两体末态相互作用与阈效应简介

胡海明
高能物理研究所

国家重点研发项目“粲强子和标准模型的精确检验”2025夏季年会

贵阳 贵州民族大学2025.8

主要内容

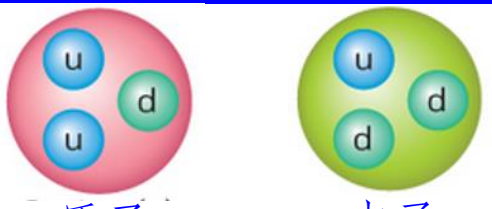
- 实验现象：两体强子产生截面存在阈效应(普遍？)
- 物理机制：两体末态相互作用分析
- 待解问题：哪些末态相互作用将会导致阈效应？
- 不考虑自旋情况(非相对论性)
  - ♦库伦相互作用势
  - ♦范德瓦尔斯势
  - ♦汤川势

  } (近似)求解薛定谔方程
- 考虑自旋情况(相对论性)
  - ♦赝标介子(波色子)
  - ♦重子(费米子)

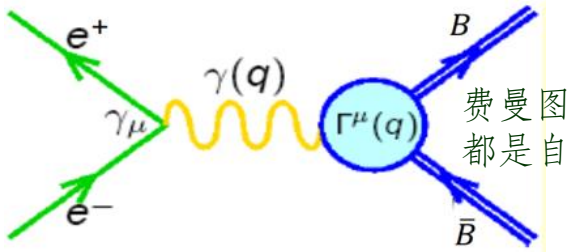
  } (近似)求解克莱因-高登或狄拉克方程
- 手征有效场论中的核子-反核子势
- 小结

核子产生阈效应

- 核子的组成



- 核子对产生费曼图



费曼图的外线
都是自由粒子

有效形状因子

磁形状因子
核子内部磁矩分布

电形状因子
核子内部电荷分布

- 核子产生Born截面

$$\sigma_0(s) = \frac{4\pi\alpha^2\beta}{3s}(1+\frac{1}{2\tau})|G_{eff}(s)|^2$$

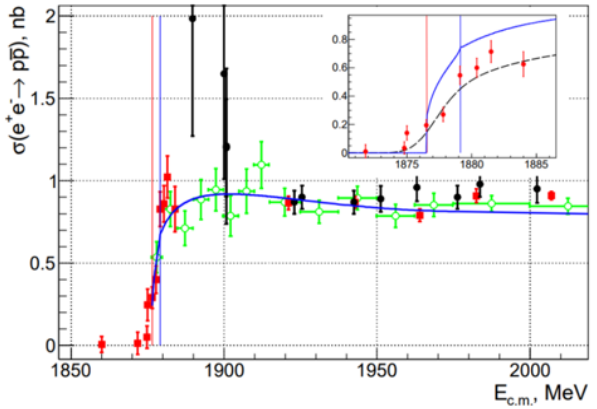
核子速度 $\beta \equiv v/c = \sqrt{1-4M^2/s}$

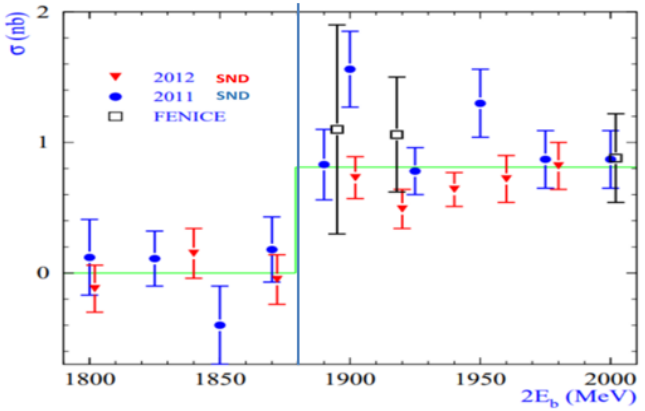
$$|G_{eff}(s)|^2 = \frac{2\tau|G_M(s)|^2 + |G_E(s)|^2}{2\tau+1}$$

核子产生阈值 $\sqrt{s_{th}} = 2M \rightarrow \beta \rightarrow 0 \rightarrow \sigma_0(s_{th}) \rightarrow 0$

