



華中師範大學
CENTRAL CHINA NORMAL UNIVERSITY

Higher-order Lattice-perturbative Matching Problems in QCD under Gradient Flow Scheme

王翔鵬

华中师范大学

"粲强子衰变和标准模型的精确检验"2025夏季研讨会

2025年8月12-2025年8月16日

报告时间：2025年8月14日

目录

- 格点-微扰匹配问题：简介、困难及挑战
- Gradient Flow: 简介、优势
- 两个近期 Gradient Flow 方案下微扰计算与格点-微扰匹配的工作介绍：
 - A. QCD Static Force in Gradient Flow
 - B. Off-lightcone Wilson-line Operators in Gradient Flow
- 总结与展望

格点-微扰匹配

BESIII 实验应用

在粲强子衰变和标准模型的精确检验中，往往需要对QCD非微扰物理量进行精确计算。

QCD非微扰物理量计算方法



格点-微扰匹配的必要性

许多物理量，比如夸克质量，部分子分布函数(Quasi-PDF)等等，都是重整化方案依赖的，需要将格点计算结果转换成微扰QCD常用的 \overline{MS} 方案下的结果，确保理论预言的一致性。

格点-微扰匹配计算过程



步骤3: 建立匹配系数
通过比较两种微扰计算结果，得到连接两种方案的匹配系数

$$\langle O \rangle^{\text{Latt}}(a) = C(\mu, a) \langle O \rangle^{\overline{MS}}(\mu)$$

格点计算与格点-微扰匹配问题的难点与挑战

目前格点模拟中的难点与挑战

信噪比问题

信号衰减

在格点QCD计算中，随着欧几里得时间的增加，信号呈指数衰减，而噪声衰减较慢，导致信噪比急剧下降。

统计涨落

蒙特卡洛采样中的统计涨落会随着物理量的复杂度增加而显著增大，特别是在计算重子与胶子系统，多点关联函数和高维算符矩阵元时。

精度与计算资源平衡

提高信噪比需要增加统计采样数量，这直接导致计算资源需求的大幅增加。

其他技术挑战

费米子信号问题 (Fermion Sign Problem)

连续极限与有限格距误差 (Continuum Limit & Discretization Errors)

夸克质量外推, 激发态与共振态, 拓扑冻结 (Topological Freezing) ...

格点微扰-匹配计算的难点与挑战

1. 离散化误差与连续极限的恢复

格点方法将连续时空离散化，引入有限的格点间距 a ，带来不可避免的截断误差。这些误差在微扰展开中会影响结果的准确性。

2. 重整化匹配与耦合常数选择困难

在格点微扰中，为将结果与连续微扰理论（如 \overline{MS} 方案）衔接，必须进行重整化匹配。这一过程常常涉及方案转换和耦合常数尺度设定，若选用了不恰当的 bare coupling 会导致低阶展开失效或收敛性差。

3. 高阶圈图与积分计算复杂度

格点微扰需要对高阶圈图进行展开和积分，但离散结构导致积分公式复杂，依赖计算机代数工具和精确数值技巧来处理高精度积分。

4. 多体系统与符号问题 (sign problem)

虽然这是更广泛存在于多体系统与非微扰蒙特卡洛计算中的问题，但在某些含费米子或非零化学势的格点微扰场景中，也会带来震荡积分和数值稳定性挑战。

Gradient Flow 的定义

M. Luescher, JHEP 08 (2010) 071

流方程:

Gradient Flow 是一种通过微分方程平滑场构型的方法, 引入额外的“流时” (t, mass dimension -2) 维度, 使场沿着作用量梯度方向演化。 $\chi_\alpha^i(t, x)$ 和 $B_\mu^a(t, x)$ 为 flowed 规范场和费米场, 满足以下微分方程和边界条件

$$\begin{aligned}\partial_t B_\mu^a &= \mathcal{D}_\nu^{ab} G_{\nu\mu}^b + \kappa \mathcal{D}_\mu^{ab} \partial_\nu B_\nu^b, \\ \partial_t \chi &= \Delta \chi - \kappa \partial_\mu B_\mu^a T^a \chi, \\ \partial_t \bar{\chi} &= \bar{\chi} \overleftarrow{\Delta} + \kappa \bar{\chi} \partial_\mu B_\mu^a T^a,\end{aligned}$$

$$B_\mu^a(t=0, x) = A_\mu^a(x), \quad \chi_\alpha^i(t=0, x) = \psi_\alpha^i(x)$$

D+1维 QCD:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B &= -2 \int_0^\infty dt \text{Tr} \left[L_\mu^a T^a \left(\partial_t B_\mu^b T^b - \mathcal{D}_\nu^{bc} G_{\nu\mu}^c T^b - \kappa \mathcal{D}_\mu^{bc} \partial_\nu B_\nu^c T^b \right) \right], \\ \mathcal{L}_\chi &= \sum_{f=1}^{n_F} \int_0^\infty dt \left(\bar{\lambda}_f \left(\partial_t - \Delta + \kappa \left(\partial_\mu B_\mu^a \right) T^a \right) \chi_f \right. \\ &\quad \left. + \bar{\chi}_f \left(\overleftarrow{\partial}_t - \overleftarrow{\Delta} - \kappa \left(\partial_\mu B_\mu^a \right) T^a \right) \lambda_f \right),\end{aligned}$$

