

第十届手征有效场论研讨会

Covariant three-body scattering equation

翟擎宇 @ 北京航空航天大学

合作者：陆俊旭副教授，梁豪兆副教授，耿立升教授

2025-10 南京

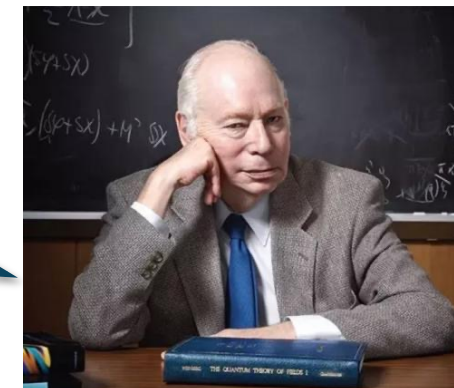


□ 手征有效场论 —— QCD低能区近似

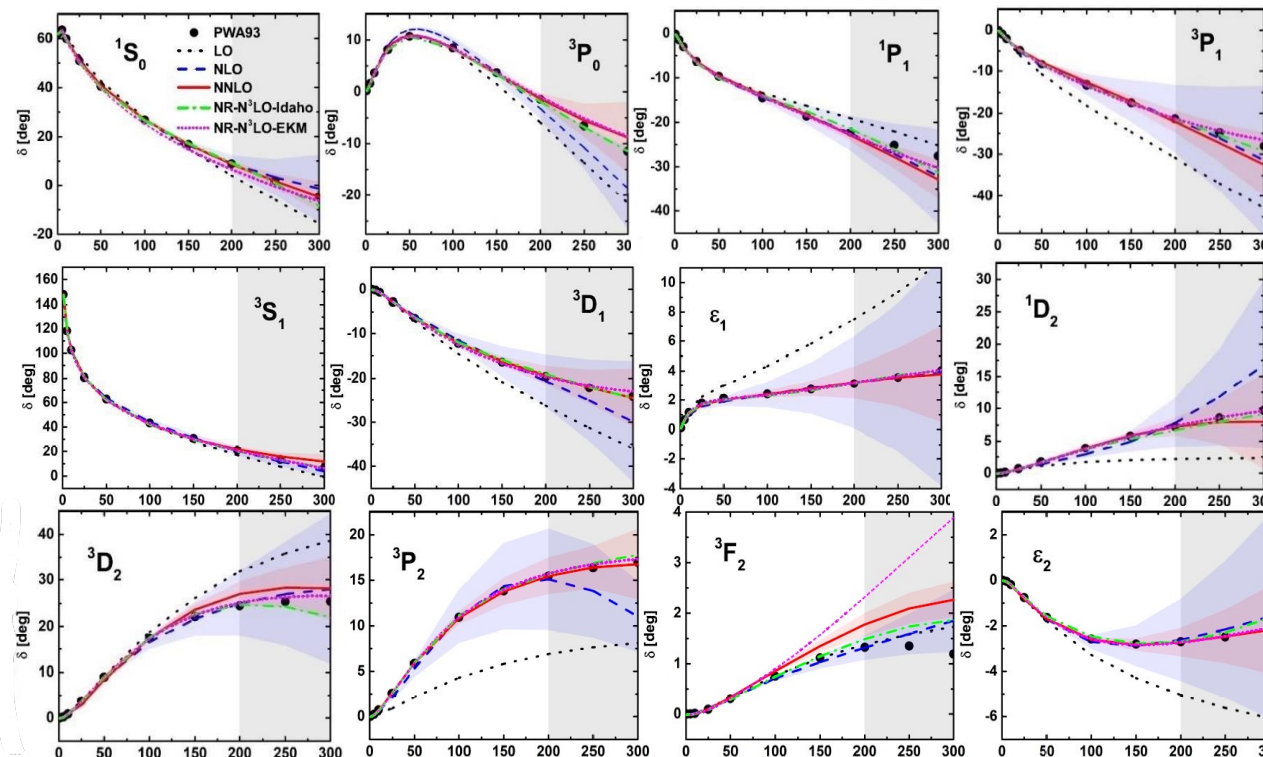
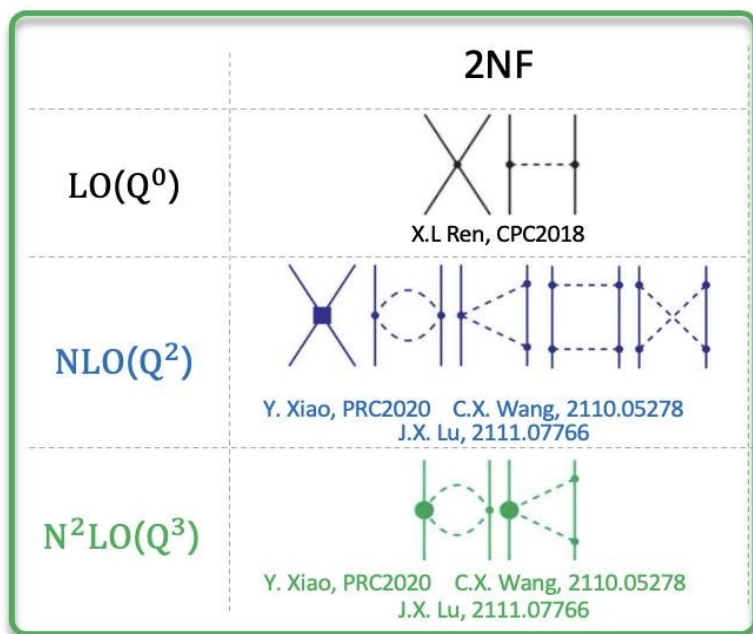
One has to write **the most general Lagrangian** consistent with **the assumed symmetry principles**, particularly the **(broken) chiral symmetry of QCD**.