- 实验结果

核子截面在阈值附近存在从零到有限值跳跃，阈效应。



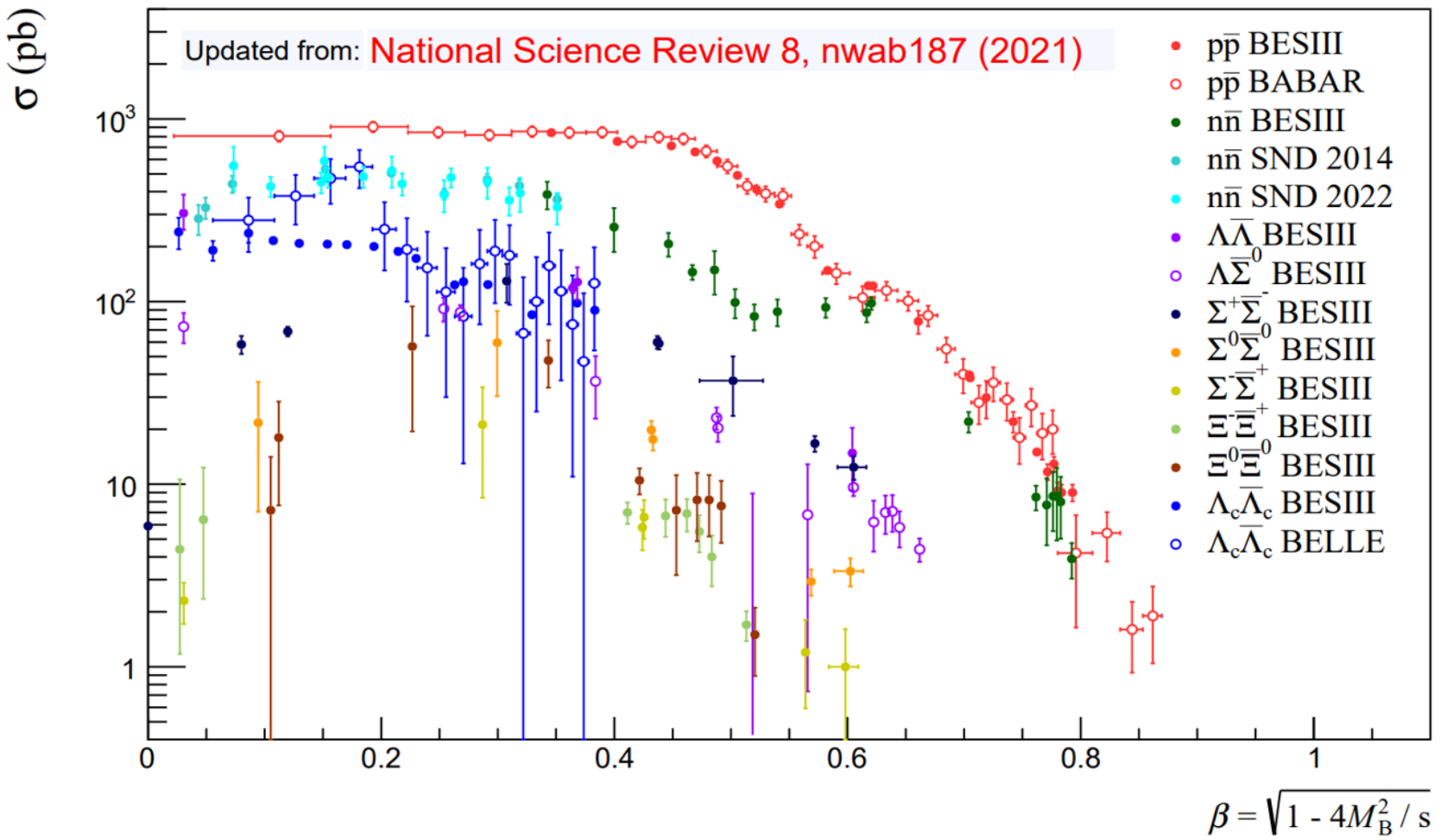


- 问题：

阈效应物理机制？

实验上已观测到的重子末态阈效应

- 实验已发现多道重子产生截面都存在阈效应



- 问题：
  - ♦ 重子对产生阈效应是不是普适现象？
  - ♦ 阈效应的物理机制是什么？哪些机制可以导致阈效应？

核子产生阈效应的物理机制

- 核子产生截面的阈效应修正
  - ♦量子场论费曼图把外线粒子都当做自由粒子，$\sigma_0(s)$中的相空间因子β在阈值时为零。
  - ♦重子对在产生阈附近，其间存在具有奇异性的相互作用，抵消相空间β因子
  - ♦Born截面的末态相互作用体现为阈效应的因子C(s)： $\sigma(s) = C(s)\sigma_0(s)$
- 末态粒子之间可能机制– 末态相互作用
  - ♦库伦势(适用于带电末态无自旋粒子)

$$V_C(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

  - ♦范德瓦尔斯势(适用于中性粒子无自旋粒子)：两重子靠得很近时，内部夸克分布将极化，体现为两个等效电偶极子，其势能为：

$$V_F(r) = -\frac{2p_1p_2}{r^3}$$

  - ♦汤川势：核子间交换有质量π介子传递相互作用，质量决定相互作用的短程性。

$$V_T(r) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

  - ♦ 自旋和作用顶点相关的相对论性Sommerfeld-Gamow-Sakharov因子。
  - ♦ 手征有效场论中核子-反核子之间各种可能的势。
  - ♦ 分子态？核子束缚态、中间共振态？

库伦相互作用

- **正反粒子库伦散射求解**

○ **哈密顿量**

正负电子e^+e^-湮没产生一对正反粒子，质量为m_1和m_2，电荷数为Z_1和Z_2。

两粒子系统相对运动的哈密顿量为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r)$$

库仑势(中心力场)

$$V(r)=\frac{Z_1Z_2\alpha\hbar c}{r}$$

其中，$\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$为约化质量，α为精细结构常数，$\hbar$为普兰克常数，c为光速。

○ **径向薛定谔方程**

在质心系中，分离变量后得到径向方程

$$[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\hbar^2l(l+1)}{2\mu r^2}+V(r)]u_{kl}(r)=Eu_{kl}(r)$$

