 \sim 0.05$, 其中 $\Lambda \sim m_\rho$ 表示典型的强子能标. 因此, 我们可以推论两个 D_1 介子中宽度较小的 $D_1(2420)$ 应该属于 $s_\ell^P = \frac{3}{2}^+$ 这个自旋多重态, 其自旋伴子 (spin partner) 是自旋为 2 的 $D_2^*(2460)$.^{1.8}

$D_{s0}^*(2317)$ 和 $D_{s1}(2460)$: 下面我们讨论 2003 年 B 介子工厂实验中观测到的两个引起广泛关注的介子: $D_{s0}^*(2317)$ 和 $D_{s1}(2460)$, 它们分别由 BABAR^[23] 和 CLEO^[24] 合作组发现. 如图 1.10 所示, 它们的质量比 Godfrey-Isgur 夸克模型^[22] 对具有相同量子数的最轻 $c\bar{s}$ 介子的质量预言低很多. 而且, 它们的质量差与基态 D 和 D^* 介子的质量差几乎相同:

$$\underbrace{M_{D_{s1}(2460)} - M_{D_{s0}^*(2317)}}_{=(141.8 \pm 0.8) \text{ MeV}} \simeq \underbrace{M_{D^{*\pm}} - M_{D^\pm}}_{=(140.67 \pm 0.08) \text{ MeV}}, \quad (1.84)$$

这是巧合还是有其物理原因? 这两个粒子随后得到了其它实验组的证实. 它们分别位于 DK 和 D^*K 的阈下, 因此, 它们或者通过同位旋破坏的过程衰变到强子末态, 或者放出光子发生辐射跃迁, 另外, D_{s1} 也可以有不破坏同位旋对称性的三体强子末态 $D_s\pi\pi$ 的衰变 (但是由于

^{1.8} $D_1(2430)$ 的参数是通过利用 Breit-Wigner 形式的振幅分析实验数据得到的^[19], 对于 $D_1(2430)$ 来说, 这样的做法有问题, 参见 [20–21] 中关于 $D_0^*(2300)$ 的讨论, 在此不赘述.

三体相空间的压低, 其分宽度只有同位旋破坏的 $D_s^*\pi$ 道的分宽度的 10% 左右^[2]:

$$\begin{aligned} D_{s0}^*(2317) &\rightarrow D_s\pi, D_s^*\gamma, \\ D_{s1}(2460) &\rightarrow D_s^*\pi, D_s\pi\pi, D_s\gamma, D_{s0}^*(2317)\gamma. \end{aligned} \quad (1.85)$$

它们的总宽度目前只测到了上限.

针对它们的内部结构, 提出了各种模型, 例如修改夸克模型的势得到与实验相符的 $c\bar{s}$ 介子, 手征双重态模型, 四夸克态 (tetraquark) 模型以及强子分子态 (hadronic molecule) 模型等 (参见综述 [20,25]). 先不论它们的内部结构究竟是什么, 我们仍可以利用 HQFS 来预言最轻的 B_{s0}^* 标量介子和 B_{s1} 轴矢介子的质量. 将 $[D_{s0}^*(2317), D_{s1}(2460)]$ 作为一个自旋多重态, 可得

$$\begin{aligned} M_{B_{s0}^*} &= \bar{M}_c + \Delta_{b-c} + (M_{D_{s0}^*} - \bar{M}_c) \frac{m_c}{m_b} \simeq 5.71 \text{ GeV}, \\ M_{B_{s1}} &= \bar{M}_c + \Delta_{b-c} + (M_{D_{s1}} - \bar{M}_c) \frac{m_c}{m_b} \simeq 5.76 \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

其中, $\bar{M}_c = \frac{1}{4} [M_{D_{s0}^*(2317)} + 3M_{D_{s1}(2460)}] \simeq 2.424 \text{ GeV}$ 是自旋多重态 $[D_{s0}^*(2317), D_{s1}(2460)]$ 的自旋平均质量 (对多重态中 0 自旋粒子的质量以及自旋为 1 的粒子的三个自旋分量的质量求平均), $\Delta_{b-c} \equiv m_b - m_c \simeq \bar{M}_{B_s} - \bar{M}_{D_s} \simeq 3.33 \text{ GeV}$ 是底夸克和粲夸克之间的质量差, $\bar{M}_{B_s} = 5.403 \text{ GeV}$, $\bar{M}_{D_s} = 2.076 \text{ GeV}$ 分别是 (B_s, B_s^*) 和 (D_s, D_s^*) 的自旋平均质量. 上述简单估计的结果与格点 QCD 的计算结果^[26]

$$\begin{aligned} M_{B_{s0}^*}^{\text{lat.}} &= (5.711 \pm 0.013 \pm 0.019) \text{ GeV}, \\ M_{B_{s1}}^{\text{lat.}} &= (5.750 \pm 0.017 \pm 0.019) \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (1.87)$$

符合得很好.

在强子分子态模型中, $D_{s0}^*(2317)$ 和 $D_{s1}(2460)$ 的主要成分分别为 DK 和 D^*K 的束缚态, (1.84) 中所示质量差的关系便是 HQSS 的自然结果^[27-28]: K 介子中只包含轻夸克, 从而其与 D 和 D^* 在低能区的相互作用几乎相同, 而且 D 与 D^* 在重夸克极限下简并, DK 和 D^*K 束缚态的束缚能也便近似相等了. $D_{s0}^*(2317)$ 和 $D_{s1}(2460)$ 主要成分是 DK 和 D^*K 强子分子态的图像得到了不同的格点 QCD 合作组计算结果的支持^[29-31].

X(5568): 2016 年, D0 合作组宣布在正反质子对撞的半单举反应 $p\bar{p} \rightarrow B_s\pi^\pm + \text{anything}$ (其中 anything 表示探测到的 $B_s\pi^\pm$ 之外的其它粒子) 的 $B_s\pi^\pm$ 的不变质量谱中观测到一个窄共振结构, 将之称为 X(5568); 它的质量为 $(5567.8 \pm 2.9^{+0.9}_{-1.9}) \text{ MeV}$, 宽度为 $(21.9 \pm 6.4^{+5.0}_{-2.5}) \text{ MeV}$ ^[32]. 这样的衰变宽度说明其同位旋必定为 1. 这是因为同位旋破坏有两种来源: 虚光子带来的电磁贡献 (因为 u, d 夸克的电荷不同); u, d 夸克的质量差. 前者和后者通常被分别称为同位旋破坏的 QED 和 QCD 贡献. 与同位旋守恒的强衰变过程 (宽度大约为 $\mathcal{O}(100 \text{ MeV})$) 相比, 由这两

种贡献给出的同位旋破坏衰变的衰变宽度分别被压低 $\mathcal{O}(\alpha^2)$ 和 $\mathcal{O}([(m_d - m_u)/\Lambda_{\text{QCD}}]^2)$, 量级都是 10^{-4} , 即同位旋破坏的强子末态的衰变宽度大约为 $\mathcal{O}(10 \text{ keV})$.

如果 $X(5568)$ 确实对应于一个强子共振态, 那么它的最小夸克组分是 $\bar{b}s\bar{d}u$ (或 $\bar{b}s\bar{u}d$) 四个夸克 (及反夸克). 然而, 我们可以判断不可能存在质量约为 5.57 GeV 的四夸克态^[33]. 首先, $X(5568)$ 只比基态底-奇异介子 B_s 重大约 200 MeV , 却要多两个轻夸克; 在所有的强子中, 只有 π 介子的质量与 200 MeV 相仿, 不过其小质量是由于它是手征对称自发破缺的赝 Goldstone 玻色子, 在其它情况下, 两个轻夸克所提供的质量至少应该为 $2\Lambda_{\text{QCD}} \sim m_{f_0(500)} \sim 0.5 \text{ GeV}$. 因此, 我们预期如果存在 $\bar{b}s\bar{d}u$ 这样的四夸克态, 其质量也应该至少为 5.9 GeV 左右, 与夸克模型的估计相符^[34]. 再者, 如果在 5.57 GeV 附近存在 $\bar{b}s\bar{d}u$, 那么利用 HQFS 可以预期在

$$M_{X(5568)} - \Delta_{b-c} + \mathcal{O}\left(\Lambda_{\text{QCD}}^2 \left(\frac{1}{m_c} - \frac{1}{m_b}\right)\right) \simeq (2.24 \pm 0.15) \text{ GeV} \quad (1.88)$$

附近存在 $\bar{c}s\bar{d}u$ 四夸克态. 然而, 这个区间之内在 $D_s\pi$ 末态发现的介子只有同位旋为 0 的 $D_{s0}^*(2317)$, 它不可能是 $X(5568)$ 的伙伴子. 综上, 我们可以得出结论, D0 实验组观测到的结构不可能是一个 $\bar{b}s\bar{u}q$ 四夸克态造成的. 随后, LHCb^[35], CMS^[36], CDF^[37] 和 ATLAS^[38] 这几个实验组都公布了没找到 $X(5568)$ 信号的实验结果.

1.8.2 双重四夸克态

2017 年, LHCb 实验组首次发现了包含两个粲夸克的双粲重子 $\Xi_{cc}(3620)^{++}$ ^[39]. 利用其质量和 HADS, 可以预言包含两个重夸克的四夸克态的质量. 将含一个重反夸克的介子的质量写为 $m_Q + A$, 那么, 与之通过 HADS 相关的双重重子的质量就大约为 $m_{QQ} + A$, 其中 m_{QQ} 为重双夸克的质量, $A = \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$. 与双重重子不同, 含有两个重夸克的双重四夸克态里的两个重夸克的色波函数有两种可能: $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$, 既包含色反三重态, 也包含色六重态. 考虑到重夸克之间的胶子交换携带的动量 $m_Q v$ 较大, 两个重夸克之间的相互作用可以认为由单胶子交换 (one-gluon exchange, OGE) 近似给出. OGE 依赖于两个夸克的色波函数, 色反三重态的 OGE 是吸引的, 而色六重态的 OGE 是排斥的. 因此, 在重夸克极限下, 基态双重四夸克态中的两个重夸克应该处于能量较低的色反三重态中, 可以通过 HADS 与含有一个反重夸克的反重子建立联系, 它们的质量可以分别写为 $m_{QQ} + B$ 和 $m_Q + B$, 其中 $B = \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ 但是与上面的 A 是不同的参数. 于是, 便可以得到下面的近似关系:

$$M_{QQ\bar{q}\bar{q}} - M_{\bar{Q}\bar{q}\bar{q}} \simeq M_{QQq} - M_{\bar{Q}q}. \quad (1.89)$$

通过这样的关系, 利用 LHCb 测量的 $\Xi_{cc}(3620)^{++}$ 质量以及夸克模型中预言的双底重子的质量, Eichten 和 Quigg 经过分析预言最轻的双粲四夸克态 ($J^P = 1^+$) 的质量约为 3978 MeV , 最轻的双底四夸克态质量约为 10482 MeV , 甚至比 BB^* 的阈值低约 120 MeV , 因此它只能够通

过弱作用衰变, 极其稳定^[40]. 其它一些文献中也给出了类似的预言^[41–44]. LHC 上的实验正在寻找理论预言的稳定双底四夸克态.

值得一提的是, 最近 LHCb 实验组发现了含有两个粲夸克的双粲四夸克态 T_{cc}^+ ^[45–46], 其质量约为 3875 MeV. 然而, 这个粒子很可能是 D^*D 强子分子态^[46–47], 其中的两个粲夸克之间的距离大约为 $1/\sqrt{2\mu_{D^*D}E_B} \simeq 7.5 \text{ fm} \gg 1/\Lambda_{\text{QCD}}$ (这里, 我们用到了 $1\hbar c \simeq 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$, 且在自然单位制中将 $\hbar c$ 取为 1); 此处 μ_{D^*D} 为 D^*D 的约化质量, $E_B \simeq 360 \text{ keV}$ 为 $D^{*+}D^0$ 阈值与 T_{cc}^+ 质量的差. 因此, 这两个粲夸克不能看做近似的类点结构, 上述通过 HADS 所做的预言也就不成立了.

1.8.3 类粲偶素

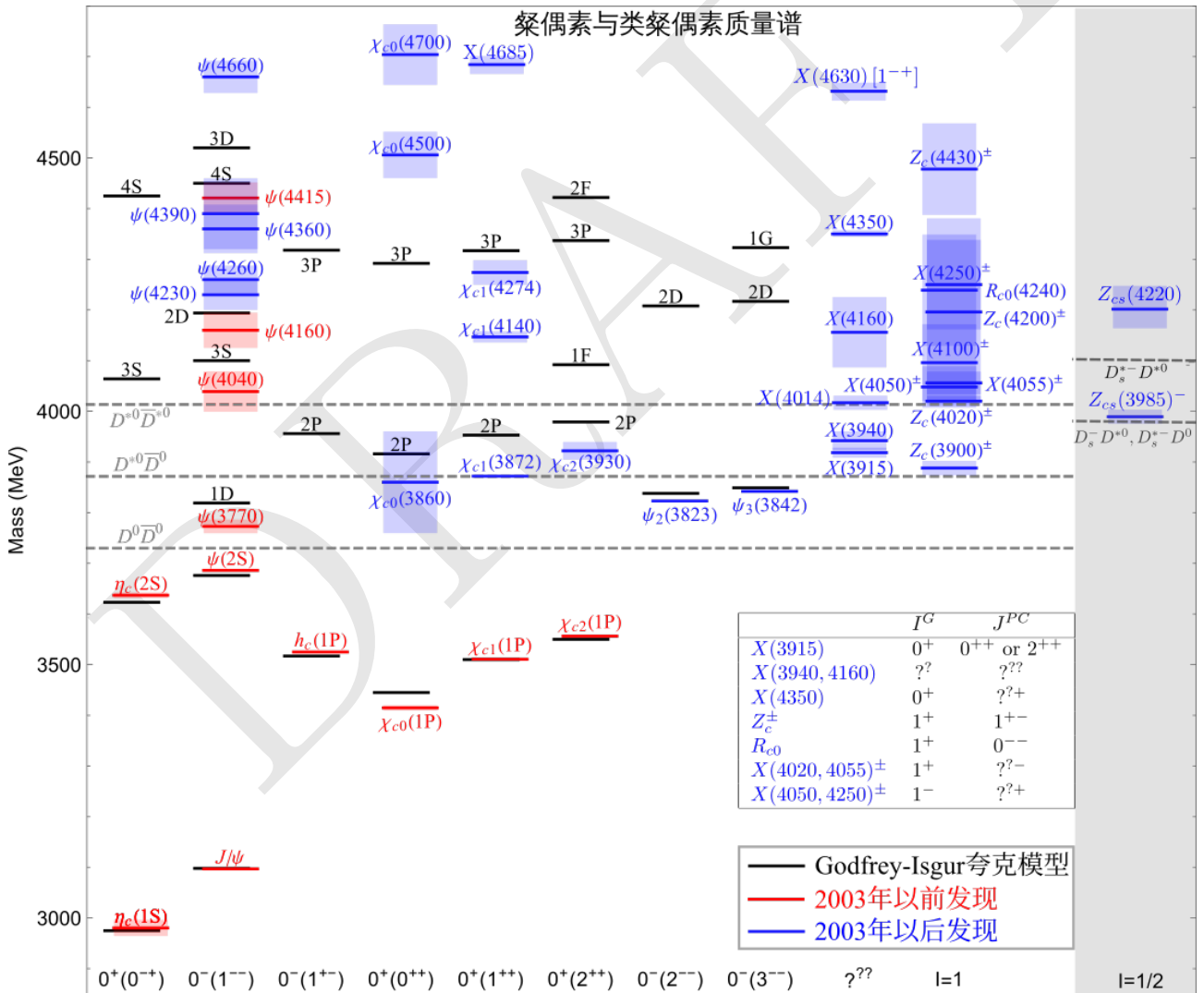


图 1.11: 各 $I^G(J^{PC})$ 量子数的粲偶素与类粲偶素质量谱. 黑线表示 Godfrey-Isgur 夸克模型^[22]计算的粲偶素质量, 红线表示 2003 年以前实验已经发现的粲偶素, 蓝线表示自 2003 年以来实验发现的粲偶素与类粲偶素. 阴影表示它们质量的误差, 实验测量值取自《粒子数据表》^[2].

2003 年, Belle 合作组在 $B^\pm \rightarrow K^\pm J/\psi \pi^+ \pi^-$ 衰变的 $J/\psi \pi^+ \pi^-$ 不变质量谱中发现了一个宽度非常小的粒子 $X(3872)^{[48]}$, 其质量低于夸克模型对 $2P$ 粲偶素的预言 (见图 1.11). 十年后, LHCb 实验组确定了它的量子数为 $J^{PC} = 1^{++}[49]$. 它具有几个非常独特的性质:

- 质量与 $D^0 \bar{D}^{*0}$ 阈值几乎完全重合. 如果取 LHCb 组 2020 年利用 Breit-Wigner 参数化进行振幅分析抽取的质量值, 那么^{1.9}

$$m_{D^0} + m_{D^{*0}} - m_{X(3872)} = \begin{cases} (0.01 \pm 0.14) \text{ MeV } [51], \\ (0.12 \pm 0.13) \text{ MeV } [52], \end{cases} \quad (1.90)$$

这两个测量的加权平均为 $(0.07 \pm 0.12) \text{ MeV}^{[52]}$.

- 虽然相空间非常小, 但是 $X(3872)$ 仍然有很大几率衰变到 $D^0 \bar{D}^{*0} + c.c.$ ($c.c.$ 表示电荷共轭道, 下面我们不再将 $c.c.$ 明显写出来), 其分支比为 $(37 \pm 9)\%^{[2]}$. 这说明 $X(3872)$ 与 $D^0 \bar{D}^{*0}$ 有很强的耦合. 我们后面会看到, 这是强子分子态的重要特征.
- 实验上没有观测到 $X(3872)$ 的带电的同位旋伴子, 因此, 其同位旋为 0. 它到 $\pi^+ \pi^- J/\psi$ (根据习题 1.2, 此处 $\pi^+ \pi^-$ 的同位旋为 1, 该过程主要通过 $\rho^0 J/\psi$ 发生), 破坏同位旋对称性. 然而, 其分支比却与保持同位旋对称性的 $\omega J/\psi$ 分支比相当^[2]:

$$\frac{\mathcal{B}(X \rightarrow \omega J/\psi)}{\mathcal{B}(X \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi)} = 1.1 \pm 0.4. \quad (1.91)$$

这看起来似乎与第 1.8.1 节中讨论 $X(5568)$ 时分析的同位旋破坏的压低相矛盾. 其主要原因在于 $\omega J/\psi$ 的阈值在 $X(3872)$ 的质量之上, 因此该衰变只能通过 ω 共振态的质量分布的尾端发生, 相空间极小^[53]. 不过考虑了相空间的因素之后, 文献^[54] 中定出的 $X(3872)$ 到 $J/\psi \omega$ 和到 $J/\psi \rho$ 的耦合常数的比值仍然有可观的同位旋破坏效应: $g_{X\rho}/g_{X\omega} = 0.26^{+0.08}_{-0.05}$. 这一点可以通过 $X(3872)$ 离 $D^0 \bar{D}^{*0}$ 的阈值比离 $D^+ D^{*-}$ 的阈值近很多来理解: 即使 $X(3872)$ 与 $D^0 \bar{D}^{*0}$ 和 $D^+ D^{*-}$ 具有同样大小的耦合常数, 其波函数里也会包含更多的 $D^0 \bar{D}^{*0}$ 成分, 从而导致由带电和中性的粲介子的质量差带来的同位旋破坏.

$X(3872)$ 是迄今被研究最多的新强子态.

随后, 大量与夸克模型预期不符的结构在粲偶素区间被各实验组相继发现, 因为其内部结构不清楚, 它们在文献中被称作 XYZ 态或者类粲偶素 (charmonium-like states). 图 1.11 给出了截至目前实验测量的粲偶素与类粲偶素的质量谱与 Godfrey-Isgur 夸克模型预言的粲偶素质量谱^[22] 的比较.

XYZ 结构中特别值得一提的还包括: 2005 年 BABAR 实验组通过初态辐射 (initial state

^{1.9}需要注意的是, 对于 $X(3872)$ 这种非常靠近强耦合道的阈值的粒子, 用 Breit-Wigner 参数化是不合适的, 因为它并不能将阈值的效应正确地包含进来. 更合适的做法是采取 Flatté 参数化^[50]. 而实际上^[51] 中也采取 Flatté 参数化的方法抽取了 $X(3872)$ 的极点.

radiation) 在 $J/\psi\pi^+\pi^-$ 末态中发现的矢量 ($J^{PC} = 1^{--}$) 类粲偶素 $Y(4260)$ (也被按照量子数称为 $\psi(4260)$)^[55]; 2011 年 Belle 实验组在几个不同的末态同时发现的带电类底偶素 $Z_b(10610)^\pm$ 和 $Z_b(10650)^\pm$ ^[56] (它们的同位旋为 1, $J^{PC} = 1^{+-}$); 2013 年 BESIII^[57] 和 Belle^[58] 实验组在 $J/\psi\pi^\pm$ 末态发现的带电的类粲偶素 $Z_c(3900)^\pm$ (同位旋为 1, $J^{PC} = 1^{+-}$ ^[59]); 以及 BESIII 在 $h_c\pi^\pm$ 末态中发现的 $Z_c(4020)^\pm$ ^[60].

上面提到的几个 XYZ 态都位于一对正反重介子的阈值附近, 因此, 它们被广泛地猜测是强子分子态^[12] (当然, 也存在其它模型, 如由双夸克-反双夸克组成的四夸克态^[61]). 实际上, 上世纪 90 年代, Törnqvist 就通过单 π 交换模型预言了 $D\bar{D}^*$ 强子分子态的存在^[62-63], 并且预言其质量为约 3870 MeV, 非常接近 $X(3872)$ 的实验测量值. 下面我们利用 HQSS 分析一对基态 $s_\ell^P = \frac{1}{2}^-$ 的正反重介子之间在阈值附近的相互作用.

在阈值附近, 粒子可以通过非相对论近似处理, 相互作用由最低的分波 (即 S 波) 主导. $s_\ell^P = \frac{1}{2}^-$ 的粲介子包括赝标介子 D 和矢量介子 D^* . 考虑 S 波的情况, 它们能够组成的 J^{PC} 组合为:

$$\begin{aligned} 0^{++} &: D\bar{D}, \quad D^*\bar{D}^*; \\ 1^{+-} &: \frac{1}{\sqrt{2}} (D\bar{D}^* + D^*\bar{D}), \quad D^*\bar{D}^*; \\ 1^{++} &: \frac{1}{\sqrt{2}} (D\bar{D}^* - D^*\bar{D}); \\ 2^{++} &: D^*\bar{D}^*. \end{aligned} \tag{1.92}$$

需要注意的是, 因为粲介子不是 C 宇称的本征态, 上面的两个不同 C 宇称的 $D\bar{D}^*$ 和 $D^*\bar{D}$ 的线性组合的相对相位依赖于对 C 宇称变换的相位约定. 此处, 我们采取的约定是 $D \xrightarrow{C} \bar{D}$ 和 $D^* \xrightarrow{C} -\bar{D}^*$.^{1.10}

描述一对重味强子 (下面将 $s_\ell^P = \frac{1}{2}^-$ 的粲介子和反粲介子分别表示为 $H^{(c)}$ 和 $H^{(\bar{c})}$) 的自旋有两种不同的基:

$$\left\{ \begin{array}{l} | \underbrace{s_{1c}, s_{1\ell}, j_1}_{H^{(c)} \text{ 的自旋}}; \underbrace{s_{2c}, s_{2\ell}, j_2}_{H^{(\bar{c})} \text{ 的自旋}}; J \rangle, \\ | \underbrace{s_{1c}, s_{2c}, s_{c\bar{c}}}_{c\bar{c} \text{ 的自旋}}; \underbrace{s_{1\ell}, s_{2\ell}, s_L}_{\text{轻}q\bar{q} \text{ 的角动量}}; J \rangle, \end{array} \right. \tag{1.93}$$

其中 $j_{1,2}$ 为两个介子的自旋, s_{1c} 和 $s_{1\ell}$ (s_{2c} 和 $s_{2\ell}$) 为 $H^{(c)}$ ($H^{(\bar{c})}$) 中粲夸克和轻夸克的自旋, $s_{c\bar{c}}$ 为 $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 介子对中 $c\bar{c}$ 的总自旋, s_L 为 $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 介子对中轻自由度的总角动量, J 为 $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 的总自旋. 两种基之间通过么正变换相联系:

$$| s_{1c}, s_{1\ell}, j_1; s_{2c}, s_{2\ell}, j_2; J \rangle$$

^{1.10} 有些文献中后者的相位也取正号. 在这种相位约定下, 1^{+-} 的组合为 $(D\bar{D}^* - D^*\bar{D})/\sqrt{2}$, 1^{++} 的组合为 $(D\bar{D}^* + D^*\bar{D})/\sqrt{2}$. 只要在计算中用自洽的相位约定, 最终的物理结果是一样的.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{s_{c\bar{c}}, s_\ell} |s_{1c}, s_{2c}, s_{c\bar{c}}; s_{1\ell} s_{2\ell}, s_L; J\rangle \langle s_{1c}, s_{2c}, s_{c\bar{c}}; s_{1\ell} s_{2\ell}, s_L; J | s_{1c}, s_{1\ell}, j_1; s_{2c}, s_{2\ell}, j_2; J\rangle \\
 &= \sum_{s_{c\bar{c}}, s_\ell} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2s_{c\bar{c}}+1)(2s_\ell+1)} \begin{Bmatrix} s_{1c} & s_{2c} & s_{c\bar{c}} \\ s_{1\ell} & s_{2\ell} & s_L \\ j_1 & j_2 & J \end{Bmatrix} |s_{1c}, s_{2c}, s_{c\bar{c}}; s_{1\ell}, s_{2\ell}, s_L; J\rangle,
 \end{aligned} \tag{1.94}$$

其中我们将 Clebsch-Gordan (CG) 系数用 Wigner 9j 符号来表示了。

在重夸克极限下, 重夸克的总自旋 $s_{c\bar{c}}$ 守恒而且退耦, 轻自由度的总角动量 s_L 也守恒, 因此, $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 相互作用的矩阵元在重夸克展开的领头阶可写为

$$\begin{aligned}
 &\left\langle s_{1c}, s_{2c}, s_{c\bar{c}}; s_{1\ell}, s_{2\ell}, s_L; J \left| \hat{\mathcal{H}} \right| s'_{1c}, s'_{2c}, s'_{c\bar{c}}; s'_{1\ell}, s'_{2\ell}, s'_L; J' \right\rangle \\
 &= \left\langle s_{1\ell}, s_{2\ell}, s_L \left| \hat{\mathcal{H}} \right| s'_{1\ell}, s'_{2\ell}, s'_L \right\rangle \delta_{s_{c\bar{c}}, s'_{c\bar{c}}} \delta_{s_L, s'_L} \delta_{JJ'},
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

其中 $\hat{\mathcal{H}}$ 表示相互作用的哈密顿量. 我们考虑的 $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 介子内部夸克之间和介子之间的轨道角动量都为 0. 因此, 其中的 $c\bar{c}$ 和轻夸克对的量子数都只可能是: $s_L^{P_\ell C_\ell}, s_{c\bar{c}}^{P_c C_c} = 0^{-+}$ 或 1^{--} ; 此处, 为了避免与其余讨论中 s_ℓ^P 中的 P 表示整个强子系统的宇称相混淆, 我们将 $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 中的轻夸克部分的宇称和 C 宇称记为 P_ℓ 和 C_ℓ , $c\bar{c}$ 部分的记为 P_c 和 C_c . 同位旋为 0 和 1 的 $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 的相互作用在领头阶都只依赖于两个参数:

$$F_{0I} \equiv \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \left| \hat{\mathcal{H}}_I \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle, \quad F_{1I} \equiv \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \left| \hat{\mathcal{H}}_I \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \tag{1.96}$$

其中, 下标 I 表示 $H^{(c)}H^{(\bar{c})}$ 系统的同位旋, 每个 Dirac 括号中的三个数分别为初态或末态两个介子各自的轻自由度角动量 $s_{1\ell}, s_{2\ell}$ 和两个介子的轻自由度总角动量 s_L . 这意味着 (1.92) 中的 6 对粲介子可以分配到 $s_L = 0$ 和 $s_L = 1$ 的两个自旋多重态中 (对于每个同位旋都如此). $s_L = 0$ 的多重态包括

$$0_L^{-+} \otimes 0_{c\bar{c}}^{-+} = 0^{++}, \quad 0_L^{-+} \otimes 1_{c\bar{c}}^{--} = 1^{+-}; \tag{1.97}$$

$s_L = 1$ 的多重态包括

$$1_L^{--} \otimes 0_{c\bar{c}}^{-+} = 1^{+-}, \quad 1_L^{--} \otimes 1_{c\bar{c}}^{--} = 0^{++} \oplus 1^{++} \oplus 2^{++}. \tag{1.98}$$

我们看到 $J^{PC} = 1^{++}$ 的组合只出现在 $s_L = 1$ 的多重态中. 因此, 在强子分子态图像下, 我们可以得到关于 $X(3872)$ 的如下结论:

- 在重夸克极限下, $X(3872)$ 应该有三个自旋伴子, 其量子数分别为 $J^{PC} = 0^{++}, 1^{+-}$ 和 2^{++} [64–65];
- $X(3872)$ 衰变的选择定则 (因为 $s_{c\bar{c}} = 1$) [66]:

$$\begin{aligned}
 X(3872) &\rightarrow J/\psi \pi \pi(\pi), \quad X(3872) \rightarrow \chi_{cJ} \pi, \quad X(3872) \rightarrow \chi_{cJ} \pi \pi; \\
 X(3872) &\not\rightarrow \eta_c \pi \pi, \quad X(3872) \not\rightarrow h_c \pi \pi.
 \end{aligned} \tag{1.99}$$

上述禁戒仅在重夸克极限下严格成立, 由于粲夸克的质量有限, 它们在实际情况中是被压低的, 相应衰变宽度的压低因子为 $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}^2/m_c^2)$.

而如果 $Z_b(10610)$ 和 $Z_c(10650)$ 是 $B\bar{B}^*$ 和 $B^*\bar{B}$ 相互作用形成的 $J^{PC} = 1^{+-}$ 的同位旋为 1 的强子分子态, 由于 $J^{PC} = 1^{+-}$ 存在于 $s_L = 0$ 和 $s_L = 1$ 两个多重态中, 我们可以推论这两个 $I = 1$ 的多重态内 $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ 的 S 波相互作用必定都是吸引的, 而且在重夸克极限下除这两个 Z_b 之外还可以产生 4 个强子分子态, 分别记为 $W_{b0}[0^{++}]$, $W'_{b0}[0^{++}]$, $W_{b1}[1^{++}]$ 和 $W_{b2}[2^{++}]$ ^[67-68]. $Z_c(3900)$ 和 $Z_c(4020)$ 的情况与之类似, 也应该存在另外 4 个自旋伴子: $W_{c0}[0^{++}]$, $W'_{c0}[0^{++}]$, $W_{c1}[1^{++}]$ 和 $W_{c2}[2^{++}]$.

利用 (1.94) 可以将 (1.92) 中的介子对之间的领头阶短程相互作用表达为 (1.96) 中定义的参数的线性组合:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D\bar{D} \\ D^*\bar{D}^* \end{pmatrix} : V^{(0^{++})} &= \begin{pmatrix} C_{IA} & \sqrt{3}C_{IB} \\ \sqrt{3}C_{IB} & C_{IA} - 2C_{IB} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} D\bar{D}^* \\ D^*\bar{D} \end{pmatrix} : V^{(1^{+-})} &= \begin{pmatrix} C_{IA} - C_{IB} & 2C_{IB} \\ 2C_{IB} & C_{IA} - C_{IB} \end{pmatrix}, \\ D\bar{D}^* : V^{(1^{++})} &= C_{IA} + C_{IB}, \\ D^*\bar{D} : V^{(2^{++})} &= C_{IA} + C_{IB}, \end{aligned} \quad \text{sign to be checked} \quad (1.100)$$

其中,

$$C_{IA} = \frac{1}{4}(3F_{I1} + F_{I0}), \quad C_{IB} = \frac{1}{4}(F_{I1} - F_{I0}). \quad (1.101)$$

从而, 我们可以通过求解 Lippmann-Schwinger 方程来定量预言 $X(3872)$, Z_c 和 Z_b 的自旋伴子的质量; 具体结果参见^[68-70].

LHC 上的实验组 CMS 和 ATLAS 开展了底偶素区间的类似 $X(3872)$ 的粒子的寻找 (称为 X_b). 他们在 $\Upsilon(1S)\pi^+\pi^-$ 的末态中未发现任何信号^[71-72] (下面将 $\Upsilon(1S)$ 简称为 Υ). 然而, 在这样的末态中看不到任何 X_b 的信号是可以预期的. 这是因为 $X_b \rightarrow \Upsilon\pi^+\pi^-$ 的衰变破坏同位旋对称性 (见前面的讨论), 而 X_b 的衰变几乎不可能像 $X(3872)$ 那样有强烈的同位旋破坏^[70,73], 这是因为上面讨论的两种引起 $X(3872)$ 衰变的大同位旋破坏的效应在此都要小得多: 一方面, 理论预期 X_b 的质量在 $B\bar{B}^*$ 阈下几十 MeV, 比 Υ 的质量高约 1.1 GeV, 因此, $X_b \rightarrow \Upsilon\rho$ 和 $X_b \rightarrow \Upsilon\omega$ 的相空间差不多, 不会对同位旋守恒的后者带来相对压低; 另一方面, 带电和中性 B 介子的质量差也远小于 D 介子的情况: $M_{B^0} - M_{B^\pm} = (0.31 \pm 0.05) \text{ MeV}$, $M_{D^\pm} - M_{D^0} = (4.822 \pm 0.015) \text{ MeV}$ ^[2],^{1.11} X_b 中带电和中性的 $B\bar{B}^*$ 成分的差别也几乎可以忽略. 然而, 从另一方面来看, 上述预言的 W_{bj} 粒子到 $\Upsilon\pi^+\pi^-$ 的衰变并不破坏同位旋对称性, 因

^{1.11}这是由于 c 夸克和 b 夸克电荷符号不同, 导致了对同位旋质量破裂的 QED 和 QCD 贡献的不同的相干行为.

此, CMS 和 ATLAS 的实验结果可以被重新解释为没看到上述同位旋为 1 的 W_{bJ} 态的信号.

1.8.4 隐粲五夸克态

表 1.5: LHCb 实验组发现的 3 个隐粲五夸克态的质量和宽度^[74].

	M [MeV]	Γ [MeV]	(95%CL)
$P_c(4312)^+$	$4311.9 \pm 0.7^{+6.8}_{-0.6}$	$9.8 \pm 2.7^{+3.7}_{-4.5}$	(< 27)
$P_c(4440)^+$	$4440.3 \pm 1.3^{+4.1}_{-4.7}$	$20.6 \pm 4.9^{+8.7}_{-10.1}$	(< 49)
$P_c(4457)^+$	$4457.3 \pm 0.6^{+4.1}_{-1.7}$	$6.4 \pm 2.0^{+5.7}_{-1.9}$	(< 20)

2015 年, LHCb 实验组在 $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ 衰变的 $J/\psi p$ 不变质量谱中发现了共振结构 $P_c(4450)$ 和 $P_c(4380)$ ^[75], 其中 $P_c(4450)$ 对应于 4.45 GeV 附近的一个窄结构, 宽度为 $(39 \pm 5 \pm 19)$ MeV, $P_c(4380)$ 则是振幅分析中引入的一个较宽的 Breit-Wigner 结构, 其宽度为 $(205 \pm 18 \pm 86)$ MeV. 因为它们质量都在 4 GeV 以上, 而且衰变末态中含有 J/ψ , 因此其内部结构应该含有 $c\bar{c}$, 很可能是隐粲五夸克态. 2019 年, LHCb 组采用 LHC 两轮运行的数据, 观测到了 $P_c(4450)$ 的更精细的结构, 发现它实际上由两个更窄的峰组成, 分别为 $P_c(4440)$ 和 $P_c(4457)$, 并且观测到一个质量更小的窄共振结构 $P_c(4312)$ ^[74]; 它们的质量和宽度见表 1.5.