➤ 手征对称性及其自发破缺 —— Goldstone玻色子

➤ 有效场论 —— 低能区相互作用不依赖于高能区相互作用的细节 $\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{\chi EFT} = \sum c_i O_i$



Steven Weinberg
(Nobel Prize 1979)



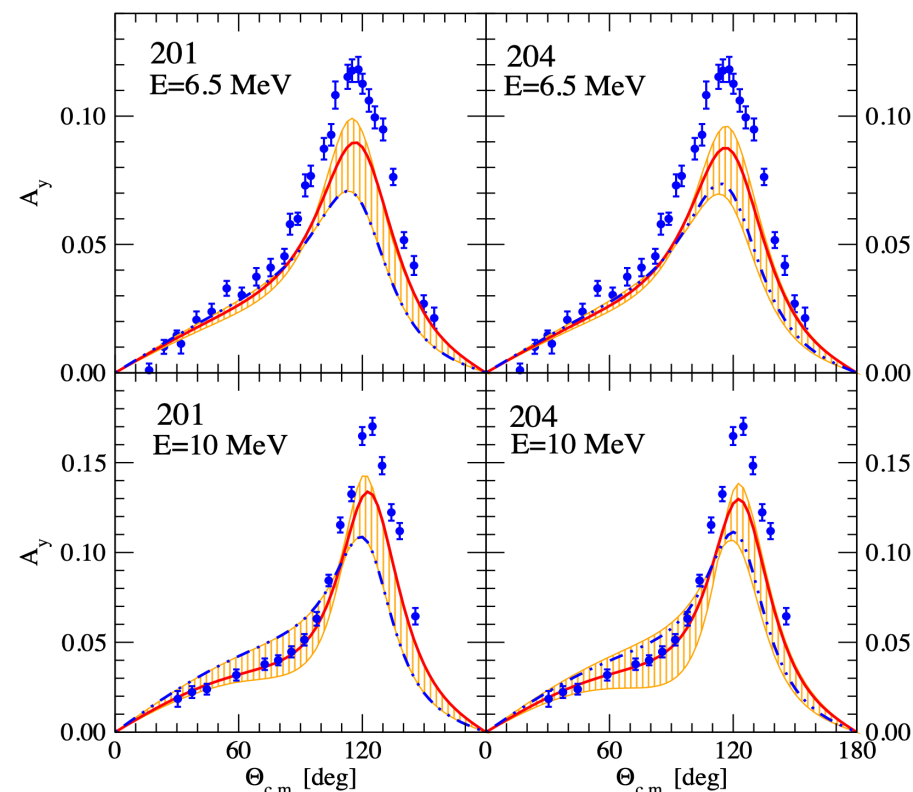
Jun-Xu Lu et al, *Phys.Rev.Lett.* 128 (2022) 14, 142002

三体系统长期存在的疑难问题

- 在非相对论框架下，加入三体力才能准确描述氦核的结合能与核物质的饱和性质；
- 在有效场论中，当高动量自由度被积分掉时，自然出现三体力。

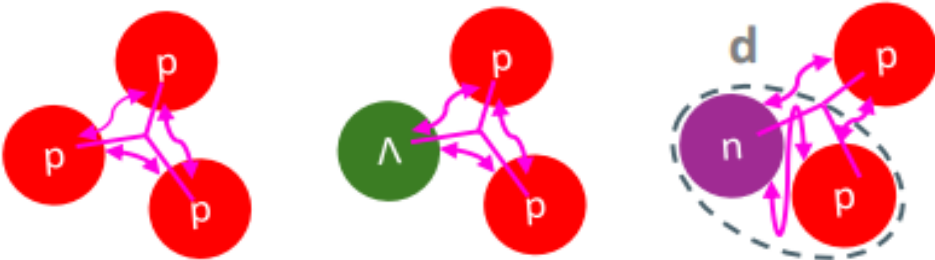
	NN	3N
LO $\mathcal{O}(Q/\Lambda)^0$	1990/2018 PLB,251:288. NPB,363: 3. CPC, 42: 014103. 2/5(4)	
NLO $\mathcal{O}(Q/\Lambda)^2$	1992/2022 PRL,72:1982. PRL,128:142002 7/13	1992-1994 PLB,295:114. PRC,49:2932.
N ² LO $\mathcal{O}(Q/\Lambda)^3$	1992/2022 PRL,72:1982. PRL,128:142002 0	1994-2002 PRC,49:2932. PRC,66:064001. 2/?
N ³ LO $\mathcal{O}(Q/\Lambda)^4$	2003-2005 PRC,68: 041001. NPA,747: 362. 12/23	2008-2011 PRC,77:064004. PRC,84:054001. 0
N ⁴ LO $\mathcal{O}(Q/\Lambda)^5$	2015-2017 PRL,115(12): 122301. PRC,96(2): 024004. 0	2011- PRC,84:014001. PRC,85:054006. ?