The $(D+1)$ -dimensional field-strength tensor is defined as

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + f^{abc} B_\mu^b B_\nu^c,$$

the covariant derivative in the adjoint representation is given by

$$\mathcal{D}_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - f^{abc} B_\mu^c,$$

and

$$\Delta = \mathcal{D}_\mu^F \mathcal{D}_\mu^F, \quad \overleftarrow{\Delta} = \overleftarrow{\mathcal{D}}_\mu^F \overleftarrow{\mathcal{D}}_\mu^F,$$

with the covariant derivative in the fundamental representation,

$$\mathcal{D}_\mu^F = \partial_\mu + B_\mu^a T^a, \quad \overleftarrow{\mathcal{D}}_\mu^F = \overleftarrow{\partial}_\mu - B_\mu^a T^a.$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}} + \mathcal{L}_{\text{gauge-fixing}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}} + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_\chi.$$

+ 在格点模拟中的优点

提升信噪比的优点

|| 信号增强

Gradient Flow 通过平滑场构型，有效抑制短距离涨落，显著提高信号强度，改善信噪比。

▼ 噪声抑制

流方程作为低通滤波器，能够有效过滤高频噪声，同时保留物理信息，大幅提高测量精度。

≡ 统计效率提升

相同计算资源下，Gradient flow 方法能够获得更高统计精度，降低蒙特卡洛模拟的计算成本

其他技术优势

拓扑荷测量

提供更稳定的拓扑荷定义与测量

手征对称性

改善手征费米子的数值处理

算符重整化

简化复合算符的重整化过程

计算稳定性

提高数值计算的稳定性和可靠性

+ 格点-微扰匹配方面的优势

简化格点-微扰匹配计算

▣ 微扰计算简化，微扰展开收敛性更好

洛伦兹与规范对称性得到保证，在微扰计算中可以与维数正规化同时使用，相对于格点正规化，计算得到了极大的简化，使得高阶计算更加可行。同时，与格点方案相比，Gradient flow 方案下的匹配系数通常收敛性更好。

⌘ 数值-解析的无缝衔接

Gradient flow 下，格点数值计算结果与连续微扰理论结果可以在相同的流时间 t 下直接比较。Gradient flow 只压低紫外行为，不改变红外行为。

重整化的优势

↻ 简化算符混合问题

在许多情况下，Gradient flow 可以降低或消除算符间的紫外混合，使得每个算符的匹配因子可以独立计算，而无需处理复杂的混合矩阵。

⌘ 消除或简化重整化因子的计算

在适当流时间 t 下，经过 Gradient flow 处理的场与算符会变得有限且不需要额外的紫外重整化（至少在纯规范理论及部分费米子算符中成立）。

- 近年来，Gradient flow 研究领域取得了显著的进展，催生出了以 Gradient flow 为主题的国际系列研讨会：



ECT*
EUROPEAN CENTRE
FOR THEORETICAL STUDIES
IN NUCLEAR PHYSICS AND RELATED AREAS

The Gradient Flow in QCD and other Strongly Coupled Field Theories

Mar 20 – 24, 2023
ECT*
Europe/Rome timezone

Overview

Timetable

Registration

Contribution List

Speaker List

Participant List

Videoconference

Privacy Information

Contact | Michela

✉ staff@ectstar.eu

✉ chiste@ectstar.eu

Abstract

The gradient flow field transformation is a continuous smoothing transformation that removes ultraviolet fluctuations. It can serve as a tool to renormalize quantum field theories, allowing numerical studies of strongly coupled systems. The flow has been used extensively in lattice gauge theory calculations, both in QCD and in beyond the standard model settings for applications including scale setting, the determination of the running coupling constant and the corresponding renormalization group beta function, and the topological structure of the vacuum. Many of the newly emerging applications of the gradient flow depend on the perturbative connection of the gradient flow and continuum renormalization schemes, requiring difficult perturbative calculations that match the non-perturbative lattice methods. This workshop will bring together experts in lattice and perturbative QCD to discuss recent progress in the application of the gradient flow, develop common ideas, identify needs and possibilities for the gradient flow and to spark collaborative efforts.