$P_c(4312)$ 靠近 $\Sigma_c \bar{D}$ 的阈值, $P_c(4440)$ 和 $P_c(4457)$ 则靠近 $\Sigma_c \bar{D}^*$ 的阈值, 并且分别在这两个阈值以下. 因此, 它们被广泛地猜测分别是 $\Sigma_c \bar{D}$ 和 $\Sigma_c \bar{D}^*$ 组成的强子分子态. 实际上, 2010 年, 吴佳俊等人就预言了 4 GeV 以上强子分子态类型的隐粲五夸克态的存在^[76]. 随后, 多个理论组也都在 LHCb 实验发现之前得出了类似的理论预言 [77–83].

$s_\ell = 1$ 的粲重子自旋多重态 (Σ_c, Σ_c^*) (它们的 J^P 分别为 $\frac{1}{2}^+$ 和 $\frac{3}{2}^+$) 和 $s_\ell = \frac{1}{2}$ 的粲介子自旋多重态 ($\bar{D}, \bar{D}^*$) 之间的 S 波短程相互作用可以用与第 1.8.3 节中讨论的类似方法来处理. 总同位旋 $I = 1/2$ 的 S 波 $\Sigma_c^{(*)} \bar{D}^{(*)}$ 可以有以下 7 组:

$$\begin{aligned}
J^P = \frac{1}{2}^- : & \quad \Sigma_c \bar{D}, \quad \Sigma_c \bar{D}^*, \quad \Sigma_c^* \bar{D}^*; \\
J^P = \frac{3}{2}^- : & \quad \Sigma_c^* \bar{D}, \quad \Sigma_c \bar{D}^*, \quad \Sigma_c^* \bar{D}^*; \\
J^P = \frac{5}{2}^- : & \quad \Sigma_c^* \bar{D}^*.
\end{aligned} \tag{1.102}$$

它们的线性组合会分配到 $s_\ell = \frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 两个不同的自旋多重态中:

$s_\ell^{P_\ell}$	$s_{cc}^{P_c}$	J^P
$\frac{1}{2}^+$	0^-	$\frac{1}{2}^-$
$\frac{1}{2}^+$	1^-	$\frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-$
$\frac{3}{2}^+$	0^-	$\frac{3}{2}^-$
$\frac{3}{2}^+$	1^-	$\frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-, \frac{5}{2}^-$

其中, $s_\ell^{P_\ell}$ 是 $\Sigma_c^{(*)} \bar{D}^{(*)}$ 系统中所有轻夸克的总自旋和宇称, $s_{cc}^{P_c}$ 是其中正反粲夸克对的总自旋和宇称, J^P 是系统的总自旋和宇称.

总同位旋为 I 的 $\Sigma_c^{(*)} \bar{D}^{(*)}$ 之间的 S 波短程相互作用在领头阶可以写成下面两个参数的线性组合:

$$\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \hat{\mathcal{H}}_I \right| 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mathcal{H}}_I \right| 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad (1.103)$$

其中每个 Dirac 括号中的三个数分别为初态或末态中 $\Sigma_c^{(*)}$ 的轻自由度角动量 $s_{1\ell}$, $\bar{D}^{(*)}$ 中的轻自由度角动量 $s_{2\ell}$ 和 $\Sigma_c^{(*)} \bar{D}^{(*)}$ 的轻自由度总角动量 s_L . LHCb 合作组发现的三个 P_c 的同位旋为 $I = 1/2$, 因此, 在强子分子态的图像下, 可以选取这三个 P_c 中的任意两个来确定参数, 从而可以预言另外 5 组的相互作用. 计算发现, 如果任意两个 P_c 是 $\Sigma_c \bar{D}^{(*)}$ 组成的强子分子态, 那么利用 HQSS 可以预言总是存在 7 个 $\Sigma_c^{(*)} \bar{D}^{(*)}$ 强子分子态; 参见 [81,84-88].

🔴 习题 1.2 1) 思考矢量介子 ρ^0 是否可以衰变到两个 π^0 , 并说明原因.

2) C 宇称为正和为负的 $\pi^+ \pi^-$ 对的同位旋分别是多少? 说明原因.

🔴 习题 1.3 考虑一对 $s_\ell^P = \frac{3}{2}^+$ 和 $s_\ell^P = \frac{1}{2}^-$ 的正反重介子在正负电子对撞中的近阈产生过程, 利用 HQSS 分析说明它们通过 S 波的产生在重夸克极限下是禁戒的.^{1.12} 此处, s_ℓ 指的是重介子中轻自由度的总角动量, P 是重介子的宇称.

提示: 在正负电子对撞中, 正反重介子对主要通过虚光子耦合的正反重夸克矢量流 $\bar{Q} \gamma_\mu Q$ 产生: $e^+ e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \bar{Q} Q$, 其中 $\bar{Q} Q$ 之间为 S 波.

^{1.12} 这是 [89] 中的主要结论; 实际上, 这一点早在 Cornell 模型的文章中就有所讨论, 见 [90] 中的表 VI.

1.8.5 再看重夸克对称性

现在来看一下如何从 QCD 的拉氏量来推导出重夸克对称性. 重夸克部分的拉氏量为:

$$\mathcal{L}_Q = \bar{Q} (i \not{D} - m_Q) Q, \quad D_\mu = \partial_\mu + i g_s A_\mu^a T^a, \quad (1.104)$$

其中隐含了对重夸克的味求和. 由此, 我们可以得到重夸克的传播子为

$$\frac{i}{\not{p} - m_Q + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m_Q)}{p^2 - m_Q^2 + i\epsilon}. \quad (1.105)$$

将重夸克的动量写为 $p = m_Q v + k$, 其中 v 是重夸克的 4 速度, 满足 $v^2 = 1$, $k = \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ 称为剩余动量, 则上面的传播子变为

$$\frac{i[m_Q(1+\not{v}) + \not{k}]}{2m_Q v \cdot k + k^2 + i\epsilon} \xrightarrow{m_Q \rightarrow \infty} \frac{1+\not{v}}{2} \frac{i}{v \cdot k} + \mathcal{O}\left(\frac{k}{m_Q}\right). \quad (1.106)$$

上式中的 $(1+\not{v})/2$ 将重夸克的传播子投影到了重夸克极限下领头阶的部分. 于是, 我们定义

$$P_\pm \equiv \frac{1 \pm \not{v}}{2}, \quad (1.107)$$

容易证明, 它们满足下列关系:

$$P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_+ P_- = P_- P_+ = 0, \quad (1.108)$$

可以被用作投影算符. 由 (1.77) 可知, 在重夸克极限下, 重夸克的速度维持不变. 因此, 我们可以定义

$$Q_v \equiv e^{im_Q v \cdot x} \frac{1+\not{v}}{2} Q, \quad q_v \equiv e^{im_Q v \cdot x} \frac{1-\not{v}}{2} Q, \quad (1.109)$$

前面的指数因子是为了将重夸克场的质量部分剥离出去, 相当于我们重新将重夸克能动量的零点定义为 $m_Q v$. 于是, 我们有

$$P_+ Q_v = Q_v, \quad P_- q_v = q_v, \quad P_- Q_v = P_+ q_v = 0, \quad (1.110)$$

以及 (见习题 1.4)

$$\bar{Q}_v \gamma_\mu Q_v = \bar{Q}_v v_\mu Q_v. \quad (1.111)$$

从 (1.106) 可知 $q_v = \mathcal{O}(m_Q^{-1})$, 于是

$$\begin{aligned} Q &= e^{-im_Q v \cdot x} (Q_v + q_v) = e^{-im_Q v \cdot x} P_+ Q_v + \mathcal{O}(m_Q^{-1}), \\ \bar{Q} &= e^{im_Q v \cdot x} \bar{Q}_v P_+ + \mathcal{O}(m_Q^{-1}), \end{aligned} \quad (1.112)$$

$$\partial_\mu Q = e^{-im_Q v \cdot x} P_+ (-im_Q v_\mu + \partial_\mu) Q_v + \mathcal{O}(m_Q^{-1}).$$

将这几部分代入 (1.104), 我们发现

$$\mathcal{L}_Q = \bar{Q}_v (m_Q \not{v} + i \not{D} - m_Q) Q_v = \bar{Q}_v (i v \cdot D) Q_v + \mathcal{O}(m_Q^{-1}). \quad (1.113)$$

重夸克对称性在拉氏量的这个形式中明显体现了出来：在重夸克展开的领头阶，拉氏量中既没有重夸克质量项，也没有 Dirac γ 矩阵；前者体现了 HQFS，后者体现了 HQSS。

在计算重味强子的性质时，可以用双旋量 (bispinor) 形式的场来描述重味强子^[91]，从而方便地将 HQSS 的限制自动地包含进去。包含一个重夸克 Q 的赝标和矢量的 S 波重介子 ($s_\ell^P = \frac{1}{2}^-$) 可以被统一进下面的双旋量场中：

$$H_a^{(Q)} \equiv \frac{1+\not{v}}{2} [P_a^{*\mu} \gamma_\mu - P_a \gamma_5], \quad \bar{H}^{(Q)a} \equiv \gamma_0 H^{(Q)a\dagger} \gamma_0, \quad (1.114)$$

这里 v 表示重介子的 4 速度，指标 $a = u, d, s$ 是轻夸克的味指标， P_a 和 $P_a^{*\mu}$ 分别湮灭赝标和矢量重介子， $\bar{H}^{(Q)a}$ 是 $H_a^{(Q)}$ 的共轭场，产生重介子。对于任意自旋重强子的双旋量场的构造，参见 [92]。我们可以写出自由重介子的拉氏量：

$$\mathcal{L}_{H, \text{free}} = -i \text{Tr} [\bar{H}^{(Q)a} v_\mu \partial^\mu H_a^{(Q)}] = 2i P^{a\dagger} v_\mu \partial^\mu P_a - 2i P_\nu^{*a\dagger} v_\mu \partial^\mu P_a^{*\nu} \quad (1.115)$$

其中， Tr 表示在旋量空间求迹。由于作用量 $S = \int d^4x \mathcal{L}$ 是无量纲的，可知这里的重介子场的质量量纲为 3/2，与相对论场论中的玻色子场（量纲为 1）不同。这是由它们的归一化不同造成的。(1.115) 意味着在重赝标介子的传播子为：

$$\frac{i}{2v \cdot k + i\epsilon}, \quad (1.116)$$

k 为重介子的剩余动量。从相对论介子场的传播子出发

$$\frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\epsilon} = \frac{i}{(m_H v + k)^2 - m_H^2 + i\epsilon} = \frac{i}{2m_H v \cdot k + k^2 + i\epsilon} \simeq \frac{1}{m_H} \frac{i}{2v \cdot k + i\epsilon}, \quad (1.117)$$

可以看到 (1.116) 表示 (1.115) 中的重介子场与相对论归一化的场 H_a^{rel} 之间的关系为^{1.13}

$$H_a^{(Q)} = \sqrt{m_H} [H_a^{(Q), \text{rel}} + \mathcal{O}(m_Q^{-1})]. \quad (1.118)$$

含有一个重夸克的重味介子不是 C 宇称的本征态，因此，对它们做 C 宇称变换之后得到的态的符号依赖于相位约定。我们采取与 (1.92) 相同的相位约定，即

$$P_a \xrightarrow{C} +\bar{P}^a, \quad P_{a,\mu}^* \xrightarrow{C} -\bar{P}_\mu^{*a}, \quad (1.119)$$

其中 $\bar{P}_a$ 和 $\bar{P}_{a,\mu}^*$ 表示含反夸克 $\bar{Q}$ 的赝标和矢量介子。利用旋量场的 C 宇称变换算符 $\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0$ ，由 (1.114) 可得

$$\begin{aligned} H^{(\bar{Q})a} &= \mathcal{C} \left[P_+ \left(\underbrace{-\bar{P}_\mu^{*a}}_{P_{a,\mu}^* \xrightarrow{C}} \gamma^\mu - \underbrace{\bar{P}^a}_{P_a \xrightarrow{C}} \gamma_5 \right) \right]^T \mathcal{C}^{-1} \\ &= (+\bar{P}_\mu^{*a} \gamma^\mu - \bar{P}^a \gamma_5) P_-. \end{aligned} \quad (1.120)$$

很多计算可以通过选取重介子的静止系来简化： $v^\mu = (1, \vec{0})$ 。有质量的矢量场总是满足

^{1.13}文献中也经常出现不同的归一化约定：将自由拉氏量写为 $\mathcal{L}_{\text{free}} = -\frac{i}{2} \text{Tr} [\bar{H}^{(Q)a} v_\mu \partial^\mu H_a^{(Q)}]$ ，相应的重赝标介子的传播子为 $i/(v \cdot k + i\epsilon)$ ，其归一化与相对论场的关系为 $H_a^{(Q)} = \sqrt{2m_H} [H_a^{(Q), \text{rel}} + \mathcal{O}(m_Q^{-1})]$ 。在计算中需要注意用自洽的归一化约定。

$\epsilon_\mu p^\mu = 0$, 即 $\epsilon^0 p^0 = \vec{\epsilon} \cdot \vec{p}$, 其中 ϵ^μ 和 p^μ 分别是它的极化矢量和 4 动量. 于是, 在其静止系下, $\epsilon^0 = 0$. Dirac γ 矩阵可以有不同的表示方式, 这里我们选取 Dirac 基下的表示:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.121)$$

其中 σ^i 是 Pauli 矩阵, 可得

$$P_+ = \frac{1}{2}(1 + \not{p}) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_a^{(Q)} = P_+ \begin{pmatrix} 0 & -\vec{P}_a^* \cdot \vec{\sigma} - P_a \\ \vec{P}_a^* \cdot \vec{\sigma} - P_a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{P}_a^* \cdot \vec{\sigma} - P_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.122)$$

类似地, 我们有

$$P_- = \frac{1}{2}(1 - \not{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

$$H^{(\bar{Q})a} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{P}^{*a} \cdot \vec{\sigma} - \bar{P}^a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.123)$$

我们可以定义两分量双旋量场^[93]

$$H_a \equiv \vec{P}_a^* \cdot \vec{\sigma} + P_a, \quad \bar{H}^a \equiv \vec{P}^{*a} \cdot \vec{\sigma} + \bar{P}^a, \quad (1.124)$$

来简化计算. 前面的厄米共轭场为

$$\bar{H}^{(Q)a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H^{a\dagger} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{H}_a^{(\bar{Q})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{H}_a^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.125)$$

1.8.6 重强子对相互作用的有效拉氏量

通过双旋量场, 我们可以构造描述一对重强子低能相互作用的有效拉氏量. 本小节中以一对基态 S 波重介子之间的相互作用为例来讨论拉氏量的构造. 为简便起见, 我们在本小节中采用两分量双旋量场.

在非相对论展开的最低阶, 一对重介子和反重介子的 S 波相互作用的拉氏量可以写为^[94]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4H} = & -\frac{1}{4} \text{Tr} [H^{a\dagger} H_b] \text{Tr} [\bar{H}^c \bar{H}_d^\dagger] \left(F_A \delta_a^b \delta_c^d + F_A^\lambda \vec{\lambda}_a^b \cdot \vec{\lambda}_c^d \right) \\ & + \frac{1}{4} \text{Tr} [H^{a\dagger} H_b \sigma^m] \text{Tr} [\bar{H}^c \bar{H}_d^\dagger \sigma^m] \left(F_B \delta_a^b \delta_c^d + F_B^\lambda \vec{\lambda}_a^b \cdot \vec{\lambda}_c^d \right), \end{aligned} \quad (1.126)$$

上式中同时考虑了重夸克自旋对称性和轻夸克之间的 $\text{SU}(3)$ 味对称性, 其中 F_A, F_B, F_A^λ 和 F_B^λ 为参数, $\vec{\lambda}$ 为 $\text{SU}(3)$ 味空间的 Gell-Mann 矩阵.

Pauli 矩阵和 Gell-Mann 矩阵满足下面的完备性关系

$$\delta_i^l \delta_k^j = \frac{1}{2} \delta_i^j \delta_k^l + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_i^j \cdot \vec{\sigma}_k^l, \quad \delta_a^d \delta_c^b = \frac{1}{3} \delta_a^b \delta_c^d + \frac{1}{2} \vec{\lambda}_a^b \cdot \vec{\lambda}_c^d. \quad (1.127)$$

下面我们来证明第一个式子. 任何 2×2 的复矩阵都可以用单位矩阵和 Pauli 矩阵 ($\sigma^m = \sigma_m$) 为基做展开

$$X = X_0 + X_m \sigma_m, \quad (m = 1, 2, 3), \quad (1.128)$$

其中 X_0 和 X_m 为复数. 利用 $\text{Tr}[\sigma_i \sigma_j] = 2\delta_{ij}$, 易得

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2} \text{Tr}[X] = \frac{1}{2} X_i^i, \\ X_m &= \frac{1}{2} \text{Tr}[X \sigma_m] = \frac{1}{2} X_l^k (\sigma_m)_k^l. \end{aligned} \quad (1.129)$$

代入 (1.128) 式, 可以得到

$$X_i^j = \frac{1}{2} X_k^k \delta_i^j + \frac{1}{2} X_l^k (\sigma_m)_k^l (\sigma_m)_i^j, \quad (1.130)$$

即

$$X_l^k \delta_i^l \delta_k^j = \frac{1}{2} X_l^k \delta_k^l \delta_i^j + \frac{1}{2} X_l^k (\sigma_m)_k^l (\sigma_m)_i^j, \quad (1.131)$$

从而

$$\delta_i^l \delta_k^j = \frac{1}{2} \delta_k^l \delta_i^j + \frac{1}{2} (\sigma_m)_k^l (\sigma_m)_i^j.$$

于是, (1.127) 中的第一式得证; 第二式也可用类似的方法证明. 实际上, 对于 $\text{SU}(N)$ 群, 易证若其生成元 T_m ($m = 1, 2, \dots, N^2 - 1$) 满足 $\text{Tr}[T_m T_n] = C \delta_{mn}$, 则相应的完备性关系为:

$$\delta_i^l \delta_k^j = \frac{1}{N} \delta_i^j \delta_k^l + \frac{1}{C} (T_m)_i^j (T_m)_k^l. \quad (1.132)$$

下面, 我们来证明利用完备性关系可将 (1.126) 中两个求迹相乘的项写为只包含一个求迹的项的线性组合:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[H^{a\dagger} H_a] \text{Tr}[\bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger] &= (H^{a\dagger} H_a)_l^i \delta_i^l (\bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger)_j^k \delta_k^j \\ &= (H^{a\dagger} H_a)_l^i (\bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger)_j^k \left[\frac{1}{2} \delta_k^l \delta_i^j + \frac{1}{2} (\sigma_m)_k^l (\sigma_m)_i^j \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[H^{a\dagger} H_a \bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger] + \frac{1}{2} \text{Tr}[H^{a\dagger} H_a \sigma_m \bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger \sigma_m], \end{aligned} \quad (1.133)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[H^{a\dagger} H_a \sigma_m] \text{Tr}[\bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger \sigma_m] &= (H^{a\dagger} H_a)_l^k (\sigma_m)_k^l (\bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger)_j^i (\sigma_m)_i^j \\ &= (H^{a\dagger} H_a)_l^k (\bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger)_j^i (2\delta_i^l \delta_k^j - \delta_k^l \delta_i^j) \\ &= 2\text{Tr}[H^{a\dagger} H_a \bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger] - \text{Tr}[H^{a\dagger} H_a] \text{Tr}[\bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger] \\ &= \frac{3}{2} \text{Tr}[H^{a\dagger} H_a \bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger] - \frac{1}{2} \text{Tr}[H^{a\dagger} H_a \sigma_m \bar{H}^b \bar{H}_b^\dagger \sigma_m]. \end{aligned} \quad (1.134)$$

文献 [68] 中给出的拉氏量便是只包含一个旋量空间求迹的形式.

1.9 大 N_c 展开与 OZI 规则

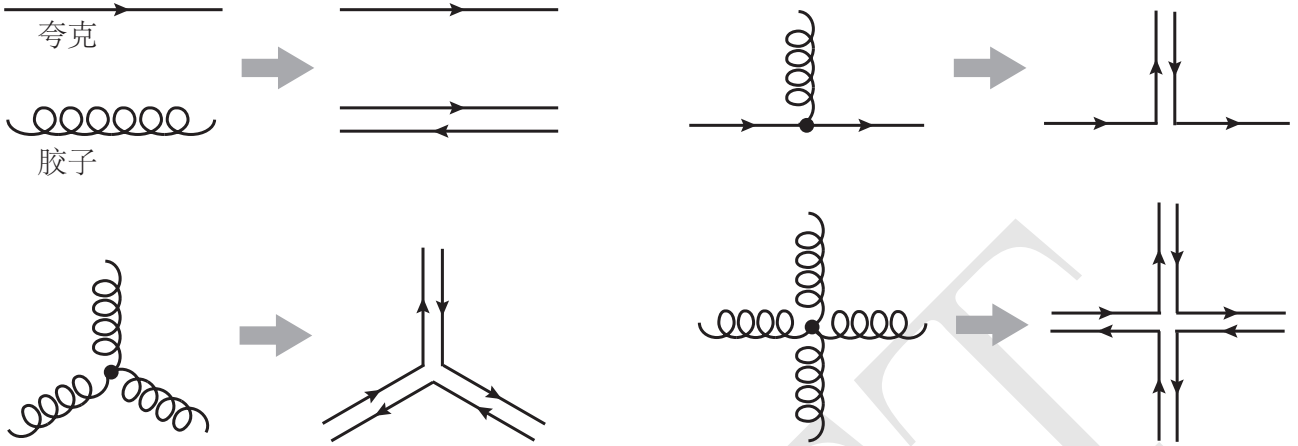


图 1.12: 大 N_c 极限下, 胶子的传播子可以用双线的形式表示 (左上); 在这种图示下, QCD 中的各种相互作用顶点: 夸克胶子耦合 (右上); 三胶子顶点 (左下); 四胶子顶点 (右下).

现实世界中的 QCD 的规范对称性是 $SU(3)$, 即色的数目为 $N_c = 3$. 我们可以将色的数目作为参数, 研究任意 N_c 的规范理论; 而且, 't Hooft 发现在 N_c 取无穷大的极限下, 我们可以得到一些很有意思的结果, 并且能够定性理解很多介子相关的强相互作用的现象^[95]. Witten 随后将之推广到了重子的情况, 并发现重子可以理解为 $N_c \rightarrow \infty$ 极限下的拓扑孤立子^[96] ([96] 的前半部分是非常好的关于介子的 N_c 行为的综述, 推荐阅读).

我们考虑在 N_c 取无穷大的极限不会改变 QCD 的色禁闭, 保持 Λ_{QCD} 有良好的极限, 即 $\Lambda_{\text{QCD}} = \mathcal{O}(N_c^0)$. 由

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\left(\frac{11N_c}{3} - \frac{2N_f}{3}\right) \log \frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}} \quad (1.135)$$

可知, 这样的极限等价于

$$g_s^2 N_c \equiv \lambda = \mathcal{O}(N_c^0), \quad \text{即} \quad g_s = \mathcal{O}(N_c^{-1/2}). \quad (1.136)$$

在 $SU(N_c)$ 的 QCD 中, 夸克处于基础表示, 其色的数目为 N_c : q^i , $i = 1, \dots, N_c$ 为色指标; 胶子处于伴随表示, 其色的数目为 $N_c^2 - 1$: $A_{j,\mu}^i$, 并且迹为零, $A_{i,\mu}^i = 0$. 当 $N_c \rightarrow \infty$, $N_c^2 - 1$ 与 N_c^2 之间的差别可以忽略不计, $SU(N_c)$ 的对称性趋向于 $U(N_c)$ 的对称性. 用一条直线表示夸克的传播, 夸克带一个色指标, 这条线也可看做表示色流; 而胶子带两个色指标, 便可以用双线来表示胶子的传播^[95], 共有 N_c^2 种; 如图 1.12 中左上图所示. 类似地, QCD 的相互作用顶点中也都可以用双线来表示胶子, 见图 1.12.

我们来考虑胶子的单圈自能图, 其费曼图如图 1.13 左侧三个图所示. 将胶子线都用双线表示, 我们得到右侧的图. (a) 图中有两个夸克胶子顶点, 因此其振幅在大 N_c 下为 $\mathcal{O}((N_c^{-1/2})^2) =$

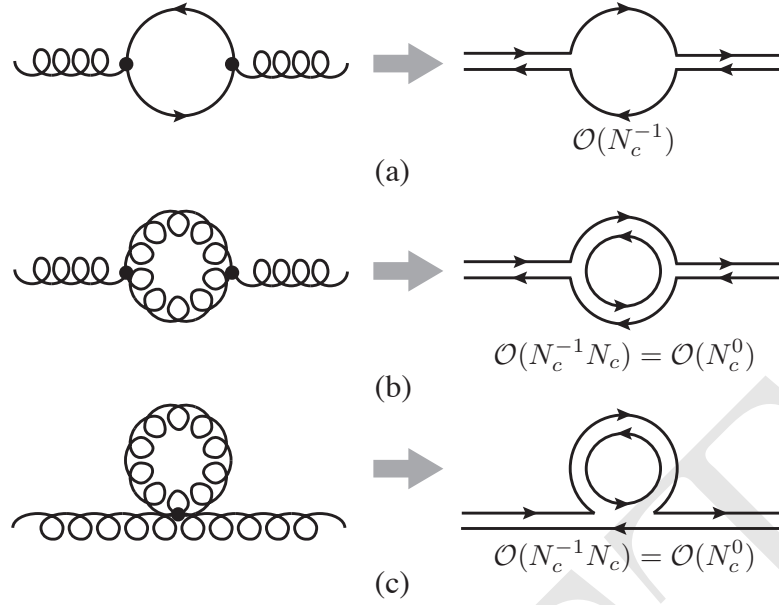


图 1.13: 胶子单圈自能图在大 N_c 极限下的行为, 其中 (a) 为夸克圈, (b) 和 (c) 为胶子圈.

$\mathcal{O}(N_c^{-1})$, 每条线上的色流都是守恒的, 即每条线表示的色指标是不变的. (b) 和 (c) 中则除了从初态到末态的连续色流之外, 还出现了一条封闭的色线. 这条色线的指标不受到初末态的限制, 因此, 它可以是任意色的. 我们需要对所有的可能性求和, 于是一条封闭的色线贡献 N_c 因子, (b) 和 (c) 在大 N_c 下的 N_c 标度行为是 $\mathcal{O}\left((N_c^{-1/2})^2 N_c\right) = \mathcal{O}(N_c^0)$. 这样的标度与一条没有任何圈图修正的自由胶子传播子是一样的. 我们看到每个夸克圈会贡献一个 $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ 的压低因子, 而胶子圈则不改变大 N_c 的标度行为, 其原因在于胶子色的数目是夸克的 $\mathcal{O}(N_c)$ 倍.

1.9.1 大 N_c 极限下的介子

下面我们考虑一个夸克双线性 (quark bilinear) 算符的两点关联函数:

$$\langle J_{ab}(x) J_{ab}^\dagger(y) \rangle, \quad (1.137)$$

其中 $J_{ab} = \bar{q}_{a,i} q_b^i$, a, b 是夸克味指标, $a \neq b$, i 表示色指标; 算符中 q 和 $\bar{q}$ 处于同一个时空点, 因此这个算符是局域的 (local). 在图 1.14 中我们给出了一些 Feynman 图和相应的双线表示的图. 关联函数中, 夸克的色指标求和给出 (a) 是 $\mathcal{O}(N_c)$ 阶的; 其余图的大 N_c 标度行为也很容易从双线图中分析得到, 见图 1.14. 可以看到, (b), (c) 和 (d) 中夸克间交换胶子形成的圈图的大 N_c 标度行为与没有任何交换的 (a) 图是一样的. 与上类似, (e) 图中的夸克圈则带来了 N_c^{-1} 的相对压低因子. 而对于 (f) 图, 注意到其中的两条胶子线并不相交, 即它们可被看做并不处于同一平面上, 图中只有一个封闭的色圈, 因此, 与 (a-d) 相比, 其压低因子则为 N_c^{-2} . 如果我们将每个胶子对应的双线粘起来, 那么 (b, c, d) 看起来就与 (a) 一样, 是一个没有洞的面; (e) 图的平面上则出现了一个夸克圈带来的洞; (f) 图则不再是平面图, 可看做平面的两端连上

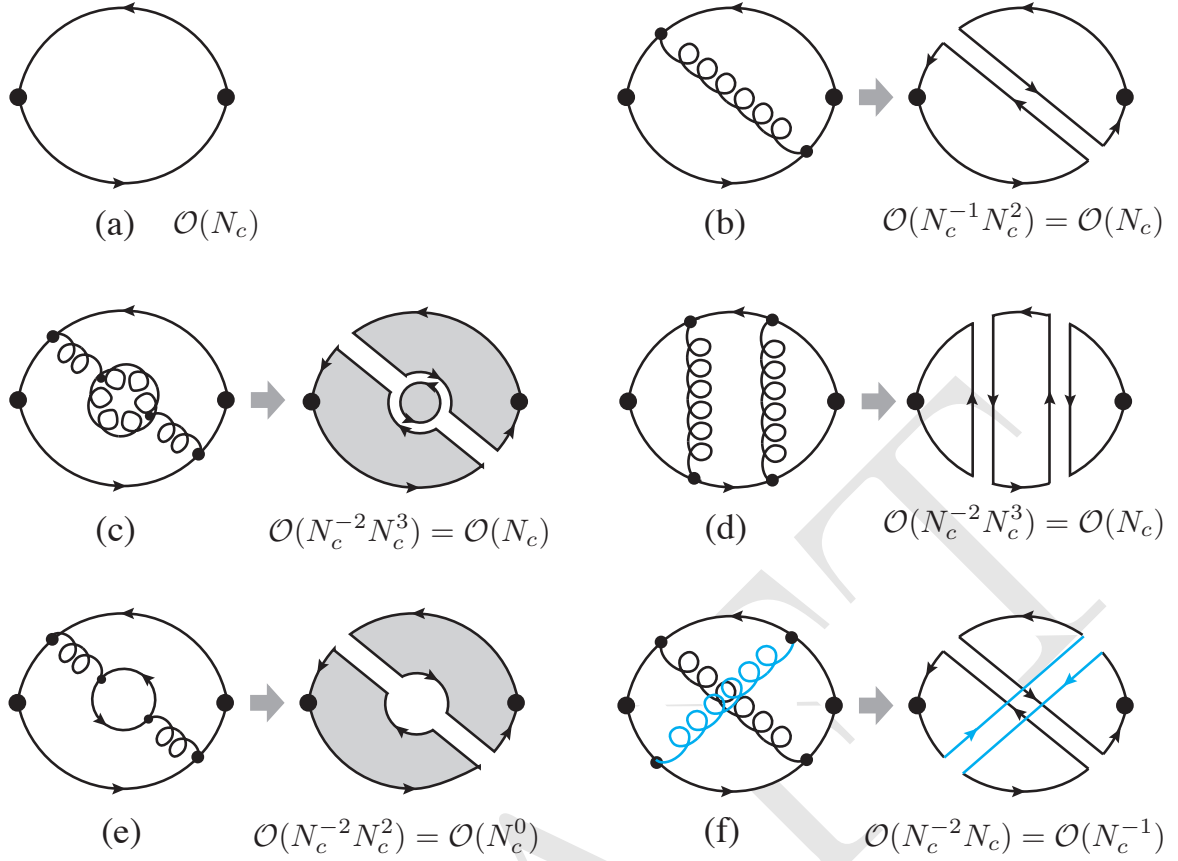


图 1.14: 夸克双线性算符的两点关联函数的一些 Feynman 图及其双线表示. 图中的大黑点表示插入算符, 小黑点表示 Feynman 图中的顶点. (f) 中的两条胶子线及对应的双线并不相交.

了一个手柄. 上面所有图的外部夸克线也可看做围成了一个向外的洞. 于是, 任给一个关联函数的 Feynman 图, 我们可以通过将胶子画为双线的办法得到其大 N_c 极限下领头阶标度行为的普适公式:

$$N_c^{2-B-2H} \equiv N_c^\chi, \quad (1.138)$$

其中, B 是洞的数目, H 是手柄的数目, χ 称为 Euler 示性数 (Euler characteristic) (参见 [97] 第 8 章附录 1). 由夸克圈形成的洞的数目和非平面的胶子圈给出的手柄的数目都是拓扑不变量. 从上式可知, 大 N_c 极限下, 领头阶的图是只包含胶子内线的平面图. 在 N_c 的每一阶, 对应的交换胶子的 Feynman 图都有无穷多个; 这导致我们只能定性分析 N_c 的行为, 却无法从 QCD 出发计算对一个物理量以 $1/N_c$ 作为小量级数展开每一阶前面的系数.

我们从能够与介子耦合的算符的关联函数出发来研究大 N_c 极限下介子的性质, 由一个夸克和一个反夸克组成的规范不变的局域夸克双线性算符便是这样的算符, 其两点关联函数, 如 (1.137), 在大 N_c 极限下的领头阶图都只包含两条夸克线, 如图 1.14 中的 (a-d). 也就是说,

在算符中间插入完备基, 这些中间态只可能是单介子态,

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle J(x) J^\dagger(0) \rangle = \sum_n \frac{iF_n^2}{p^2 - m_n^2 + i\epsilon} = \mathcal{O}(N_c), \quad (1.139)$$

其中介子的衰变常数 $F_n \equiv \langle 0|J|n \rangle$ 是算符 J 在真空态和介子态 $|n \rangle$ 之间的矩阵元, m_n 是介子 $|n \rangle$ 的质量. 首先, 上式左侧在高压下的渐近行为可以通过微扰论来得到, 它包含对数项 $\log p^2$, 由此我们可以推论在 $N_c \rightarrow \infty$ 极限下一定存在无穷多个可以与算符 J 耦合的介子, 因为有限个 $\propto 1/p^2$ 的项相加无法得到对数. 其次, 由于关联函数在大 N_c 极限下为 $\mathcal{O}(N_c)$, 上式右侧的最自然的解要求

$$m_n = \mathcal{O}(N_c^0), \quad F_n = \mathcal{O}(\sqrt{N_c}). \quad (1.140)$$

用一条线来表示介子, (1.139) 也可以用图形化的方式表示为:

$$\langle JJ \rangle = \sum_n \frac{N_c^{1/2}}{F_n} \frac{N_c^{1/2}}{F_n} \quad (1.141)$$

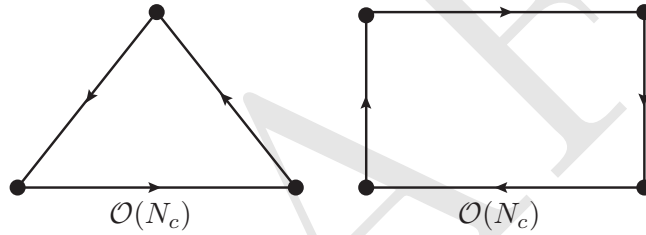


图 1.15: 夸克双线性算符的三点和四点关联函数的平面图, 在大 N_c 极限下表现为 $\mathcal{O}(N_c)$.