- 考虑最低阶三体力 —— 不能解决 nd 弹性散射中的 A_y 疑难；
- 更高阶三体力 —— 数值计算困难 & 随手征阶的展开收敛慢。

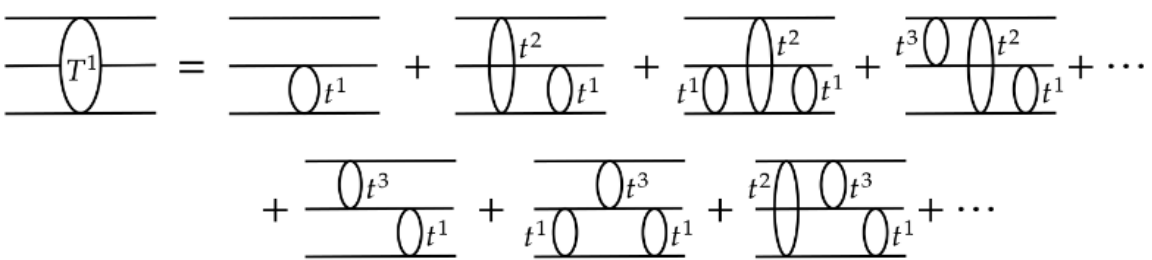


Red: NR N³LO chiral NN potential
 Blue: NR N³LO chiral NN + full 3N potential
 J. Golak et al., *Eur.Phys.J.A* 50 (2014) 177
 L. Girlanda et al., *Phys.Rev.C* 99 (2019) 5, 054003

协变三体相互作用



协变三体散射方程



$$t_i = v_i + v_i G_0 t_i$$

$$\langle \vec{p}_i \vec{q}_i | t_i(E) | \vec{p}_i' \vec{q}_i' \rangle = \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_i') \langle \vec{p}_i | t_i(E - q_i^2 / 2\tilde{\mu}_i) | \vec{p}_i' \rangle$$

$$\begin{pmatrix} T^{(i)} \\ T^{(j)} \\ T^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \\ t_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_i & t_i \\ t_j & 0 & t_j \\ t_k & t_k & 0 \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} T^{(i)} \\ T^{(j)} \\ T^{(k)} \end{pmatrix}$$

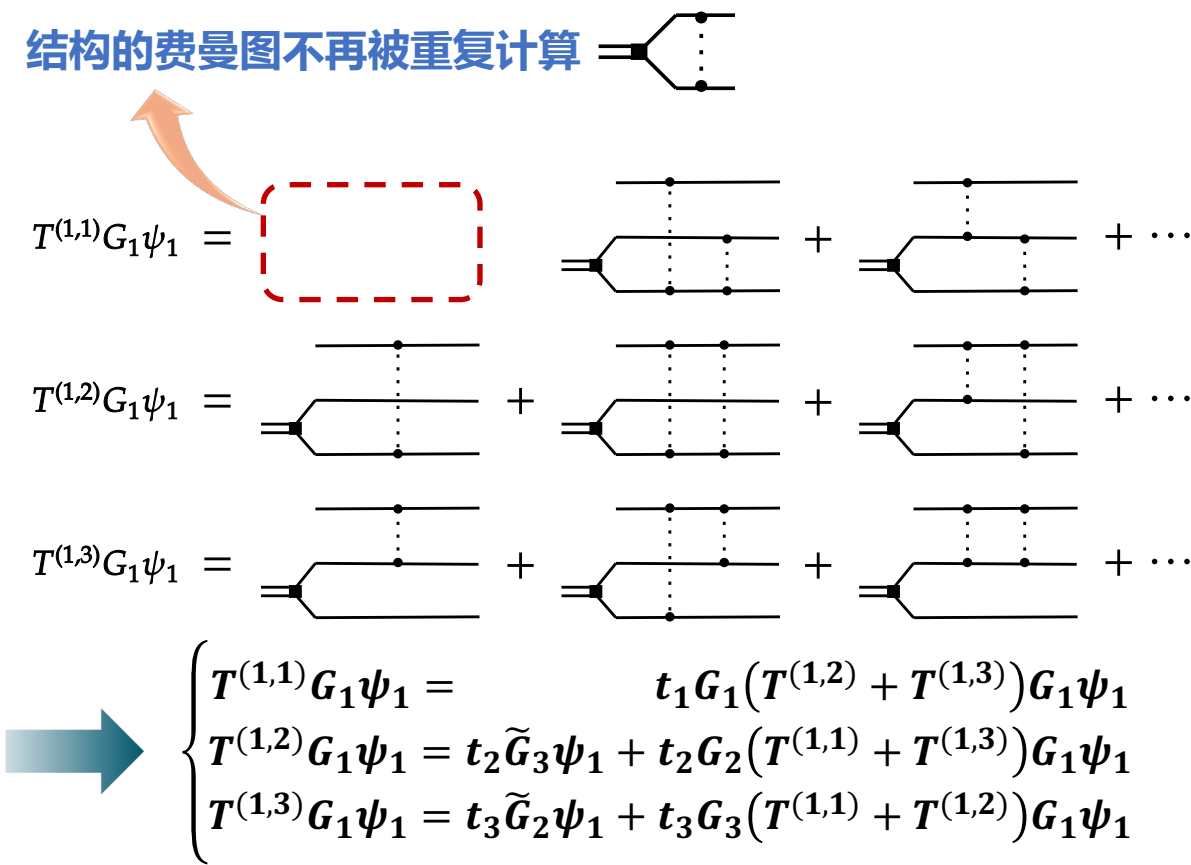
L.D. Faddeev, *Sov.Phys.JETP* 14 (1962) 1315-1316