Main Topics

- Perturbative approach
- Non-perturbative renormalization
- Electric dipole moments
- Flavor physics
- Conformal systems
- BSM physics



Zürich Gradient Flow Workshop 2025

Feb 12 – 14, 2025
University of Zürich
Europe/Zurich timezone

Overview

Timetable

Participant List

Registration

Call for Abstracts

Accommodation

Travel and Venue

Financial Support

Code of Conduct

Contact

✉ [oscar.laracosas@physi...](mailto:oscar.laracosas@physik.uzh.ch)

✉ harrist@phys.ethz.ch

✉ [fabian.lange@physik.uz...](mailto:fabian.lange@physik.uzh.ch)

✉ stoffer@physik.uzh.ch

The **Zürich Gradient Flow Workshop 2025** will take place from Feb. 12 - 14, 2025, at the University of Zürich, Switzerland, with the goal to bring together scientists working actively on non-perturbative and perturbative aspects of the gradient flow.

The gradient flow has been instrumental in a large variety of recent developments in non-perturbative QCD and it plays a crucial role in reaching a better understanding of strong dynamics and to provide input in precision phenomenology studies, searching for physics beyond the Standard Model.

A workshop with a similar theme was last held at the ECT* Center in Trento, Italy, in March 2023: <https://indico.ectstar.eu/event/164/overview>.



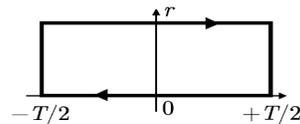
N. Brambilla, H. S. Chung, A. Vairo and [X.-P. Wang](#), JHEP 01(2022) 184

- The QCD static force can be defined by the spatial derivative of the static potential $V(r)$

$$F(r) \equiv \frac{\partial}{\partial r} V(r) = -i \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\int_{-T/2}^{+T/2} dx_0 \langle W_{r \times T} \hat{\mathbf{r}} \cdot g_s \mathbf{E}(x_0, \mathbf{r}) \rangle}{\langle W_{r \times T} \rangle}.$$

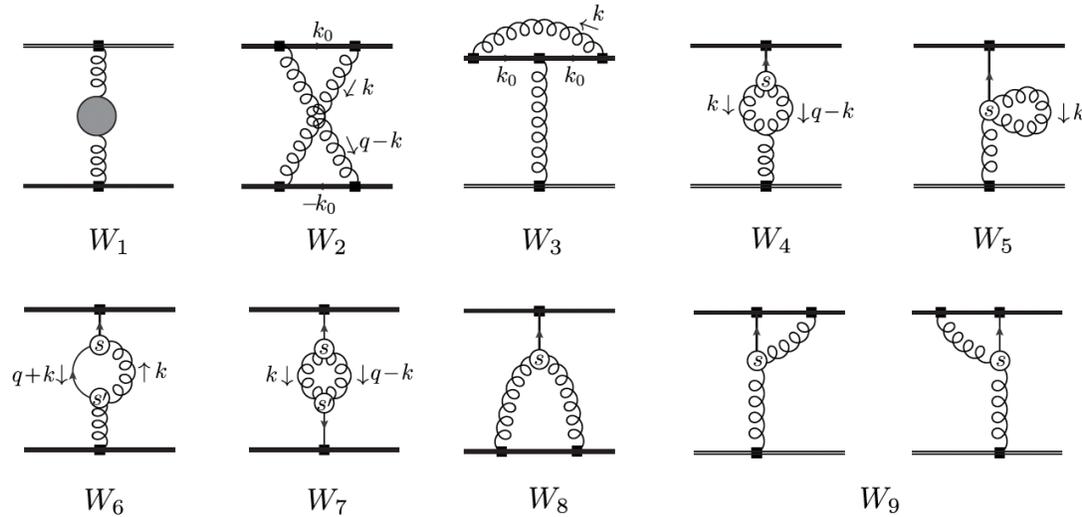
Wilson loop:

$$W_{r \times T} = \text{tr}_{\text{color}} P \exp \left[ig_s \oint_C dz^\mu A_\mu(z) \right].$$



- QCD static force 的精确计算可用于精确提取 α_s
- 相对 static potential, static force 在格点计算中不存在正比于 $1/a$ 的线性发散, 但是上述定义的static force在格点上的计算存在较大的离散误差, 连续极限收敛较慢。 [N. Brambilla et al. PRD 105 \(2022\) 5, 054514](#)
- 在格点计算中使用 Gradient flow 或许能很好地改善这一问题。
- Motivation: 对 QCD static force 在 gradient flow 方案下的微扰计算能为该方案下的计算提供一定的参考和输入。

- Feynman diagrams



$W_1 - W_6$ are divergent, $W_7 - W_9$ are finite.