库伦相互作用

- **无量纲化处理**

引入变量

$$\rho = kr, \quad \eta = \frac{Z_1 Z_2 \alpha \mu c}{\hbar k}, \quad k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$$

方程简化为

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + [1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}]u(\rho) = 0$$

- **自由粒子波函数**

当$\eta \to 0$，波函数为

$$R_0^{free}(r) = \frac{u_k(r)}{r} = j_0(kr) \approx 1, \quad (r \to 0), \quad k = \frac{\mu v}{\hbar}$$

库伦相互作用

归一化常数

$$C_l(\eta)=\frac{2^l e^{-\pi\eta/2}|\Gamma(l+1+i\eta)|}{(2l+1)!},\quad |\Gamma(l+1+i\eta)|=\sqrt{\frac{\pi\eta}{\sinh(\pi\eta)}}\prod_{s=1}^{l}\sqrt{s^2+\eta^2}$$

- **自由粒子波函数**

当$\eta\to 0$，波函数为

$$R_0^{free}(r)=\frac{u_k(r)}{r}=j_0(kr)\approx 1,\quad (r\to 0),\quad k=\frac{\mu v}{\hbar}$$

- **库伦修正因子**

库伦相互作用波函数与自由波函数的比值

$$C_l=|\frac{R_{kl}(r)}{R_{kl}^{(0)}(r)}|^2=|\frac{F_l((\eta,kr)}{krj_l(kr)}|^2=\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\prod_{s=1}^{l}(1+\frac{\eta^2}{s^2})$$

对于s波散射

$$C=|\frac{R_{k0}(r)}{R_{k0}^{(0)}(r)}|^2=\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}$$

$$\eta=\frac{Z_1Z_2\alpha\mu c}{\hbar k}=\frac{Z_1Z_2\alpha c}{v}$$

库伦相互作用

- **库仑势波函数**

方程正则解

$$u_{kl}(\rho) = F_l(\eta,\rho) = C_l(\eta)\rho^{l+1}e^{i\rho}M(l+1-i\eta.2l+2,-i2\rho)$$