L.D. Faddeev
23 Mar. 1934 – 26 Feb. 2017

➤ 考虑 nd 散射中的破裂过程

协变氘核波函数满足的本征方程 $\psi = vG\psi$, 因此包含这种结构的费曼图不再被重复计算



对于 (123) 的所有置换, 我们能够得到相似的方程

W. Gloeckle et al., *Phys.Rept.* 274 (1996) 107-285

➤ 将质子和中子视为同位旋 1/2 的全同粒子

- 不同下标的算符由置换算符相关联;
- 对波函数进行反对称化。

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \phi_1 = \begin{pmatrix} t_1(P_{123} + P_{132}) \\ t_2(P_{132} + \mathbb{I}) \\ t_3(\mathbb{I} + P_{123}) \end{pmatrix} \frac{E_p}{m} (2\pi)^3 \phi_1 + \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} G_i \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \phi_1$$

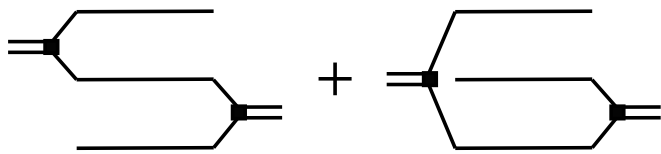
其中 $T_i\phi_1 \equiv \sum_k T^{(k,i)} \phi_k$, $\phi_i \equiv G_i\psi_i$.

$$\begin{cases} t_2 = P_{123}t_1P_{123}^{-1} \\ t_3 = P_{132}t_1P_{132}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \text{三个方程并不独立}$$

$$T\phi = tP \frac{E_p}{m} (2\pi)^3 \phi + tPGT\phi$$

- $\frac{E_p}{m}$: 相对论运动学修正;
- $(2\pi)^3$: 费曼规则约定;
- $P \equiv P_{123} + P_{132}$: 置换算符 (不同雅可比道间的overlap) ;
- $\phi = Gv\phi \Rightarrow$ 与非相对论波函数本征方程具有相同形式

- 对于弹性散射过程
 - 末态为 ϕ ;
 - 加入核子交换项



$$\phi^\dagger U \phi = \phi^\dagger P v \frac{E_q}{m} (2\pi)^3 \phi + \phi^\dagger P t G U \phi$$

其中 $G = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{E_p^2} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{s}-E_q)^2 - q^2 - 2E_p + i\epsilon}}$

➤ 类比两体散射方程

Lippmann-Schwinger equation (LSE)

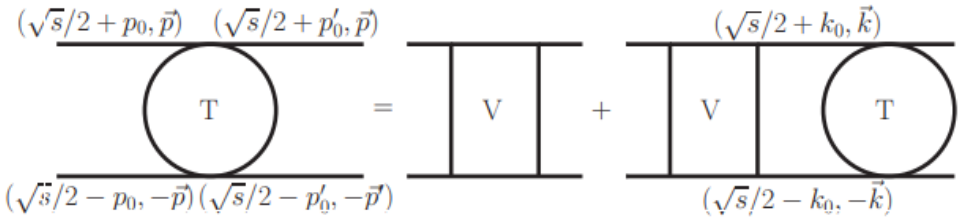
$$T = V + V G_0 T$$

$G_0 = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}$: 非相对论形式传播子

Bethe-Salpeter equation (BSE)

$$T = \mathcal{V} + \mathcal{V} g T$$

$\mathcal{V}$: 所有不可约连通费曼图
 g : 相对论形式核子传播子



R.M. Woloshyn et al., *Nucl.Phys.B* 64 (1973) 269-288

$$\langle pq\alpha|T|\phi\rangle = \langle pq\alpha|tP|\phi\rangle + \sum_{\alpha'}\sum_{\alpha''}\int_0^\infty dq' q'^2 \int_{-1}^{+1} dx \frac{\tilde{t}_{\alpha\alpha'}(p,\pi_1,E-(3/4m)q^2)}{\pi_1'''} \\ \times G_{\alpha'\alpha''}(qq'x) \frac{1}{E+i\epsilon-q^2/m-q'^2/m-qq'x/m} \frac{\langle \pi_2 q' \alpha''|T|\phi\rangle}{\pi_2'''}$$