- 我们将单圈结果分解成以下形式，方括号中的三项分别对应LO，NLO对数项，NLO有限项的贡献

$$F(r; t) = \frac{\alpha_s(\mu) C_F}{r^2} \left[\left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} a_1 \right) \mathcal{F}_0(r; t) + \frac{\alpha_s}{4\pi} \beta_0 \mathcal{F}_{\text{NLO}}^L(r; t; \mu) + \frac{\alpha_s C_A}{4\pi} \mathcal{F}_{\text{NLO}}^F(r; t) \right],$$

- 其中的NLO有限项积分很复杂，我们提供了参数积分表达式，以供数值求解。

对 Flow Time 的线性依赖关系

- 利用 sector decomposition 的方法, 我们提取了单圈结果对 flow time t 的线性依赖关系

$$r^2 F(r; t) \approx r^2 F(r; t = 0) + \frac{\alpha_s^2 C_F}{4\pi} [-12\beta_0 - 6C_A c_L] \frac{t}{r^2},$$

- 其中 $c_L = -22/3$, $F(r; t = 0)$ 为 QCD static force 单圈计算结果
- 代入 $c_L = -22/3$, 我们得到 $[-12\beta_0 - 6C_A c_L] = 8n_f$
- 这意味着, 在单圈水平, 纯 SU(3) 规范理论 ($n_f = 0$) 情况下, 线性项为 0.
- 我们的计算结果为在 gradient flow 方案下格点计算 QCD static force 外推到 $t \rightarrow 0$, 从而得到最终的物理结果, 提供了参考指引。
- 在文章 [N. Brambilla et al. PRD 109 \(2024\) 11, 11](#) 中, 我们的结果被用于辅助将格点计算结果精确外推到 $t \rightarrow 0$

N. Brambilla and [X.-P. Wang](#), JHEP 06 (2024) 210

- 在文章 [1]中 P-波重夸克偶素衰变 NRQCD 色八重态矩阵元在 pNRQCD 有效理论框架下被因子化为

$$\langle \chi_{QJ}(nP) | \mathcal{O}({}^3S_1^{[8]}) | \chi_{QJ}(nP) \rangle = \frac{2T_F}{9N_c m_Q^2} \frac{3N_c}{2\pi} |R'_{n1}(0)|^2 \mathcal{E}_3(\mu)$$

where

$$\mathcal{E}_3(\mu) = \frac{T_F}{N_c} \int_0^\infty dt t^3 \langle 0 | gE^i(t, \mathbf{0}) W(t, 0) gE^i(0, \mathbf{0}) | 0 \rangle,$$

- 胶子关联函数 $\langle 0 | gE^i(t, \mathbf{0}) W(t, 0) gE^i(0, \mathbf{0}) | 0 \rangle$ 可以通过格点 QCD 方法计算, 这使得使用格点方法计算 NRQCD 色八重态矩阵元成为了可能。
- 在文章 [2,3] 中 S-波重夸克偶素的色八重态产生矩阵元被进一步因子化为零点波函数的模仿与胶子关联函数的乘积, 大大减少了计算S-波重夸克偶素产生的非微扰参数 (12 \rightarrow 3)。
- 然而, 使用格点方法计算胶子关联函数, 通常信噪比不好, 我们期望使用 gradient flow 能有效改善这一问题。
- Motivation: 胶子关联函数通常是重整化方案依赖的, 我们需要将 gradient flow 方案下的格点计算结果转化为 \overline{MS} 方案下的结果。

[1] N. Brambilla, D. Eiras, A. Pineda, J. Soto and A. Vairo, PRL 88 (2002) 012003

[2, 3] N. Brambilla, H. S., Chung, A. Vairo and [X.-P. Wang](#), PRD 105 (2022) 11, L111503; JHEP 03 (2023) 242

- 我们发现，用于定义前述胶子关联函数的这类算符属于 off-lightcone Wilson-line operators 的一种，它们的重整化性质在八十年代就有了深入的研究 (see [H. Dorn, Fortsch. Phys. 34 \(1986\) 11](#) for a review)。
- 近年来在格点计算研究领域，这类算符被用来定义准部分子分布函数，又引起了极大的关注。
(see [X. Ji, Y.-S. Liu, Y. Liu, J.-H. Zhang and Y. Zhao, Rev. Mod. Phys. 93 \(2021\) 035005](#) for a review)
- 另外这类算符也出现在定义QCD静态势 (QCD static potential)及其相对论修正，重夸克传播系数，重夸克偶素的传播系数等算符定义中。
其中与自旋相关的相对论修正和重夸克传播系数对应色磁场算符插入 Wilson loop 的算符定义，也是重整化方案依赖的。

- 我们关注以下两类 off-lightcone Wilson-line operators (v 为 off-lightcone (非光锥) Wilson line 方向) :

$$\mathcal{O}_\Gamma(zv) = \bar{\psi}(zv)\Gamma W(zv,0)\psi(0),$$

其强子矩阵元可用于定义夸克准部分子分布函数 (space-like Wilson line);

$$\mathcal{O}^{\mu\nu\alpha\beta}(zv) = g^2 F^{\mu\nu}(zv)W(zv,0)F^{\alpha\beta}(0),$$