其中，$M(a,b,z)$为合流超几何函数

$$M(a,b,z) = 1+\frac{a}{b}z+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

归一化常数

$$C_l(\eta) = \frac{2^l e^{-\pi\eta/2}|\Gamma(l+1+i\eta)|}{(2l+1)!},\quad |\Gamma(l+1+i\eta)| = \sqrt{\frac{\pi\eta}{\sinh(\pi\eta)}}\prod_{s=1}^{l}\sqrt{s^2+\eta^2}$$

- 当$Z_1Z_2<0$ (吸引势)：$\eta<0$，波函数在原点增强；
- 当$Z_1Z_2>0$ (排斥势)：$\eta>0$，波函数在原点抑制。

库伦相互作用

- **库伦修正因子**

库伦相互作用波函数与自由波函数的比值

$$C_l = |\frac{R_{kl}(r)}{R_{kl}^{(0)}(r)}|^2 = |\frac{F_l((\eta, kr)}{krj_l(kr)}|^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\prod_{s=1}^{l}(1+\frac{\eta^2}{s^2})$$

对于s波散射

$$C = |\frac{R_{k0}(r)}{R_{k0}^{(0)}(r)}|^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}$$

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 \alpha\mu c}{\hbar k} = \frac{Z_1 Z_2 \alpha c}{v}$$

- 当$Z_1Z_2<0$ (吸引势)：$\eta<0$，波函数在原点增强；
- 当$Z_1Z_2>0$ (排斥势)：$\eta>0$，波函数在原点抑制。

结论：库伦势薛定谔方程的解适合于非相对论性无自旋带电粒子

范德瓦尔斯势

- **中性粒子范德瓦尔斯势散射**
  - **范德瓦尔斯势**

当两个整体中性粒子(如中子-反中子)靠近时，其内部夸克分布会发生改变，呈现极化现象，对外就像一对电偶极矩，相互作用势为

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2 - 3(\vec{d}_1\cdot\hat{\vec{r}})(\vec{d}_2\cdot\hat{\vec{r}})}{r^3}$$

$$V(r,\theta) = \frac{C}{r^3}(1-3\cos^2\theta), \qquad C = \frac{d_1 d_2}{4\pi\epsilon_0}$$

当$\vec{d}_1$与$\vec{d}_2$头尾相对平行

$$V(r) = -\frac{1}{4\epsilon_0}\frac{2d_1 d_2}{r^3} = -\frac{C}{r^3}$$

- 范德瓦尔斯势波函数

范德瓦尔斯势可展开为球谐函数组合。由于关于ϕ的对称性，只考虑$m=0$的分波，它连接了波函数s波$(l=0,m=0)$波和d波$(l=2,m=0)$的分波。

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad Y_{20}(\theta,\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

假设末态耦合了不同的l和l'的分波，即s波和d波，总波函数

$$\psi(\vec{r}) = \frac{u_0(r)}{r}Y_{00}(\theta) + \frac{u_2(r)}{r}Y_{20}(\theta)$$

范德瓦尔斯势

假设末态耦合了不同的l和l'的分波，即s波和d波，总波函数

$$\psi(\vec{r}) = \frac{u_0(r)}{r}Y_{00}(\theta) + \frac{u_2(r)}{r}Y_{20}(\theta)$$

对每个分波，径向方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}u_l(l) + V_{ll'}(r)u_{l'}(r) = Eu_l(r)$$

范德瓦尔斯势方程变为耦合方程组：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u_0(r)}{dr^2} + V_{00}(r)u_0(r) + V_{02}(r)u_2(r) = Eu_0(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u_2(r)}{dr^2} + \frac{6\hbar^2}{2\mu r^2}u_2(r) + V_{20}(r)u_0(r) + V_{22}(r)u_2(r) = Eu_2(r)$$

矩阵元为

$$V_{ll'}(r) = < Y_{l0}|V(r)|Y_{l'0} >, \quad V_{00}(r) = 0, \quad V_{02}(r) = \frac{\gamma_1}{r^3}, \quad V_{22}(r) = \frac{\gamma_2}{r^3}$$