类似地, 我们可以研究夸克双线性算符的三点和四点关联函数, 它们的领头阶行为都是 $\mathcal{O}(N_c)$, 如图 1.15 所示. 三点关联函数用介子传播子和相互作用顶点表示为:

$$\langle JJJ \rangle = \sum \frac{N_c^{1/2}}{N_c^{1/2}} \frac{N_c^{-1/2}}{N_c^{1/2}} + \sum \frac{N_c^0}{N_c^{1/2}} \frac{N_c^0}{N_c^{1/2}} \quad (1.142)$$

其中, 我们用到了 $F_n = \mathcal{O}(N_c^{1/2})$, 左图表示三介子耦合 (如一个介子 M_1 衰变到另外两个介子 M_2 和 M_3) 的振幅在大 N_c 极限下的行为是 $\mathcal{O}(N_c^{-1/2})$, 即

$$\mathcal{A}_{M_1 \rightarrow M_2 M_3} = \mathcal{O}(N_c^{-1/2}), \quad \Gamma_{M_1 \rightarrow M_2 M_3} = \mathcal{O}(N_c^{-1}), \quad (1.143)$$

介子在大 N_c 极限下是稳定粒子. 右图的 $\mathcal{O}(N_c^0)$ 的顶点表示夸克双线性算符在两个介子和真空之间的矩阵元 $\langle 0|J|M_1 M_2 \rangle$.

四点关联函数的介子表示为:

$$\begin{aligned}
 \langle JJJJ \rangle = & \sum \text{[Contact term: four external lines meeting at a central vertex labeled } N_c^{-1}] + \sum \text{[Exchange term: two internal lines labeled } N_c^{-1/2}] + \sum \text{[Another exchange term: two internal lines labeled } N_c^{-1/2}] \\
 & + \sum \text{[Higher-order term: a central vertex labeled } N_c^{-1/2} \text{ with four external lines}] + \dots
 \end{aligned} \quad (1.144)$$

最左侧的图中有一个四介子顶点, 它描述了介子两体散射 $M_1 M_2 \rightarrow M_3 M_4$ 的接触项. 第二个图和第三个图都涉及到两个三介子顶点, 将介子外腿 (即 $N_c^{1/2}$ 的因子) 截掉之后, 给出了介子两体散射的介子交换过程. 我们发现介子散射振幅表现为

$$\mathcal{A}_{M_1 M_2 \rightarrow M_3 M_4} = \mathcal{O}(N_c^{-1}). \quad (1.145)$$

第四个图中的顶点表示夸克双线性算符在真空和三个介子之间的矩阵元 $\langle 0|J|M_1 M_2 M_3 \rangle$. 还存在有 $\langle 0|J|M_1 M_2 \rangle$ 这种矩阵元的图, 在此没再画出.

综上, 色数 N_c 趋于无穷大的极限情况下, 假设色禁闭仍然存在, 那么 QCD 的介子部分 (重子部分的讨论见 [96]) 就变成了一个有无穷多个无相互作用的稳定介子的理论.

通过大 N_c 分析, 也可以研究多夸克态的性质. 在大 N_c 极限下四夸克态算符 $(\bar{q}_a q_b \bar{q}_c q_d)$ 的两点关联函数中领头阶的部分仅对应于两个介子的自由传播, 而包含了四个夸克之间相互作用的项只出现在次领头阶, 因此此前的观点一直认为在大 N_c 极限下不存在四夸克态^[96-97]. 然而, 2013 年 Weinberg 提出这并不能作为判据来说明在大 N_c 极限下四夸克态不存在^[98], 他认为正确的问题应该是大 N_c 极限决定了四夸克态什么样的性质. 文献 [99] 综述了 Weinberg 的文章引发的一系列后续研究, 在此不赘述.

1.9.2 OZI 规则

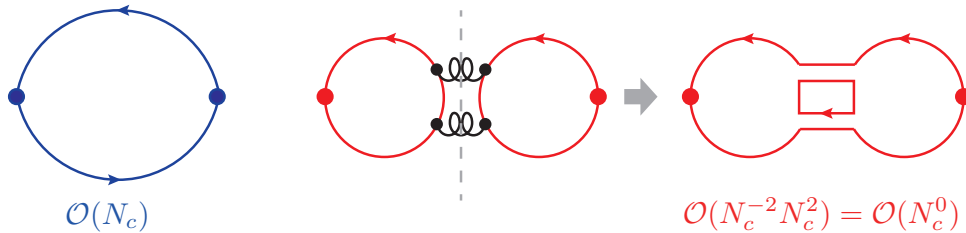


图 1.16: 看看双线性算符两点关联函数 (1.146) 中的两种 Wick 收缩的大 N_c 标度的分析. 中间图上的虚线表示这种 Wick 收缩中的夸克线可以被这样的一条线隔开, 两侧都是色单态.

虽然现实世界中色的数目为 $N_c = 3$, 大 N_c 的分析仍然可以帮助我们定性理解强子物理中的一些现象. 例如它提供了唯象上很成功的 Okubo-Zweig-Iizuka (OZI) 规则^[100–102] 的唯一模型无关的普适解释.

我们来考虑 u 夸克双线性算符 $J(x) = \bar{u}(x)u(x)$ (可以通过在 $\bar{u}$ 和 u 之间插入 Dirac γ 矩阵和导数等来构造耦合到不同量子数的介子上的算符, 因为这些额外的结构不影响下面的讨论, 我们在此不将之写出), 它有两种不同的 Wick 收缩:

$$\begin{aligned}\langle \bar{u}_i(y)u^i(y)\bar{u}_j(x)u^j(x) \rangle &= \langle \overbrace{\bar{u}_i(y)u^i(y)} \overbrace{\bar{u}_j(x)u^j(x)} \rangle + \langle \overbrace{\bar{u}_i(y)u^i(y)} \overbrace{\bar{u}_j(x)u^j(x)} \rangle \\ &= -\langle S_{u,j}^i(y,x)S_{u,i}^j(x,y) \rangle + \langle S_{u,i}^i(y,y) \rangle \langle S_{u,j}^j(x,x) \rangle, \\ &= \mathcal{O}(N_c) + \mathcal{O}(N_c^0),\end{aligned}\quad (1.146)$$

其中, $S_u(x,y)$ 表示 u 夸克从 y 到 x 的传播子. 这两种 Wick 收缩对应的大 N_c 的行为不同. 如图 1.16 所示, 第一种 Wick 收缩中, 夸克和反夸克都从 x 点产生在 y 点湮灭, 其领头阶行为即是前面分析得到的 $\mathcal{O}(N_c)$; 而第二种 Wick 收缩中 x 点和 y 点的夸克和反夸克分别在同一点收缩, 并没有从初态传播到末态, $\langle S_{u,i}^i(y,y) \rangle$ 和 $\langle S_{u,j}^j(x,x) \rangle$ 分别都是色单态. 第二种 Wick 收缩与第一种相比, 色单态的集团可以被一条割线隔开. 这样的 Wick 收缩对应于被 OZI 规则压低的过程.

OZI 规则: 对于一个强子反应的过程, 只画出其夸克线, 如果一个图可由一条线分割成不同的色单态集团, 那么它对应的过程就是被压低的.

从上面的分析我们可以看到, 被 OZI 规则压低的过程与不违反 OZI 规则的过程相比会有 $1/N_c$ 的压低因子. OZI 规则本来是一个唯象规则, 与很多实验观测相一致, 大 N_c 的分析为其提供了模型无关的普适解释. 下面我们举几个 OZI 规则的例子:

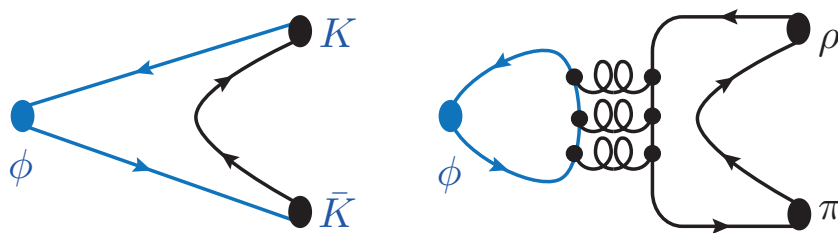
- 由不同味的夸克组成的同位旋为 0 的中性介子之间的混合很小. 例如, $I = 0$ 的矢量介子中包括 ω 和 ϕ , 它们的味波函数分别是

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d), \quad |\phi\rangle = \bar{s}s, \quad (1.147)$$

而不是 SU(3) 的单态以及八重态中的同位旋单态:

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s), \quad |\phi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s). \quad (1.148)$$

(1.147) 中的两个味波函数包含的夸克味不同, 这两者之间的混合破坏 OZI 规则. 因此, OZI 规则导致介子处于 U(3) 的九重态, 而不是 SU(3) 的八重态和单态. 最轻的赝标介子是个例外, 这是因为其中的 SU(3) 八重态是手征对称自发破缺 $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$ 的赝 Goldstone 玻色子, 而单态的 η_0 则由于 $U(1)_A$ 反常获得了即使在手征极限下也不为零的较大的质量. 物理的 $\eta'(958)$ 中包含了 SU(3) 八重态中的 η_8 和单态 η_0 的混合.

图 1.17: $\phi \rightarrow K\bar{K}$ 和 $\phi \rightarrow \rho\pi$ 衰变.

- ϕ 介子的衰变. ϕ 介子衰变最大的几个分支比及相应的衰变道如下^[2]:

$$\begin{aligned}
 K^+K^- : & \quad (49.2 \pm 0.5)\% \\
 K_L^0 K_S^0 : & \quad (34.0 \pm 0.4)\% \\
 \rho\pi + \pi^+\pi^-\pi^0 : & \quad (15.24 \pm 0.33)\%.
 \end{aligned} \tag{1.149}$$

可以看到, 虽然 $\phi \rightarrow K\bar{K}$ 的相空间小于 $\phi \rightarrow \rho\pi$, 但是其分支比却占绝对主导地位. 这是因为 $K\bar{K}$ 中包含初态 ϕ 中的 $\bar{s}$ 和 s 夸克, 从而这个过程的夸克线没法被一条线隔成色单态的独立集团 (见图 1.17); 而 $\rho\pi$ 以及 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 中的价夸克中则不包含 $\bar{s}$ 和 s , 从而初态的 $\bar{s}s$ 必须湮灭, 再通过胶子产生末态的 ρ 和 π 介子. $\phi \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的衰变则除了 OZI 压低之外, 还有额外的同位旋破坏的压低, 因此, 其分支比只有 $(7.3 \pm 1.3) \times 10^{-5}$ ^[2].

- $\psi(3770)$ 的衰变. $\psi(3770)$ 的质量只在 $D^0\bar{D}^0$ 阈上 43 MeV, 然而其衰变到 $D\bar{D}$ (包括 $D^0\bar{D}^0$ 和 D^+D^-) 的分支比却有 $(93^{+8}_{-9})\%$ ^[2], 比其衰变到 $J/\psi\pi\pi$ 和 $J/\psi\eta$ 的分支比大三个数量级. 其原因是后两种衰变需要产生不含粲夸克的轻介子, 因此是 OZI 压低的.
- 没有共同的夸克味的介子之间的散射过程, 如 $D_s\pi \rightarrow D_s\pi$. 这类散射过程的散射振幅在大 N_c 下为 $\mathcal{O}(N_c^{-2})$, 比 (1.145) 有额外的 $1/N_c$ 的压低, 其相互作用强度通常都远弱于 OZI 规则允许的过程.

OZI 规则在有些情况下由于介子圈的效应会被削弱^[103–105].

🔴 习题 1.4 利用 Dirac γ 矩阵满足的关系式 $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, 证明 (1.108) 和 (1.111).

🔴 习题 1.5 写出图 1.17 所示的两个过程对应的衰变振幅 (即将关联函数的介子外腿截掉之后剩下的部分) 的领头阶 N_c 行为.

参考文献

- ¹M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), “Review of particle physics”, *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018).
- ²P. A. Zyla et al. (Particle Data Group), “Review of Particle Physics”, *PTEP* **2020**, 083C01 (2020).
- ³R. D. Peccei and H. R. Quinn, “CP Conservation in the Presence of Instantons”, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440–1443 (1977).
- ⁴R. D. Peccei and H. R. Quinn, “Constraints Imposed by CP Conservation in the Presence of Instantons”, *Phys. Rev. D* **16**, 1791–1797 (1977).
- ⁵S. L. Adler, “Axial vector vertex in spinor electrodynamics”, *Phys. Rev.* **177**, 2426–2438 (1969).
- ⁶J. S. Bell and R. Jackiw, “A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ model”, *Nuovo Cim. A* **60**, 47–61 (1969).
- ⁷M. J. Savage and M. B. Wise, “Spectrum of baryons with two heavy quarks”, *Phys. Lett. B* **248**, 177–180 (1990).
- ⁸H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, and S.-L. Zhu, “The hidden-charm pentaquark and tetraquark states”, *Phys. Rept.* **639**, 1–121 (2016).
- ⁹A. Esposito, A. Pilloni, and A. D. Polosa, “Multiquark resonances”, *Phys. Rept.* **668**, 1–97 (2017).
- ¹⁰A. Hosaka, T. Iijima, K. Miyabayashi, Y. Sakai, and S. Yasui, “Exotic hadrons with heavy flavors: X, Y, Z, and related states”, *PTEP* **2016**, 062C01 (2016).
- ¹¹R. F. Lebed, R. E. Mitchell, and E. S. Swanson, “Heavy-quark QCD exotica”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **93**, 143–194 (2017).
- ¹²F.-K. Guo, C. Hanhart, U.-G. Meißner, Q. Wang, Q. Zhao, and B.-S. Zou, “Hadronic molecules”, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015004 (2018).
- ¹³S. L. Olsen, T. Skwarnicki, and D. Zieminska, “Nonstandard heavy mesons and baryons: Experimental evidence”, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015003 (2018).
- ¹⁴M. Karliner, J. L. Rosner, and T. Skwarnicki, “Multiquark states”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **68**, 17–44 (2018).

- ¹⁵C.-Z. Yuan, “The XYZ states revisited”, *Int. J. Mod. Phys. A* **33**, 1830018 (2018).
- ¹⁶Y.-R. Liu, H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, and S.-L. Zhu, “Pentaquark and tetraquark states”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **107**, 237–320 (2019).
- ¹⁷N. Brambilla, S. Eidelman, C. Hanhart, A. Nefediev, C.-P. Shen, C. E. Thomas, A. Vairo, and C.-Z. Yuan, “The XYZ states: Experimental and theoretical status and perspectives”, *Phys. Rept.* **873**, 1–154 (2020).
- ¹⁸F.-K. Guo, X.-H. Liu, and S. Sakai, “Threshold cusps and triangle singularities in hadronic reactions”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **112**, 103757 (2020).
- ¹⁹K. Abe et al. (Belle), “Study of $B^- \rightarrow D^{*0} \pi^-$ ($D^{*0} \rightarrow D^{(*)+} \pi^-$) decays”, *Phys. Rev. D* **69**, 112002 (2004).
- ²⁰F.-K. Guo, “Status of charmed meson spectroscopy”, *EPJ Web Conf.* **202**, edited by A. Bondar and S. Eidelman, 02001 (2019).
- ²¹M.-L. Du, F.-K. Guo, C. Hanhart, B. Kubis, and U.-G. Meißner, “Where is the lightest charmed scalar meson?”, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 192001 (2021).
- ²²S. Godfrey and N. Isgur, “Mesons in a relativized quark model with chromodynamics”, *Phys. Rev. D* **32**, 189–231 (1985).
- ²³B. Aubert et al. (BaBar), “Observation of a narrow meson decaying to $D_s^+ \pi^0$ at a mass of 2.32 GeV/ c^2 ”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 242001 (2003).
- ²⁴D. Besson et al. (CLEO), “Observation of a narrow resonance of mass 2.46 GeV/ c^2 decaying to $D_s^{*+} \pi^0$ and confirmation of the $D_{sJ}^*(2317)$ state”, *Phys. Rev. D* **68**, 032002 (2003).
- ²⁵H.-X. Chen, W. Chen, X. Liu, Y.-R. Liu, and S.-L. Zhu, “A review of the open charm and open bottom systems”, *Rept. Prog. Phys.* **80**, 076201 (2017).
- ²⁶C. B. Lang, D. Mohler, S. Prelovsek, and R. M. Woloshyn, “Predicting positive parity B_s mesons from lattice QCD”, *Phys. Lett. B* **750**, 17–21 (2015).
- ²⁷Y.-Q. Chen and X.-Q. Li, “A Comprehensive four-quark interpretation of $D_s(2317)$, $D_s(2457)$ and $D_s(2632)$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 232001 (2004).
- ²⁸M.-L. Du, M. Albaladejo, P. Fernández-Soler, F.-K. Guo, C. Hanhart, U.-G. Meißner, J. Nieves, and D.-L. Yao, “Towards a new paradigm for heavy-light meson spectroscopy”, *Phys. Rev. D* **98**, 094018 (2018).

- ²⁹L. Liu, K. Orginos, F.-K. Guo, C. Hanhart, and U.-G. Meißner, “Interactions of charmed mesons with light pseudoscalar mesons from lattice QCD and implications on the nature of the $D_{s0}^*(2317)$ ”, *Phys. Rev. D* **87**, 014508 (2013).
- ³⁰C. B. Lang, L. Leskovec, D. Mohler, S. Prelovsek, and R. M. Woloshyn, “ D_s mesons with DK and D^*K scattering near threshold”, *Phys. Rev. D* **90**, 034510 (2014).
- ³¹G. K. C. Cheung, C. E. Thomas, D. J. Wilson, G. Moir, M. Peardon, and S. M. Ryan (Hadron Spectrum), “ DK $I = 0$, $D\bar{K}$ $I = 0, 1$ scattering and the $D_{s0}^*(2317)$ from lattice QCD”, *JHEP* **02**, 100 (2021).
- ³²V. M. Abazov et al. (D0), “Evidence for a $B_s^0 \pi^\pm$ state”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 022003 (2016).
- ³³F.-K. Guo, U.-G. Meißner, and B.-S. Zou, “How the $X(5568)$ challenges our understanding of QCD”, *Commun. Theor. Phys.* **65**, 593–595 (2016).
- ³⁴T. J. Burns and E. S. Swanson, “Interpreting the $X(5568)$ ”, *Phys. Lett. B* **760**, 627–633 (2016).
- ³⁵R. Aaij et al. (LHCb), “Search for Structure in the $B_s^0 \pi^\pm$ Invariant Mass Spectrum”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 152003 (2016).
- ³⁶A. M. Sirunyan et al. (CMS), “Search for the $X(5568)$ state decaying into $B_s^0 \pi^\pm$ in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV”, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 202005 (2018).
- ³⁷T. Aaltonen et al. (CDF), “A search for the exotic meson $X(5568)$ with the Collider Detector at Fermilab”, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 202006 (2018).
- ³⁸M. Aaboud et al. (ATLAS), “Search for a Structure in the $B_s^0 \pi^\pm$ Invariant Mass Spectrum with the ATLAS Experiment”, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 202007 (2018).
- ³⁹R. Aaij et al. (LHCb), “Observation of the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{++} ”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 112001 (2017).
- ⁴⁰E. J. Eichten and C. Quigg, “Heavy-quark symmetry implies stable heavy tetraquark mesons $Q_i Q_j q_k q_l$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 202002 (2017).
- ⁴¹J. Carlson, L. Heller, and J. A. Tjon, “Stability of Dimesons”, *Phys. Rev. D* **37**, 744 (1988).
- ⁴²A. V. Manohar and M. B. Wise, “Exotic $Q Q$ anti- q anti- q states in QCD”, *Nucl. Phys. B* **399**, 17–33 (1993).
- ⁴³M. Karliner and J. L. Rosner, “Discovery of doubly-charmed Ξ_{cc} baryon implies a stable (b b d) tetraquark”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 202001 (2017).

- ⁴⁴A. Czarnecki, B. Leng, and M. B. Voloshin, “Stability of tetrons”, *Phys. Lett. B* **778**, 233–238 (2018).
- ⁴⁵R. Aaij et al. (LHCb), “Observation of an exotic narrow doubly charmed tetraquark”, *Nature Phys.*, [10.1038/s41567-022-01614-y](#) (2022).
- ⁴⁶R. Aaij et al. (LHCb), “Study of the doubly charmed tetraquark T_{cc}^{++} ”, *Nature Commun.* **13**, 3351 (2022).
- ⁴⁷M.-L. Du, V. Baru, X.-K. Dong, A. Filin, F.-K. Guo, C. Hanhart, A. Nefediev, J. Nieves, and Q. Wang, “Coupled-channel approach to T_{cc}^{++} including three-body effects”, *Phys. Rev. D* **105**, 014024 (2022).
- ⁴⁸S. K. Choi et al. (Belle), “Observation of a narrow charmonium-like state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 262001 (2003).
- ⁴⁹R. Aaij et al. (LHCb), “Determination of the $X(3872)$ meson quantum numbers”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 222001 (2013).
- ⁵⁰S. M. Flatté, “Coupled-channel analysis of the $\pi\eta$ and $K\bar{K}$ systems near $K\bar{K}$ threshold”, *Phys. Lett. B* **63**, 224–227 (1976).
- ⁵¹R. Aaij et al. (LHCb), “Study of the lineshape of the $\chi_{c1}(3872)$ state”, *Phys. Rev. D* **102**, 092005 (2020).
- ⁵²R. Aaij et al. (LHCb), “Study of the $\psi_2(3823)$ and $\chi_{c1}(3872)$ states in $B^+ \rightarrow (J/\psi \pi^+ \pi^-) K^+$ decays”, *JHEP* **08**, 123 (2020).
- ⁵³D. Gamermann and E. Oset, “Isospin breaking effects in the $X(3872)$ resonance”, *Phys. Rev. D* **80**, 014003 (2009).
- ⁵⁴C. Hanhart, Y. S. Kalashnikova, A. E. Kudryavtsev, and A. V. Nefediev, “Remarks on the quantum numbers of $X(3872)$ from the invariant mass distributions of the $\rho J/\psi$ and $\omega J/\psi$ final states”, *Phys. Rev. D* **85**, 011501 (2012).
- ⁵⁵B. Aubert et al. (BaBar), “Observation of a broad structure in the $\pi^+ \pi^- J/\psi$ mass spectrum around 4.26 GeV/c²”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 142001 (2005).
- ⁵⁶A. Bondar et al. (Belle), “Observation of two charged bottomonium-like resonances in $\Upsilon(5S)$ decays”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 122001 (2012).
- ⁵⁷M. Ablikim et al. (BESIII), “Observation of a charged charmoniumlike structure in $e^+e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ at $s = 4.26$ GeV”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 252001 (2013).

- ⁵⁸Z. Q. Liu et al. (Belle), “Study of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ and observation of a charged charmoniumlike state at belle”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 252002 (2013).
- ⁵⁹M. Ablikim et al. (BESIII), “Determination of the spin and parity of the $Z_c(3900)$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 072001 (2017).
- ⁶⁰M. Ablikim et al. (BESIII), “Observation of a charged charmoniumlike structure $Z_c(4020)$ and search for the $Z_c(3900)$ in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- h_c$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 242001 (2013).
- ⁶¹L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa, and V. Riquer, “Diquark-antidiquarks with hidden or open charm and the nature of $X(3872)$ ”, *Phys. Rev. D* **71**, 014028 (2005).
- ⁶²N. A. Törnqvist, “From the deuteron to deusons, an analysis of deuteron - like meson meson bound states”, *Z. Phys. C* **61**, 525–537 (1994).
- ⁶³N. A. Törnqvist, “Isospin breaking of the narrow charmonium state of Belle at 3872 MeV as a deuson”, *Phys. Lett. B* **590**, 209–215 (2004).
- ⁶⁴C. Hidalgo-Duque, J. Nieves, A. Ozpineci, and V. Zamiralov, “ $X(3872)$ and its Partners in the Heavy Quark Limit of QCD”, *Phys. Lett. B* **727**, 432–437 (2013).
- ⁶⁵V. Baru, E. Epelbaum, A. A. Filin, C. Hanhart, U.-G. Meißner, and A. V. Nefediev, “Heavy-quark spin symmetry partners of the $X(3872)$ revisited”, *Phys. Lett. B* **763**, 20–28 (2016).
- ⁶⁶M. B. Voloshin, “Heavy quark spin selection rule and the properties of the $X(3872)$ ”, *Phys. Lett. B* **604**, 69–73 (2004).
- ⁶⁷A. E. Bondar, A. Garmash, A. I. Milstein, R. Mizuk, and M. B. Voloshin, “Heavy quark spin structure in Z_b resonances”, *Phys. Rev. D* **84**, 054010 (2011).
- ⁶⁸T. Mehen and J. W. Powell, “Heavy Quark Symmetry Predictions for Weakly Bound B-Meson Molecules”, *Phys. Rev. D* **84**, 114013 (2011).
- ⁶⁹C. Hidalgo-Duque, J. Nieves, and M. P. Valderrama, “Light flavor and heavy quark spin symmetry in heavy meson molecules”, *Phys. Rev. D* **87**, 076006 (2013).
- ⁷⁰F.-K. Guo, C. Hidalgo-Duque, J. Nieves, and M. P. Valderrama, “Consequences of heavy quark symmetries for hadronic molecules”, *Phys. Rev. D* **88**, 054007 (2013).
- ⁷¹S. Chatrchyan et al. (CMS), “Search for a New Bottomonium State Decaying to $\Upsilon(1S)\pi^+\pi^-$ in pp Collisions at $s = 8$ TeV”, *Phys. Lett. B* **727**, 57–76 (2013).
- ⁷²G. Aad et al. (ATLAS), “Search for the X_b and other hidden-beauty states in the $\pi^+\pi^-\Upsilon(1S)$ channel at ATLAS”, *Phys. Lett. B* **740**, 199–217 (2015).

- ⁷³M. Karliner and J. L. Rosner, “X(3872), X_b , and the $\chi_{b1}(3P)$ state”, *Phys. Rev. D* **91**, 014014 (2015).
- ⁷⁴R. Aaij et al. (LHCb), “Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of two-peak structure of the $P_c(4450)^{++}$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 222001 (2019).
- ⁷⁵R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi, et al. (LHCb), “Observation of J/ψ p resonances consistent with pentaquark states in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ decays”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 072001 (2015).
- ⁷⁶J.-J. Wu, R. Molina, E. Oset, and B. S. Zou, “Prediction of narrow N^* and Λ^* resonances with hidden charm above 4 GeV”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 232001 (2010).
- ⁷⁷W. L. Wang, F. Huang, Z. Y. Zhang, and B. S. Zou, “ Σ_c D and Λ_c D states in a chiral quark model”, *Phys. Rev. C* **84**, 015203 (2011).
- ⁷⁸Z.-C. Yang, Z.-F. Sun, J. He, X. Liu, and S.-L. Zhu, “The possible hidden-charm molecular baryons composed of anti-charmed meson and charmed baryon”, *Chin. Phys. C* **36**, 6–13 (2012).
- ⁷⁹S. G. Yuan, K. W. Wei, J. He, H. S. Xu, and B. S. Zou, “Study of qqqcc five quark system with three kinds of quark-quark hyperfine interaction”, *Eur. Phys. J. A* **48**, 61 (2012).
- ⁸⁰J.-J. Wu, T. -. H. Lee, and B. S. Zou, “Nucleon Resonances with Hidden Charm in Coupled-Channel Models”, *Phys. Rev. C* **85**, 044002 (2012).
- ⁸¹C. W. Xiao, J. Nieves, and E. Oset, “Combining heavy quark spin and local hidden gauge symmetries in the dynamical generation of hidden charm baryons”, *Phys. Rev. D* **88**, 056012 (2013).
- ⁸²T. Uchino, W.-H. Liang, and E. Oset, “Baryon states with hidden charm in the extended local hidden gauge approach”, *Eur. Phys. J. A* **52**, 43 (2016).
- ⁸³M. Karliner and J. L. Rosner, “New Exotic Meson and Baryon Resonances from Doubly-Heavy Hadronic Molecules”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 122001 (2015).
- ⁸⁴M.-Z. Liu, F.-Z. Peng, M. Sánchez Sánchez, and M. P. Valderrama, “Heavy-quark symmetry partners of the $P_c(4450)$ pentaquark”, *Phys. Rev. D* **98**, 114030 (2018).
- ⁸⁵M.-Z. Liu, Y.-W. Pan, F.-Z. Peng, M. Sánchez Sánchez, L.-S. Geng, A. Hosaka, and M. Pavon Valderrama, “Emergence of a complete heavy-quark spin symmetry multiplet: seven molecular pentaquarks in light of the latest LHCb analysis”, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 242001 (2019).

- ⁸⁶S. Sakai, H.-J. Jing, and F.-K. Guo, “Decays of P_c into $J/\psi N$ and $\eta_c N$ with heavy quark spin symmetry”, *Phys. Rev. D* **100**, 074007 (2019).
- ⁸⁷M.-L. Du, V. Baru, F.-K. Guo, C. Hanhart, U.-G. Meißner, J. A. Oller, and Q. Wang, “Interpretation of the LHCb P_c states as hadronic molecules and hints of a narrow $P_c(4380)$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 072001 (2020).
- ⁸⁸M.-L. Du, V. Baru, F.-K. Guo, C. Hanhart, U.-G. Meißner, J. A. Oller, and Q. Wang, “Revisiting the nature of the P_c pentaquarks”, *JHEP* **08**, 157 (2021).
- ⁸⁹X. Li and M. B. Voloshin, “Suppression of the S-wave production of $(3/2)^+ + (1/2)^-$ heavy meson pairs in e^+e^- annihilation”, *Phys. Rev. D* **88**, 034012 (2013).
- ⁹⁰E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T.-M. Yan, “Charmonium: The model”, *Phys. Rev. D* **17**, 3090 (1978).
- ⁹¹A. V. Manohar and M. B. Wise, Heavy Quark Physics, Vol. 10, Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. (2000).
- ⁹²A. F. Falk, “Hadrons of arbitrary spin in the heavy quark effective theory”, *Nucl. Phys. B* **378**, 79–94 (1992).
- ⁹³J. Hu and T. Mehen, “Chiral Lagrangian with heavy quark-diquark symmetry”, *Phys. Rev. D* **73**, 054003 (2006).
- ⁹⁴T. Ji, X.-K. Dong, M. Albaladejo, M.-L. Du, F.-K. Guo, and J. Nieves, “Establishing the heavy quark spin and light flavor molecular multiplets of the $X(3872)$, $Z_c(3900)$ and $X(3960)$ ”, *arXiv:2207.08563 [hep-ph]* (2022).
- ⁹⁵G. 't Hooft, “A Planar Diagram Theory for Strong Interactions”, *Nucl. Phys. B* **72**, edited by J. C. Taylor, 461 (1974).
- ⁹⁶E. Witten, “Baryons in the $1/N$ Expansion”, *Nucl. Phys. B* **160**, 57–115 (1979).
- ⁹⁷S. Coleman, Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1985).
- ⁹⁸S. Weinberg, “Tetraquark Mesons in Large N Quantum Chromodynamics”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 261601 (2013).
- ⁹⁹W. Lucha, D. Melikhov, and H. Sazdjian, “Tetraquarks in large- N_c QCD”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **120**, 103867 (2021).

- ¹⁰⁰J. Iizuka, “Systematics and phenomenology of meson family”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **37**, 21–34 (1966).
- ¹⁰¹S. Okubo, “Phi meson and unitary symmetry model”, *Phys. Lett.* **5**, 165–168 (1963).
- ¹⁰²G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking”, (1964).
- ¹⁰³P. Geiger and N. Isgur, “How the Okubo-Zweig-Iizuka rule evades large loop corrections”, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1066–1069 (1991).
- ¹⁰⁴P. Geiger and N. Isgur, “When can hadronic loops scuttle the OZI rule?”, *Phys. Rev. D* **47**, 5050–5059 (1993).
- ¹⁰⁵H. J. Lipkin and B.-s. Zou, “Comment on ‘When can hadronic loops scuttle the Okubo-Zweig-Iizuka rule?’”, *Phys. Rev. D* **53**, 6693–6696 (1996).

第 2 章 手征微扰论

手征微扰论 (chiral perturbation theory, CHPT) 是 QCD 的低能有效场论 (effective field theory, EFT), 是在手征对称性自发破缺的基础上建立的. 1979 年, Weinberg 发表了现代手征微扰论的奠基性文章^[1], 在文章中提出他的“大众定理” (folk theorem).^{2.1} 其基本思想是: 如果我们写出包含满足理论对称性要求的所有可能算符的拉氏量, 并用这个拉氏量来计算矩阵元到微扰论的任意给定阶, 那么我们就可以得到满足解析性 (analyticity), 微扰么正性 (perturbative unitarity), 集团分解 (cluster decomposition) 和对称性这些基本原理的最普遍的 S 矩阵元. 对于上述基本原理, 解析性是因果律 (causality) 的要求, 么正性对应于几率守恒 (微扰么正性是指对于微扰有效场论, 么正性只能逐阶保持, 而不能严格保持), 集团分解指分离很远的两个测量相互之间没有影响. 我们总是可以通过插入导数项来构造越来越多的算符, 因此, 会有无穷多个满足对称性的算符, 这样构造出来的量子场论是不可重整的. 而 to 处理无穷多可能的算符, 就必须有一个规则来允许选取有限个算符, 才有可能进行实际的计算, 并逐阶进行重整化 (renormalization). 有效场论有以下几个要素:

- 能标分离 (scale separation): 有效场论的构造首先需要有一个小量, 对这个小量进行级数展开, 从而我们可以决定要达到一定的计算精度需要考虑的级数展开的幂次. 这样的小量通常是两个能标的比值, 即我们考虑的有效场论是低能有效场论, 涉及到的物理过程的能动量 p 与某个大的能量标度 Λ (通常称为硬标度 (hard scale)) 相比较小的时候, $p/\Lambda < 1$, 我们便能以 p/Λ 作为小量做展开.
- 有效自由度: 根据不确定关系, 小的能动量对应于大的尺度, 能动量为 p 的粒子无法探测尺度小于 $1/p$ 的结构. 因此, 描述低能过程的理论便不需要选取基本理论中的粒子来作为有效场论中的自由度. 手征微扰论中的有效自由度便是强子, 而不是被禁闭在强子内部的夸克和胶子.
- 计幂规则 (power counting): 有效场论必须有一定的规则, 将其中所有涉及到的场和能动

^{2.1}Weinberg 的原文如下^[1]:

This remark is based on a "theorem", which as far as I know has never been proven, but which I cannot imagine could be wrong. The "theorem" says that although individual quantum field theories have of course a good deal of content, quantum field theory itself has no content beyond analyticity, unitarity, cluster decomposition, and symmetry. This can be put more precisely in the context of perturbation theory: if one writes down the most general possible Lagrangian, including all terms consistent with assumed symmetry principles, and then calculates matrix elements with this Lagrangian to any given order of perturbation theory, the result will simply be the most general possible S -matrix consistent with analyticity, perturbative unitarity, cluster decomposition and the assumed symmetry principles. As I said, this has not been proved, but any counterexamples would be of great interest, and I do not know of any.

量标度按照 p/Λ 的幂次分类, 从而可以确定任一物理量以 p/Λ 作为小量展开的幂次.

- 对称性: 有效场论必须遵从基本理论的对称性. 从这个意义上来说, 一个有效场论仅从形式上看可以是具有相同对称性的更高能标下的任意理论的有效场论, 具体的基本理论体现在了有效场论中涉及到的参数的数值中.

手征微扰论是标准模型的低能有效场论, 用来研究物理过程中涉及到的 QCD 的低能部分. 它是基于手征对称性及其自发破缺 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \xrightarrow{\text{SSB}} SU(N_f)_V$ 构造的, 因此, 其基本自由度是 Goldstone 玻色子. 我们将 Goldstone 玻色子及其它外场的小的能动量统一记为 p , 并计数 p 的幂次来确定微扰展开的阶数 $\mathcal{O}(p^n)$. 手征微扰论中的小动量展开涉及到的硬标度记为 $\Lambda_\chi \sim 1 \text{ GeV}$ (见第 2.3 节); 下面, 我们按照惯例不再明显写出展开的小量中的硬标度, 直接以 p 的幂次表示展开的阶数.