其强子矩阵元可用于定义胶子准部分子分部函数 (space-like); 其真空期望值可用于定义胶子关联函数。

- 基于 one-dimensional auxiliary-field formalism (Generalized HQET), 上述算符可以表示成

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\Gamma^B(zv) &= \int d^d x \delta\left(\frac{v \cdot x}{v^2} - z\right) \langle \bar{\psi}_0(x) h_{v,0}(x) \Gamma \bar{h}_{v,0}(0) \psi_0(0) \rangle_{h_v}, \\ \mathcal{O}^{\mu\nu\alpha\beta,B}(zv) &= \int d^d x \delta\left(\frac{v \cdot x}{v^2} - z\right) \langle g^2 F_0^{\mu\nu}(x) h_{v,0}(x) \bar{h}_{v,0}(0) F_0^{\alpha\beta}(0) \rangle_{h_v},\end{aligned}$$

$$\langle h_{v,0}(x) \bar{h}_{v,0}(0) \rangle_{h_v} = W\left(\frac{v \cdot x}{v^2}, 0\right) \theta\left(\frac{v \cdot x}{v^2}\right) \delta^{(d-1)}(x_\perp),$$

其中的 Wilson line 被重夸克传播子代替。

- 这样, off-lightcone Wilson-line operators 可以表示成在不同时空点的流算符的乘积。

- 将 $F^{\mu\nu}$ 分解成以下两个分量 ($v^2 = 1$), 由此我们可以得到两个重整化性质不同的算符:

$$\begin{aligned}
 g_{\parallel}^{\mu\nu} &= \frac{v_{\mu}v_{\nu}}{v^2}, \quad g_{\perp}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{v_{\mu}v_{\nu}}{v^2}, & F_{\parallel\perp}^{\mu\nu} &= g_{\parallel}^{\mu\alpha} g_{\perp}^{\nu\beta} F^{\alpha\beta}, & \mathcal{O}_{\parallel\perp}^{\mu\nu\alpha\beta}(zv) &= g^2 F_{\parallel\perp}^{\mu\nu}(zv) W(zv, 0) F_{\parallel\perp}^{\alpha\beta}(0), \quad (E - E) \\
 F_{\perp\perp}^{\mu\nu} &= g_{\perp}^{\mu\alpha} g_{\perp}^{\nu\beta} F^{\alpha\beta}. & \mathcal{O}_{\perp\perp}^{\mu\nu\alpha\beta}(zv) &= g^2 F_{\perp\perp}^{\mu\nu}(zv) W(zv, 0) F_{\perp\perp}^{\alpha\beta}(0). \quad (B - B)
 \end{aligned}$$

其中当 $v = (1,0,0,0)$ 时 (time-like), 以上 $F^{\mu\nu}$ 两个分量分别为色电场 E 和色磁场 B.

- 定义以下局域 heavy-light, heavy-gluon 流算符, 其重整化性质在 HQET 中已被熟知

$$\begin{aligned}
 J_q(x) &= \bar{\psi}(x) h_v(x), & J_q^B(x, \Lambda) &= Z_{J_q}(\Lambda, \mu) J_q^R(x, \mu), \\
 J_{\parallel\perp}^{\mu\nu}(x) &= g F_{\parallel\perp}^{\mu\nu}(x) h_v(x), & |J_{\parallel\perp}^{\mu\nu, B}(x, \Lambda) &= Z_{J, \parallel\perp}(\Lambda, \mu) J_{\parallel\perp}^{\mu\nu, R}(x, \mu), \\
 J_{\perp\perp}^{\mu\nu}(x) &= g F_{\perp\perp}^{\mu\nu}(x) h_v(x). & J_{\perp\perp}^{\mu\nu, B}(x, \Lambda) &= Z_{J, \perp\perp}(\Lambda, \mu) J_{\perp\perp}^{\mu\nu, R}(x, \mu),
 \end{aligned}$$

- 根据 off-lightcone Wilson-line operators 及以上流算符的重整化性质, 我们有以下关系 (注意角标是否带 J)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{\Gamma}^B(zv, \Lambda) &= Z_q(\Lambda, \mu) e^{\delta m(\Lambda)z} \mathcal{O}_{\Gamma}^R(zv, \mu), & Z_q(\Lambda, \mu) &= Z_{J_q}^2(\Lambda, \mu), \\
 \mathcal{O}_{\parallel\perp}^{\mu\nu\alpha\beta, B}(zv, \Lambda) &= Z_{\parallel\perp}(\Lambda, \mu) e^{\delta m(\Lambda)z} \mathcal{O}_{\parallel\perp}^{\mu\nu\alpha\beta, R}(zv, \mu), & Z_{\parallel\perp}(\Lambda, \mu) &= Z_{J, \parallel\perp}^2(\Lambda, \mu), \\
 \mathcal{O}_{\perp\perp}^{\mu\nu\alpha\beta, B}(zv, \Lambda) &= Z_{\perp\perp}(\Lambda, \mu) e^{\delta m(\Lambda)z} \mathcal{O}_{\perp\perp}^{\mu\nu\alpha\beta, R}(zv, \mu), & Z_{\perp\perp}(\Lambda, \mu) &= Z_{J, \perp\perp}^2(\Lambda, \mu).
 \end{aligned}$$