置换算符导致的复杂插值

移动奇点

➡ 波包连续态离散化方法 (WPCD): 将连续的平面波基粗粒化为平方可积的有限维基底, 从而将极点平滑化

➤ 切比雪夫 (Chebyshev) 格点

$$p_n = p_s \tan\left(\frac{n}{N+N_{\text{add}}+1}\frac{\pi}{2}\right), n = 0, 1, 2, \cdots, N,$$

$$p_s = \frac{p_{\text{cut}}}{\tan\left(\frac{N}{N+N_{\text{add}}+1}\frac{\pi}{2}\right)},$$

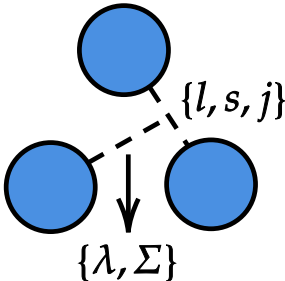
参数选取: $p_{\text{cut}} = 4.0 \text{ GeV}, N_{\text{add}} = 2, N = 150.$

➤ 构造波包基

$$|p_i\rangle = \frac{1}{N_i} \int_{\mathcal{D}_i} p dp f(p) |p\rangle$$

N_i : 归一化因子, $\mathcal{D}_i = [p_{i-1}, p_i].$

实际计算中取能量波包, 即 $f(p) = \sqrt{\frac{p}{E_p}}.$



➤ 分波表象

$$|p_m q_i \gamma\rangle \equiv |p_m q_i (ls) j (js_1) \Sigma(\lambda \Sigma) JM(tt_1) T \tau_T\rangle$$

- 两体核力分波 $j \leq 2;$
- 三体总角动量分波 $J \leq \frac{17}{2};$
 $J = \frac{1}{2}: 18\text{个道};$
 $J = \frac{3}{2}: 30\text{个道};$
 $J \geq \frac{5}{2}: 34\text{个道};$
- 固定 $T = \frac{1}{2}, \tau_T = -\frac{1}{2}.$

➤ 氦核极点

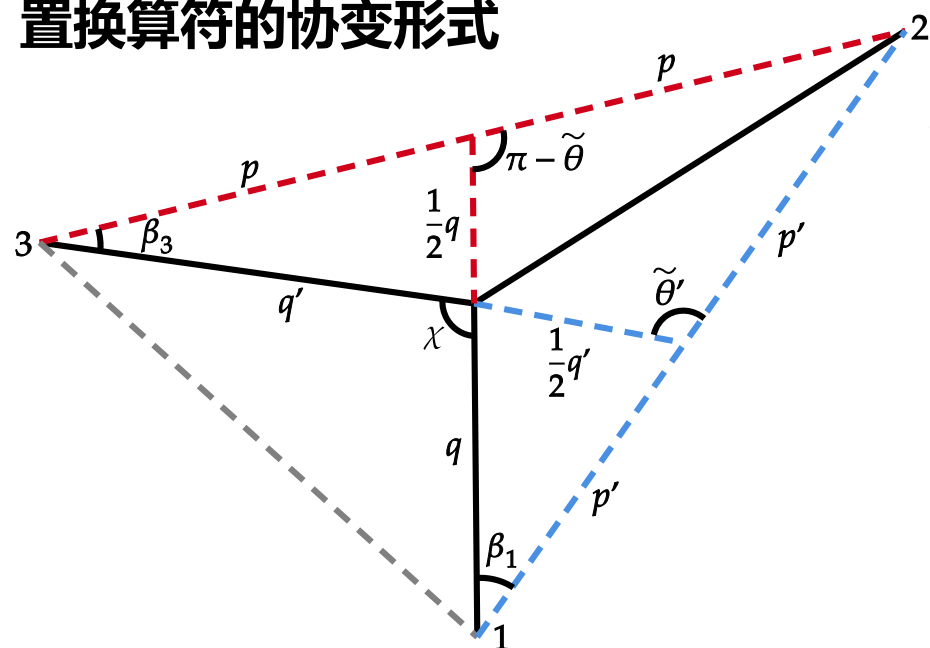
$$\langle p_m q_i \gamma | t | p_n q_j \gamma' \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int p dp p' dp' dE_q \sqrt{\frac{pp'}{E_p E_{p'}}} \frac{\tilde{t}(p, p'; \sqrt{s_2})}{\sqrt{s_2} - m_d + i\epsilon}$$

其中 $\sqrt{s_2} = \sqrt{s + m^2 - 2\sqrt{s}E_q}$. 选取复平面积分路径绕过极点 (SMC)

$$\Gamma_{SMC}(E_q) = E_q + iV_0 \left(1 - e^{\frac{E_{q_{i-1}} - E_q}{w}}\right) \left(1 - e^{\frac{E_q - E_{q_i}}{w}}\right)$$