1983-1984 年, Gasser 和 Leutwyler 构造了到次领头阶的 $SU(2)^{[2]}$ 和 $SU(3)^{[3]}$ 手征微扰论的拉氏量, 利用路径积分的方法进行了单圈重整化, 并计算了质量, 衰变常数, 散射振幅等一些重要物理量, 奠定了后来理论发展及应用的基础. 部分或者专门讲述手征微扰论的书: [4-6].

本章中, 我们将介绍手征微扰论的基本内容. 第 2.1 节介绍只包含 Goldstone 玻色子的领头阶的手征微扰论, 第 2.3 节介绍单圈修正, 第 2.2 节介绍如何将物质场引入手征微扰论.

2.1 赝标介子的手征微扰论

2.1.1 Goldstone 玻色子场的参数化

我们首先来讨论如何描述 Goldstone 玻色子, 或者说如何使有效场论中体现对称性的自发破缺 $G \xrightarrow{\text{SSB}} H$, 其中 G 表示基本理论拉氏量的对称群, H 表示真空的对称群. 对于 $g \in G$, $h \in H$, 根据第 1.4 节,

$$h|0\rangle = |0\rangle, \quad g|0\rangle \neq |0\rangle \quad (g \notin H), \quad (2.1)$$

我们得到

$$g|0\rangle = gh|0\rangle \neq |0\rangle. \quad (2.2)$$

第 1.4 节中讲到, $g|0\rangle \neq |0\rangle$ 的操作产生了 Goldstone 玻色子, 我们可以使用所有满足上式的 G 的群元来描述 Goldstone 玻色子. 而上式中的 h 可以是 H 中的任意一个群元, 即对于给定的 g , 所有的 gh 作用到真空上产生的 Goldstone 玻色子场的构型相同, 它们构成一个等价类 $g \sim gh$. 因此, Goldstone 玻色子可以用所有 gh 的集合, 即左陪集 $gH = \{gh \mid h \in H\}$, 来参数化, 或者说 Goldstone 玻色子定义在陪集空间 $G/H \equiv \{gH \mid g \in G\}$ 中.

对 QCD 来说, $G = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$, $H = SU(N_f)_V$. 令 $g = (g_L, g_R)$, 其中 $g_L \in$

$SU(N_f)_L, g_R \in SU(N_f)_R$. 利用群元的乘法规则

$$g_1 g_2 = (g_{L_1}, g_{R_1}) (g_{L_2}, g_{R_2}) = (g_{L_1} g_{L_2}, g_{R_1} g_{R_2}), \quad (2.3)$$

我们有

$$gH = (g_L, g_R) H = (g_L, g_R) \underbrace{(g_R^\dagger, g_R^\dagger)}_{\in H=SU(N_f)_V} H = (g_L g_R^\dagger, \mathbb{1}) H. \quad (2.4)$$

因为左陪集中的所有元素对于 (2.2) 都是等价的, 我们可以选取 gH 中的任意元素来代表整个左陪集. 选择 H 中的单位元来代表 H , 于是, 我们便可以用 $U \equiv g_L g_R^\dagger$ 来参数化 Goldstone 玻色子. 由

$$(L, R) (g_L g_R^\dagger, \mathbb{1}) H = (L g_L g_R^\dagger, R) H = (L g_L g_R^\dagger R^\dagger, \mathbb{1}) H, \quad (2.5)$$

U 在手征对称性 $G = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 中的群元 (L, R) 作用下的变换为^{2.2}

$$U \xrightarrow{(L,R) \in G} L U R^\dagger. \quad (2.6)$$

因为 $U = g_L g_R^\dagger$ 是 $SU(N_f)$ 群的群元, 我们可以将 U 写作

$$U = \exp \left(\sqrt{2} i \frac{\Phi}{F'} \right), \quad \Phi \equiv \sqrt{2} T^a \phi^a, \quad (2.7)$$

其中, 对于 $SU(2)$, $T^a = \sigma^a/2$ ($a = 1, 2, 3$), 对于 $SU(3)$, $T^a = \lambda^a/2$ ($a = 1, 2, \dots, 8$) 是群的生成元, ϕ^a 是 $N_f^2 - 1$ 个 Goldstone 玻色子实标量场, F' 是一个质量量纲的量. 将相加性量子数不为零的 Goldstone 玻色子表达为复标量场, 利用 Pauli 和 Gell-Mann 矩阵的明显形式 (见附录 A.2), 我们有

$$\Phi_{SU(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{SU(3)} = \begin{pmatrix} \frac{\phi^3}{\sqrt{2}} + \frac{\phi^8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\phi^3}{\sqrt{2}} + \frac{\phi^8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\phi^8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

$SU(3)$ 的复标量场与实标量场 ϕ^a 之间的关系为:

$$\begin{aligned} \pi^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^1 \mp i\phi^2), \quad K^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^4 \mp i\phi^5), \\ K^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^6 - i\phi^7), \quad \bar{K}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^6 + i\phi^7). \end{aligned} \quad (2.9)$$

中性的 $SU(3)$ 味本征态 ϕ_3 和 ϕ_8 并不直接对应于中性介子 π^0 和 η (它们是质量本征态), 而是它们混合的结果, 我们将在第 2.1.3 节中讨论.

(2.7) 是 Goldstone 玻色子场的非线性函数, 因此, 在手征对称性 (2.6) 下, Goldstone 玻色子场的变换规则是非线性的. 而在 $h \equiv (V, V) \in H$ 变换下, $U \xrightarrow{h} V U V^\dagger$, 容易发现 Φ 的变换

^{2.2}在有些文献中, U 的变换规则写为 $U \xrightarrow{(L,R) \in G} R U L^\dagger$, 这是因为那里暗含采用了 $(\mathbb{1}, g_R g_L^\dagger) H$ 来参数化 Goldstone 玻色子场.

是线性的,

$$\Phi \xrightarrow{h} V\Phi V^\dagger, \quad (2.10)$$

即 Goldstone 玻色子是 $SU(N_f)_V$ 的线性实现, 按照伴随表示变换: 对于 $N_f = 2$ 它们构成三重态, 对于 $N_f = 3$ 构成八重态.

2.1.2 领头阶的手征微扰论

我们先在 $SU(3)$ 手征极限 (chiral limit, $m_{u,d,s} = 0$) 下, 按照动量 p 的幂次展开来构造手征有效拉氏量. $U = \mathcal{O}(p^0)$, p 的幂次对应于作用在 Goldstone 玻色子场上的导数的幂次. 按照有效场论的原理, 拉氏量中的算符需要满足 QCD 的对称性, 包括 $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$, C, P 以及 CP 联合变换 (这里我们不考虑 $\theta \neq 0$ 的情况). U 在上述对称变换下的性质为:

$$U \xrightarrow{g=(L,R) \in G} LUR^\dagger, \quad U \xrightarrow{C} U^T, \quad U \xrightarrow{P} U^\dagger, \quad (2.11)$$

其中, P 和 C 变换的性质对应于赝标介子的 $PC = -+$.

因为 U 不携带任何洛伦兹指标, 拉氏量中的导数项只可能出现偶数幂次. 因此, 只包含 Goldstone 玻色子场的拉氏量按照 p 的幂次展开可以写为:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \dots, \quad (2.12)$$

其中上标表示 p 的幂次.

由 U 构造的不含任何导数而又满足 (2.11) 中的变换性质的算符只有下列可能 (或其乘积):

$$\langle (UU^\dagger)^n \rangle \xrightarrow{g} \langle (LUR^\dagger RU^\dagger L^\dagger)^n \rangle = \langle (UU^\dagger)^n \rangle, \quad (2.13)$$

$\langle, \rangle$ 表示味空间求迹. 然而, 由于 U 是么正矩阵, 这样的项是常数项, 不包含任何动力学. 因此, 描述 Goldstone 玻色子动力学的手征有效拉氏量中至少需要包含两个导数项 (后面我们会看到, 当考虑物质场时, 我们也可以构造出只包含一个导数项的算符), 即只包含 Goldstone 玻色子的手征微扰论的领头阶为 $\mathcal{O}(p^2)$, 这与我们在第 1.5.2 节中做出的 Goldstone 玻色子需要导数耦合的结论是一致的.

在 $\mathcal{O}(p^2)$ 阶, 我们可以构造下面的手征以及 C, P 不变的算符:

$$\langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle \xrightarrow{g} \langle L \partial_\mu U R^\dagger R \partial^\mu U^\dagger L^\dagger \rangle = \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle. \quad (2.14)$$

可以证明, $\langle U \partial^\mu U^\dagger \rangle = 0$, 因此不存在 $\langle U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle U \partial^\mu U^\dagger \rangle$ 这样的项. 在手征极限下, 领头阶的手征拉氏量只包含一项:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle, \quad (2.15)$$

其中 F 是一个质量量纲的量.

将 U 按照 Goldstone 玻色子场的幂次做 Taylor 展开,

$$U = e^{i\lambda^a \phi^a / F'} = 1 + \frac{i}{F'} \lambda^a \phi^a + \mathcal{O}(\Phi^2), \quad (2.16)$$

并将之代入 (2.15), 我们可以得到 Goldstone 玻色子场的动能项

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{F^2}{4} \left\langle \left(\frac{i}{F'} \right)^2 \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b \lambda^a \lambda^b \right\rangle + \mathcal{O}(\Phi^4) \quad (2.17)$$

$$= \frac{F^2}{2} \cdot \frac{1}{F'^2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \mathcal{O}(\Phi^4), \quad (2.18)$$

这里我们用到了 $\langle \lambda^a \lambda^b \rangle = 2\delta^{ab}$. 可以看到, 只要取 $F'^2 = F^2$, 我们便可以得到标量粒子的动能项的正则形式. 因此, 我们取 $F' = F$.

由拉氏量 (2.15), 我们可以得到用 Goldstone 玻色子场构成的矢量和轴矢 Noether 流:

$$\begin{aligned} V_\mu^a &= R_\mu^a + L_\mu^a = i \frac{F^2}{4} \langle \lambda^a [\partial_\mu U, U^\dagger] \rangle, \\ A_\mu^a &= R_\mu^a - L_\mu^a = i \frac{F^2}{4} \langle \lambda^a \{ \partial_\mu U, U^\dagger \} \rangle, \end{aligned} \quad (2.19)$$

它们的宇称变换性质为:

$$V_\mu^a \xrightarrow{P} V^{a,\mu}, \quad A_\mu^a \xrightarrow{P} -A^{a,\mu}. \quad (2.20)$$

将 Taylor 展开的 U 代入上式, 我们发现矢量流中包含偶数个 Goldstone 玻色子场, 而轴矢流中包含奇数个, 且

$$A_\mu^a = -F \partial_\mu \phi^a + \mathcal{O}(\Phi^3). \quad (2.21)$$

于是, 我们发现 F 实际上便是 π 介子在手征极限下的衰变常数:

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b(p) \rangle = -F \partial_\mu e^{-ip \cdot x} \delta^{ab} = i F p_\mu e^{-ip \cdot x} \delta^{ab}. \quad (2.22)$$

通过 π 的轻子衰变宽度 $\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)$ 可以测量 π^+ 的衰变常数 F_{π^+} 与 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵元 $|V_{ud}|$ 的乘积, F_{π^+} 也可以通过格点 QCD 精确计算. PDG 采用的理论值为^{[7]2.3}

$$F_{\pi^+} = (92.1 \pm 0.8) \text{ MeV}. \quad (2.23)$$

前面说过, 仅从对称性上来看, 手征微扰论可以是任何具有相同对称性的更高能标下的理论的低能有效场论. 而正是其中涉及到的参数的取值, 如此处的 π 介子衰变常数的数值, 体现了 QCD 的动力学.

^{2.3}这里我们取欧洲约定. PDG 采用的衰变常数为 $f_{\pi^+} = \sqrt{2} F_{\pi^+} = (130.2 \pm 1.2) \text{ MeV}$ ^[7], 其中心值来源于 FLAG 合作组 2019 年对 $N_f = 2 + 1$ (即格点计算中考虑的海夸克包括 u, d, s) 格点 QCD 结果的平均^[8], 误差则稍微扩大以包括这些计算中的海夸克里没考虑粲夸克的效应.

2.1.3 赝 Goldstone 玻色子的质量

我们来考虑如何将不为零的轻夸克质量项的效应包含进手征微扰论. 在夸克质量项中, 手征对称性发生了明显破缺, 见 (1.18):

$$\mathcal{L}_m^{\text{QCD}} = -\bar{q}\mathcal{M}_q q = -\bar{q}_L\mathcal{M}_q q_R - \bar{q}_R\mathcal{M}_q q_L, \quad (2.24)$$

其中 $q = (u, d, s)^T$, $\mathcal{M}_q = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 是夸克质量矩阵. 因为 $m_{u,d,s} \ll \Lambda_{\text{QCD}}$, 我们可以将 m_q/Λ_{QCD} 作为另一个小量来作级数展开. 手征微扰论是按照小动量和小夸克质量的双重展开来构造的.

我们可以用所谓的伪场 (spurion field) 方法在保持对称性的有效拉氏量中引入对称破坏的项. 伪场方法分三步:

- 将基础理论中破坏对称性的算符替换成伪场, 并规定伪场的变换规则, 使得用伪场算符表示的项满足对称性. 例如, 我们引入伪场 $\chi \propto \mathcal{M}_q$, 并要求

$$\chi \xrightarrow{g} L\chi R^\dagger, \quad \chi \xrightarrow{C} \chi^T, \quad \chi \xrightarrow{P} \chi^\dagger, \quad (2.25)$$

将 (2.24) 中的 $\mathcal{M}_q$ 代换成伪场 χ 得到的项 $-\bar{q}_L\chi q_R - \bar{q}_R\chi^\dagger q_L$ 在手征变换下不变.

- 利用伪场构造有效拉氏量中所有可能的保持对称性的算符. 只包含一个 χ 场的算符只有如下形式:

$$\propto \langle \chi U^\dagger \rangle + \langle \chi^\dagger U \rangle, \quad (2.26)$$

其中, 两项相加保证了拉氏量的宇称不变和厄米性.

- 将有效拉氏量中伪场的值取为基础理论拉氏量中破坏对称性的算符的值. 此处, $\chi \propto \mathcal{M}_q$, 于是, 我们有

$$\chi = 2B\mathcal{M}_q, \quad (2.27)$$

其中 B 为质量量纲的参数.

通过这样的操作, 我们可以保证在有效场论中的对称性明显破缺具有与基础理论 QCD 中的明显破缺同样的结构.

考虑轻夸克质量项之后的手征微扰论领头阶拉氏量为:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U \rangle, \quad (2.28)$$

其中除夸克质量外只包含两个参数: F 和 B , F 为手征极限下的 π 介子衰变常数, B 则正比于夸克凝聚 $\langle \bar{q}q \rangle$ ($\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L \rangle$, 如果真空也具有手征对称性, 其值应该为零, 因此夸克凝聚可以作为手征对称自发破缺的序参量). 由上式可知, 手征微扰论领头阶的真空能量密度为

$$\mathcal{H}_{\text{vac}}^{(2)} = -\frac{F^2}{4} \langle 2B (\mathcal{M}_q + \mathcal{M}_q^\dagger) \rangle = -F^2 B (m_u + m_d + m_s). \quad (2.29)$$

对夸克质量求导得到 B :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{vac}}^{(2)}}{\partial m_q} = -F^2 B. \quad (2.30)$$

另一方面, 在 $SU(3)$ 极限下对 QCD 的真空能量密度求导,

$$\frac{\partial}{\partial m_q} \langle 0 | \mathcal{H}_{\text{QCD}} | 0 \rangle = \frac{\partial}{\partial m_q} \langle 0 | m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s | 0 \rangle = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle, \quad (2.31)$$

其中 $\frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle$. 因为手征微扰论是 QCD 的低能有效场论, 所以两种方法求出来的 (2.30) 和 (2.31) 相等, 在 $SU(3)$ 手征极限下,

$$B = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{3F^2}. \quad (2.32)$$

实际上, 因为 U 是么模么正矩阵, 所以 (2.7) 式中定义的 U 可以任乘一个指数因子, $U_0 \equiv e^{i\alpha}$, 即可将 U 定义为 $U \equiv U_0 \exp(\sqrt{2}i\Phi/F)$. 将所有的 Goldstone 玻色子场设为零, 则 U_0 表示真空的构型. 因为真空不带任何相加性量子数, 因此, α 只能是对角矩阵, 且由于 $\det U_0 = 1$, 我们可以将 U_0 一般性地写为

$$U_0 = \exp(i\alpha) = \text{diag}(e^{i\alpha_u}, e^{i\alpha_d}, e^{-i(\alpha_u+\alpha_d)}), \quad (2.33)$$

其中 α_u, α_d 为两个实参数. 真空能量密度为:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{vac}}^{(2)} &= -\frac{F^2}{4} \text{Tr}(\chi U_0^\dagger + \chi^\dagger U_0) = -\frac{F^2 B}{2} \text{Tr}[\mathcal{M}_q(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha})] \\ &= -F^2 B [m_u \cos \alpha_u + m_d \cos \alpha_d + m_s \cos(\alpha_u + \alpha_d)]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

因为真空能量必定是最小化的, 因此, $\alpha_{u,d}$ 必定满足:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{vac}}^{(2)}}{\partial \alpha_u} = F^2 B [m_u \sin \alpha_u + m_s \sin(\alpha_u + \alpha_d)], \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{vac}}^{(2)}}{\partial \alpha_d} = F^2 B [m_d \sin \alpha_d + m_s \sin(\alpha_u + \alpha_d)], \end{aligned} \quad (2.35)$$

且二阶导数大于零. 对于任意的夸克质量, $U_0 = 1$ 满足上述要求. 因此, 我们可取 (2.7) 来描述 Goldstone 玻色子. 在 QCD 的 θ 项不为零的情况下, 真空不再由 $U_0 = 1$ 给出, 上述步骤就变得不可或缺了 (可参见 [9–11]).

将 U 展开到 Φ^2 阶代入 (2.28), 我们可以将 Goldstone 玻色子的质量用夸克质量和手征拉氏量中的参数表达出来:

$$\begin{aligned} M_{\pi^\pm}^2 &= B(m_u + m_d), \\ M_{K^\pm}^2 &= B(m_u + m_s), \\ M_{K^0}^2 &= B(m_d + m_s). \end{aligned} \quad (2.36)$$

可以看到, $m_q = \mathcal{O}(p^2)$. 由于夸克质量项造成的手征对称明显破缺, Goldstone 玻色子获得了非零质量, 而且其质量的平方正比于夸克质量, 此即 Gell-Mann–Oakes–Renner 关系. 由于上

述关系, 格点 QCD 中采取大于物理值的 u, d 夸克质量进行计算, 其结果通常表达为 π 介子质量 M_π 取某个非物理值时的结果, 我们需将这样的结果外推到物理的情况. 因为手征微扰论是按照夸克质量的幂次构造出来的有效场论, 其中的夸克质量也是参数, 所以, 当格点 QCD 计算中的 π 介子质量远小于 1 GeV 时, 可以采用手征微扰论进行模型无关的外推, 这种操作被称为手征外推 (chiral extrapolation).

我们还会发现 (2.8) 中的 ϕ^3 和 ϕ^8 不是质量的本征态. 拉氏量中它们的二次项为

$$-\frac{B}{2} \begin{pmatrix} \phi^3 & \phi^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u + m_d & \frac{1}{\sqrt{3}}(m_u - m_d) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(m_u - m_d) & \frac{1}{3}(m_u + m_d + 4m_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^3 \\ \phi^8 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

质量本征态 π^0 和 η 是它们的线性组合:^{2.4}

$$\begin{pmatrix} \pi^0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_{\pi^0 \eta} & \sin \epsilon_{\pi^0 \eta} \\ -\sin \epsilon_{\pi^0 \eta} & \cos \epsilon_{\pi^0 \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^3 \\ \phi^8 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

对角化 (2.37), 可以得到 π^0 - η 的混合角 $\epsilon_{\pi^0 \eta}$ (见习题 2.1) 以及 π^0 和 η 的质量:

$$\begin{aligned} M_{\pi^0}^2 &= B(m_u + m_d) - \mathcal{O}((m_u - m_d)^2) \\ M_\eta^2 &= \frac{B}{3}(m_u + m_d + 4m_s) + \mathcal{O}((m_u - m_d)^2). \end{aligned} \quad (2.39)$$

因为 π^0 的同位旋为 1, 而 η 的同位旋为 0, 它们之间的混合破坏同位旋对称性, $\epsilon_{\pi^0 \eta}$ 是一个同位旋破坏的参数.

在同位旋极限 $m_u = m_d$ 下, 我们得到了 Gell-Mann–Okubo 关系:

$$4M_K^2 = 3M_\eta^2 + M_{\pi^0}^2. \quad (2.40)$$

利用上述介子质量, 我们可以得到夸克质量的比值:

$$\begin{aligned} \frac{m_u}{m_d} &= \frac{M_{K^+}^2 - M_{K^0}^2 + M_{\pi^+}^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^+}^2 + M_{\pi^+}^2} \approx 0.67, \\ \frac{m_s}{m_d} &= \frac{M_{K^0}^2 + M_{K^+}^2 - M_{\pi^+}^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^+}^2 + M_{\pi^+}^2} \approx 22. \end{aligned} \quad (2.41)$$

m_u/m_d 的比值与 1 有着显著的偏离, 为什么同位旋破坏的效应通常还如此之小? 其原因在于一般情况下, 同位旋破坏的大小并不由 m_u/m_d 给出, 而是由 $(m_d - m_u)/\Lambda_{\text{QCD}}$ (无同位旋破坏的过程的振幅不必须正比于夸克质量, 此时, 合适的能标为非微扰 QCD 的能标 Λ_{QCD}) 或 $(m_d - m_u)/m_s$ (如习题 2.1 中 π^0 - η 的混合角) 给出.^{2.5}

此外, 我们发现

$$M_{\pi^0}^2 = M_{\pi^+}^2 \left\{ 1 - \frac{(m_d - m_u)^2}{8\hat{m}(m_s - \hat{m})} + \dots \right\}, \quad (2.42)$$

^{2.4}实际上, 这里的 η 还只是 SU(3) 八重态中的 η_8 . 质量本征态 η 和 η' 是 η_8 和 SU(3) 单态 η_0 的混合. 在此, 我们不考虑这一复杂性.

^{2.5}在有些过程中, 同位旋守恒的振幅正比于轻夸克质量, 可以出现同位旋破坏的压低为 $(m_d - m_u)/(m_u + m_d)$ 的情况, 如轴子过程 $aN \rightarrow \pi N$ [12].

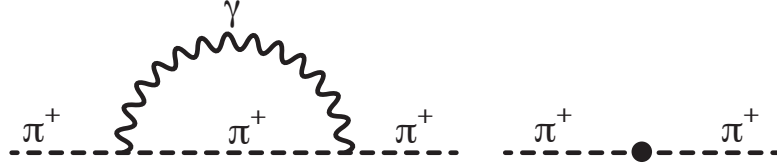


图 2.1: 虚光子对 π^+ 介子自能的贡献. 左图: 虚光子- π^+ 圈图; 右图: 积掉虚光子带来的算符.

其中, $\hat{m} \equiv (m_u + m_d)/2$. 上式给出的 $M_{\pi^+} - M_{\pi^0} \approx 0.2 \text{ MeV}$ 远小于实验测量的值 $(M_{\pi^+} - M_{\pi^0})_{\text{exp}} \approx 4.6 \text{ MeV}$. 原因何在?

2.1.4 手征微扰论中的虚光子

第 1.8.1 节中提到同位旋破坏有两种来源. QCD 中的同位旋破坏由 u, d 夸克的质量差引起, (2.37) 中的非对角元以及 (2.36) 中 K^0 和 $K^\pm$ 的质量差是两个例子. 因为 u, d 夸克的电荷不同, QED 也会引起同位旋破坏, 并通过虚光子对带不同电荷的强子的质量给出不同贡献.

在手征微扰论中, 我们可以通过将导数变为规范协变导数来引入电弱相互作用:

$$\begin{aligned} \partial_\mu U &\rightarrow D_\mu U = \partial_\mu U - i\ell_\mu U + iU r_\mu \\ &= \partial_\mu U - i[v_\mu, U] + i\{a_\mu, U\}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

其中, $\ell_\mu = v_\mu - a_\mu$ 和 $r_\mu = v_\mu + a_\mu$ 分别为左手和右手外场, 在手征对称性下的变换规则为:^{2.6}

$$\begin{aligned} \ell_\mu &\xrightarrow{g} L\ell_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger, \\ r_\mu &\xrightarrow{g} Rr_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger, \end{aligned} \quad (2.44)$$

v_μ 和 a_μ 分别为矢量和轴矢外场. 电磁外场可写为

$$v_\mu = -A_\mu Q, \quad a_\mu = 0, \quad Q = e \cdot \text{diag} \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), \quad (2.45)$$

其中 A_μ 是光子场, Q 是夸克的电荷矩阵.

虚光子对 π^+ 自能的贡献如图 2.1 所示. 虽然左图中圈图的贡献从次领头阶才会出现 (利用后面要讲的计幂规则), 我们仍然要看是否在领头阶会出现包含虚光子效应的算符. 我们通过第 2.1.3 中介绍的伪场方法可将夸克的电荷矩阵引入有效拉氏量. 为此, 我们需要先确定相应的伪场在手征对称性下的变换规则. 光子与夸克的耦合为

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\bar{q}Q\cancel{A}q = -\bar{q}_L Q \cancel{A} q_L - \bar{q}_R Q \cancel{A} q_R. \quad (2.46)$$

因此, 我们引入伪场 Q_L 和 Q_R , 并规定它们在手征对称性下的变换规则为

$$Q_L \xrightarrow{g} L Q_L L^\dagger, \quad Q_R \xrightarrow{g} R Q_R R^\dagger. \quad (2.47)$$

^{2.6}虽然手征变换是全局变换, Gasser 和 Leutwyler 将外场的变换做局域处理, 从而方便地利用生成泛函的方法导出对称性的结果^[2-3,13].

(2.46) 中的 Q 替换成伪场得到的算符 $-\bar{q}_L Q_L A q_L - \bar{q}_R Q_R A q_R$ 是手征不变的. 然后, 构造包含 Q_L 和 Q_R 的有效场论中的手征不变的算符; 最后再令 $Q_L = Q_R = Q$ 进行计算. 在不引入导数也不引入夸克质量矩阵的情况下, 可以构造出唯一的一项^[14]:

$$\mathcal{L}_{\text{em}}^{(2)} = C \langle Q_L U Q_R U^\dagger \rangle, \quad (2.48)$$

其中, C 为待定参数. 如果我们要求电荷单位 e 为与 p 同量级的小量, 即 $e = \mathcal{O}(p)$, 那么上式便也是 $\mathcal{O}(p^2)$ 的算符.

利用 (2.48), 可以得到虚光子对带电的 Goldstone 玻色子质量在领头阶的贡献:

$$M_{\pi^\pm, \text{em}}^2 = M_{K^\pm, \text{em}}^2 = \frac{2Ce^2}{F^2}. \quad (2.49)$$

从而得到了 Dashen 定理^[15]:

$$(M_{\pi^+}^2 - M_{\pi^0}^2)_{\text{em}} = (M_{K^+}^2 - M_{K^0}^2)_{\text{em}}. \quad (2.50)$$

参数 C 的值为

$$C = \frac{F^2}{2e^2} (M_{\pi^+}^2 - M_{\pi^0}^2). \quad (2.51)$$

考虑了虚光子的效应之后, 通过介子质量得到 u, d 夸克的质量比值为

$$\frac{m_u}{m_d} = \frac{M_{K^+}^2 - M_{K^0}^2 + 2M_{\pi^0}^2 - M_{\pi^+}^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^+}^2 + M_{\pi^+}^2} = 0.56, \quad (2.52)$$

与 (2.41) 相比, 有显著的修正. 我们也可以得到 π^0 - η 混合角的值:

$$\epsilon_{\pi^0\eta} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_d - m_u}{2m_s - m_u - m_d} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M_{K^0}^2 - M_{K^\pm}^2 - M_{\pi^0}^2 + M_{\pi^\pm}^2}{M_{K^0}^2 + M_{K^\pm}^2 - M_{\pi^0}^2 - M_{\pi^\pm}^2} \simeq 0.0099. \quad (2.53)$$

2021 版 FLAG 合作组对格点 QCD 结果的总结中, 夸克质量的比值为^[16]

$$\frac{m_u}{m_d} = \begin{cases} 0.465(24), & N_f = 2 + 1 + 1, \\ 0.485(19), & N_f = 2 + 1, \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\frac{m_s}{\hat{m}} = \begin{cases} 27.23(10), & N_f = 2 + 1 + 1, \\ 27.42(12), & N_f = 2 + 1, \end{cases} \quad (2.55)$$

这里, 括号中的数字表示误差, 如 $0.465(24)$ 表示 0.465 ± 0.024 . $m_u = 0$ 这种对强 CP 问题的解释已经被完全排除了.

2.1.5 $\pi\pi$ 散射

π 介子作为最轻的强子, 其 $2 \rightarrow 2$ 的散射是一个基本的强相互作用过程, 是除核子散射外被研究最多的强子散射. 两体散射 $A(p_1)B(p_2) \rightarrow C(p_3)D(p_4)$ 的 Lorentz 不变的散射振幅是 (1.57) 式中定义的 Mandelstam 变量的函数, 将其记为 $T(s, t, u)$. 在相对论量子场论中, 粒

表 2.1: 《粒子数据表》中的 CG 系数, 球谐函数和 d 函数表^[7]. 表的读法: 其中的每个系数中的正数部分都需要再开根号; 如 $\pm 1/2$ 表示 $\pm 1/\sqrt{2}$.

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$. Notation:

J	J	...
M	M	...

m_1	m_2	Coefficients
m_1	m_2	
$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	

$1/2 \times 1/2$

1		
+1/2	1	0
+1/2	1	0
-1/2	1/2	1/2
-1/2	1/2	1/2
-1/2	-1/2	1

$1 \times 1/2$

3/2	3/2	1/2
+1	+1/2	1
+1	+1/2	1
+1	-1/2	1/3
0	1/2	2/3
0	1/2	2/3
0	-1/2	2/3
-1	-1/2	1/3
-1	-1/2	1/3

2×1

3	2	
+2	+1	1
+2	+1	1
+2	0	1/3
+1	1/3	2/3
+1	1/3	2/3
+1	0	1/3
0	1/3	2/3
0	1/3	2/3
0	-1/2	1/3
-1	-1/2	1/3

1×1

2	1	
+1	+1	1
+1	+1	1
+1	0	1/2
0	1/2	1/2
0	1/2	1/2
0	0	1/2
-1	-1	1
-1	-1	1
-1	0	1/2
0	1/2	1/2
0	1/2	1/2
0	0	1/2
-1	-1	1

$Y_1^0 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos \theta$

$Y_1^1 = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \sin \theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \frac{\sqrt{5}}{4\pi} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

$Y_2^1 = -\frac{\sqrt{15}}{8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{15}}{2\pi} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$

$3/2 \times 1$

5/2	5/2	3/2
+3/2	+1	1
+3/2	+1	1
+3/2	0	2/5
+1/2	1	3/5
+1/2	1	3/5
+1/2	0	2/5
-1/2	-1	1/5
-1/2	-1	1/5
-1/2	0	2/5
-3/2	-1	1/5
-3/2	-1	1/5

$3/2 \times 1/2$

2	2	1
+2	+1	1
+2	+1	1
+2	0	1/4
+1/2	1/4	3/4
+1/2	1/4	3/4
+1/2	0	1/4
-1/2	-1/4	3/4
-1/2	-1/4	3/4
-1/2	0	1/4
-3/2	-1/2	1/4
-3/2	-1/2	1/4

$d_{m,0}^\ell = \frac{\sqrt{4\pi}}{2\ell+1} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 j_1 j_2 J M \rangle$
$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 j_2 j_1 J M \rangle$

子和反粒子是由同一个场产生或湮灭的, 将初 (末) 态的某个粒子变成它的反粒子, 并将其四动量反号, 则相应的过程与原来的过程的散射振幅是 Mandelstam 变量的同一个解析函数 (因为这几个过程的物理区域不同, 实际上它们的振幅对应于同一个函数的解析延拓):

$$\begin{aligned}
 T(s, t, u) &: A(p_1) B(p_2) \rightarrow C(p_3) D(p_4), \\
 T(t, s, u) &: A(p_1) \bar{C}(-p_3) \rightarrow \bar{B}(-p_2) D(p_4), \\
 T(u, t, s) &: A(p_1) \bar{D}(-p_4) \rightarrow C(p_3) \bar{B}(-p_2),
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

这个性质称为交叉对称性 (crossing symmetry).

π 介子是同位旋三重态, 利用交叉对称性和同位旋对称性, 我们发现在同位旋对称的情况下, 所有的 $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ 散射振幅可以用一个振幅表示出来. 定义

$$\mathcal{A}(s, t, u) \equiv \mathcal{A}_{\pi^+(p_1)\pi^-(p_2) \rightarrow \pi^0(p_3)\pi^0(p_4)}, \tag{2.57}$$

由交叉对称性, 可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(t, s, u) &= \mathcal{A}_{\pi^+(p_1)\pi^0(-p_3) \rightarrow \pi^+(-p_2)\pi^0(p_4)}, \\
 \mathcal{A}(u, t, s) &= \mathcal{A}_{\pi^+(p_1)\pi^0(-p_4) \rightarrow \pi^0(p_3)\pi^+(-p_2)}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

$\pi^\pm$ 位于同一个同位旋多重态, 将粒子基中的 π 介子用同位旋基 $|I, I_3\rangle$ 表示出来, 需要相位约定, 我们取 (对应于 $|\bar{d}\rangle = -|\bar{q}; I = 1/2, I_3 = 1/2\rangle$)

$$|\pi^+\rangle = -|\pi; 1, 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |\pi; 1, 0\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |\pi; 1, -1\rangle. \quad (2.59)$$

利用表 2.1 中的 CG 系数, 有

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= -\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|\pi\pi; 2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\pi\pi; 1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\pi\pi; 0, 0\rangle\right), \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\pi\pi; 2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\pi\pi; 0, 0\rangle, \\ |\pi^+\pi^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi\pi; 2, 1\rangle + |\pi\pi; 1, 1\rangle), \\ |\pi^0\pi^+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi\pi; 2, 1\rangle - |\pi\pi; 1, 1\rangle). \end{aligned} \quad (2.60)$$

根据同位旋对称性, 我们可以将 (2.57) 和 (2.58) 中的散射振幅表达为具有给定同位旋的 $\pi\pi$ 散射振幅:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s, t, u) &= \frac{1}{3} [T^{I=0}(s, t, u) - T^{I=2}(s, t, u)], \\ \mathcal{A}(t, s, u) &= \frac{1}{2} [T^{I=1}(s, t, u) + T^{I=2}(s, t, u)], \\ \mathcal{A}(u, t, s) &= \frac{1}{2} [T^{I=2}(s, t, u) - T^{I=1}(s, t, u)]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

最后, 我们得到

$$\begin{aligned} T^{I=0}(s, t, u) &= 3\mathcal{A}(s, t, u) + \mathcal{A}(t, s, u) + \mathcal{A}(u, t, s), \\ T^{I=1}(s, t, u) &= \mathcal{A}(t, s, u) - \mathcal{A}(u, t, s), \\ T^{I=2}(s, t, u) &= \mathcal{A}(t, s, u) + \mathcal{A}(u, t, s). \end{aligned} \quad (2.62)$$

利用拉氏量 (2.28), 从其中包含四个 π 介子的项, 我们可以得到领头阶手征微扰论中的 $\pi\pi$ 散射振幅:

$$\mathcal{A}(s, t, u) = \frac{s - M_\pi^2}{F^2}. \quad (2.63)$$

在阈值处, $\pi\pi$ 质心系中 π 介子的三动量为零, $s = 4M_\pi^2, t = u = 0$. S 波 $\pi\pi$ 散射长度正比于散射振幅在阈值处的值:^{2.7}

$$a_0^I \equiv \frac{1}{32\pi} T^I(s = 4M_\pi^2, t = 0, u = 0), \quad (2.64)$$

上标 I 表示同位旋. 手征微扰论的领头阶预言为

$$a_0^0 = \frac{7M_\pi^2}{32\pi F_\pi^2} = 0.16, \quad a_0^2 = -\frac{M_\pi^2}{16\pi F_\pi^2} = -0.045, \quad (2.65)$$

其中, 我们将手征极限下的 F 取为了 π 衰变常数的物理值 F_π , 在领头阶两者相等.