范德瓦尔斯势

耦合方程可化为

$$\frac{d^2u_0}{dr^2}+k^2u_0-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{\gamma_1}{r^3}u_2=0$$

$$\frac{d^2u_2}{dr^2}+(k^2-\frac{6}{r^2})u_2-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{\gamma_2}{r^3}u_2-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{\gamma_1}{r^3}u_0=0$$

其中，$k^2=2\mu E/\hbar^2$，令

$$\hat{\gamma}_1=\frac{2\mu\gamma_1}{\hbar^2}\qquad\hat{\gamma}_2=\frac{2\mu\gamma_2}{\hbar^2}$$

方程组为

$$u_0''+k^2u_0-\frac{\hat{\gamma}_1}{r^3}u_2=0$$

$$u_2''+k^2u_2-\frac{6}{r^2}u_2-\frac{\hat{\gamma}_2}{r^3}u_2-\frac{\hat{\gamma}_1}{r^3}u_0=0$$

考虑在原点附近$(r\to 0)$的近似解，可忽略k^2项和d波方程中的$1/r^2$项

$$u_0''=\frac{\hat{\gamma}_1}{r^3}u_2,\qquad u_2''=\frac{\hat{\gamma}_1}{r^3}u_0$$

范德瓦尔斯势

令，$S=u_0+u_2$和$D=u_0-u_2$，得两个解耦方程

$$S''-\frac{\hat{\gamma}_1}{r^3}S=0,\qquad D''+\frac{\hat{\gamma}_1}{r^3}D=0$$

$$\frac{d^2S}{dr^2}=\frac{\Gamma}{r^3}S,\quad \frac{d^2D}{dr^2}-\frac{\hat{\gamma}_1}{r^3}D=0,\quad \Gamma=\frac{2\mu\gamma_1}{\hbar^2}$$

作变量变换，令$\xi=\sqrt{r}$，方程化为修正贝塞尔方程

$$\xi\frac{d^2S}{d\xi^2}+\xi\frac{dS}{d\xi}-(4\Gamma\xi^2+1)S=0$$

通解为

$$S(r)=\sqrt{r}[AI_1(2\sqrt{\Gamma/r})+BK_1(2\sqrt{\Gamma/r})]$$

物理正则性(衰减解)要求$A=0$，即

$$S(r)\sim B\sqrt{r}K_1(2\sqrt{\Gamma/r})\sim B\sqrt{\pi/4}r^{3/4}\exp(-2\sqrt{\Gamma/r})$$

范德瓦尔斯势

D波函数方程的解

$$\frac{d^2D}{dr^2}+\frac{\Gamma}{r^3}D=0$$

令$\eta=\sqrt{r}$，化为贝塞尔方程

$$\eta^2\frac{d^2D}{d\eta^2}+\eta\frac{dD}{d\eta}+(4\Gamma\eta^2-1)D=0$$

通解为

$$D(r)=\sqrt{r}[CJ_1(2\sqrt{\Gamma/r})+EY_1(2\sqrt{\Gamma/r})]$$

物理正则性，振荡衰减解：

$$D(r)=C\sqrt{r}J_1(2\sqrt{\Gamma/r})\sim Cr^{3/4}\cos(2\sqrt{\Gamma/r}-\frac{3\pi}{4})$$

范德瓦尔斯势

重建原径向波函数$R_0(r)$和$R_2(r)$，

$$u_0=\frac{S+D}{2},\quad u_2=\frac{S-D}{2},\quad R_0(r)=\frac{u_0(r)}{r},\quad R_2(r)=\frac{u_2(r)}{r}$$