Yu-Chuan Feng et al. *Phys.Rev.D* 110 (2024) 094002

➤ 置换算符的协变形式



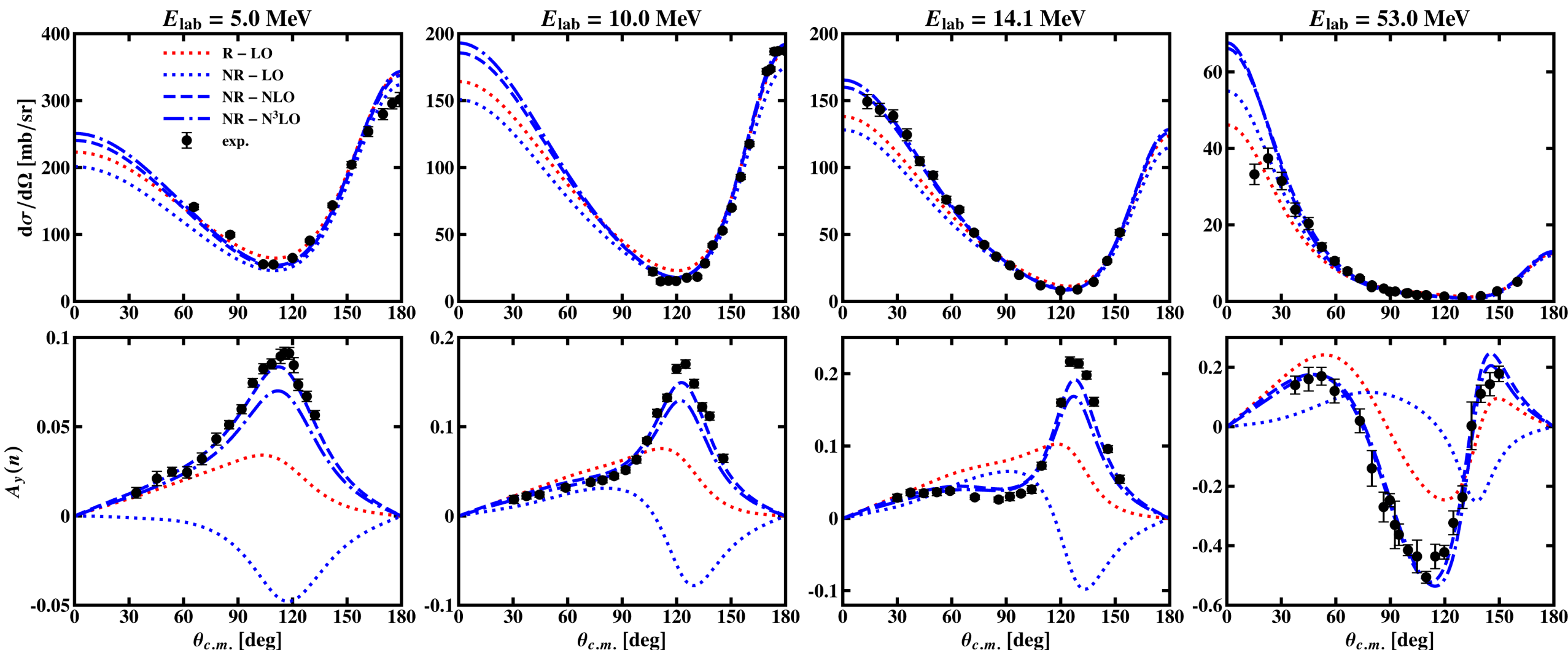
三核子质心系中动量构型示意

$$\begin{aligned} & \langle p_m q_i \gamma | P_{13} P_{23} | p_n q_j \gamma' \rangle \\ &= N(m, i, n, j) \sum_{hh'} \int_{p_{m-1}}^{p_m} p dp \int_{p_{n-1}}^{p_n} p' dp' \int_{q_{i-1}}^{q_i} q dq \int_{q_{j-1}}^{q_j} q' dq' \int_0^\pi d\chi \sin \chi \sqrt{\frac{pp'qq'}{E_p E_{p'} E_q E_{q'}}} C_{\gamma\gamma'}^{hh'} \mathcal{U}_{123} \\ & d_{m-\lambda_1, m'-\lambda'_3}^J(\chi) d_{m, \lambda_2-\lambda_3}^j(\tilde{\theta}_0) d_{m', \lambda'_1-\lambda'_2}^{j'}(\tilde{\theta}'_0) \frac{\sqrt{E_3^2 + p^2 - q'^2}}{p^2 E_3} \frac{\sqrt{E_1'^2 + p'^2 - q^2}}{p'^2 E_1'} \delta(p - \pi_1) \delta(p' - \pi_2) \\ & C_{\gamma\gamma'}^{hh'} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^t}{2J+1} \begin{Bmatrix} t_1 & t_2 & t' \\ t_3 & T & t \end{Bmatrix} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)(2\lambda+1)(2\lambda'+1)(2t+1)(2t'+1)} \\ & \langle \lambda_0 \Sigma m - \lambda_1 | J m - \lambda_1 \rangle \langle j m s_1 - \lambda_1 | \Sigma m - \lambda_1 \rangle \langle l_0 s \lambda_2 - \lambda_3 | j \lambda_2 - \lambda_3 \rangle \langle s_2 \lambda_2 s_3 - \lambda_3 | s \lambda_2 - \lambda_3 \rangle \\ & \langle \lambda'_0 \Sigma' m' - \lambda'_3 | J m' - \lambda'_3 \rangle \langle j' m' s_3 - \lambda'_3 | \Sigma' m' - \lambda'_3 \rangle \langle l'_0 s' \lambda'_1 - \lambda'_2 | j' \lambda'_1 - \lambda'_2 \rangle \langle s_1 \lambda'_1 s_2 - \lambda'_2 | s' \lambda'_1 - \lambda'_2 \rangle \end{aligned}$$