^{2.7}手征微扰论中将散射长度定义为无量纲量, 将它乘以 M_π^{-1} 对应于通常定义的散射长度 (见第 3 章).

实验上通过两种方法对 $\pi\pi$ 的 S 波散射长度进行了精确测量.

- 阈值效应. 在第 3 章中我们会看到, 由于么正性, 在每个 S 波耦合的反应道的两体阈值处, 散射振幅都会有一个根号支点, 从而导致在不变质量谱上出现阈值尖点 (threshold cusp) 的可观测效应 (综述见 [17]). 阈值尖点的形状受到阈值附近相互作用强度的影响, 因此, 可以利用阈值尖点来测量两个稳定强子散射的散射长度^[18-20]. $K^\pm \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^\pm$ 衰变的 $\pi^0\pi^0$ 不变质量谱在 $\sqrt{s} = 2M_{\pi^+}$ 处存在阈值尖点. 利用这样的阈值效应和对 $K^\pm \rightarrow \pi^+\pi^-e^\pm\nu_e$ 的测量, NA48/2 实验给出^[21-22]:

$$\begin{aligned} a_0^0 &= 0.2210 \pm 0.0047_{\text{stat}} \pm 0.0015_{\text{syst}}, \\ a_0^2 &= -0.0429 \pm 0.0044_{\text{stat}} \pm 0.0016_{\text{syst}}, \\ a_0^0 - a_0^2 &= 0.2639 \pm 0.0020_{\text{stat}} \pm 0.0004_{\text{syst}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

- π 原子. 一对带符号相反电荷的强子主要通过电磁力吸引形成的束缚系统称为强子原子. 由于 Bohr 半径远大于强相互作用的尺度: $r_B = 1/(\alpha\mu) \gg 1/\Lambda_{\text{QCD}}$, 其中 μ 为这对强子的约化质量, 通过精确测量强子原子的性质可以获取强子之间强相互作用的长程部分的信息, 即散射长度 (综述见 [23-24]). $\pi^+\pi^-$ 原子的主要衰变道是 $\pi^0\pi^0$, 由 (2.57) 和 (2.61) 可知 $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$ 的散射振幅是 $I=0$ 和 $I=2$ $\pi\pi$ 散射振幅的差, 从而, 通过测量 $\pi^+\pi^-$ 原子的寿命可以得到 $|a_0^0 - a_0^2|$. DIRAC 实验组的测量结果为^[25]:

$$|a_0^0 - a_0^2| = 0.2533_{-0.0078}^{+0.0080}_{\text{stat}} {}_{-0.0073}^{+0.0078}_{\text{syst}}. \quad (2.67)$$

(2.65) 中预言的 a_0^0 与实验值相比有明显偏差, 表明了次领头阶修正的重要性.

习题 2.1 推导 π^0 - η 的混合角:

$$\epsilon_{\pi^0\eta} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}(m_d - m_u)}{2m_s - m_u - m_d} \right) \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_d - m_u}{2m_s - m_u - m_d}. \quad (2.68)$$

习题 2.2 轴子质量:

强 CP 问题的一个解决方案是所谓的 Peccei-Quinn (PQ) 机制^[26-27], 其中引入了一种新的整体 U(1) 对称性, 称为 PQ 对称性. 轴子是 PQ 对称性自发破缺产生的赝 Goldstone 玻色子, 它通过与胶子的耦合中获得质量. 它与标准模型粒子的耦合非常弱, 是暗物质的候选者, 因此, 目前受到很大的关注 (能解决强 CP 问题的轴子称为 QCD 轴子). QCD 轴子的性质可以用手征微扰论研究. 将 (2.28) 中的夸克质量矩阵 $\mathcal{M}_q$ 代换成 $\mathcal{M}_q e^{iXa/f_a}$, 其中 a 是轴子场, f_a 是轴子的衰变常数, 矩阵 X 满足 $\langle X \rangle = 1$ 的限制, 可以得到包含 QCD 轴子的手征有效拉氏量. 为简单起见, 考

考虑 SU(2) 的手征微扰论, 其领头阶拉氏量为

$$\mathcal{L}_a^{(2)} = \frac{F^2}{2} B \langle \mathcal{M}_q e^{iXa/f_a} U^\dagger + \text{h.c.} \rangle,$$

其中, **h.c.** 表示厄米共轭项.

- 1) 证明 a - π^0 混合可以通过取 $X = \mathcal{M}_q^{-1} / \langle \mathcal{M}_q^{-1} \rangle$ 来去掉;
- 2) 证明轴子的质量平方为

$$m_a^2 = \frac{F^2 M_\pi^2}{f_a^2} \frac{m_u m_d}{(m_u + m_d)^2}.$$

2.2 含物质场的手征微扰论

上一节中的手征微扰论中只包含了 Goldstone 玻色子, 其它强子也可以作为物质场引入手征微扰论, 扩充其应用范围. 下面是一些例子:

- 重子手征微扰论: 研究核子以及其它基态重子的低能性质^[28–36].
- 重味强子手征微扰论: 研究含重夸克的强子的低能性质^[37–40].
- SU(2) K 介子手征微扰论: 将 K 介子作为物质场而不是作为 Goldstone 玻色子来处理^[41].

在手征极限下, Goldstone 玻色子的质量为零, 因此它们的质量可以作为小量来处理. 然而, 物质粒子在手征极限下的质量不等于 0; 例如, 结合格点 QCD 的结果 (如 [42]) 和手征微扰论, 可知即使所有夸克的质量都设为零, 核子的质量仍然有 900 MeV 左右. 这些手征极限下不为零的质量带来了新的能标, 需要给它一个相应的计幂规则, 通常将之与手征展开的硬标度作为同一阶的能标来处理. 在计算圈图修正时, 物质场的质量又会带来所谓的计幂规则破坏 (power counting breaking) 的问题^[28], 相应的有不同的处理方式; 对于重子手征微扰论来说, 方法包括类比于重夸克展开的重重子手征微扰论 (heavy baryon chiral perturbation theory, HBCHPT)^[29–30] (此处的重重子实际指的仍然是轻夸克组成的轻味重子, 只是将其质量 m 作为大量处理做了 $1/m$ 的幂次展开), 红外正规化 (infrared regularization) 方法^[32–34], 拓展在壳重整化 (extended on-mass-shell renormalization) 方法^[35–36]. 而如果引入的物质场不止一种, 就可能引入不止一个新能标, 如何处理不同的能标是一个复杂的问题. 如在 SU(2) 重子手征微扰论中, 除核子之外再引入 $\Delta(1232)$ 共振态, 它与核子之间的质量差便是一个新的在手征极限下不为零的能标, 在小能标展开 (small scale expansion) 框架中, 这个质量差被作为一个额外的小量进行级数展开^[43–44]. 关于重子手征微扰论的各种处理方式, 可以参见综述 [45]. 这些方法也可以处理包含其余物质场的手征微扰论的圈图计算.

2.2.1 物质场的手征变换

物质场的手征微扰论仍然按照小动量和轻夸克质量的双重展开来构造. QCD 真空的对称群是 $SU(N_f)_V$ 而不是 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$, 利用产生算符作用到真空上产生的强子态是 $SU(N_f)_V$ 群里的多重态. 例如, 核子同位旋二重态, 中子和质子 $N^T = (n, p)$, 形成同位旋对称群 $SU(2)_V$ 的基础表示, 即

$$N \xrightarrow{V \in SU(2)_V} VN. \quad (2.69)$$

而基态重子八重态

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

是 $SU(3)_V$ 味对称群的伴随表示, 即

$$B \xrightarrow{V \in SU(3)_V} V B V^\dagger. \quad (2.71)$$

那么它们该如何在 $G \equiv SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 下变换呢? 答案是变换规则并不唯一确定, 只要变换规则使得这些强子在手征对称群的矢量子群 $SU(N_f)_V$ 下按照合适的多重态变换, 那么这种变换规则就是可以采取的. 下面我们以基态粲介子为例说明变换规则.

含一个粲夸克的基态粲介子是 $SU(3)_V$ 下的反三重态:

$$H^{(Q)} = (D^{(*)0}, D^{(*)+}, D_s^{(*)+}) \xrightarrow{V \in SU(3)_V} H^{(Q)} V^\dagger. \quad (2.72)$$

可以定义出多种粲介子场, 在 G 的群元的作用下, 它们有不同的变换规则, 但是在矢量子群群元的作用下都可以按照上式变换. 这些不同的粲介子场之间可以通过场的重新定义 (field redefinition) 相联系. 我们考虑两种不同定义的粲介子场, H_1 和 H_2 , 它们在 $g = (L, R) \in G$ 作用下的变换规则分别为

$$H_1 \xrightarrow{g} H_1 L^\dagger, \quad H_2 \xrightarrow{g} H_2 R^\dagger. \quad (2.73)$$

如果群元属于 G 的矢量子群, 即 $L = R = V$, 上述变换都与 (2.72) 一致, 因此, H_1 和 H_2 都可以用来表示味反三重态的重介子场. H_1 和 H_2 之间的差别是场的重新定义:

$$\begin{aligned} H_2 &= H_1 U = H_1 + H_1 \frac{i\lambda^a \phi^a}{F} + \dots \\ &\xrightarrow{g} H_1 L^\dagger L U R^\dagger = H_1 U R^\dagger. \end{aligned} \quad (2.74)$$

虽然 H_2 是 H_1 和 Goldstone 玻色子场的非线性函数, 但是用 H_1 和 H_2 构造出来的手征不变的拉氏量计算得到的物理量是相同的. 其原因是 Haag 的表示等价 (representation independence) 定理^[5,46-48]:

如果场 ϕ 和 χ 满足非线性但是定域的关系 $\phi = \chi F[\chi]$, 其中 $F[\chi]$ 是 χ 的函数且 $F[0] = 1$, 那么尽管 Feynman 规则不同, 但是用基于 ϕ 的拉氏量 $\mathcal{L}[\phi]$ 和基于 χ 的拉氏量 $\mathcal{L}[\chi F[\chi]]$ 计算得到的可观测量 (在壳 S 矩阵) 是相同的.

这主要是因为 $F[0] = 1$ 保证了 ϕ 和 χ 场具有同样的自由场的行为和单粒子极点, 从而它们的渐近单粒子态对应于具有同样质量和其他量子数的粒子, 保证了用基于它们构造的拉氏量 $\mathcal{L}[\phi]$ 和 $\mathcal{L}[\chi F[\chi]]$ 给出相同的 S 矩阵元.

然而, 不管是 H_1 还是 H_2 对于我们构造满足对称性要求的手征有效拉氏量来说都不方便, 这是因为它们的宇称变换性质比较复杂^[4,49]. (2.73) 中的变换规则实际上表明 H_1 和 H_2 中的

轻反夸克场分别是左手和右手的反夸克场. 根据 (1.19), 在宇称变换下, 左右手的夸克场相互转换, 从而, H_1 和 H_2 的宇称变换规则中也必须体现这一点. 为此, 我们要规定 H_1 的宇称变换之后得到的场在 $g \in G$ 的作用下要按照右手场来变换, 即

$$H_{1,a} \xrightarrow{P} \gamma^0 H_{1,b} \gamma^0 U_{ba} \xrightarrow{g} \gamma^0 H_{1,b} \gamma^0 U_{ba} R^\dagger. \quad (2.75)$$

类似地, H_2 的宇称变换可规定为

$$H_{2,a} \xrightarrow{P} \gamma^0 H_{2,b} \gamma^0 U_{ba}^\dagger. \quad (2.76)$$

Coleman-Callan-Wess-Zumino (CCWZ) 提出了一种方便的构造方案^[47-48]. 定义 u , $U \equiv u^2$. 从 U 的变换规则,

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{g} U' \equiv LUR^\dagger \\ &= u'u' \equiv Luh^{-1}u' = Luh^{-1}huR^\dagger, \end{aligned} \quad (2.77)$$

可以给出 u 的变换规则:

$$u \xrightarrow{g} u' = Luh^{-1}(g, U) = h(g, U)uR^\dagger, \quad (2.78)$$

其中引入的 h 称为补偿场 (compensator field). 我们将 h 写为 $h(g, U)$ 是因为它是 G 的群元 $g = (L, R)$ 和 Goldstone 玻色子场的函数. 从 (2.78) 可知,

$$h(g, U) = \sqrt{LUR^\dagger R} \sqrt{U}^\dagger = \sqrt{RU^\dagger L} L \sqrt{U}, \quad (2.79)$$

即 h 是 Goldstone 玻色子场的非线性函数, 从而也是时空坐标的函数, $h(x)$. 当变换属于矢量子群时, $g = (V, V)$, 我们有,

$$U \xrightarrow{(V,V)} VUV^\dagger = u'^2 = VuV^\dagger VuV^\dagger, \quad (2.80)$$

从而 $u \xrightarrow{(V,V)} u' = VuV^\dagger$, 此时 $h = V$ 是矢量子群中的元素, 不再依赖于时空坐标.

我们可以利用按照下式变换的重介子场:

$$H^{(Q)} \xrightarrow{g} H^{(Q)} h^{-1}, \quad (2.81)$$

它与上面的 H_1 和 H_2 之间也可以通过场的重新定义相联系,

$$H^{(Q)} = H_1 u = H_2 u^\dagger. \quad (2.82)$$

利用 (2.75) 以及 $u \xrightarrow{P} u^\dagger$, 可以看到这样定义的重介子场具有良好的宇称变换性质, 不再需要额外引入 U 或 $U^\dagger$:

$$H^{(Q)} \xrightarrow{P} \gamma^0 H_1 \gamma^0 U u^\dagger = \gamma^0 H_1 \gamma^0 u = \gamma^0 H^{(Q)} \gamma^0. \quad (2.83)$$

因为 h 依赖于时空坐标, 因此通过这种方式来定义的场的手征变换像是一种局域变换, 于是, 我们可以定义对应于局域变换的协变导数, 并利用其构造手征不变的有效拉氏量.

按照 (2.81) 定义的重介子场的导数项 $\partial_\mu H^{(Q)}$ 的手征变换为

$$\partial_\mu H^{(Q)} \xrightarrow{g} \partial_\mu (H^{(Q)} h^{-1}) = (\partial_\mu H^{(Q)}) h^{-1} + H^{(Q)} (\partial_\mu h^{-1}), \quad (2.84)$$

因此, 我们定义手征协变导数

$$\mathcal{D}_\mu H^{(Q)} \equiv \partial_\mu H^{(Q)} - H^{(Q)} \Gamma_\mu, \quad (2.85)$$

使其变换规则与 $H^{(Q)}$ 相同:

$$\mathcal{D}_\mu H^{(Q)} \xrightarrow{g} \mathcal{D}_\mu H^{(Q)} h^{-1}. \quad (2.86)$$

这要求 Γ_μ 的变换规则像是规范场的规范变换一样:

$$\Gamma_\mu \xrightarrow{g} h \Gamma_\mu h^{-1} + h \partial_\mu h^{-1}. \quad (2.87)$$

而 Γ_μ 并不真的是规范场, 我们只是引入了补偿场这种构造手征拉氏量的方式, 从而使得物质场的手征变换依赖于时空坐标. Γ_μ 需要用 Goldstone 玻色子场构造出来.

利用 (2.87) 以及 $\mathcal{D}_\mu H^{(Q)}$ 的宇称变换性质

$$\mathcal{D}_\mu H^{(Q)} \xrightarrow{P} \mathcal{D}^\mu H^{(Q)}, \quad (2.88)$$

可以将 Γ_μ 的形式完全确定下来. 由 (2.78) 以及

$$u^\dagger \xrightarrow{g} R u^\dagger h^{-1} = h u^\dagger L^\dagger, \quad (2.89)$$

容易得到

$$\begin{aligned} u \partial_\mu u^\dagger &\xrightarrow{g} h (u \partial_\mu u^\dagger) h^{-1} + h \partial_\mu h^{-1}, \\ u^\dagger \partial_\mu u &\xrightarrow{g} h (u^\dagger \partial_\mu u) h^{-1} + h \partial_\mu h^{-1}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

在宇称变换下, $u \xrightarrow{P} u^\dagger$, 从而

$$u \partial_\mu u^\dagger \xrightarrow{P} u^\dagger \partial^\mu u. \quad (2.91)$$

因此, 在不引入任何外场的情况下, Γ_μ 的形式必定为

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} (u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger), \quad (2.92)$$

其厄米共轭 $\Gamma_\mu^\dagger = -\Gamma_\mu$. 如果引入 (2.43) 中的左手和右手外场, Γ_μ 可扩展为

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} [u^\dagger (\partial_\mu - i \ell_\mu) u + u (\partial_\mu - i r_\mu) u^\dagger]. \quad (2.93)$$

处于 $SU(N_f)_V$ 下不同多重态的物质场的手征协变导数也不同. $SU(N_f)_V$ 基础表示中的物质场 N 在 $V \in SU(N_f)_V$ 下的变换和相应的手征协变导数为

$$N \xrightarrow{V} V N, \quad \mathcal{D}_\mu N = \partial_\mu N + \Gamma_\mu N. \quad (2.94)$$

伴随表示中的物质场 B 在 $V \in \text{SU}(N_f)_V$ 下的变换和相应的手征协变导数为

$$B \xrightarrow{V} V B V^\dagger, \quad \mathcal{D}_\mu B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B]. \quad (2.95)$$

我们还可以定义另外几个在 CCWZ 框架下构造手征拉氏量的基本单元 (building blocks):

$$\begin{aligned} u_\mu &\equiv i [u^\dagger (\partial_\mu - i \ell_\mu) u - u (\partial_\mu - i r_\mu) u^\dagger], \\ \chi_\pm &\equiv u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u. \end{aligned} \quad (2.96)$$

容易验证, $u_\mu^\dagger = u_\mu$, $\chi_\pm^\dagger = \pm \chi_\pm$, 它们的手征变换规则为

$$u_\mu \xrightarrow{g} h u_\mu h^{-1}, \quad \chi_\pm \xrightarrow{g} h \chi_\pm h^{-1}. \quad (2.97)$$

左手和右手外场的宇称和 C 宇称变换规则为

$$\begin{aligned} \ell_\mu &\xrightarrow{P} r^\mu, & \ell_\mu &\xrightarrow{C} -r_\mu^T, \\ r_\mu &\xrightarrow{P} \ell^\mu, & r_\mu &\xrightarrow{C} -\ell_\mu^T, \end{aligned} \quad (2.98)$$

从而, u_μ 和 $\chi_\pm$ 的变换规则为

$$\begin{aligned} u_\mu &\xrightarrow{P} -u^\mu, & u_\mu &\xrightarrow{C} u_\mu^T, \\ \chi_\pm &\xrightarrow{P} \pm \chi_\pm, & \chi_\pm &\xrightarrow{C} \chi_\pm^T. \end{aligned} \quad (2.99)$$

手征算符 u_μ , $\chi_\pm$ 以及协变导数的手征变换都是以 h 表示的, 从而可以很方便地用它们构造手征对称不变的拉氏量. 例如, 不含物质场的领头阶手征微扰论的拉氏量 (2.28) 可以重新写为^[50]

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle u_\mu u^\mu + \chi_+ \rangle. \quad (2.100)$$

2.2.2 重介子手征微扰论

利用上面的构造方案, 我们可以写出重介子作为物质场的手征微扰论的有效拉氏量. 将 (1.115) 中的导数项变为 (2.85) 中的手征协变导数,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H, \text{kin}}^{(1)} &= -i \text{Tr} [\bar{H}_a^{(Q)} v_\mu (\mathcal{D}^\mu H^{(Q)})_a] \\ &= -i \text{Tr} [\bar{H}_a^{(Q)} v_\mu \partial^\mu H_a^{(Q)}] + i \text{Tr} [\bar{H}_a^{(Q)} v_\mu H_b^{(Q)}] \Gamma_{ba}^\mu, \end{aligned} \quad (2.101)$$

其中, Tr 表示在旋量空间求迹, 下标 a, b 表示轻夸克味指标, 味空间求迹体现了在对味指标的求和中. 上式第一项为自由场部分, 第二项中包含了手征对称性决定的重介子与 Goldstone 玻色子场之间的相互作用. 与只包含 Goldstone 玻色子的手征微扰论不同, 含物质场的手征拉氏量可以有奇数个作用在 Goldstone 玻色子上的导数项, 领头阶的拉氏量是 $\mathcal{O}(p)$ 的. 注意到 (不考虑外场)

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} (u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger) = \frac{1}{4F^2} [\Phi, \partial_\mu \Phi] + \mathcal{O}(\Phi^4), \quad (2.102)$$

我们可以得到重介子与 Goldstone 玻色子两体散射的 Weinberg-Tomozawa (WT) 项^[51–52]:

$$\mathcal{L}_{\text{WT}} = \frac{i}{4F^2} \text{Tr} \left[\bar{H}_a^{(Q)} v_\mu H_b^{(Q)} \right] [\Phi, \partial^\mu \Phi]_{ba}, \quad (2.103)$$

其中只包含一个已知参数 F , 从而手征对称性完全决定了物质场与 Goldstone 玻色子之间散射的手征展开领头阶接触项! 这样的形式是普适的, 只要物质场不是 $\text{SU}(N_f)_V$ 的单态, 利用其手征协变导数容易推出, 它与 Goldstone 玻色子之间散射的领头阶总会包含 WT 项. 将 (1.114) 代入上式, 取重介子的静止系 $v^\mu = (1, \vec{0})$, 容易得到^{2.8}

$$\mathcal{L}_{\text{WT}} = -\frac{i}{2F^2} (P_a^\dagger P_b + \mathbf{P}_a^{*\dagger} \cdot \mathbf{P}_b^*) [\Phi, \partial^0 \Phi]_{ba}, \quad (2.104)$$

可以看到, Goldstone 玻色子与物质场之间的散射项正比于其能量, 即使对于 S 波散射, 耦合也是导数形式的.

在 $\mathcal{O}(p)$ 阶, 还存在轴矢耦合项:

$$\mathcal{L}_{H, \text{axial}}^{(1)} = \frac{g}{2} \text{Tr} \left[\bar{H}_a^{(Q)} H_b^{(Q)} \gamma_\mu \gamma_5 \right] u_{ba}^\mu. \quad (2.105)$$

容易发现它包含了 $D^* D^* \pi$ 和 $D^* D \pi$ 两种耦合 (对底介子类似), 它们之间是由重夸克自旋对称性联系起来的. 利用 (1.124) 中定义的两分量形式, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H, \text{axial}}^{(1)} &= -\frac{g}{2} \text{Tr} \left[H_{(2),a}^{(Q)\dagger} H_{(2),b}^{(Q)} \sigma^i \right] u_{ba}^i \\ &= -\frac{g}{2} \text{Tr} \left[(P_a^{*i\dagger} \sigma^i + P_a^\dagger) (P_b^{*j} \sigma^j + P_b) \sigma^k \right] u_{ba}^k \\ &= \underbrace{\sqrt{2} \frac{g}{F} P_a^\dagger P_b^{*i} \partial^i \Phi_{ba}}_{D^* \rightarrow D\pi} + \underbrace{\sqrt{2} \frac{g}{F} P_a^{*i\dagger} P_b \partial^i \Phi_{ba} + i\sqrt{2} \frac{g}{F} \epsilon^{ijk} P_a^{*i\dagger} P_b^{*j} \partial^k \Phi_{ba}}_{D^* D^* \pi \text{ 耦合项}} + \mathcal{O}(\Phi^3), \end{aligned} \quad (2.106)$$

其中, ϵ^{ijk} 是 3 维 Levi-Civita 全反对称张量. 由上面的拉氏量, $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$ 的衰变振幅为

$$\mathcal{A}(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = \frac{i\sqrt{2}g}{F} \vec{\epsilon}_{(\lambda)} \cdot \vec{q}_\pi \sqrt{M_{D^{*+}} M_{D^0}}, \quad (2.107)$$

其中, $\vec{\epsilon}_{(\lambda)}$ 是 D^{*+} 的极化矢量, $\vec{q}_\pi$ 是 π^0 介子的动量, $\sqrt{M_{D^*} M_D}$ 因子来源于 (1.118) 中重介子场的归一化因子. 利用非相对论近似下矢量粒子的极化矢量求和公式 $\sum_\lambda \epsilon_{(\lambda)}^i \epsilon_{(\lambda)}^j = \delta_{ij}$, 我们得到衰变分宽度

$$\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = \frac{1}{8\pi} \frac{|\mathbf{q}_\pi|}{M_{D^{*+}}^2} \frac{1}{3} \sum_\lambda |\mathcal{A}|^2 = \frac{g^2 M_{D^0} |\mathbf{q}_\pi|^3}{12\pi F^2 M_{D^{*+}}}, \quad (2.108)$$

其中的因子 $1/3$ 来源于对初态矢量粒子 D^* 的极化方向求平均. $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$ 的实验数据为^[7]

$$\Gamma(D^{*+}) = (83.4 \pm 1.8) \text{ keV}, \quad \mathcal{B}(D^0 \pi^+) = (67.7 \pm 0.5)\%, \quad (2.109)$$

^{2.8} 一个简便的方法是用 (1.124) 中的两分量形式, 并注意到

$$H_a^{(Q)} = \begin{pmatrix} 0 & -H_{(2),a}^{(Q)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{H}_a^{(Q)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_{(2),a}^{(Q)\dagger} & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $\mathcal{B}$ 表示分支比, 与之相比较, 我们可以得到

$$g = 0.566 \pm 0.006. \quad (2.110)$$

目前, D^{*0} 的宽度的实验测量只有上限, 在 90% 置信度的水平上, 其上限为 2.1 MeV. 同样由 (2.106), 可以得到通过同位旋对称性与 (2.107) 相联系的振幅

$$\mathcal{A}(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) = \frac{ig}{F} \vec{\varepsilon}_{(\lambda)} \cdot \vec{q}_\pi \sqrt{M_{D^{*0}} M_{D^0}}, \quad (2.111)$$

结合已精确测量的分支比 $\mathcal{B}(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) = (64.7 \pm 0.9)\%$ ^[7], 容易预言 D^{*0} 的总宽度为^[53-54]

$$\Gamma(D^{*0}) = (55.3 \pm 1.4) \text{ keV}. \quad (2.112)$$

在第 1.8.1 节中, 我们提到 B^* 与 B 介子之间的质量差是重夸克自旋对称性破坏的效应, 因此远小于 D^* 与 D 之间的质量差. 这导致 B^* 无法衰变到 $B\pi$, 从而我们无法直接从实验中测量 $B^*B\pi$ 的轴矢耦合常数. 不过, 不同的格点 QCD 合作组对之进行了计算, ALPHA 合作组的结果为 $g_b = 0.492 \pm 0.029$ ^[55], RBC 和 UKQCD 合作组的结果为 $g_b = 0.56 \pm 0.03 \pm 0.07$ ^[56]. 它们与 (2.110) 在重夸克味对称性的误差 $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}}(m_c^{-1} - m_b^{-1})) = \mathcal{O}(20\%)$ 范围内相符.

2.3 手征微扰论的次领头阶修正

Gasser 和 Leutwyler 在 QCD 的拉氏量中引入外场^[2-3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \bar{q} \gamma^\mu (v_\mu + \gamma_5 a_\mu) q - \bar{q} (s + i \gamma_5 p) q \\ &= \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \bar{q}_L \gamma^\mu \ell_\mu q_L + \bar{q}_R \gamma^\mu r_\mu q_R - \bar{q}_L (s + ip) q_R - \bar{q}_R (s - ip) q_L, \end{aligned} \quad (2.113)$$

其中 $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ 为不包含外场的手征极限下的 QCD 拉氏量, v_μ , a_μ , s 和 p 分别为矢量, 轴矢, 标量和赝标外场, $\ell_\mu = v_\mu - a_\mu$, $r_\mu = v_\mu + a_\mu$. ℓ_μ 和 r_μ 的场强张量为

$$F_R^{\mu\nu} = \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i[r^\mu, r^\nu], \quad F_L^{\mu\nu} = \partial^\mu \ell^\nu - \partial^\nu \ell^\mu - i[\ell^\mu, \ell^\nu]. \quad (2.114)$$

夸克质量项通过下式引入:

$$\chi = 2B(s + ip) = 2B\mathcal{M} + \dots \quad (2.115)$$

表 2.2 中给出了 U , χ 和 $F_{L,R}^{\mu\nu}$ 等算符在手征对称性和 C, P 宇称下的变换性质, 它们的计幂规则为

$$U = \mathcal{O}(p^0), \quad \chi = \mathcal{O}(p^2), \quad \ell_\mu, r_\mu = \mathcal{O}(p), \quad (2.116)$$

其中 χ 作为夸克质量项的伪场, 其计幂规则与轻夸克质量相同, 根据 (2.43), ℓ_μ 和 r_μ 的计幂规则与导数相同. 利用它们便可以构造满足对称性的高阶拉氏量 (当然也可以等价地用通过 h 进行手征变换的基本单元构造^[50]).

表 2.2: 构造手征拉氏量的一些算符在手征对称群 G 和 C, P 宇称下的变换规则^[6]. 我们采用的约定与 [6] 之间的差别见脚注 2.2.

算符	G	C	P
U	$LU R^\dagger$	U^T	$U^\dagger$
$D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_n} U$	$LD_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_n} U R^\dagger$	$(D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_n} U)^T$	$(D^{\lambda_1} \dots D^{\lambda_n} U)^\dagger$
χ	$L\chi R^\dagger$	χ^T	$\chi^\dagger$
$D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_n} \chi$	$LD_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_n} \chi R^\dagger$	$(D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_n} \chi)^T$	$(D^{\lambda_1} \dots D^{\lambda_n} \chi)^\dagger$
ℓ_μ	$L\ell_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger$	$-r_\mu^T$	r^μ
r_μ	$Rr_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger$	$-\ell_\mu^T$	ℓ^μ
$F_{L\mu\nu}$	$LF_{L\mu\nu}L^\dagger$	$-F_{R\mu\nu}^T$	$F_R^{\mu\nu}$
$F_{R\mu\nu}$	$RF_{R\mu\nu}R^\dagger$	$-F_{L\mu\nu}^T$	$F_L^{\mu\nu}$

不考虑虚光子的贡献, $SU(3)$ 手征微扰论次领头阶的拉氏量为^[3]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(4)} = & L_1 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle^2 + L_2 \langle D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle \langle D^\mu U^\dagger D^\nu U \rangle \\
& + L_3 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U D_\nu U^\dagger D^\nu U \rangle + L_4 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle \langle \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \rangle \\
& + L_5 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U (\chi^\dagger U + \chi U^\dagger) \rangle + L_6 \langle \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \rangle^2 \\
& + L_7 \langle \chi^\dagger U - \chi U^\dagger \rangle^2 + L_8 \langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle \\
& - iL_9 \langle F_L^{\mu\nu} D_\mu U D_\nu U^\dagger + F_R^{\mu\nu} D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle + L_{10} \langle U^\dagger F_L^{\mu\nu} U F_{R\mu\nu} \rangle \\
& + H_1 \langle F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} + F_{L\mu\nu} F_L^{\mu\nu} \rangle + H_2 \langle \chi^\dagger \chi \rangle,
\end{aligned} \tag{2.117}$$

其中 $L_1, \dots, L_{10}$ 这十项中包含 Goldstone 玻色子的相互作用, 参数 $L_1, \dots, L_{10}$ 被称为低能常数 (low-energy constants), H_1 和 H_2 被称为高能常数. H_1 和 H_2 项中不包含 Goldstone 玻色子, 但是它们也是 $\mathcal{O}(p^4)$ 的算符, 并且在重整化中起到吸收紫外发散的抵消项的作用. 构造拉氏量时, 还会用到场的运动方程以及矩阵的 Cayley-Hamilton 关系以消除线性相关的非独立项. 例如, 两个 2×2 矩阵 A 和 B 之间满足如下 Cayley-Hamilton 关系

$$\{A, B\} = A\langle B \rangle + B\langle A \rangle + \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle, \tag{2.118}$$

利用这一关系可以减少线性独立的项的数目, 使得 $SU(2)$ 手征拉氏量中的项数比 $SU(3)$ 中的更少, 包括 7 项低能常数项和 3 项高能常数项. 可以看到, 随着阶数的增长, 参数的数目快速增长. $SU(3)$ 的 $\mathcal{O}(p^2)$ 拉氏量中只有两个低能常数 F 和 B , $\mathcal{O}(p^4)$ 拉氏量中低能常数有 10 个, $\mathcal{O}(p^6)$ 拉氏量中有 90 个 (两味的情况下为 52)^[50,57], 而 $\mathcal{O}(p^8)$ 拉氏量中这个数字甚至达到了 1233 (两味的情况下为 452)^[58]. 从这里可以看出有效场论的一个局限性: 计算精度的提高要求提高阶数, 而阶数的提高伴随着参数数目的急剧增长, 这些参数已经不可能都通过实验数据确定下来了.

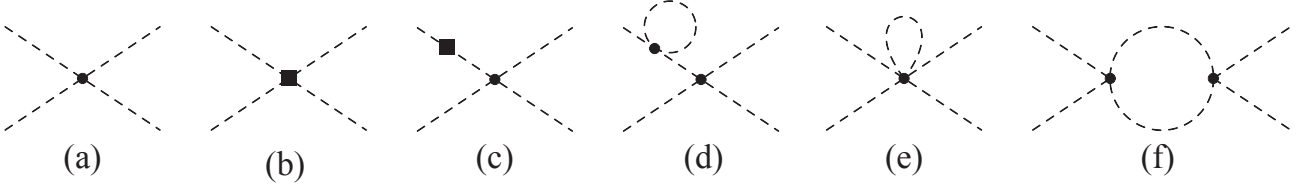


图 2.2: 手征微扰论中计算 $\pi\pi$ 散射到 $\mathcal{O}(p^4)$ 的振幅的需要计算的 Feynman 图. 其中实心圆点表示 $\mathcal{O}(p^2)$ 拉氏量中的顶点, 实心正方形表示 $\mathcal{O}(p^4)$ 拉氏量中的顶点, 两点圈图除了图中所示 s 道的图之外, 还有 t 道和 u 道的图, 在此没有画出.

可以一般性地分析圈图的计幂规则. $\mathcal{O}(p^d)$ 拉氏量中给出的顶点记为 $\mathcal{O}(p^d)$, Goldstone 玻色子的传播子 $i/(p^2 - M^2)$ 记为 $\mathcal{O}(p^{-2})$, 圈图积分测度记为 $\int d^4p = \mathcal{O}(p^4)$. 于是, 一个有 I 条内线, V_d 个 $\mathcal{O}(p^d)$ 的顶点, L 个圈的 Feynman 图的计幂规则为

$$\mathcal{A} \propto \int (d^4p)^L \frac{1}{(p^2)^I} \prod_d (p^d)^{V_d}, \quad (2.119)$$

相应的手征量纲 (即计幂规则中 p 的幂次) 为

$$D = 4L - 2I + \sum_d dV_d. \quad (2.120)$$

用 Euler 拓扑关系 $\sum_d V_d - I + L = 1$ 可以消掉 I , 得到

$$D = \sum_d V_d(d - 2) + 2L + 2. \quad (2.121)$$

由此, $D \geq 2$.