- off-lightcone Wilson-line operators 的重整化常数为对应流算符的乘积。 δm 为线性发散的 mass correction。

- 根据 small flow time expansion (实际格点计算中, 我们需要外推到 $t \rightarrow 0$), 我们有如下匹配关系

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\Gamma^R(zv, t) &= c_\psi(t, \mu) e^{\delta m z} \mathcal{O}_\Gamma^{\overline{\text{MS}}}(zv) + O(t), \\ \mathcal{O}_{\parallel\perp}^R(zv, t) &= c_{\parallel\perp}(t, \mu) e^{\delta m z} \mathcal{O}_{\parallel\perp}^{\overline{\text{MS}}}(zv) + O(t), \\ \mathcal{O}_{\perp\perp}^R(zv, t) &= c_{\perp\perp}(t, \mu) e^{\delta m z} \mathcal{O}_{\perp\perp}^{\overline{\text{MS}}}(zv) + O(t), \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}^R(t) = c_{\mathcal{O}}(t, \mu) \mathcal{O}^{\overline{\text{MS}}}(\mu) + O(t),$$

$$\begin{aligned} c_{\psi h_v}(t, \mu) &= \mathring{\zeta}_\psi(t, \mu) \zeta_{h_v}^F(t, \mu) \zeta_{\psi h_v}(t, \mu), \\ c_{\parallel\perp}(t, \mu) &= \zeta_A(t, \mu) \zeta_{h_v}^A(t, \mu) \zeta_{\parallel\perp}(t, \mu), \\ c_{\perp\perp}(t, \mu) &= \zeta_A(t, \mu) \zeta_{h_v}^A(t, \mu) \zeta_{\perp\perp}(t, \mu), \\ c_F(t, \mu) &= \zeta_A(t, \mu) (\zeta_{h_v}^F(t, \mu))^2 \zeta_F(t, \mu). \end{aligned}$$

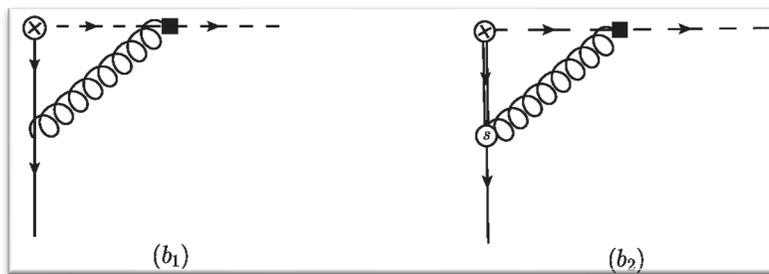
我们将流算符 $\bar{\psi} h_v$, $g F_{\parallel\perp}^{\mu\nu} h_v$, $g F_{\perp\perp}^{\mu\nu} h_v$ 和 $g \bar{h}_v F_{\perp\perp}^{\mu\nu} h_v$ 的匹配分解为场算符的匹配 $\mathring{\zeta}_\psi(t, \mu)$, $\zeta_{h_v}^F$ ($\zeta_{h_v}^A$) and $\zeta_A(t, \mu)$ 以及顶点匹配 $\zeta_{\psi h_v}(t, \mu)$, $\zeta_{\parallel\perp}(t, \mu)$, $\zeta_{\perp\perp}(t, \mu)$ and $\zeta_F(t, \mu)$ 的乘积。

流算符 $g \bar{h}_v F_{\perp\perp}^{\mu\nu} h_v$ 对应自旋相关的QCD静态势的相对论修正, 重夸克传播系数等算符定义, 其匹配系数记为 $c_F(t, \mu)$ 。

- 以上匹配系数, 我们有如下关系, 因此我们只需计算流算符的匹配系数以及线性发散的 mass correction δm ,

$$\begin{aligned} c_\psi(t, \mu) &= c_{\psi h_v}^2(t, \mu), \\ c_{\parallel\perp}(t, \mu) &= c_{\parallel\perp}^2(t, \mu), \\ c_{\perp\perp}(t, \mu) &= c_{\perp\perp}^2(t, \mu). \end{aligned}$$

- 在 $t \rightarrow 0$ 极限下, 可以在算符层次进行匹配计算, 匹配结果不依赖外态, 最简单的情况是选择外态动量为 0
- 单圈水平, 顶点修正 $\zeta_{\psi h_\nu}$ 包含以下两个费曼图, 其中在外动量为 0 的情况下只有第一个图 (b_1) 有非零贡献:



- 分别在 gradient flow 和 $\overline{\text{MS}}$ 方案下对顶点做单圈修正, 并进行对比 (gradient flow 只改变 UV 行为, 不改变 IR 行为):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{(b_1)} &= -g^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\gamma \cdot v) \not{k}}{(-k \cdot v - i0) (k^2)^2} e^{-2tk^2} \\
 &= g^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2)^2} e^{-2tk^2} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left[-\frac{1}{\epsilon_{\text{IR}}} - \log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) - 1 \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(t=0) &= -g^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\gamma \cdot v) \not{k}}{(-k \cdot v - i0) (k^2)^2} \\
 &= g^2 \tilde{\mu}^{2\epsilon} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2)^2} \\
 &= \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{\text{UV}}} - \frac{1}{\epsilon_{\text{IR}}} \right].
 \end{aligned}$$

- 对比下, 得到: $\zeta_{\psi h_\nu} = 1 - \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \left[\log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + 1 \right] + O(\alpha_s^2).$

- 在费曼规范下，我们得到场算符和顶点的匹配系数的单圈计算结果，并由此得到流算符的单圈匹配结果（规范无关），同时也得到了off-lightcone Wilson-line operators 的单圈匹配结果：

$$\begin{aligned}
 \delta m &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_R \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t}} + O(\alpha_s^2), \\
 \zeta_{h_v} &= 1 - \frac{\alpha_s C_R}{4\pi} \log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + O(\alpha_s^2), \\
 \zeta_{\psi} &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F [\log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) - \log(432)] + O(\alpha_s^2), \\
 \zeta_{\psi h_v} &= 1 - \frac{\alpha_s C_R}{4\pi} [\log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + 1] + O(\alpha_s^2), \\
 \zeta_A &= 1 + \frac{\alpha_s C_A}{4\pi} \left[\log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + \frac{1}{2} \right] + O(\alpha_s^2), \\
 \zeta_{\perp\perp} &= 1 + \frac{\alpha_s C_A}{4\pi} \left[\log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) - \frac{1}{2} \right] + O(\alpha_s^2), \\
 \zeta_{\parallel\perp} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A + O(\alpha_s^2), \\
 \zeta_{\perp\perp}^F &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[2C_F \log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + \frac{1}{2} C_A \right] + O(\alpha_s^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{\psi h_v}(t, \mu) &= 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[\frac{3}{2} \log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + \frac{\log(432)}{2} + 1 \right] + O(\alpha_s^2), \\
 c_{\parallel\perp}(t, \mu) &= 1 + O(\alpha_s^2), \\
 c_{\perp\perp}(t, \mu) &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A \times \log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + O(\alpha_s^2), \\
 c_F(t, \mu) &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A \times \log(2\mu^2 t e^{\gamma_E}) + O(\alpha_s^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{\psi}(t, \mu) &= c_{\psi h_v}^2(t, \mu), \\
 \mathcal{C}_{\parallel\perp}(t, \mu) &= c_{\parallel\perp}^2(t, \mu), \\
 \mathcal{C}_{\perp\perp}(t, \mu) &= c_{\perp\perp}^2(t, \mu).
 \end{aligned}$$

- 其中 $C_R = C_F$ 或者 $C_R = C_A$ ，对应 h_v 分别处于 SU(3) 基础表示和伴随表示。

- 文章 C. Monahan, PRD 97 (2018) 054507 在 gradient flow 方案下对夸克准部分子分布进行单圈计算 (为简化计算, 设外态动量 $P_z = 0$)

$$h(z, P^z) = \langle P | \bar{\psi}(zv) \Gamma W(zv, 0) \psi(0) | P \rangle,$$

但文章中的计算结果是错误的, 在 $t \rightarrow 0$ 极限下, 计算结果应该对应 $c_{\psi h_\nu}^2$, 与 z 无关, 文章中的结果不满足这一条件。

- A. M. Eller 2021年博士论文和 D. Cruz, A. M. Eller, G. Moore, PRD 110 (2024) 9, 094057 中分别对色电-色电 (E-E) 和色磁-色磁 (B-B) 关联函数 (用于定义重夸克转播系数) 在 gradient flow 方案下进行了单圈匹配计算 (U 为基础表示下的 Wilson line)

$$G_E(\tau) = -\frac{1}{3} \frac{\langle \text{Tr} E_j(0) U(0, -i\tau) E_j(-i\tau) U(-i\tau, -i\beta) \rangle}{\langle \text{Tr} U(0, -i\beta) \rangle}, \quad G_B(\tau) = \frac{1}{6} \frac{\langle \text{Tr} F_{jk}(0) U(0, i\tau) F_{jk}(i\tau) U(i\tau, i\beta) \rangle}{\langle \text{Tr} U(0, i\beta) \rangle}$$

其中 $G_B(\tau)$ 的匹配系数对应我们的 $c_F^2(t, \mu)$, 因为其定义对应色磁场两次插入 Wilson loop.