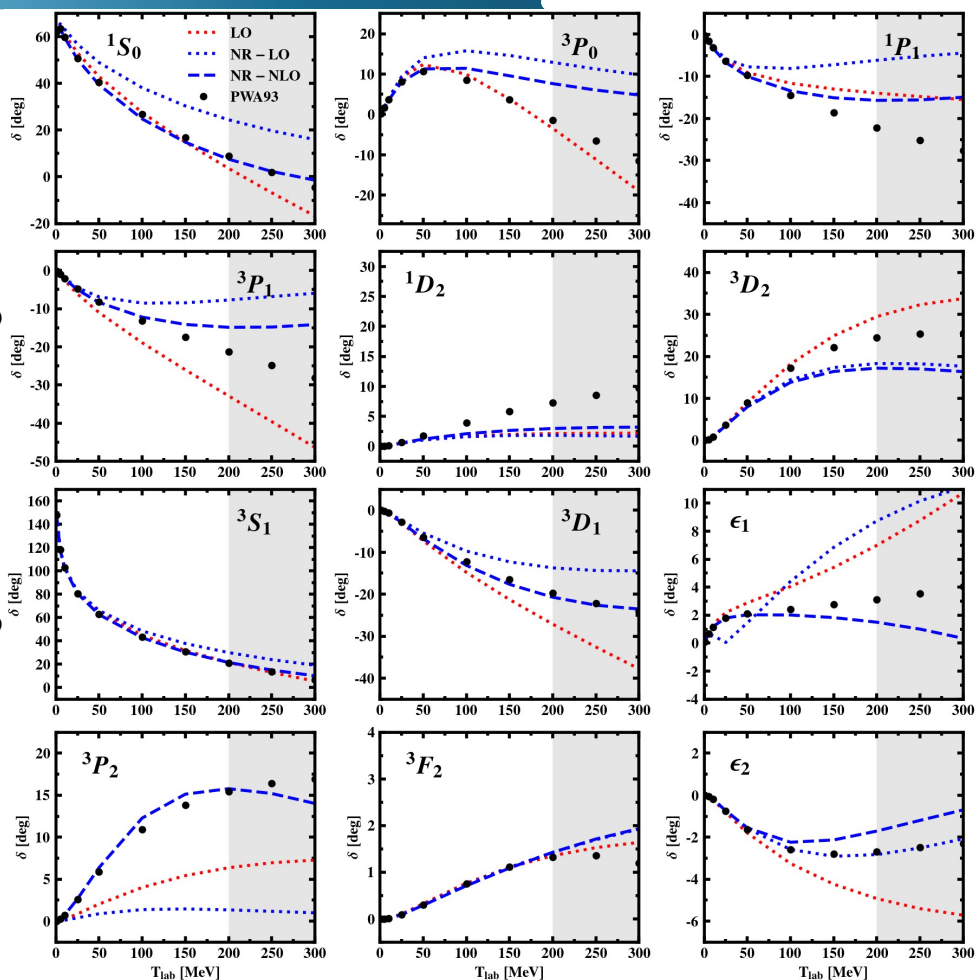
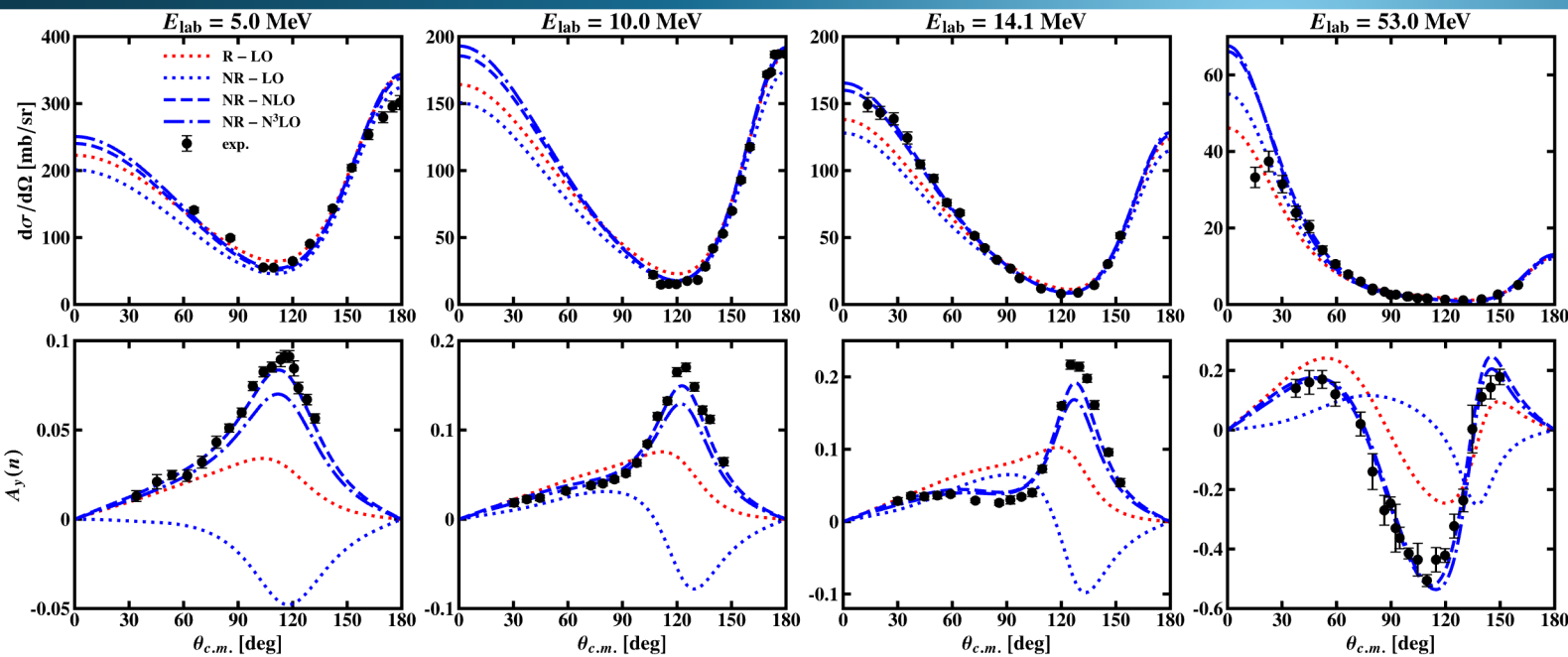
A. Stadler et al., *Phys.Rev.C* 56 (1997) 2396