- 在领头阶, $D = 2$. $L = 0$, $d = 2$, 只有来自领头阶拉氏量的树图贡献, 如图 2.2 (a).
- 在次领头阶, $D = 4$. 存在两类贡献: $L = 0$, 只有树图贡献, 其中包含一个 $d = 4$ 的顶点, 其余为 $d = 2$ 的顶点, 如图 2.2 (b) 和 (c); $L = 1$ 的单圈图, 所有顶点都是 $d = 2$ 的, 如图 2.2 (d), (e) 和 (f).

我们将手征展开中的硬标度 Λ_χ 明显地写出来, 有效拉氏量可以表达为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F^2}{4} \left(\langle D_\mu U D^\mu U^\dagger + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U \rangle + \frac{1}{\Lambda_\chi^2} \tilde{\mathcal{L}}^{(4)} + \frac{1}{\Lambda_\chi^4} \tilde{\mathcal{L}}^{(6)} + \dots \right). \quad (2.122)$$

下面我们来通过两种方案估计 Λ_χ .

- 前面讨论的 Goldstone 玻色子是质量最轻的介子, 我们构造的拉氏量中只包含了它们. 因此, 没有明显包含进来的次重介子的质量应该便标示着手征微扰论中的硬标度. 介子谱中更重一些的宽度不大的介子便是矢量介子, 因此, 一个合理的估计是 $\Lambda_\chi \sim M_V$, 其中 $M_V \sim 1 \text{ GeV}$ 表示基态矢量介子的质量.^{2.9}
- 次领头阶的贡献与领头阶贡献相比被压低 p^2/Λ_χ^2 . 因此, $\mathcal{O}(p^4)$ 阶单圈图的振幅与领头

^{2.9}虽然 $f_0(500)$ (即 σ 介子) 等标量介子的质量比矢量介子更小, 但是它们的起源很可能与 Goldstone 玻色子之间的散射密切相关, 它们的性质在大 N_c 极限下与普通介子有异, 因此, 通常并不将它们的质量作为硬标度的估计. 关于 $f_0(500)$ 的讨论, 参见综述^[59].

表 2.3: 低能常数 $L_i^r(\mu)$ 在能标 $\mu = 770 \text{ MeV}$ 处的取值, 摘自 [60]. 其中 $\mathcal{O}(p^4)$ 列是在次领头阶拟合数据的结果, $\mathcal{O}(p^6)$ 列是在次次领头阶拟合数据的结果, 第 4 列是假设介子交换主导给出的表达式, 最后一列是介子交换模型给出的数值估计. G_V, F_V 是矢量介子与 Goldstone 玻色子的耦合常数, c_d, c_m 是标量介子相应的耦合常数, $M_S \sim 1.4 \text{ GeV}$ 是标量介子的质量, F_A 和 M_A 分别是轴矢介子的耦合常数和质量.

低能常数	$\mathcal{O}(p^4)$	$\mathcal{O}(p^6)$	介子交换的贡献	数值估计
$10^3 L_1^r$	1.0(1)	0.53(6)	$G_V^2/8M_V^2$	0.9
$10^3 L_2^r$	1.6(2)	0.81(4)	$G_V^2/4M_V^2$	1.8
$10^3 L_3^r$	-3.8(3)	-3.07(20)	$-(3G_V^2/4M_V^2) + (c_d^2/2M_S^2)$	-4.8
$10^3 L_4^r$	0.0(3)	0.3	0	0
$10^3 L_5^r$	1.2(1)	1.01(6)	$c_d c_m / M_S^2$	1.1
$10^3 L_6^r$	0.0(4)	0.14(5)	0	0
$10^3 L_7^r$	-0.3(2)	-0.34(9)	$-F^2/48M_{\eta'}^2$	-0.2
$10^3 L_8^r$	0.5(2)	0.47(10)	$c_m^2/2M_S^2$	0.54
$10^3 L_9^r$	6.9(7)	5.9(4)	$F_V G_V / 2M_V^2$	
$10^3 L_{10}^r$	-5.2(1)	-3.8(4)	$-(F_V^2/4M_V^2) + (F_A^2/4M_A^2)$	

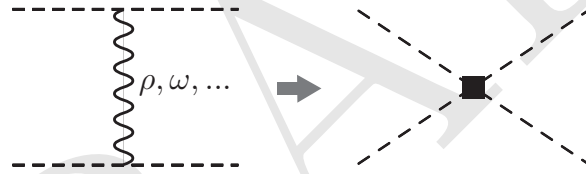


图 2.3: 介子共振态对低能常数贡献的示意图.

阶树图的振幅相比, 可得

$$\frac{p^2}{\Lambda_\chi^2} \sim \frac{p^4 / [(4\pi)^2 F^4]}{p^2 / F^2} = \frac{p^2}{(4\pi F)^2}, \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\chi \sim 4\pi F. \quad (2.123)$$

这两种估计都给出 $\Lambda_\chi \sim 1 \text{ GeV}$. 如果我们认为 L_i 低能常数的取值比较自然, 即同一阶的树图的贡献与圈图的在同一个量级, 那么我们可以估计出 L_i 的量级. 这种做法称为自然性 (naturalness) 假设. 于是, 考虑介子散射振幅, 我们有

$$L_i \frac{p^4}{F^4} \sim \frac{p^4}{(4\pi)^2 F^4}, \quad \Rightarrow \quad L_i = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right). \quad (2.124)$$

这样简单估计得到的数量级与表 2.3 中给出的值是一致的.

第一种估计方法意味着高阶拉氏量中的参数可由未明显考虑的介子交换的效应来估计. 当能动量转移远小于交换的介子的质量时, 图 2.3 左图中的共振态交换可以收缩为右图所示的接触项, 相应的散射振幅 $\sim g_R^2/(q^2 - m_R^2)$ 可以近似为 $-g_R^2/m_R^2$, 其中 m_R, g_R 分别表示可能交换的共振态的质量及其与赝标介子的耦合常数, q 表示交换粒子的四动量. 计算发现用这种方法估计出来的低能常数的数值与拟合数据得到的结果相比是比较接近的^[14], 而且只要

矢量介子有贡献, 其贡献就是主导的, 这被称为手征微扰论中的矢量介子主导 (vector meson dominance); 见表 2.3.

拉氏量中的 L_i 包含紫外发散, 因为拉氏量中包含了所有的 $\mathcal{O}(p^4)$ 阶可能的项, 它有足够多的自由度来吸收单圈图计算中出现的紫外发散. 表 2.3 中给出的低能常数实际上是重整化之后依赖于能标的 $L_i^r(\mu)$, 而不是拉氏量中的参数 L_i , 它们之间的关系为

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} \lambda, \quad (2.125)$$

其中 λ 表示紫外发散, 在维数正规化 (dimensional regularization) 的框架下,

$$\lambda = \frac{2}{d-4} - [\log(4\pi) + \Gamma'(1) + 1], \quad (2.126)$$

这里的 d 是时空维数, $d=4$ 时 λ 发散. Γ_i 可以通过热核展开 (heat-kernel expansion) 的方式利用路径积分计算出来, 这里只给出下面会用到的几个^[3]:

$$\Gamma_4 = \frac{1}{8}, \quad \Gamma_5 = \frac{3}{8}, \quad \Gamma_6 = \frac{11}{144}, \quad \Gamma_8 = \frac{5}{48}. \quad (2.127)$$

2.3.1 $\mathcal{O}(p^4)$ 阶的 π 介子质量

下面我们考虑同位旋对称的情况, 以 π 介子质量为例简单说明次领头阶手征微扰论的计算.

在 $\mathcal{O}(p^2)$ 阶, π 介子的质量由 (2.36) 给出

$$M_\pi^2 = M^2 \equiv 2B\hat{m}, \quad (2.128)$$

其中 $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$. 在次领头阶, 它还包括单圈图以及 $\mathcal{O}(p^4)$ 拉氏量中的抵消项的贡献. 质量的平方是粒子两点关联函数的奇点, 因此, 计算质量的修正需要考虑两点关联函数.

$$\begin{aligned} i\delta^{ab}\Delta_\pi(p) &\equiv \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T [\pi^a(x) \pi^b(0)] | 0 \rangle \\ &= \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{---} \text{1PI} \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} [-i\Sigma(p^2)] \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - M^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon} = \frac{i Z_\pi}{p^2 - M_\pi^2 + i\epsilon} + \text{非极点项}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

其中 1PI 表示单粒子不可约图, $\Sigma(p^2)$ 表示 π 介子的自能 (self-energy), Z_π 是 π 介子的波函数重整化常数. π 介子的质量由关联函数的极点给出:

$$M_\pi^2 - M^2 - \Sigma(M_\pi^2) = 0. \quad (2.130)$$

在同位旋对称的情况下, 考虑 $\mathcal{O}(p^4)$ 拉氏量中的抵消项以及单圈蝌蚪 (tadpole) 图的贡献,

即分别为图 2.2 中 (c) 和 (d) 中左上 π 介子线上的贡献, 可以得到

$$M_\pi^2 = M^2 \left[1 + \frac{I(M^2)}{2F^2} - \frac{I(M_{\eta,2}^2)}{2F^2} + \frac{8M^2}{F^2} (2L_8 - L_5) + \frac{24M_{\eta,2}^2}{F^2} (2L_6 - L_4) \right], \quad (2.131)$$

其中 $M_{\eta,2}^2 = \frac{2}{3}B(2\hat{m} + m_s)$, $I(M^2)$ 是单圈蝌蚪图, 在维数正规化中可算出 (查阅 [61] 中给出的公式)

$$I(M^2) = i\mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{M^2}{16F^2} \left(\lambda + \log \frac{M^2}{\mu^2} \right), \quad (2.132)$$

其中 μ 为维数正规化中引入的能标. 由 (2.127) 可发现, 圈图与 L_i 中的紫外发散正好相互抵消, 从而得到无紫外发散也无能标依赖的精确到 $\mathcal{O}(p^4)$ 阶的 π 介子质量:

$$M_\pi^2 = M^2 \left[1 + \frac{1}{32\pi^2 F^2} M^2 \log \frac{M^2}{\mu^2} - \frac{1}{96\pi^2 F^2} M_{\eta,2}^2 \log \frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2} + \frac{8M^2}{F^2} (2L_8^r - L_5^r) + \frac{24M_{\eta,2}^2}{F^2} (2L_6^r - L_4^r) \right]. \quad (2.133)$$

上式在手征极限 $\hat{m}, m_s \rightarrow 0$ 下仍然为 0.

习题 2.3 手征极限下的领头阶手征拉氏量 (2.15) 为 $\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle$, 考虑 $\text{SU}(2)$, 证明在下列两种情况下 $\pi^+(p_1) \pi^-(p_2) \rightarrow \pi^0(p_3) \pi^0(p_4)$ 的散射振幅 $\mathcal{A}(s, t, u)$ 的形式都是:

$$\mathcal{A}(s, t, u) = \frac{s}{F^2} \quad (2.134)$$

- 1) 将 U 参数化为指数函数 $U = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}/F)$, 其中 $\vec{\tau}$ 为同位旋空间的 Pauli 矩阵, Goldstone 玻色子 $\vec{\pi}$ 与 $\pi^0, \pi^\pm$ 之间的关系为 $\pi^0 = \pi^3, \pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \mp i\pi^2)$.
- 2) 将 U 参数化为根号函数, 并以 $\vec{\pi}'$ 表示 Goldstone 玻色子,

$$U = \frac{1}{F} \left(\sqrt{F^2 - \vec{\pi}'^2} + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}' \right). \quad (2.135)$$

证明这两种参数化之间 Goldstone 玻色子场的非线性关系为

$$\vec{\pi}' = \vec{\pi} \frac{F}{|\vec{\pi}|} \sin \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F} \right) = \vec{\pi} + \text{非线性项}, \quad (2.136)$$

其中 $|\vec{\pi}| \equiv \sqrt{\vec{\pi}^2}$. 计算中可能会用到附录 A.1 中给出的 Pauli 矩阵的一些性质.

习题 2.4 证明 (2.129) 中的波函数重整化常数为

$$Z_\pi = \frac{1}{1 - \Sigma'(M_\pi^2)}, \quad \text{其中 } \Sigma'(M_\pi^2) \equiv \left. \frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=M_\pi^2}. \quad (2.137)$$

参考文献

- ¹S. Weinberg, “Phenomenological Lagrangians”, *Physica A* 96, edited by S. Deser, 327–340 (1979).
- ²J. Gasser and H. Leutwyler, “Chiral perturbation theory to one loop”, *Annals Phys.* 158, 142 (1984).
- ³J. Gasser and H. Leutwyler, “Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark”, *Nucl. Phys. B* 250, 465–516 (1985).
- ⁴H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, revised and updated ed., Dover Books on Physics (Dover, New York, 2010).
- ⁵J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. 2 (CUP, 2014).
- ⁶S. Scherer and M. R. Schindler, *A Primer for Chiral Perturbation Theory*, Lect. Notes Phys. 830 (2012).
- ⁷P. A. Zyla et al. (Particle Data Group), “Review of Particle Physics”, *PTEP* 2020, 083C01 (2020).
- ⁸S. Aoki et al. (Flavour Lattice Averaging Group), “FLAG Review 2019”, *Eur. Phys. J. C* 80, 113 (2020).
- ⁹A. Pich and E. de Rafael, “Strong CP violation in an effective chiral Lagrangian approach”, *Nucl. Phys. B* 367, 313–333 (1991).
- ¹⁰R. Brower, S. Chandrasekharan, J. W. Negele, and U. J. Wiese, “QCD at fixed topology”, *Phys. Lett. B* 560, 64–74 (2003).
- ¹¹N. R. Acharya, F.-K. Guo, M. Mai, and U.-G. Meißner, “ Θ -dependence of the lightest meson resonances in QCD”, *Phys. Rev. D* 92, 054023 (2015).
- ¹²T. Vonk, F.-K. Guo, and U.-G. Meißner, “Pion axioproduction: The delta resonance contribution”, *Phys. Rev. D* 105, 054029 (2022).
- ¹³H. Leutwyler, “On the foundations of chiral perturbation theory”, *Annals Phys.* 235, 165–203 (1994).
- ¹⁴G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, and E. de Rafael, “The role of resonances in chiral perturbation theory”, *Nucl. Phys. B* 321, 311–342 (1989).

- ¹⁵R. F. Dashen, “Chiral $SU(3) \times SU(3)$ as a symmetry of the strong interactions”, *Phys. Rev.* **183**, 1245–1260 (1969).
- ¹⁶Y. Aoki et al. (FLAG), “FLAG review 2021”, *arXiv:2111.09849 [hep-lat]* (2021).
- ¹⁷F.-K. Guo, X.-H. Liu, and S. Sakai, “Threshold cusps and triangle singularities in hadronic reactions”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **112**, 103757 (2020).
- ¹⁸P. Budini and L. Fonda, “Pion-Pion Interaction from Threshold Anomalies in K^+ Decay”, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 419 (1961).
- ¹⁹U.-G. Meißner, G. Müller, and S. Steininger, “Virtual photons in $SU(2)$ chiral perturbation theory and electromagnetic corrections to $\pi\pi$ scattering”, *Phys. Lett. B* **406**, 154–160 (1997).
- ²⁰N. Cabibbo, “Determination of the a_0 - a_2 pion scattering length from $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0$ decay”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 121801 (2004).
- ²¹J. R. Batley et al. (NA48/2), “Observation of a cusp-like structure in the $\pi^0 \pi^0$ invariant mass distribution from $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$ decay and determination of the $\pi\pi$ scattering lengths”, *Phys. Lett. B* **633**, 173–182 (2006).
- ²²B. Bloch-Devaux (NA48/2), “Precision measurement of $\pi\pi$ scattering lengths in K_{e4} decays by NA48/2”, *PoS KAON09*, edited by T. Yamanaka, 033 (2009).
- ²³J. Gasser, V. E. Lyubovitskij, and A. Rusetsky, “Hadronic atoms in QCD + QED”, *Phys. Rept.* **456**, 167–251 (2008).
- ²⁴J. Gasser, V. E. Lyubovitskij, and A. Rusetsky, “Hadronic atoms”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59**, 169–190 (2009).
- ²⁵B. Adeva et al., “Determination of $\pi\pi$ scattering lengths from measurement of $\pi^+\pi^-$ atom lifetime”, *Phys. Lett. B* **704**, 24–29 (2011).
- ²⁶R. D. Peccei and H. R. Quinn, “CP Conservation in the Presence of Instantons”, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440–1443 (1977).
- ²⁷R. D. Peccei and H. R. Quinn, “Constraints Imposed by CP Conservation in the Presence of Instantons”, *Phys. Rev. D* **16**, 1791–1797 (1977).
- ²⁸J. Gasser, M. E. Sainio, and A. Svarc, “Nucleons with chiral loops”, *Nucl. Phys. B* **307**, 779–853 (1988).
- ²⁹E. E. Jenkins and A. V. Manohar, “Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion Lagrangian”, *Phys. Lett. B* **255**, 558–562 (1991).

- ³⁰V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor, and U.-G. Meißner, “Chiral structure of the nucleon”, *Nucl. Phys. B* 388, 315–345 (1992).
- ³¹V. Bernard, N. Kaiser, and U.-G. Meißner, “Chiral dynamics in nucleons and nuclei”, *Int. J. Mod. Phys. E* 4, 193–346 (1995).
- ³²H.-B. Tang, “A New approach to chiral perturbation theory for matter fields”, *arXiv:hep-ph/9607436* (1996).
- ³³P. J. Ellis and H.-B. Tang, “Pion nucleon scattering in a new approach to chiral perturbation theory”, *Phys. Rev. C* 57, 3356–3375 (1998).
- ³⁴T. Becher and H. Leutwyler, “Baryon chiral perturbation theory in manifestly Lorentz invariant form”, *Eur. Phys. J. C* 9, 643–671 (1999).
- ³⁵J. Gegelia and G. Japaridze, “Matching heavy particle approach to relativistic theory”, *Phys. Rev. D* 60, 114038 (1999).
- ³⁶T. Fuchs, J. Gegelia, G. Japaridze, and S. Scherer, “Renormalization of relativistic baryon chiral perturbation theory and power counting”, *Phys. Rev. D* 68, 056005 (2003).
- ³⁷G. Burdman and J. F. Donoghue, “Union of chiral and heavy quark symmetries”, *Phys. Lett. B* 280, 287–291 (1992).
- ³⁸M. B. Wise, “Chiral perturbation theory for hadrons containing a heavy quark”, *Phys. Rev. D* 45, R2188 (1992).
- ³⁹T.-M. Yan, H.-Y. Cheng, C.-Y. Cheung, G.-L. Lin, Y. C. Lin, and H.-L. Yu, “Heavy quark symmetry and chiral dynamics”, *Phys. Rev. D* 46, 1148–1164 (1992).
- ⁴⁰R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio, and G. Nardulli, “Phenomenology of heavy meson chiral Lagrangians”, *Phys. Rept.* 281, 145–238 (1997).
- ⁴¹A. Roessl, “Pion kaon scattering near the threshold in chiral SU(2) perturbation theory”, *Nucl. Phys. B* 555, 507–539 (1999).
- ⁴²Y.-B. Yang, J. Liang, Y.-J. Bi, Y. Chen, T. Draper, K.-F. Liu, and Z. Liu, “Proton mass decomposition from the QCD energy momentum tensor”, *Phys. Rev. Lett.* 121, 212001 (2018).
- ⁴³T. R. Hemmert, B. R. Holstein, and J. Kambor, “Chiral Lagrangians and Delta(1232) interactions: Formalism”, *J. Phys. G* 24, 1831–1859 (1998).
- ⁴⁴V. Bernard, T. R. Hemmert, and U.-G. Meißner, “Chiral extrapolations and the covariant small scale expansion”, *Phys. Lett. B* 622, 141–150 (2005).

- ⁴⁵V. Bernard, “Chiral Perturbation Theory and Baryon Properties”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **60**, 82–160 (2008).
- ⁴⁶R. Haag, “Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions”, *Phys. Rev.* **112**, 669–673 (1958).
- ⁴⁷S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, “Structure of phenomenological Lagrangians. 1.”, *Phys. Rev.* **177**, 2239–2247 (1969).
- ⁴⁸C. G. Callan Jr., S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, “Structure of phenomenological Lagrangians. 2.”, *Phys. Rev.* **177**, 2247–2250 (1969).
- ⁴⁹A. V. Manohar and M. B. Wise, *Heavy Quark Physics*, Vol. 10, Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. (2000).
- ⁵⁰J. Bijnens, G. Colangelo, and G. Ecker, “The Mesonic chiral Lagrangian of order p^6 ”, *JHEP* **02**, 020 (1999).
- ⁵¹S. Weinberg, “Pion scattering lengths”, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 616–621 (1966).
- ⁵²Y. Tomozawa, “Axial vector coupling renormalization and the meson baryon scattering lengths”, *Nuovo Cim. A* **46**, 707–717 (1966).
- ⁵³F.-K. Guo, “Novel method for precisely measuring the $X(3872)$ mass”, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 202002 (2019).
- ⁵⁴J. L. Rosner, “Hadronic and radiative D^* widths”, *Phys. Rev. D* **88**, 034034 (2013).
- ⁵⁵F. Bernardoni, J. Bulava, M. Donnellan, and R. Sommer (ALPHA), “Precision lattice QCD computation of the $B^*B\pi$ coupling”, *Phys. Lett. B* **740**, 278–284 (2014).
- ⁵⁶J. M. Flynn, P. Fritzsche, T. Kawanai, C. Lehner, B. Samways, C. T. Sachrajda, R. S. Van de Water, and O. Witzel (RBC, UKQCD), “The $B^*B\pi$ Coupling Using Relativistic Heavy Quarks”, *Phys. Rev. D* **93**, 014510 (2016).
- ⁵⁷H. W. Fearing and S. Scherer, “Extension of the chiral perturbation theory meson Lagrangian to order p^6 ”, *Phys. Rev. D* **53**, 315–348 (1996).
- ⁵⁸J. Bijnens, N. Hermansson-Truedsson, and S. Wang, “The order p^8 mesonic chiral Lagrangian”, *JHEP* **01**, 102 (2019).
- ⁵⁹J. R. Peláez, “From controversy to precision on the sigma meson: A review on the status of the non-ordinary $f_0(500)$ resonance”, *Phys. Rept.* **658**, 1 (2016).

⁶⁰J. Bijnens and G. Ecker, “Mesonic low-energy constants”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **64**, 149–174 (2014).

⁶¹M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, Reading, USA, 1995).

DRAFT

第 3 章 散射理论

本章中我们将简要介绍么正性, 解析性等 S 矩阵理论的基本内容, 以及基于么正性和解析性建立的色散关系, 并用之处理末态相互作用. 关于 S 矩阵理论更深入的了解可参见以下几本经典著作 [1-3].

3.1 S 矩阵和么正性

强相互作用是短程相互作用, 因此任何强相互作用的过程都可以看做是自由粒子组成的入射态 $|i\rangle$ 和出射态 $|f\rangle$ 之间的跃迁, 其跃迁几率定义了 S 矩阵 (S 矩阵的思想首先由 Heisenberg 提出):

$$S_{fi} \equiv \langle f|S|i\rangle. \quad (3.1)$$

因为入射态和出射态都是由在壳的自由粒子组成的, 因此, S 矩阵描述的都是“可观测”过程. 由初态开始演化到某个态 $|n\rangle$ 的几率 P_n 为

$$P_n = |\langle n|S|i\rangle|^2, \quad (3.2)$$

所有的 $|n\rangle$ 构成一个完备基, 即 $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$, 意味着 $\sum_n P_n = 1$, 我们得到

$$\langle i|SS^\dagger|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = 1. \quad (3.3)$$

令 $|i\rangle = c_1|a\rangle + c_2|b\rangle$, 其中 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是正交归一的态矢, c_1 和 c_2 是两个任意系数, 满足归一化条件 $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, 由上式可得

$$|c_1|^2 \langle a|SS^\dagger|a\rangle + |c_2|^2 \langle b|SS^\dagger|b\rangle + c_1^*c_2 \langle a|SS^\dagger|b\rangle + c_1c_2^* \langle b|SS^\dagger|a\rangle = 1. \quad (3.4)$$

利用 (3.3), 可得

$$c_1^*c_2 \langle a|SS^\dagger|b\rangle + c_1c_2^* \langle b|SS^\dagger|a\rangle = 0. \quad (3.5)$$

由于 c_1, c_2 是满足归一化条件的任意复数, 上式要求

$$\langle a|SS^\dagger|b\rangle = \langle b|SS^\dagger|a\rangle = 0. \quad (3.6)$$

综合 (3.3) 和 (3.6), 我们就得到了 S 矩阵的重要性质么正性:

$$\sum_n S_{fn}^\dagger S_{ni} = \delta_{fi}, \quad (3.7)$$

即

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1. \quad (3.8)$$

S 矩阵的么正性是几率守恒的要求.

初态可以不经任何相互作用就演化到末态, 这一部分没有任何动力学信息, 我们将之剥离出去, 定义跃迁 T 矩阵:

$$S = 1 + iT. \quad (3.9)$$

由 (3.8) 易得 T 矩阵的么正关系为

$$T - T^\dagger = iT T^\dagger. \quad (3.10)$$

初态和末态都是某些物理量的本征态, 对称性要求这些本征值守恒, 从而 S 矩阵的矩阵元中应该包含描述守恒的 δ 函数 (对于分立本征值来说是 Kronecker δ). 我们考虑时空平移不变性带来的能动量守恒, 将初末态系统的整体运动从 S 矩阵中分离出去, 得到

$$\langle f|S|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \langle \alpha_f|S|\alpha_i\rangle, \quad (3.11)$$

其中 P_i 和 P_f 为初态和末态的总四动量, $|\alpha_i\rangle$ 和 $|\alpha_f\rangle$ 为从初态和末态将质心运动剥离出去之后定义的态, 4 维 δ 函数 $\delta^4(P_f - P_i)$ 表示系统的能动量守恒.

对于单粒子态, 我们采取如下的归一化:

$$\langle p|p'\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (3.12)$$

其中 $p^\mu = (p^0, \vec{p})$. 在 (3.10) 中插入完备基

$$\mathbb{1} = \sum_a \int \prod_{j=1}^{n_a} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} |a\rangle \langle a|, \quad (3.13)$$

其中 n_a 表示态 $|a\rangle$ 中包含的粒子数, 我们得到

$$\langle f|T|i\rangle - \langle f|T^\dagger|i\rangle = i \sum_a \int \prod_{j=1}^{n_a} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \langle f|T|a\rangle \langle a|T^\dagger|i\rangle. \quad (3.14)$$

从等式两侧都剥离掉质心运动, 即去掉 $(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$ 部分, 可得 T 矩阵元满足的么正关系:

$$\langle \alpha_f|T|\alpha_i\rangle - \langle \alpha_f|T^\dagger|\alpha_i\rangle = i \sum_a \int dQ_a \langle \alpha_f|T|\alpha_a\rangle \langle \alpha_a|T^\dagger|\alpha_i\rangle, \quad (3.15)$$

这里的 T 矩阵元 $T_{fi} \equiv \langle \alpha_f|T|\alpha_i\rangle$ 便是计算跃迁几率所需要的, 态 $|a\rangle$ 中包含 n_a 个粒子, dQ_a 表示其相空间微元:

$$dQ_a \equiv (2\pi)^4 \delta^4\left(P_f - \sum_{j=1}^{n_a} p_j\right) \prod_{j=1}^{n_a} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}. \quad (3.16)$$

文献 [4] 中给出了一种将任意 n 体相空间表示为末态不变质量和立体角的不同组合的简便推导方法.

我们后面的推导中会经常用到两体相空间:

$$\int dQ_2 = \int (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega_1}{16\pi^2 p_1^0 p_2^0} \delta(P^0 - p_1^0 - p_2^0) \\
&= \int \frac{\rho(s)}{2\pi} d\Omega_1 \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $m_{1,2}$ 为两个粒子的质量, $\int d\Omega_1 \equiv \int_{-1}^1 d\cos\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1$ 是对沿着粒子 1 在两体系统质心系中的动量方向立体角的积分, $\sqrt{s} \equiv P^0$ 是两粒子质心系的总能量,

$$\rho(s) \equiv \frac{k}{8\pi\sqrt{s}} \tag{3.19}$$

称为两体相空间因子,

$$k \equiv \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} = \frac{1}{2\sqrt{s}} [(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}, \tag{3.20}$$

是两体系统中任一粒子在两粒子质心系中三动量的大小, $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$ 是 Källén 三角函数. 上面的推导中用到了

$$\begin{aligned}
\delta(P^0 - p_1^0 - p_2^0) &= \delta\left(P^0 - \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2} - \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_2^2}\right) \\
&= \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2)k} [\delta(|\vec{p}_1| - k) + \delta(|\vec{p}_1| + k)],
\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中 E_1 和 E_2 分别是粒子 1 和粒子 2 在两粒子质心系中的能量,

$$\begin{aligned}
E_1 &\equiv \sqrt{m_1^2 + k^2} = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_1^2 - m_2^2), \\
E_2 &\equiv \sqrt{m_2^2 + k^2} = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_2^2 - m_1^2).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

下面我们来考虑两体散射过程 $A(p_1)B(p_2) \rightarrow C(p_3)D(p_4)$, A, B, C, D 粒子的质量分别为 m_1, m_2, m_3 和 m_4 . (1.57) 中定义了 Mandelstam 变量: $s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_1 - p_3)^2, u = (p_1 - p_4)^2$. 在 AB 粒子的质心系中, 我们可以将 t 表达为 s 和粒子 A 和粒子 C 的运动方向的夹角 (即散射角) $\theta \equiv \widehat{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3}$ 的函数,

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos\theta, \tag{3.23}$$

其中 E_1 (见上式) 和 $|\vec{p}_1|$ (由 (3.20) 给出) 分别为粒子 A 在 AB 质心系中的能量和三动量的大小,

$$E_3 = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \quad |\vec{p}_3| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \tag{3.24}$$

分别为粒子 C 在 AB 质心系中的能量和三动量的大小. 利用在壳粒子满足的关系 $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$, 可知 u 也可表达为 s 和 $\cos\theta$ 的函数.

3.1.1 无自旋粒子分波振幅的么正关系

本章中只考虑无自旋的粒子. 将初态粒子 A 的动量方向选为沿 z 轴, 即令 $|\alpha_f\rangle \equiv |\theta, \varphi\rangle$, $|\alpha_i\rangle = |0, 0\rangle$. 由于所有的粒子都无自旋, 系统保持转动不变, 可知散射振幅 $T(s, t, u)$ 不依赖于

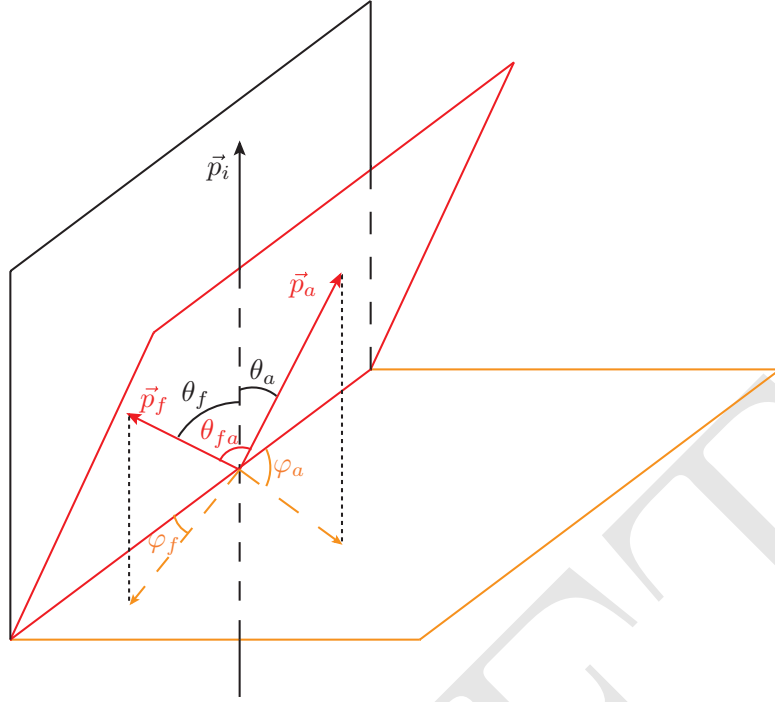


图 3.1: 质心系中初态粒子的动量 $\vec{p}_i$, 末态粒子的动量 $\vec{p}_f$ 和中间态粒子的动量 $\vec{p}_a$ 之间的角度.

φ 角. 我们可以对散射振幅 $T(s, \cos \theta) \equiv T(s, t, u)$ 做分波展开:

$$T(s, \cos \theta) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) P_L(\cos \theta) T_L(s), \quad (3.25)$$

其中 $P_L(z)$ 为 L 阶 Legendre 多项式, $z \equiv \cos \theta$, $T_L(s)$ 称为轨道角动量为 L 的分波振幅 (partial-wave amplitude). $L = 0, 1, 2, 3$ 的分波分别称为 S, P, D, F 波. 利用 Legendre 多项式的正交关系,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_L(z) P_{L'}(z) = \frac{1}{2L+1} \delta_{LL'}, \quad (3.26)$$

可以得到 L 分波的散射振幅为

$$T_L(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_L(z) T(s, z). \quad (3.27)$$

我们只考虑两体中间态, 并利用时间反演不变导致的 $T_{fi} = T_{if}^{[2]}$, 由 T 矩阵满足的么正关系 (3.15) 可以得到

$$\begin{aligned} T_{fi}(s, z) - T_{fi}^*(s, z) &= i \sum_a \int dQ_a T_{fa}(s, z_{fa}) T_{ai}^*(s, z_{ai}) \\ &= i \sum_a \int \frac{\rho_a d\Omega_a}{2\pi} T_{fa}(s, z_{fa}) T_{ai}^*(s, z_{ai}) \theta(\sqrt{s} - m_{a1} - m_{a2}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 $\rho_a(s) \equiv k_a/(8\pi\sqrt{s})$ 为反应道 $|a\rangle$ 的两体相空间因子, m_{a1} 和 m_{a2} 为其中粒子的质量, $d\Omega_a = d\cos\theta_a d\varphi_a$ 为此道中粒子在两体质心系中动量方向的立体角微元. 将上式两侧的散射振幅分别都做分波展开, 然后比较等式两侧 $P_L(z)$ 的系数, 可以得到分波振幅 $T_L(s)$ 满足的么

正关系为

$$T_{fi,L}(s) - T_{fi,L}^*(s) = i \sum_a T_{fa,L}(s) 2\rho_a(s) T_{ai,L}^*(s) \theta(\sqrt{s} - m_{a1} - m_{a2}). \quad (3.29)$$

上面的推导中用到了关系

$$\int \frac{d\Omega_a}{4\pi} P_L(z_{ai}) P_{L'}(z_{fa}) = \frac{\delta_{LL'}}{2L+1} P_L(z_{fi}), \quad (3.30)$$

其中 $z_{ai} \equiv \cos \theta_a$, $z_{fa} \equiv \cos \theta_{fa}$, $z_{fi} \equiv \cos \theta_f$, 这几个角度如图 3.1 所示. 这个关系可以通过球谐函数的加法定理^[5]

$$P_L(\hat{x} \cdot \hat{y}) = \frac{4\pi}{2L+1} \sum_{m=-L}^L Y_{Lm}(\hat{y}) Y_{Lm}^*(\hat{x}), \quad (3.31)$$

其中 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 表示单位向量, 以及球谐函数的归一化

$$\int d\Omega_x Y_{Lm}^*(\hat{x}) Y_{L'm'}(\hat{x}) = \delta_{LL'} \delta_{mm'} \quad (3.32)$$

推导得到.