根据流算符 $g\bar{h}_\nu F_{\parallel\perp}^{\mu\nu} h_\nu$ 重整化常数恒为1的性质, $G_E(\tau)$ 的匹配系数也恒为1, 这也是我们未对其进行计算讨论的原因。

但是, 上述论文与文章是基于对算符矩阵元的单圈完整计算, 提取 $t \rightarrow 0$ 极限下的结果, 从而得到匹配结果, 匹配计算过程十分复杂, 需近百页的篇幅对计算过程详细阐述, 而我们只需要3页左右的计算篇幅就能得到全部结果。

- 因此, 我们基于算符重整化性质的匹配计算方法大大简化了 off-lightcone Wilson-line operators 的匹配计算, 使得双圈甚至更高圈的精确匹配计算成为可能。另外, 我们对 $c_{\parallel\perp}, c_{\perp\perp}$ 的研究和单圈计算结果也是全新的。

- 上述匹配计算均为 $t \rightarrow 0$ 极限下的结果，虽然格点计算中，我们也需要把格点计算结果外推到 $t \rightarrow 0$ 极限，但实际的格点计算中，我们是无法达到 $t \rightarrow 0$ 极限的，因此研究有限 t 的效应是十分有实际意义的。
- 我们对在 gradient flow 方案下夸克准分子分布的完整单圈计算结果与 $t \rightarrow 0$ 极限下的单圈结果进行对比：

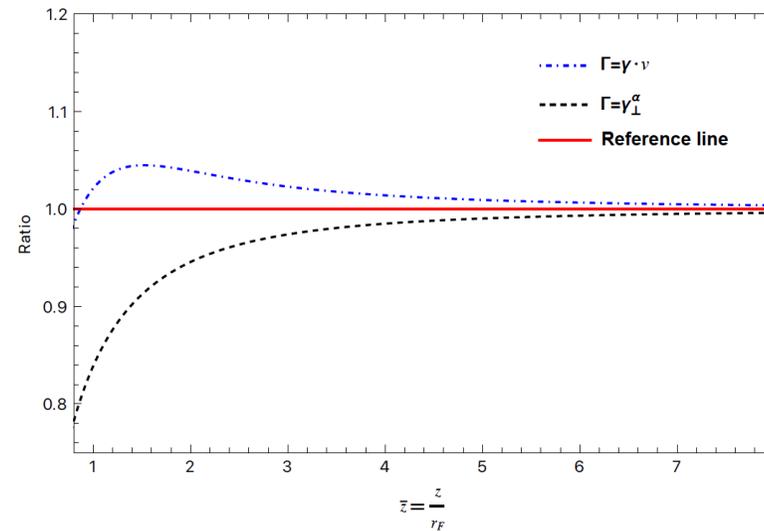


Figure 7. The ratio of the one-loop correction result with full flow time dependence and the one-loop correction result in the small flow-time limit: $\text{Ratio} = \frac{C_q(t, \mu, z) - 1}{C_{q, t \rightarrow 0}(t, \mu) - 1}$. The renormalization scale μ is chosen so that $\log(2t\mu^2 e^{\gamma_E}) = 0$.

- 如上图，对比结果表明，只要 $r_F = \sqrt{8t} \ll z$ ，即 flow 能标 $1/r_F$ 远大于其他物理能标，有限 t 的效应就可以被合理忽略。

- Gradient Flow 是个新兴的研究领域，在格点与微扰计算领域均逐渐引起关注和重视。微扰-格点匹配计算，作为连接格点计算结果与微扰计算结果的桥梁，在 Gradient Flow 方案下有着巨大的潜力，有许多重要的工作亟待推进完成。
 1. 目前许多定域算符在 gradient flow 方案下的匹配计算已经进行到双圈水平，但是计算均未考虑重夸克质量效应或者是在 flow 能标远大于重夸克质量能标的前提下进行的，这在目前实际的格点计算中往往很难得到满足。

我们可以通过结合 HQET, NRQCD 有效理论将重夸克质量效应合理地考虑进去。
 2. Off-lightcone Wilson-line operators 是一类具有非常广泛用途的算符，目前在 gradient flow 方案下的匹配计算仅限于单圈水平，难以匹配目前微扰计算普遍双圈及以上的精度，因此亟需将上述 off-lightcone Wilson-line operators 在 gradient flow 方案下的匹配研究推进到双圈水平，对线性发散的 mass correction δm 的双圈甚至更高阶的微扰计算可为剔除格点计算中的线性发散指数因子提供更精确的输入。
 3. 通过胶子关联函数的在 Gradient Flow 方案下的格点计算，实现第一个 NRQCD 色八重态矩阵元的格点计算（进行中）。