G.C. Wick, *Annals Phys.* 18 (1962) 65-80

A. McKerrell, *Il Nuovo Cimento* 34 (1964) 1289-1305



- 利用 Faddeev-AGS 方程及不同阶的 EKM 手征核力计算了三体观测量 (微分截面、 A_y)
- 协变手征核力领头阶 v.s. 非相对论领头阶



- $\tilde{\chi}^2/\text{d. o. f. (R-LO)} \sim \tilde{\chi}^2/\text{d. o. f. (NR-NLO)}$ —— 对观测量描述差距较大
- 可能对某些分波更敏感 ($^3S_1 - ^3D_1, ^3P_2$)

$\tilde{\chi}^2 = \sum_i (\delta^i - \delta_{\text{PWA93}}^i)^2$ of different chiral forces ($E_{\text{lab}} \leq 200 \text{ MeV}, j \leq 2$).
For LO and NR-LO, the fit was performed up to $E_{\text{lab}} \leq 100 \text{ MeV}$ and $j \leq 1$.

	Total	$\tilde{\chi}^2/\text{d. o. f.}$	1S_0	3P_0	1P_1	3P_1	3S_1	3D_1	ϵ_1	1D_2	3D_2	3P_2	3F_2	ϵ_2
LO	841.49	9.15	47.36	10.41	108.51	248.87	8.59	85.65	25.41	46.42	33.02	219.72	0.002	7.52
NR-LO	2666.9	28.37	674.01	391.53	434.08	288.28	166.02	60.55	56.10	51.46	70.52	474.30	0.01	0.03
NR-NLO	392.13	4.51	11.64	126.26	56.50	53.03	0.67	3.41	3.69	32.04	99.57	3.76	0.01	1.55

- ✓ 构建了协变三体散射方程，并验证了其在非相对论极限下与著名的 Faddeev-AGS 方程具有相同的形式；
- ✓ 领头阶协变手征核力可以更好的描述 nd 弹性散射过程的实验数据；
- 更高阶协变手征核力的 nd 散射计算 —— 不显式依赖质心能量的核力拟合；
- 研究三体观测量对不同分波依赖的敏感性；
- 对 nd 散射破裂过程的计算以及 pd 散射过程的计算。

参考文献

- [1] J. Golak et al., *Eur.Phys.J.A* 50 (2014) 177
- [2] Jun-Xu Lu et al., *Phys.Rev.Lett.* 128 (2022) 14, 142002
- [3] W. Gloeckle et al., *Phys.Rept.* 274 (1996) 107-285
- [4] J. Carbonell et al., *Nucl.Phys.A* 581 (1995) 625-653
- [5] O.A. Rubtsova et al., *Annals Phys.* 360 (2015) 613-654
- [6] Yu-Chuan Feng et al. *Phys.Rev.D* 110 (2024) 094002
- [7] A. Stadler et al., *Phys.Rev.C* 56 (1997) 2396
- [8] G.C. Wick, *Annals Phys.* 18 (1962) 65-80
- [9] A. McKerrell, *Il Nuovo Cimento* 34 (1964) 1289-1305
- [10] Sean B.S. Miller et al., *Phys.Rev.C* 106 (2022) 2, 024001
- [11] P.R. Graves-Morris et al., *J. Comput. Appl. Math.* 122 (2000) 1, 51-80

敬 请 各 位 老 师 批 评 指 正 ！