我们可以将 (3.29) 重写为:

$$\text{Im } T_{fi,L}(s) = \sum_a T_{fa,L}(s) \rho_a(s) T_{ai,L}^*(s) \theta(\sqrt{s} - m_{a1} - m_{a2}), \quad (3.33)$$

这说明只要能量足够大, 允许中间态的粒子可以在壳, 散射振幅就必定会出现虚部. 上式可写为反应道空间的矩阵形式:

$$\text{Im } T_L^{-1}(s) = -\rho(s) \Theta(s), \quad (3.34)$$

这表明分波 T 矩阵的逆的虚部完全由么正性确定. 上式中, $\rho(s)$ 为对角矩阵, 其对角矩阵元为 $|a\rangle$ 反应道中的两体相空间因子 $\rho_a(s)$, 对角矩阵 $\Theta(s)$ 的对角矩阵元为 $\theta(\sqrt{s} - m_{a1} - m_{a2})$. 由此, 我们得到分波 T 矩阵的 K 矩阵参数化方案:

$$T_L^{-1}(s) = K_L^{-1}(s) - i\rho(s), \quad (3.35)$$

只要 K_L 是实矩阵, 这样参数化出来的分波 T 矩阵就必定满足么正关系 (3.34); 时间反演不变要求 K_L 矩阵是对称矩阵. 注意到我们可以将相空间因子 $\rho_a(s)$ 解析延拓到阈下, 在阈下 s 复平面的实轴上 $\rho_a(s)$ 是纯虚数.

如果只考虑单个反应道的情况, 根据分波振幅的么正关系

$$\text{Im } \frac{1}{T_L(s)} = -\rho(s) \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2), \quad (3.36)$$

在物理能区, 即 $\sqrt{s} \geq m_1 + m_2$ 的区域, 我们可以将 $T_L(s)$ 参数化为

$$T_L(s) = \frac{e^{i\delta_L(s)} \sin \delta_L(s)}{\rho(s)} = \frac{8\pi\sqrt{s}}{k \cot \delta_L(s) - i k}, \quad (3.37)$$

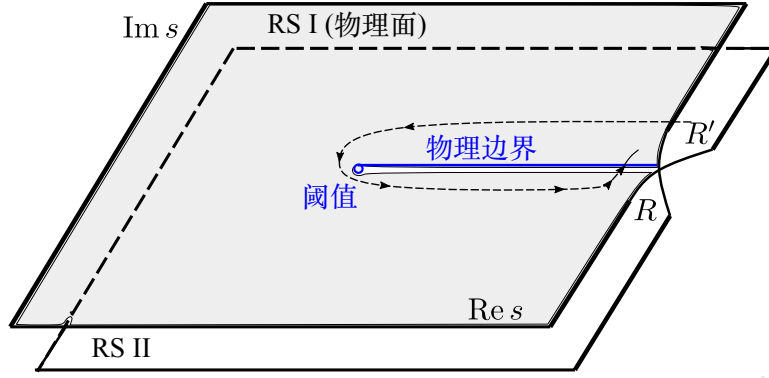


图 3.2: 由于动量是根号函数, 单个反应道的能量复平面包括两个 Riemann 面. 第一 Riemann 面也被称为物理面, 阈值是支点, 通常将阈值沿正实轴到无穷远取为割线, 第一 Riemann 面内割线的上半沿被称为物理边界.

其中 $\delta_L(s)$ 为 L 分波的散射相移, L 分波的分波 S 矩阵为

$$S_L(s) \equiv 1 + 2i\rho(s)T_L(s) = e^{2i\delta_L(s)}. \quad (3.38)$$

只考虑两个粒子之间的短程相互作用, 其力程 $\sim 1/\beta$, β 可估计为未明显考虑的自由度带来的动量标度, 比如粒子之间能交换的最轻粒子的质量, 或者下一个耦合道的阈值处这两个粒子的质心动量的大小. 当动量远小于 β 时, 我们可以进行有效力程展开 (effective range expansion)^[6]

$$k \cot \delta_L(s) = k^{-2L} \left[-\frac{1}{a_L} + \frac{1}{2}r_L k^2 + \mathcal{O}\left(\frac{k^4}{\beta^3}\right) \right], \quad (3.39)$$

其中 a_L 称为散射长度, r_L 称为有效力程.

3.1.2 解析性与因果性

质心系动量的表达式 (3.20) 是根号函数, 从而是变量 s 的双值函数. 由 (3.36) 以及 (3.20), 我们可以看到弹性散射的分波散射振幅必定有一个根号支点在两体的阈值: $s = (m_1 + m_2)^2$. (3.20) 还有另一个支点在无穷远点, 我们可以将这两个支点连成一条割线, 通常将割线取为由阈值沿正实轴到无穷远. 这条割线是由 s 道的粒子在壳带来的, 被称为右手割线 (right-hand cut) 或么正割线. 割线将整个 s 的复平面分为两个 Riemann 面, 如图 3.2 所示; 第一 Riemann 面 (RS I) 和第二 Riemann 面 (RS II) 分别定义为:

$$\text{RS I: } \text{Im } k > 0; \quad \text{RS II: } \text{Im } k < 0. \quad (3.40)$$

物理区域对应于第一黎曼面割线的上半沿, 即 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (s + i\epsilon)$; 第一黎曼面也称为物理面.

散射振幅在能量复平面的解析性质与因果性之间有深刻的联系. 因果性意味着一个事件

只能影响其之后的事件. 我们将一个事件对其它事件的影响描述为

$$\Phi_{\text{effect}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' g(t-t') \Phi_{\text{cause}}(t'), \quad (3.41)$$

其中 Φ_{cause} 表示原因, Φ_{effect} 表示结果, 时间演化 $g(t-t')$ 包含了相互作用. 令 $\tau \equiv t-t'$, 因果性意味着当 $\tau < 0$ 时, 我们必须有 $g(\tau) = 0$. 对 $g(\tau)$ 做 Fourier 变换, 我们得到

$$G(E) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} g(\tau) e^{iE\tau} = \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} g(\tau) e^{iE\tau}. \quad (3.42)$$

物理事件能够发生的区域称为物理区域, 能量为实数, 物理区域与能量复平面物理面的割线上半沿相连. 在物理面的上半平面, 上面积分中的指数因子

$$e^{iE\tau} \propto e^{-\text{Im}(E)\tau} \quad (3.43)$$

在 $\lim_{\tau \rightarrow +\infty}$ 时以指数的速度趋向于 0, 因此, $G(E)$ 在物理面的上半平面是解析的, 没有任何奇异性. 由此, 我们得到结论: 散射振幅在能量物理面的上半平面必定是解析的 (此处只是定性的简要分析, 更详细的分析可参见 [3]).^{3.1}

复分析中有一个重要结果是 Schwarz 反射原理, 它对满足如下条件的函数 $f(z)$ 成立:

- 实轴上存在区间 Γ , 使得当 $z \in \Gamma$, $\text{Im}f(z) = 0$;
- $f(z)$ 在包含 Γ 的区域 D 内是解析的.

那么当 $z \in D$ 时,

$$f(z^*) = f^*(z). \quad (3.44)$$

利用这个定理, 我们可以把振幅从能量物理面的上半平面解析延拓到下半平面; 上面的分析意味着振幅在物理面的下半平面也必定是解析的. 因此, 我们得到结论, 在物理面上振幅 $T(s, z)$ 只可能在 s 实轴上存在奇异性 (singularity). 实轴上的奇异性包括割线和阈下的极点. 物理面阈下的极点对应于动量 k 复平面正虚轴上的极点, 它所描述的粒子的空间波函数 $\lim_{r \rightarrow \infty} \exp(ikr) \rightarrow 0$, 即局限在一个范围之内, 因此, 这样的极点对应的粒子是束缚态.

因果性对非物理面上振幅的解析性没有限制. 因此, 在非物理面上可以出现额外的奇异性. 虚态 (virtual state) 是非物理面实轴上阈下的极点, 对应于动量复平面负虚轴上的极点, 因此, 其空间波函数是不可归一的, 并不对应于通常意义上的有一定大小的粒子. 然而, 如果虚态离阈值较近, S 波振幅中极点的存在同样会对反应几率带来近阈增强 (near-threshold enhancement), 并且虚态与束缚态对不变质量谱在阈上的影响是类似的. 如果极点特别靠近阈值, 只从阈上的不变质量谱甚至无法区分近阈增强是来自于束缚态还是虚态. 这一点很容易理解. 在特别近阈的能区内, 考虑 S 波散射, 散射振幅可以用散射长度近似来描述, 即 (3.39) 有

^{3.1} 令 $E = -i\mathcal{E}$, (3.42) 中的积分可写为 $\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} g(\tau) e^{-\mathcal{E}\tau}$, 这实际上是 Laplace 变换. 此处讨论的解析性即对应于 Laplace 变换的像函数的解析性.

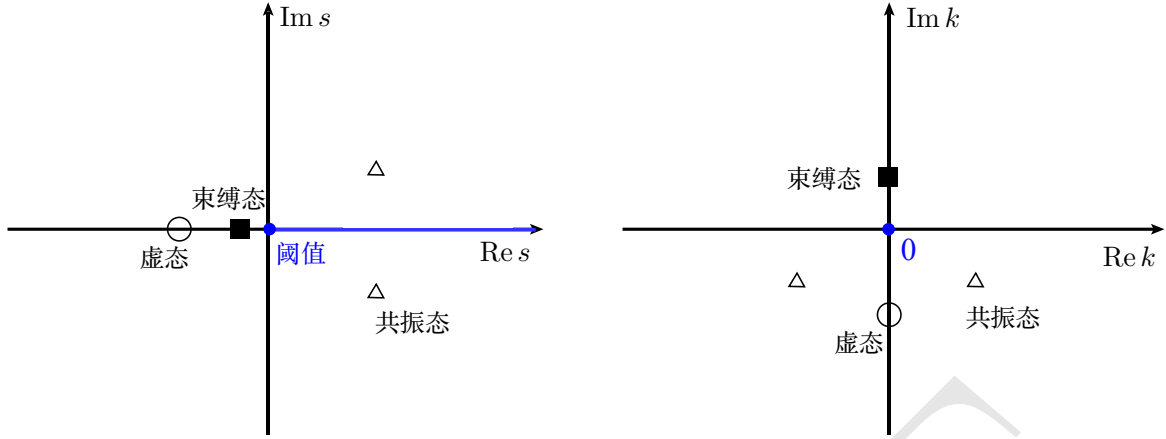


图 3.3: 左图: s 复平面上的极点位置示意. 实心正方形表示束缚态, 位于物理 s 面的实轴阈下; 虚心圈表示虚态, 位于非物理面实轴阈下; 虚心三角形表示共振态极点, 位于非物理面, 有不为零的虚部, 两个极点互为复共轭. 右图: 这几类极点在动量复平面上的位置示意.

效力程展开中只取散射长度这一项,

$$T_0(s) \simeq \frac{8\pi(m_1 + m_2)}{-1/a_0 - i k}, \quad (3.45)$$

这样的振幅只有一个束缚态或者一个虚态极点, 分别对应于 $a_0 > 0$ 和 $a_0 < 0$. 关于散射长度定义的符号约定为: 排斥力或者阈下有一个束缚态时, $a_0 > 0$; 吸引力但是吸引不足够强到产生束缚态时, $a_0 < 0$, 存在一个虚态就属于这种情况. 在阈上 $s > (m_1 + m_2)^2$, 反应几率正比于

$$|T_0(s)|^2 \simeq \frac{[8\pi(m_1 + m_2)]^2}{1/a_0^2 + k^2}, \quad (3.46)$$

与 a_0 的符号无关 (它们阈下的行为不同, 详细讨论可参见 [7]), 从而使得如果虚态和束缚态的极点离阈值的距离相同, 它们所导致的不变质量谱在阈上的线形也会相同. 从波函数不可归一这一点来看, 虚态与共振态之间也没有本质区别, 从而如果将共振态称为“粒子”, 虚态也同样被称为“粒子”. 共振态 (resonance) 是振幅非物理面上虚部不为零的极点, Schwarz 反射原理要求共振态极点在能量的非物理面上必定成对出现, 互为复共轭; 转换到动量复平面, 则对应于下半平面的虚部相同但是实部互为相反数的一对极点. 上述几类极点如图 3.3 所示.

由于 t 道和 u 道振幅分别在它们的物理区间之内也存在上述类似的奇异性, 将振幅做分波投影得到的分波振幅在 s 复平面上有更为复杂的奇异性, 如左手割线, 环形割线等, 在此不做分析, 可参见 [2].

3.2 共振态：Breit-Wigner 参数化与 Flatté 参数化

绝大多数强子都是有衰变宽度的共振态, 因此下面我们来进一步分析共振态. 为简单起见, 我们考虑非相对论两粒子散射的情形, 此时两体系统中粒子在质心系的动量大小可以近似

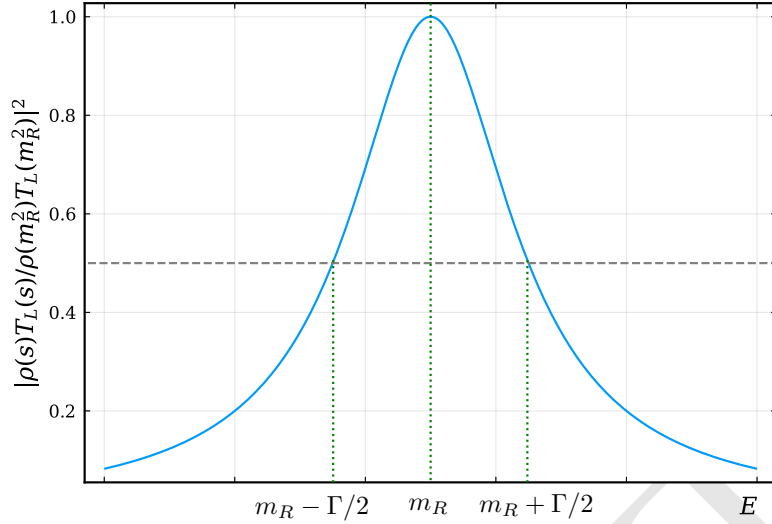


图 3.4: Breit-Wigner 形式的共振态不变质量谱示意. 此处所示为归一化的 $|\rho(s)T_L(s)|^2$, Γ 取为了常数.

为

$$k \simeq \sqrt{2\mu(E - m_1 - m_2)}, \quad (3.47)$$

其中 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 是两粒子的约化质量, $E = \sqrt{s}$ 是两粒子质心系的总能量. 我们将共振态在 k 复平面的极点位置记为 $\pm a - ib$ ($a, b \in \mathbb{R}, b > 0$), 它们对应于能量复平面非物理面的一对共轭极点: $m_1 + m_2 + [(a^2 - b^2) \pm 2iab] / (2\mu)$; 极点位置如图 3.3 中空心三角形所示.

由分波 S 矩阵的么正性, (3.38), 我们可以将包含一对共振态共轭极点的分波 S 矩阵参数化为

$$S_L(s) = S_L^{\text{res.}} S_L^{\text{bg.}}(s) \equiv \frac{(k - a - ib)(k + a - ib)}{(k - a + ib)(k + a + ib)} S_L^{\text{bg.}}(s). \quad (3.48)$$

其中 $S_L^{\text{bg.}}(s)$ 表示除了这一对共振态极点之外的背景项的贡献, 满足 $S_L^{\text{bg.}}(s)S_L^{\text{bg.}\dagger}(s) = 1$. 在下面的讨论中, 我们忽略掉背景项的贡献. 只包含共振态极点的 S 矩阵可以重新写为:

$$S_L^{\text{res.}}(s) = \frac{k^2 - k_0^2 - 2ikb}{k^2 - k_0^2 + 2ikb}, \quad (3.49)$$

其中, 我们定义了 $k_0 \equiv a^2 + b^2$. 于是, 我们得到共振态极点对分波振幅 $T_L(s)$ 的贡献为

$$T_L(s) = \frac{S_L(s) - 1}{2i\rho(s)} = -\frac{1}{\rho(s)} \frac{2kb}{k^2 - k_0^2 + 2ikb}. \quad (3.50)$$

将 k_0 和 b 两个参数表达为另外两个参数 m_R 和 Γ :

$$k_0^2 \equiv 2\mu(m_R - m_1 - m_2), \quad \Gamma \equiv 2bk/\mu, \quad (3.51)$$

我们就得到了著名的共振态的 Breit-Wigner 参数化形式:

$$T_L(s) = -\frac{1}{\rho(s)} \frac{\Gamma/2}{E - m_R + i\Gamma/2}. \quad (3.52)$$

反应几率正比于 $|T_L(s)|^2$, 因此会在 $E \simeq m_R$ 处有极大值. 如果我们将 Γ 取为常数, 如图 3.4

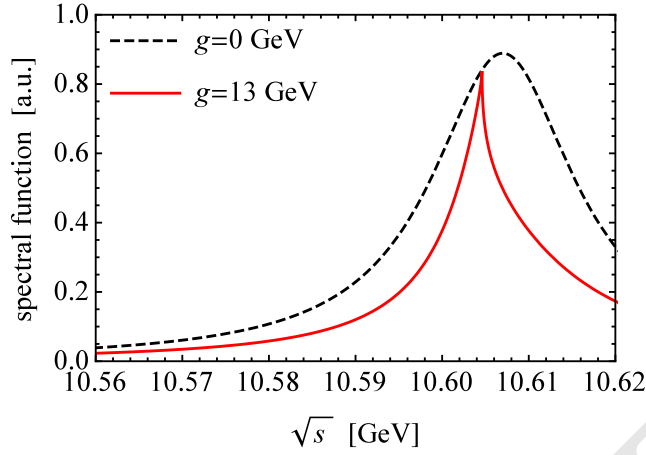


图 3.5: 共振态极点位于 S 波强耦合的阈值附近时, 其线形会极大偏离 Breit-Wigner 共振态的线形. 图中虚线表示 Breit-Wigner 线形, 实线表示 Flatté 线形, 其最大值的能量对应于阈值. 取自 [8], 所用的参数为 $m_1 = 5.729$ GeV, $m_2 = 5.325$ GeV, $m_R = 10.607$ GeV, $\Gamma_0 = 0.02$ GeV.

中所示, $|\rho(s)T_L(s)|^2$ 在 $E = m_R$ 处取极大值, 在 $E = m_R \pm \Gamma/2$ 处的值为极大值的一半. m_R 对应于共振态的质量, Γ 对应于共振态的宽度. 对能量做 Fourier 变换,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{e^{-iEt}}{E - m_R + i\Gamma/2} \propto e^{-im_R t - \Gamma t/2}, \quad (3.53)$$

其中 t 表示时间, 我们发现宽度越大的共振态, 其反应几率衰减得越快, 因此, 我们将 $1/\Gamma$ 定义为粒子的寿命.

然而, 由 (3.51) 可以看到 Γ 并不是能量无关的常数, 而是通过动量 k 因子依赖于能量的. 实际上, 在宽度的表达式中 b 也应该替换成正比于 k^{2L} 的函数, 以得到 $\Gamma \propto k^{2L+1}$ 的行为.

实验分析中经常采取 Breit-Wigner 形式参数化共振态, 通过拟合不变质量谱或者 Dalitz 分布等来抽取共振态的质量和宽度. 然而, 分析过程中需要注意几个问题:

- 两个或多个 Breit-Wigner 形式的振幅直接相加会破坏么正性 (见习题 3.1).
- 共振态通常可以与多个不同的反应道相耦合. 当共振态位于某对粒子的阈值附近时, 特别是与这对粒子 S 波强耦合时, 我们必须考虑宽度中 k 因子带来的非平庸的能量依赖. 由 (3.20) 知, k 在阈上是实数, 但是将之延拓到阈下就变成了纯虚数, 这会使得振幅中的共振态极点对不变质量谱的影响极大偏离图 3.4 所示的理想的 Breit-Wigner 共振态的线形. 考虑两个耦合道的情况, 其中阈值在共振态质量附近的道包含两个粒子 (质量分别为 m_1 和 m_2), 共振态与这个道的耦合是 S 波的; 这两个粒子在 s 道耦合到共振态给出的散射振幅可以写为^[9]

$$\propto \frac{1}{E - m_0 + i(\Gamma_0 + g_{\text{eff}} k_2)}, \quad (3.54)$$

其中, m_0 为 Flatté 参数化中的质量参数, Γ_0 表示共振态的阈值低于 $m_1 + m_2$ 的衰变道的分宽度, g_{eff} 是常数, 正比于裸耦合常数 g 的平方, k_2 是阈上的动量 k 的解析延拓, 当

E 为实数时可以写为

$$k_2 = k \theta(E - m_1 - m_2) + i |k| \theta(m_1 + m_2 - E). \quad (3.55)$$

这种耦合道的共振态的参数化方式称为 Flatté 参数化. 图 3.5 给出了其对应的线形与 Breit-Wigner 参数化线形的比较, 可以看到 Flatté 线形在阈值两侧明显不对称. 图中所采取的参数给出的 Flatté 线形的半高宽甚至小于 Γ_0 . 需要注意的是, (3.54) 中的 m_0 并不对应于物理的质量, 它以及 Γ_0, g_{eff} 只是参数, 通过拟合数据把它们确定之后, 需要通过求 (3.54) 极点得到共振态的质量和宽度, 通过求留数得到耦合常数的平方.

- 如果共振态的衰变产物中包含 π 介子, 而且共振态质量与衰变末态的阈值很近, 从而 π 介子的动量很小, 这时候 π 介子作为手征对称自发破缺的赝 Goldstone 玻色子的特性会体现出来, 我们需要考虑手征对称性带来的约束, 即第 1.5.2 节中讨论的导数耦合. 它意味着 S 波耦合的衰变振幅正比于 π 介子的能量 E_π , 从而使得衰变分宽度 $\propto k E_\pi^2$. 如果不考虑这个因子, 直接用简单的 Breit-Wigner 拟合数据, 得到的共振态质量会偏大; 详细讨论可参见 [10].

 **习题 3.1** 证明将两个 Breit-Wigner 参数化的共振态振幅简单相加给出来的振幅

$$T_{\text{sum}}(E) = -\frac{1}{\rho(E)} \left(\frac{\Gamma_1/2}{E - E_{R1} + i\Gamma_1/2} + \frac{\Gamma_2/2}{E - E_{R2} + i\Gamma_2/2} \right) \quad (3.56)$$

不满足么正关系, 即对这样的振幅来说, $\text{Im } T_{\text{sum}}^{-1}(E) \neq -\rho(E)$.

3.3 色散关系与末态相互作用

我们前面的分析说明散射振幅是能量 (或 s) 的解析函数, 其在能量的第一黎曼面上可能存在的奇点只有实轴上的割线和极点.^{3.2} 虽然真实的物理过程中能量是实数, 但是, 我们可以将之拓展到复平面, 利用解析函数的性质可以对散射振幅进行解析延拓, 将不同运动学区间的振幅联系起来. 色散关系就发挥了这样的作用. 色散关系在几十年前就已经提出, 近年来被应用到了大量强子反应过程 (参见综述 [11–13]) 以及标准模型中强相互作用效应的精确计算中 (如计算 μ 轻子 $g-2$ 中的 QCD 效应^[14]).

本节中我们将推导出一些模型无关的关系, 用之研究反应末态粒子之间的末态相互作用 (final state interaction).

3.3.1 色散关系简介

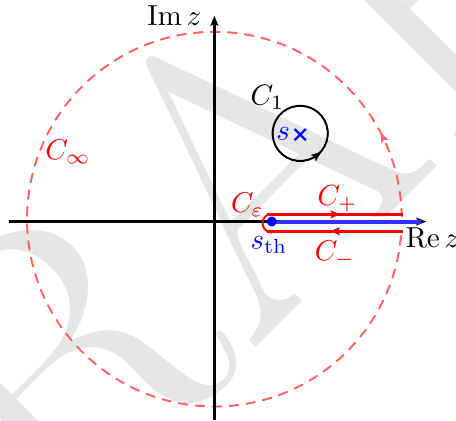


图 3.6: 利用 Cauchy 定理推导色散关系的示意图. $f(z)$ 有一条从 s_{th} 沿正实轴的割线, 绕 s 点的围道 C_1 可以变形为 $C_\infty + C_+ + C_\epsilon + C_-$.

考虑复变量 z 的函数 $f(z)$, 它有一条从支点 s_{th} 沿正实轴到无穷远支点的割线, 除此之外, $f(z)$ 在整个 z 复平面内处处解析. 于是, 绕 s 点的围道 C_1 可以变形为 $C_2 \equiv C_\infty + C_+ + C_\epsilon + C_-$ (积分围道如图 3.6 所示), 并且变形过程中不会遇到奇异性, 这两个围道给出来的积分是相等的, 即

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz \frac{f(z)}{z-s} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz \frac{f(z)}{z-s}. \quad (3.57)$$

由于 s 不在割线上, 故 $\lim_{z \rightarrow s_{\text{th}}} (z - s_{\text{th}})f(z)/(z-s) = 0$, 因此沿无穷小圆弧 C_ϵ 这部分路径的积分为零; 如果 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 那么在 C_∞ 这部分路径上的积分为零. 此时, 上面的积分可

^{3.2}分波振幅的解析性质更为复杂, 分波投影会将 t 和 u 道散射振幅的割线转化为 s 复平面上的割线, 详细分析可参见 [2] 第 8.1 节.

以写为沿割线上下沿的不连续度 (discontinuity)

$$\text{disc } f(z) \equiv f(z + i\epsilon) - f(z - i\epsilon) \quad (3.58)$$

的积分:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+ + C_-} dz \frac{f(z)}{z - s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\text{disc } f(z)}{z - s}, \quad (3.59)$$

这就是所谓的色散关系.

我们感兴趣的散射振幅, 形状因子等很多函数都是 s 复平面实轴上一段区间内的实解析函数, 因此, 它们满足 Schwarz 反射原理 (3.44), 其不连续度为

$$\text{disc } f(z) = 2i \text{Im } f(z). \quad (3.60)$$

如果 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq 0$, 我们需要做减除, 得到减除的色散关系. 我们先考虑 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 是常数的情况, 此时, 从 (3.57) 中积分的收敛性质可知做一次减除即可保证积分的收敛性. 利用留数定理, 可得

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} dz \frac{f(z)}{(z - s)(z - s_0)} &= \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\text{disc } f(z)}{(z - s)(z - s_0)} \\ &= 2\pi i \left[\frac{f(s)}{s - s_0} + \frac{f(s_0)}{s_0 - s} \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

从而得到经过一次减除的色散关系:

$$f(s) = f(s_0) + \frac{s - s_0}{2\pi i} \int_{s_{\text{th}}}^{\infty} dz \frac{\text{disc } f(z)}{(z - s)(z - s_0)}, \quad (3.62)$$

其中 s_0 称为减除点, $f(s_0)$ 称为减除常数. 而如果 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \propto z$, 那么 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/(z - s_0)^2 = 0$, 我们就需要做两次减除. 利用留数定理,

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} dz \frac{f(z)}{(z - s)(z - s_0)^2} &= \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\text{disc } f(z)}{(z - s)(z - s_0)^2} \\ &= 2\pi i \left[\frac{f(s)}{(s - s_0)^2} + \lim_{z \rightarrow s_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{z - s} \right) \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{f(s)}{(s - s_0)^2} + \frac{f'(s_0)}{s_0 - s} - \frac{f(s_0)}{(s - s_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.63)$$

其中 $f'(s_0) \equiv \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=s_0}$. 我们得到经过两次减除的色散关系:

$$f(s) = f(s_0) + (s - s_0) f'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2\pi i} \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\text{disc } f(z)}{(z - s)(z - s_0)^2}. \quad (3.64)$$

此时, 有两个减除常数 $f(s_0)$ 和 $f'(s_0)$. 类似地, 我们可以推导出任意 n 次减除的色散关系:

$$f(s) = \sum_{j=1}^n \frac{(s - s_0)^{j-1}}{(j-1)!} \left. \frac{d^{j-1} f(z)}{dz^{j-1}} \right|_{z=s_0} + \frac{(s - s_0)^n}{2\pi i} \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\text{disc } f(z)}{(z - s)(z - s_0)^n}. \quad (3.65)$$

3.3.2 末态相互作用: Watson 定理和 Omnès 解

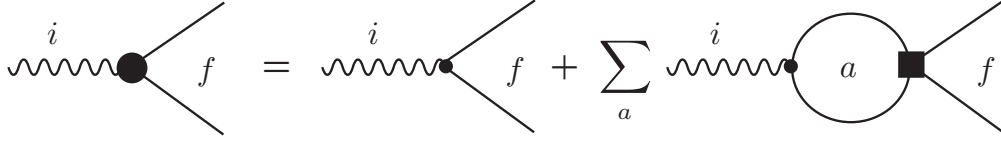


图 3.7: 末态相互作用示意图. 实心黑圈表示包括了末态相互作用的产生顶点, 实心正方形表示末态相互作用, a 表示从初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 所可能经历的中间态.

我们感兴趣的强子反应过程末态粒子中多数都含有不止一个强子, 它们在反应过程中产生, 在被探测到之前, 它们之间可以发生相互作用, 这被称为末态相互作用 (final state interaction, FSI). 而且末态粒子被探测到之前, 可以经历不同的反应道组成的中间态, 如图 3.7 所示; 只要对称性允许这些反应道之间存在耦合, 而且能量足够大使得这些道中的粒子可以在壳, 么正性就意味着它们必定会对末态相互作用有所贡献. 下面, 我们利用色散关系的方法研究末态相互作用.

考虑只有两体零自旋粒子末态相互作用的简单情况, 初态可看做提供了产生末态两粒子 $M_1 M_2$ 的源 J : $\langle M_1 M_2 | J | 0 \rangle$. 这样的矩阵元中 Lorentz 结构之外的部分也被称为形状因子; 如果 $M_1 M_2$ 都是 π 介子, J 是矢量流 j^μ , 矩阵元就正比于 π 介子的矢量形状因子 $F_\pi^V(q^2)$:

$$\langle \pi^\pm(p') \pi^\mp(p) | j^\mu | 0 \rangle = q^\mu F_\pi^V(q^2), \quad (3.66)$$

其中 $q = p' - p$; 如果 J 是标量流, 矩阵元就正比于 π 的标量形状因子. 我们将相应的产生振幅记作 $F_L(s)$, L 为 $M_1 M_2$ 粒子之间的轨道角动量. $F_L(s)$ 的不连续度由只考虑两体中间态的 T 矩阵的么正关系 (3.29) 给出,

$$\begin{aligned} \text{disc } F_{f,L}(s) &= 2i \text{Im } F_{f,L}(s) = i \sum_a T_{fa,L}(s) 2\rho_a(s) F_{a,L}^*(s) \theta(\sqrt{s} - m_{a1} - m_{a2}) \\ &= i \sum_a T_{fa,L}^*(s) 2\rho_a(s) F_{a,L}(s) \theta(\sqrt{s} - m_{a1} - m_{a2}), \end{aligned} \quad (3.67)$$

其中 $F_{a,L}$ 表示反应道 a 的产生振幅; 由于我们只考虑零自旋粒子, 轨道角动量 L 是守恒的. 这个关系可以用图 3.8 表示. 根据 (3.59), 我们写出 $F_L(s)$ 的色散关系

$$F_{f,L}(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_a \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{T_{fa,L}^*(z) 2\rho_a(z) F_{a,L}(z)}{z - s}, \quad (3.68)$$

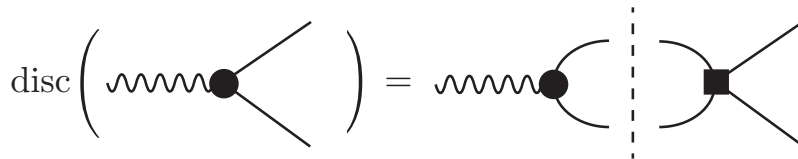


图 3.8: 产生振幅的不连续度示意图. 波浪线表示源, 实心黑圈表示产生振幅, 实心正方形表示粒子末态相互作用的 T 矩阵, 竖虚线表示中间态相空间.

此处尚未考虑减除, 实际计算中需要根据被积函数在 $z \rightarrow \infty$ 的渐近性质确定减除的次数, 使用 (3.68) 形式的色散关系.

上式是一个关于 $F_{a,L}(s)$ 的积分方程. 如果能量小于非弹性道的阈值, (3.67) 中的阶跃函数限制不连续度中只会有弹性道这一个反应道的贡献, 此时这个积分方程的解可以用相移的积分表达出来.

分波产生振幅的虚部为

$$\begin{aligned} \text{Im } F_L(s) &= F_L(s) \rho(s) T_L^*(s) \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2) \\ &= F_L(s) e^{-i\delta_L(s)} \sin \delta_L(s) \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2), \end{aligned} \quad (3.69)$$

其中用到了 (3.37). 上式左侧是实数, 右侧必定也是实数; 由此, 我们得到 Watson 末态相互作用定理^[15]:

在弹性能区, 末态相互作用振幅的相位与散射相移相同或相差 180° .

物理面的上半沿与物理区域连续, 因此, 我们可以将 (3.69) 写为

$$\frac{1}{2i} [F_L(s + i\epsilon) - F_L(s - i\epsilon)] = F_L(s + i\epsilon) e^{-i\delta_L(s)} \sin \delta_L(s) \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2). \quad (3.70)$$

假设 $F_L(s)$ 在 s 复平面的实轴上没有零点, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{F_L(s - i\epsilon)}{F_L(s + i\epsilon)} &= 1 - 2i e^{-i\delta_L(s)} \sin \delta_L(s) \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2) \\ &= \theta(m_1 + m_2 - \sqrt{s}) + e^{-2i\delta_L(s)} \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2), \end{aligned} \quad (3.71)$$

从而得到 $\log F_L(s)$ 的不连续度:

$$\log F_L(s + i\epsilon) - \log F_L(s - i\epsilon) = 2i\delta_L(s) \theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2). \quad (3.72)$$

根据 (3.59) 和 (3.62), 假设散射相移在高能区的渐近值不为零, 我们可以写出一次减除的色散关系:

$$\log F_L(s) - \log F_L(0) = \frac{s}{\pi} \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\delta_L(z)}{z(z-s)}, \quad (3.73)$$

其中 $s_{\text{th}} = (m_1 + m_2)^2$. 另一方面, 将 $F_L(s)$ 乘以一个没有不连续度的任意函数, 并不会改变 (3.72), 因此, (3.72) 的解中 $F_L(s)$ 可以有一个任意 n 阶的多项式因子 $\mathcal{P}_n(s)$, 即

$$F_L(s) = \mathcal{P}_n(s) \Omega_L(s), \quad \Omega_L(s) \equiv \exp \left[\frac{s}{\pi} \int_{s_{\text{th}}}^{\infty} dz \frac{\delta_L(z)}{z(z-s)} \right]. \quad (3.74)$$

上式称为 Omnès 解^[16], $\Omega_L(s)$ 称为 Omnès 函数, 它将弹性能区的末态相互作用用散射相移表示了出来.

强子物理中的一些基本散射过程的散射相移已经通过利用 Roy 方程或 Roy-Steiner 方程等色散关系的分析给出比较精确的结果, 如 $\pi\pi$ 相移^[17-18], πK 相移^[19-20], πN 相移^[21] 等, 它们可被用来计算涉及这些两体末态的反应过程的末态相互作用的效应. 需要指出的是, 末态相

相互作用与存在共振态不但不是互斥的, 而且末态相互作用的 T 矩阵中包含着与末态粒子相耦合的共振态的极点; 例如, 由 (3.74) 可知, ρ 共振态会通过 $\pi\pi$ 的 P 波散射相移进入到 $\pi\pi$ 的 P 波末态相互作用中.

3.3.3 三体末态的末态相互作用

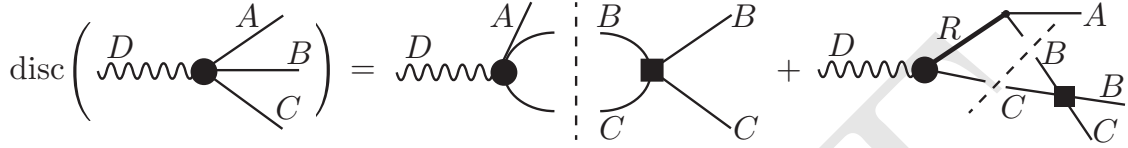


图 3.9: 三体末态产生过程的振幅的不连续度, 其中 AB 可以通过共振态 R 来产生. 波浪线表示源, 实心黑圈表示产生振幅, 实心正方形表示 BC 粒子之间的末态相互作用 T 矩阵, 虚线表示沿右手割线的中间态相空间.

当反应过程的末态粒子中有三个强子时, 末态相互作用会变得更加复杂, 因为两两之间都会发生相互作用^[22-24]. 下面我们讨论一种相对简单的情形. 将初态粒子记为 D , 末态粒子记为 A, B, C , 其中一对粒子 AB 可经过一个共振态 R 产生, BC 之间还有重要的末态相互作用. 此时, 整个产生振幅的不连续度如图 3.9 所示.

三体衰变 $D(p_d) \rightarrow A(p_a)B(p_b)C(p_c)$ 的初末态一共有 4 个粒子, 类似于两个粒子之间的散射, 我们也可以定义 Mandelstam 变量,

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_b + p_c)^2 = (p_d - p_a)^2, \\ t &\equiv (p_d - p_c)^2 = (p_a + p_b)^2, \\ u &\equiv (p_d - p_b)^2 = (p_a + p_c)^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

容易验证, $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$. 对于 BC 粒子对来说, R 相当于 t 道交换的粒子. 将 t 用 BC 质心系中 CD 运动方向之间的夹角表示出来,

$$t(s, z) = m_c^2 + m_d^2 - 2E_c E_d + 2|\vec{p}_c| |\vec{p}_d| z, \quad (3.76)$$

其中 $z \equiv \cos \theta_{dc}$, 能量和动量都是定义在 BC 质心系中的, 表达式为

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_c^2 - m_b^2), \quad |\vec{p}_c| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(s, m_b^2, m_c^2)}, \\ E_d &= \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_d^2 - m_a^2), \quad |\vec{p}_d| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(m_d^2, s, m_a^2)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

我们计算 t 道 R 交换做分波投影, 有

$$\propto \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_L(z)}{t(s, z) - m_R^2}. \quad (3.78)$$

当 $z = \pm 1$ 时, 且 R 在壳 $t = m_R^2$ 时, 积分会有端点奇点 (endpoint singularity). 它们是 t 道粒子在壳时的奇点; 上述积分给出来的是对数函数, 例如 S 波投影会得到第二类 Legendre 函数

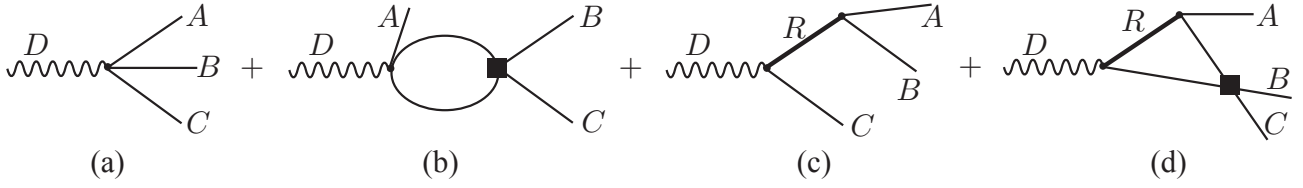


图 3.10: 考虑 BC 末态相互作用 (用实心正方形表示) 的三体衰变过程 $D \rightarrow A + B + C$ 振幅示意图. 其中, AB 粒子可以耦合到共振态 R .

Q_0 :

$$Q_0(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{y-z} P_0(z) = \frac{1}{2} \log \frac{y+1}{y-1}. \quad (3.79)$$

也就是说 t 道的极点 $t = m_R^2$ 会转化成 s 的对数支点, 由 $t(s, \pm 1) = m_R^2$ 的解给出. 这种由于 t 道粒子在壳带来的 s 的支点之间的割线被称为左手割线.^{3.3}

从 (3.78) 容易发现, R 粒子交换可以贡献到 BC 的所有分波. 我们将总的产生振幅做分波展开:

$$A_{\text{tot}}(s, z) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) P_L(z) A_{\text{tot}, L}(s), \quad (3.80)$$

其中 $z \equiv \cos \theta$, θ 是在 D, C 粒子在 BC 的质心系中的 3 动量 $\vec{p}_d$ 和 $\vec{p}_c$ 方向的夹角; 分波振幅可以分成两部分

$$A_{\text{tot}, L}(s) = A_L(s) + \hat{A}_L(s), \quad (3.81)$$

其中 $\hat{A}_L(s)$ 是 t 道交换 R 共振态的树图的 L 分波投影, 如图 3.10 (c) 所示, 它只包含左手割线.

我们考虑左手割线和右手割线没有重叠区间的情形. 由 (3.29), 我们写出分波产生振幅的不连续度 (见图 3.9),

$$\text{disc} \left(A_L(s) + \hat{A}_L(s) \right) = 2i \left[A_L(s) + \hat{A}_L(s) \right] \rho(s) T_L^*(s) \theta(\sqrt{s} - \sqrt{s_{\text{th}}}). \quad (3.82)$$

其中 $s_{\text{th}} \equiv (m_b + m_c)^2$. 由于 $\hat{A}_L(s)$ 沿右手割线连续, 上式可写为

$$A_L(s + i\epsilon) - A_L(s - i\epsilon) = 2i \left[A_L(s) + \hat{A}_L(s) \right] e^{-i\delta_L(s)} \sin \delta_L(s) \theta(\sqrt{s} - \sqrt{s_{\text{th}}}). \quad (3.83)$$

可以看到 $\hat{A}_L(s)$ 的存在使得 $A_L(s)$ 的不连续度的方程不再是齐次的了, $\hat{A}_L(s)$ 也被称为非齐次项 (inhomogeneity). 继续将之变形, 将 $A_L(s)$ 和 $\hat{A}_L(s)$ 置于等式的两侧,

$$A_L(s + i\epsilon) e^{-i\delta_L(s)} - A_L(s - i\epsilon) e^{i\delta_L(s)} = 2i \hat{A}_L(s) \sin \delta_L(s) \theta(\sqrt{s} - \sqrt{s_{\text{th}}}). \quad (3.84)$$

我们可以证明, Omnès 函数 $\Omega_L(s \pm i\epsilon)$ 的相位为 $e^{\pm i\delta_L(s)}$:

$$\Omega_L(s \pm i\epsilon) = \exp \left[\frac{s}{\pi} \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\delta_L(z)}{z(z - s \mp i\epsilon)} \right]$$

^{3.3} AB 粒子在壳 $t \geq (m_a + m_b)^2$ 也会给出左手割线, 在此不讨论.

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[\frac{s}{\pi} \oint_{s_{\text{th}}}^{\infty} dz \frac{\delta_L(z)}{z(z-s)} \right] e^{\pm i \delta_L(s)} \\
&= |\Omega_L(s)| e^{\pm i \delta_L(s)}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

将 (3.84) 两侧同除以 $|\Omega_L(s)|$, 我们可以得到 $A_L(s)/\Omega_L(s)$ 的不连续度,

$$\frac{A_L(s+i\epsilon)}{\Omega_L(s+i\epsilon)} - \frac{A_L(s-i\epsilon)}{\Omega_L(s-i\epsilon)} = 2i \frac{\hat{A}_L(s)}{|\Omega_L(s)|} \sin \delta_L(s) \theta(\sqrt{s} - \sqrt{s_{\text{th}}}), \tag{3.86}$$

因此, 关于 $A_L(s)/\Omega_L(s)$ 的色散关系为^[22-23]

$$\frac{A_L(s)}{\Omega_L(s)} = \frac{1}{\pi} \int_{s_{\text{th}}}^{+\infty} dz \frac{\hat{A}_L(z) \sin \delta_L(z)}{(z-s) |\Omega_L(z)|}. \tag{3.87}$$

上式中没有考虑减除, 减除的次数需要根据情况由被积函数的渐近行为来确定. 一般性地, $A_L(s)$ 可由做 n 次减除之后的色散关系表示为

$$A_L(s) = \Omega_L(s) \left\{ \mathcal{P}_{n-1}(s) + \frac{s^n}{\pi} \int_{s_{\text{th}}}^{\infty} dz \frac{\hat{A}_L(z) \sin \delta_L(z)}{(z-s) z^n |\Omega_L(z)|} \right\}, \tag{3.88}$$

其中 $\mathcal{P}_{n-1}(s)$ 表示 s 的 $n-1$ 阶多项式. 与图 3.10 对照, $\Omega_L(s)\mathcal{P}_{n-1}(s)$ 表示图 (a) 和 (b) 的分波投影, $\Omega_L(s)$ 乘以上式大括号中的第二项表示图 (d) 的贡献, 图 (c) 的贡献由 $\hat{A}_L(s)$ 给出.

这一方法近年来被广泛用于处理三体衰变中的 $\pi\pi$ 末态相互作用^[8,25-28].

3.4 复合粒子与强子分子态

在第 1.8 节中, 我们介绍过重味强子, 其中一些可以理解为主要成分是强子分子态的粒子, 即两个强子束缚在一起形成的复合体系. 质子和中子的束缚态氘核可以看做强子分子态的原型. 在本节中, 我们引入复合度 (compositeness) 的概念, 它描述了一个粒子的波函数中包含另两个粒子形成的复合系统的几率; 我们通过把它与可观测量联系起来, 给出一个粒子是复合粒子的几率的定量描述. 关于复合度与强子分子态的综述, 可参见^[29-30].

我们考虑一个系统, 其哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}}$ 分为自由部分 $\hat{\mathcal{H}}_0$ 和相互作用部分 $\hat{V}$,

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V}. \tag{3.89}$$

假设 $\hat{\mathcal{H}}_0$ 的本征态包含两粒子 (质量分别为 m_1 和 m_2) 的连续谱和一个阈下的分立能级 (例如两个无相互作用的粲强子和一个自由的粲偶素), 其本征态构成完备基:

$$1 = |B_0\rangle \langle B_0| + \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} |\vec{q}\rangle \langle \vec{q}|, \tag{3.90}$$

其中 $|\vec{q}\rangle$ 是连续谱的本征态, 本征值为 $\vec{q}^2/(2\mu)$, $\vec{q}$ 是质心系中的动量, $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 是约化质量; $|B_0\rangle$ 是分立能级的本征态.

总哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}}$ 的本征态也包括连续谱和一个分立能级, 分别记为 $|\vec{q}_{(+)}\rangle$ 和 $|B\rangle$, 分立能级位于阈下, 如图 3.11 所示. 连续谱的本征值为 $\vec{q}^2/(2\mu)$; 分立能级的本征值为 $E = -E_B$ (E_B

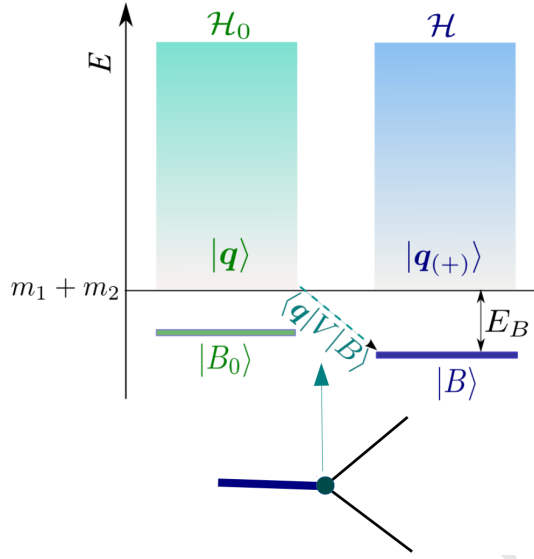


图 3.11: 自由哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}}_0$ 和相互作用哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}}$ 的连续谱和分立谱示意图.

称为束缚能, 物理分立态的质量为 $M = m_1 + m_2 - E_B$,^{3.4} 满足 Schrödinger 方程,

$$\hat{\mathcal{H}}|B\rangle = (\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V})|B\rangle = -E_B|B\rangle. \quad (3.91)$$

将方程两侧同乘 $\langle \vec{q}|$, 我们可以得到分立态 $|B\rangle$ 的动量空间波函数为

$$\langle \vec{q}|B\rangle = -\frac{\langle \vec{q}|\hat{V}|B\rangle}{E_B + \vec{q}^2/(2\mu)}, \quad (3.92)$$

其中 $\langle \vec{q}|\hat{V}|B\rangle$ 表示从物理的分立态 $|B\rangle$ 到自由两粒子态 $|\vec{q}\rangle$ 耦合的矩阵元. 我们只考虑 S 波耦合, 假设 $|B\rangle$ 的质量靠近两体阈值, 满足

$$\gamma \equiv \sqrt{2\mu E_B} \ll \beta, \quad (3.93)$$

γ 称为束缚动量, β 是系统中的硬标度, 可估计为两体系统力程的倒数. 此时, 我们可以将耦合矩阵元近似取为常数, 记为 g_{NR} ,^{3.5}

$$\langle \vec{q}|\hat{V}|B\rangle = g_{\text{NR}} \left[1 + O\left(\frac{\vec{q}^2}{\beta^2}\right) \right]. \quad (3.94)$$

我们将分立态 $|B\rangle$ 的波函数归一, 利用 (3.90) 中的完备性关系, 得到

$$\begin{aligned} 1 &= \langle B|B_0\rangle \langle B_0|B\rangle + \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \langle B|\vec{q}\rangle \langle \vec{q}|B\rangle \\ &= Z + \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} |\langle \vec{q}|B\rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.95)$$

其中 $Z \equiv |\langle B_0|B\rangle|^2$ 表示在物理态 $|B\rangle$ 中找到自由哈密顿量的分立本征态 $|B_0\rangle$ (可称为裸态)

^{3.4}注意本小节中 E 表示非相对论能量, 即总能量减去两粒子的阈值: $\sqrt{s} - m_1 - m_2$.

^{3.5}下标 NR 表示这里的态的归一化为非相对论的, 参见脚注 1.13; 相对论归一化下的耦合常数 $g = \sqrt{2M2m_12m_2}g_{\text{NR}}$.

的几率. 复合度便是在物理分立态 $|B\rangle$ 中含有两粒子态 $|\vec{q}\rangle$ 的几率, $1 - Z$:

$$\begin{aligned} 1 - Z &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} |\langle \vec{q} | B \rangle|^2 = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{g_{NR}^2}{[E_B + \vec{q}^2/(2\mu)]^2} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{q}^2}{\beta^2}\right) \right] \\ &= \frac{\mu^2 g_{NR}^2}{2\pi\gamma} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

第二行结果里的误差为 $\mathcal{O}(\gamma/\beta)$ 而不是 $\mathcal{O}(\gamma^2/\beta^2)$ 是因为被积函数中 $\mathcal{O}(\vec{q}^2/\beta^2)$ 项的积分线性发散; 将积分在硬标度 β 处截断, 得到的修正便是 $\mathcal{O}(\gamma/\beta)$ 阶的. 我们发现, 物理分立态 $|B\rangle$ 与两体自由连续态之间的耦合常数 ($|B\rangle$ 与 $\hat{\mathcal{H}}$ 的连续谱本征态 $|\vec{q}_{(+)}\rangle$ 的本征值不同, 它们是正交的) 包含了重要的物理信息, g_{NR}^2 正比于 $|B\rangle$ 是 m_1, m_2 这两个粒子的复合系统的几率, 且与束缚能相关^[31]:

$$g_{NR}^2 \approx (1 - Z) \frac{2\pi}{\mu^2} \gamma. \quad (3.97)$$

具体到我们此前考虑的物理系统, $|B\rangle$ 对应于强子分子态的候选者, $|\vec{q}\rangle$ 对应于自由的两强子态, g_{NR} 对应于物理态 $|B\rangle$ 与所考虑的两强子的耦合强度, $1 - Z$ 刻画了物理态是强子分子态的可能性. 这个关系经常被用来计算强子分子态候选者的衰变宽度.

3.4.1 Low 方程与 T 矩阵的留数

下面, 我们证明耦合常数的平方 g_{NR}^2 是 T 矩阵在对应于物理分立态 $|B\rangle$ 的极点处的留数. 非相对论归一化下的 T 矩阵 T_{NR} 的定义为:

$$T_{NR}|\vec{q}\rangle = \hat{V}|\vec{q}_{(+)}\rangle. \quad (3.98)$$

T 矩阵的 Lippmann-Schwinger 方程可以写为

$$\begin{aligned} T_{NR} &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} T_{NR} \\ &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} \hat{V} + \dots \\ &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} \left(1 + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + i\epsilon} + \dots \right) \hat{V} \\ &= \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}} + i\epsilon} \hat{V}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

我们得到

$$\langle \vec{q}' | T_{NR} | \vec{q} \rangle = \langle \vec{q}' | \hat{V} | \vec{q} \rangle + \left\langle \vec{q}' \left| \hat{V} \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}} + i\epsilon} \hat{V} \right| \vec{q} \right\rangle. \quad (3.100)$$

在上式右侧第二项中插入 $\hat{\mathcal{H}}$ 的完备基

$$1 = |B\rangle\langle B| + \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} |\vec{k}_{(+)}\rangle \langle \vec{k}_{(+)}|, \quad (3.101)$$

可以得到 Low 方程^[31]

$$\langle \vec{q}' | T_{\text{NR}} | \vec{q} \rangle = \langle \vec{q}' | \hat{V} | \vec{q} \rangle + \frac{\langle \vec{q}' | \hat{V} | B \rangle \langle B | \hat{V} | \vec{q} \rangle}{E + E_B + i\epsilon} + \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\langle \vec{q}' | T_{\text{NR}} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | T_{\text{NR}}^\dagger | \vec{q} \rangle}{E - \vec{k}^2/(2\mu) + i\epsilon}. \quad (3.102)$$

我们发现 (3.97) 正好是在壳 $T_{\text{NR}}(E) \equiv \langle \vec{k} | T_{\text{NR}} | \vec{k} \rangle$ 在物理分立态的极点 $E = -E_B$ 处的留数:

$$\begin{aligned} g_{\text{NR}}^2 &= \langle \vec{k} | \hat{V} | B \rangle \langle B | \hat{V} | \vec{k} \rangle \\ &= \lim_{E \rightarrow -E_B} (E + E_B) T_{\text{NR}}(E) \\ &= \left[\frac{d}{dE} T_{\text{NR}}^{-1}(E) \right]_{E=-E_B}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

上式第二步中我们用了 L'Hôpital 法则.

3.4.2 Weinberg 复合度关系

对于近阈的 S 波粒子来说, 复合度 $1 - Z$ 可以与低能物理可观测量联系起来.

么正性关系 (3.36) 限制 T_{NR}^{-1} 的虚部为

$$\text{Im } T_{\text{NR}}^{-1}(E) = -4m_1 m_2 \text{Im } T_0^{-1}(s) \simeq \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{2\mu E} \theta(E), \quad (3.104)$$

其中, $4m_1 m_2$ 因子是由于非相对论归一化带来的, 负号来自相对论的 T 矩阵和非相对论 T 矩阵定义的不同, 分别见 (3.9) 和 (3.98); 第二步中我们进行了非相对论近似. 当质心系动量大小 $k = \sqrt{2\mu E} \ll \beta$ 时, 根据 (3.39), $T_{\text{NR}}^{-1}(E)$ 可用有效力程展开表示为

$$T_{\text{NR}}^{-1}(E) = -\frac{\mu}{2\pi} \left[-\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 - i k + \mathcal{O}\left(\frac{k^4}{\beta^3}\right) \right], \quad (3.105)$$

根据第 3.3.1 节, 我们可以由 (3.104) 写出 $T_{\text{NR}}^{-1}(E)$ 的色散关系表示. 为了将色散关系表示中 E 的幂次与 (3.105) 匹配, 我们对色散关系做两次减除, 得到

$$T_{\text{NR}}^{-1}(E) = T_{\text{NR}}^{-1}(-E_B) + (E + E_B) \frac{dT_{\text{NR}}^{-1}(E)}{dE} \Big|_{E=-E_B} + \frac{\mu(E + E_B)^2}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dw \frac{\sqrt{2\mu w}}{(w - E)(w + E_B)^2}. \quad (3.106)$$

将上式中的积分明显地求出, 并利用在极点处 $T_{\text{NR}}^{-1}(-E_B) = 0$ 和 (3.103), 可以得到

$$T_{\text{NR}}^{-1}(E) = \frac{E + E_B}{g_{\text{NR}}^2} + \frac{\mu}{4\pi} \frac{(\gamma + ik)^2}{\gamma} = \frac{\gamma^2 + k^2}{2\mu g_{\text{NR}}^2} + \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{k^2}{2\gamma} + ik \right). \quad (3.107)$$

利用 (3.97), 并比较上式与 (3.105), 我们便得到了所谓的 Weinberg 复合度关系^[31]

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2(1 - Z)}{\gamma(2 - Z)}, \\ r_0 = -\frac{Z}{\gamma(1 - Z)}. \end{cases} \quad (3.108)$$

上式建立了复合度 $1 - Z$ 与低能可观测量散射长度 a_0 和有效力程之间的关系, 被广泛用来通

过散射长度和有效力程的测量来确定一个物理态中有多大强子分子态的成分. 例如, 各个不同组基于格点 QCD 结果的分析都得到 $D_{s0}^*(2317)$ 的主要成分是 DK 分子态^[32–35]; 基于 LHCb 实验的测量^[36], 我们也可以推断 T_{cc}^+ 中含有很大的 DD^* 成分^[36–38].

更细致的分析发现, 上述推导出来的 Weinberg 复合度关系 (3.108) 只在负有效力程 ($r_0 < 0$) 的时候是成立的, 并且其误差为 $\mathcal{O}(\gamma^2/\beta^2)$ ^[39]; 关于正有效力程情况的讨论, 可参见 [39–40].

 **习题 3.2** 考虑 (3.74) 给出的 Omnès 函数,

$$\Omega(s) = \exp \left[\frac{s}{\pi} \int_{s_{\text{th}}}^{\infty} dz \frac{\delta(z)}{z(z-s)} \right],$$

- 1) 假设 $\delta(s > s_0) = c\pi$, 其中 c 为常数, $s_0 > s_{\text{th}}$, 证明 Omnès 函数的渐近行为是 $\Omega(s \rightarrow \infty) \sim s^{-c}$;
- 2) 考虑一个共振态, 质量高于阈值 $m_R^2 > s_{\text{th}}$, 忽略其宽度, 相移是 $\delta(s) = \pi \theta(s - m_R^2)$, 证明其 Omnès 函数的形式为

$$\Omega(s) = \frac{m_R^2}{m_R^2 - s}.$$

参考文献

- ¹R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, and J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1966).
- ²A. Martin and T. D. Spearman, *Elementary Particle Theory* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherland, 1970).
- ³V. N. Gribov, *Strong Interactions of Hadrons at High Energies: Gribov Lectures on Theoretical Physics*, edited by Y. L. Dokshitzer and J. Nyiri, *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* 27 (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., Oct. 2012).
- ⁴H.-J. Jing, C.-W. Shen, and F.-K. Guo, “Graphic method for arbitrary n-body phase space”, *Science Bulletin* 66, 653–656 (2020).
- ⁵A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, CERN-55-26 (Princeton University Press, Princeton, USA, 1957).

- ⁶H. A. Bethe, “Theory of the Effective Range in Nuclear Scattering”, *Phys. Rev.* **76**, 38–50 (1949).
- ⁷X.-K. Dong, F.-K. Guo, and B.-S. Zou, “Explaining the many threshold structures in the heavy-quark hadron spectrum”, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 152001 (2021).
- ⁸Y.-H. Chen, J. T. Daub, F.-K. Guo, B. Kubis, U.-G. Meißner, and B.-S. Zou, “Effect of Z_b states on $\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$ decays”, *Phys. Rev. D* **93**, 034030 (2016).
- ⁹S. M. Flatté, “Coupled-channel analysis of the $\pi\eta$ and $K\bar{K}$ systems near $K\bar{K}$ threshold”, *Phys. Lett. B* **63**, 224–227 (1976).
- ¹⁰M.-L. Du, F.-K. Guo, and U.-G. Meißner, “Implications of chiral symmetry on S-wave pionic resonances and the scalar charmed mesons”, *Phys. Rev. D* **99**, 114002 (2019).
- ¹¹J. R. Peláez, “From controversy to precision on the sigma meson: A review on the status of the non-ordinary $f_0(500)$ resonance”, *Phys. Rept.* **658**, 1 (2016).
- ¹²J. A. Oller, *A Brief Introduction to Dispersion Relations*, Springer Briefs in Physics (Springer, 2019).
- ¹³D.-L. Yao, L.-Y. Dai, H.-Q. Zheng, and Z.-Y. Zhou, “A review on partial-wave dynamics with chiral effective field theory and dispersion relation”, *Rept. Prog. Phys.* **84**, 076201 (2021).
- ¹⁴T. Aoyama et al., “The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model”, *Phys. Rept.* **887**, 1–166 (2020).
- ¹⁵K. M. Watson, “The effect of final state interactions on reaction cross-sections”, *Phys. Rev.* **88**, 1163–1171 (1952).
- ¹⁶R. Omnès, “On the Solution of certain singular integral equations of quantum field theory”, *Nuovo Cim.* **8**, 316–326 (1958).
- ¹⁷B. Ananthanarayan, G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, “Roy equation analysis of $\pi\pi$ scattering”, *Phys. Rept.* **353**, 207–279 (2001).
- ¹⁸R. García-Martin, R. Kaminski, J. R. Peláez, J. Ruiz de Elvira, and F. J. Ynduráin, “The pion-pion scattering amplitude. IV: Improved analysis with once subtracted Roy-like equations up to 1100 MeV”, *Phys. Rev. D* **83**, 074004 (2011).
- ¹⁹P. Büttiker, S. Descotes-Genon, and B. Moussallam, “A new analysis of πK scattering from Roy and Steiner type equations”, *Eur. Phys. J. C* **33**, 409–432 (2004).

- ²⁰A. Rodas and J. R. Peláez, “Dispersive determination of low energy πK interactions”, [arXiv:2204.04781 \[hep-ph\]](#) (2022).
- ²¹M. Hoferichter, J. Ruiz de Elvira, B. Kubis, and U.-G. Meißner, “Roy–Steiner-equation analysis of pion–nucleon scattering”, *Phys. Rept.* **625**, 1–88 (2016).
- ²²A. V. Anisovich and H. Leutwyler, “Dispersive analysis of the decay $\eta \rightarrow 3\pi$ ”, *Phys. Lett. B* **375**, 335–342 (1996).
- ²³I. J. R. Aitchison, “Unitarity, analyticity and crossing symmetry in two- and three-hadron final state interactions”, [arXiv:1507.02697 \[hep-ph\]](#) (2015).
- ²⁴A. V. Anisovich, V. V. Anisovich, M. A. Matveev, V. A. Nikonov, J. Nyiri, and A. V. Sarantsev, *Three-Particle Physics and Dispersion Relation Theory* (World Scientific Publishing Co, Singapore, 2013).
- ²⁵R. Garcia-Martin and B. Moussallam, “MO analysis of the high statistics Belle results on $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$ with chiral constraints”, *Eur. Phys. J. C* **70**, 155–175 (2010).
- ²⁶X.-W. Kang, B. Kubis, C. Hanhart, and U.-G. Meißner, “ B_{14} decays and the extraction of $|V_{ub}|$ ”, *Phys. Rev. D* **89**, 053015 (2014).
- ²⁷L.-Y. Dai and M. R. Pennington, “Comprehensive amplitude analysis of $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$ and $\bar{K} K$ below 1.5 GeV”, *Phys. Rev. D* **90**, 036004 (2014).
- ²⁸B. Kubis and J. Plenker, “Anomalous decay and scattering processes of the η meson”, *Eur. Phys. J. C* **75**, 283 (2015).
- ²⁹T. Hyodo, “Structure and compositeness of hadron resonances”, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1330045 (2013).
- ³⁰F.-K. Guo, C. Hanhart, U.-G. Meißner, Q. Wang, Q. Zhao, and B.-S. Zou, “Hadronic molecules”, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015004 (2018).
- ³¹S. Weinberg, “Evidence that the deuteron is not an elementary particle”, *Phys. Rev.* **137**, B672–B678 (1965).
- ³²L. Liu, K. Orginos, F.-K. Guo, C. Hanhart, and U.-G. Meißner, “Interactions of charmed mesons with light pseudoscalar mesons from lattice QCD and implications on the nature of the $D_{s0}^*(2317)$ ”, *Phys. Rev. D* **87**, 014508 (2013).

- ³³G. S. Bali, S. Collins, A. Cox, and A. Schäfer, “Masses and decay constants of the $D_{s0}^*(2317)$ and $D_{s1}(2460)$ from $N_f = 2$ lattice QCD close to the physical point”, *Phys. Rev. D* **96**, 074501 (2017).
- ³⁴G. K. C. Cheung, C. E. Thomas, D. J. Wilson, G. Moir, M. Peardon, and S. M. Ryan (Hadron Spectrum), “ DK $I = 0$, $D\bar{K}$ $I = 0, 1$ scattering and the $D_{s0}^*(2317)$ from lattice QCD”, *JHEP* **02**, 100 (2021).
- ³⁵Z. Yang, G.-J. Wang, J.-J. Wu, M. Oka, and S.-L. Zhu, “Novel coupled channel framework connecting the quark model and lattice QCD for the near-threshold D_s states”, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 112001 (2022).
- ³⁶R. Aaij et al. (LHCb), “Study of the doubly charmed tetraquark T_{cc}^{++} ”, *Nature Commun.* **13**, 3351 (2022).
- ³⁷M.-L. Du, V. Baru, X.-K. Dong, A. Filin, F.-K. Guo, C. Hanhart, A. Nefediev, J. Nieves, and Q. Wang, “Coupled-channel approach to T_{cc}^{++} including three-body effects”, *Phys. Rev. D* **105**, 014024 (2022).
- ³⁸M. Mikhasenko, “Effective-range expansion of the T_{cc}^{++} state at the complex $D^{*+}D^0$ threshold”, *arXiv:2203.04622 [hep-ph]* (2022).
- ³⁹Y. Li, F.-K. Guo, J.-Y. Pang, and J.-J. Wu, “Generalization of Weinberg’s compositeness relations”, *Phys. Rev. D* **105**, L071502 (2022).
- ⁴⁰I. Matuschek, V. Baru, F.-K. Guo, and C. Hanhart, “On the nature of near-threshold bound and virtual states”, *Eur. Phys. J. A* **57**, 101 (2021).

附录 A 常用公式

A.1 Pauli 矩阵

Pauli 矩阵:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Pauli 矩阵的一些有用的关系:

$$\begin{aligned} \det(\sigma_i) &= -1, & \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 &= -(\sigma_i)^T, \\ \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) &= 2\delta_{ij}, & \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) &= 2i\epsilon_{ijk}, & \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l) &= 2(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, & \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}I, \\ \sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij}\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, & \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \vec{b} \cdot \vec{\sigma} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbb{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ e^{i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}} &= \mathbb{1} \cos |\vec{a}| + i \frac{\vec{a} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{a}|} \sin |\vec{a}|. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Gell-Mann 矩阵

Gell-Mann 矩阵:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

它们满足下列关系:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= 2\delta_{ab}, & \lambda_a \lambda_b &= \frac{2}{3}\delta_{ab}I + (d_{abc} + if_{abc})\lambda_c, \\ [\lambda_a, \lambda_b] &= 2if_{abc}\lambda_c, & \{\lambda_a, \lambda_b\} &= \frac{4}{3}\delta_{ab}I + 2d_{abc}\lambda_c, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

其中,

$$f_{abc} = -\frac{1}{4}i \operatorname{Tr} (\lambda_a [\lambda_b, \lambda_c]), \quad d_{abc} = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} (\lambda_a \{\lambda_b, \lambda_c\}) \quad (\text{A.5})$$

为 $\text{SU}(3)$ 群的结构常数.

DRAFT

索引

- K 矩阵, 87
 S 矩阵, 83
 T 矩阵, 84
 θ 项, 4, 7
 $\pi\pi$ 散射, 61
Baker-Compbell-Hausdorff 公式, 7
CCWZ 方案, 68
Clebsch-Gordan 系数, 29
Dashen 定理, 61
G 宇称, 18
Gell-Mann 矩阵, 6, 108
Gell-Mann–Oakes–Renner 关系, 58
Gell-Mann–Okubo 关系, 59
Levi-Civita 张量, 1
Lippmann-Schwinger 方程, 102
Low 方程, 103
Mandelstam 变量, 14, 61, 85
Noether 定理, 6
OZI 规则, 41, 42
Pauli 矩阵, 108
Peccei-Quinn 机制, 64
QCD, 1
Schwarz 反射原理, 89
Watson 定理, 97
Weinberg-Tomozawa 项, 71
Wigner $9j$ 符号, 29
交叉对称性, 62
伪场, 57
低能常数, 73
共振态
 Breit-Wigner 参数化, 91
 Flatté 参数化, 93
分波展开, 86
初态辐射, 28
单胶子交换, 25
双夸克, 21
反常
 $U(1)_A$ 反常, 4, 7
同位旋, 9
同位旋对称性, 63
同位旋破坏, 9, 24, 59
同位旋质量破裂, 30
复合度, 100
 与散射参数的关系, 103
 与耦合常数的关系, 102
大 N_c 展开, 37
夸克凝聚, 57
奇特强子, 18
 五夸克态, 31
 四夸克态, 25, 41
 奇特量子数, 18
 强子分子态, 24, 28, 29, 31, 100, 104

对称性

Nambu-Goldstone 实现, 10

Wigner-Weyl 实现, 10

对称性自发破缺, 11, 13

Goldstone 定理, 11

Goldstone 玻色子, 11

Goldstone 玻色子的导数耦合, 15

左手割线, 99

么正性, 83

强子原子, 64

手征外推, 59

手征对称性, 5, 6

手征对称自发破缺, 25

明显破缺, 57

手征微扰论, 52

手征量纲, 74

拓展在壳重整化方案, 66

次领头阶, 72

红外正规化, 66

计幂规则, 72

重重子手征微扰论, 66

领头阶, 55

手征极限, 55

振幅的极点

共振态, 89

束缚态, 89, 103

虚态, 89

散射长度, 63, 64

有效力程展开, 88, 103

球谐函数, 87

相空间, 84

两体相空间, 84

粒子数据组, 17

线形 σ 模型, 13

色散关系, 94, 95

Omnès 解, 97

经过减除的, 95

轴子, 4, 59, 64

近阈增强, 89

重味强子

 P_c , 31

XYZ 态, 27

 $X(3872)$, 27, 29 X_b , 30 $Y(4260)$, 27 Z_b , 27, 30 Z_c , 27, 30

双重重子, 21

双粲重子, 25

类粲偶素, 27

重介子, 22

 D_1 , 22 $D_{s0}^*(2317)$, 23 $D_{s1}(2460)$, 23

重夸克对称性, 5, 19, 34

自旋伴子, 23, 29, 32

重反夸克-双夸克对称性, 21, 26

重夸克味对称性, 20, 24, 25

重夸克自旋对称性, 19, 24, 28, 34

阈值尖点, 64

陪集空间, 53