$$R_0(r)\approx+\frac{C}{2}r^{-1/4}\cos(2\sqrt{\Gamma/r}-\frac{3\pi}{4})$$

$$R_2(r)\approx-\frac{C}{2}r^{-1/4}\cos(2\sqrt{\Gamma/r}-\frac{3\pi}{4})$$

$$|R(r)|^2=\left|\frac{R_0(r)}{R_0^{free}(r)}\right|^2=\frac{|C|^2}{8}r^{-1/2}$$

经过匹配大距离近似解和散射态边界条件，得归一化常数：

$$|C|^2=N^2\frac{k}{|1+ak|^2}$$

N是势强相关常数，a是s波散射长度

$$|R(r)|^2=\frac{N^2}{8\sqrt{r}}\cdot\frac{\mu v/\hbar}{|1+a(\mu v/\hbar)|^2}$$

结论：范德瓦尔斯势不会导致阈效应。

QCD类库伦势

单胶子交换的动量空间势

$$V_Q(q^2) \propto \alpha_s/q^2$$

通过傅里叶变换到坐标空间

$$V_C(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} V(q) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \propto \frac{\alpha_s}{r}$$

计算夸克带色的贡献：夸克属于SU(3)色群的基础表示，其卡西米尔系数

$$C_F = (N_c - 1)/(2N_C) = 4/3$$

因正反夸克色荷相反，其间为吸引力，结合色因子C_F，得到

$$V_Q(r) = -(4/3)\alpha_s/r, \quad \alpha_s = g_s^2/4\pi$$

QCD类库伦势是短距离微扰QCD，其物理意义是夸克-反夸克通过单胶子交换产生的相互作用势，但不适合于正反核子对之间的强相互作用。正反核子对是夸克通过强相互作用形成的复合粒子，而正反核子对之间的相互作用发生在强子层次。

汤川势(1)

- **汤川势**
  - **汤川势物理基础**

核子通过交换π介子相互作用，作用范围(衰减长度)约为$\sim 1/\mu$，$\mu = m_\pi c/\hbar$。

  - **汤川势的推导**

静态标量场$\phi(r)$满足克莱因-高登方程，在球坐标系中为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\phi}{dr}) - \mu^2\phi = -g\delta(r)$$

对于$r \neq 0$的通解为

$$\phi(r) = \frac{g}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

或从量子场论传播子出发，在非相对论极限下

$$V(r) \propto \int \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{p^2+\mu^2}d^3p = \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

  - **汤川势s波径向薛定谔方程**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} - g\frac{e^{-\mu r}}{r}u(r) = Eu(r), \quad E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}, \quad v = \frac{\hbar k}{m}$$

汤川势(1)

- **自由粒子波函数**

平面波对应的s分波：

$$u_{0,k}(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}r\cdot j_0(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\sin(kr)}{k}$$

- **汤川势散射态波函数**

在阈效应点$g=g_c$，零能$(k\to 0)$方程存在特殊的幂律解

$$u_0(r)=C_0\sqrt{r}\cdot K_1(2\sqrt{2mg_cr}/\hbar^2)$$

其中，K_1是第二类修正贝塞尔函数，渐进行为

$$r\to 0^+ \quad :u_0(r)\sim\sqrt{r},\qquad r\to\infty,\quad u_0(r)\sim r^{-1/2}$$

低能散射解$(k>0)$，即对于$k<<\mu$，解分为两个区域：

势阱内$(r<\mu^{-1})$

$$u_0^{(in)}(r)\approx A(k)\sin u_0(r)$$

汤川势(1)

远区$(r>\mu^{-1})$

$$u_k^{(out)}(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kr+\delta_0),\quad \delta_0=-\alpha\sqrt{k},\quad \alpha=\sqrt{\frac{2mg_c}{\hbar^2\mu^2}}$$

振幅匹配，在匹配点$r_{match}\sim\mu^{-1}$

$$A(k)\sin u_0(r_{match})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kr_{match}+\delta_0)$$

代入$\delta_0=-\alpha\sqrt{k}$和$k\to 0$

$$A(k)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\sqrt{k}\frac{1}{u_0(r_{match})}$$

- **波函数比值**

$$\frac{u_k(r)}{u_{0,k}(r)}=\frac{A(k)u_0(r)}{\sqrt{2/\pi}\hbar\sqrt{k/m}\sin(kr)/k},\qquad r_0<r<\mu^{-1}$$

当$kr<<1$和$r_0<r<\mu^{-1}$

$$\frac{u_k(r)}{u_{0,k}(r)}=-\alpha\frac{u_0(r)}{u_0(r_{match})}\sqrt{\frac{m}{\hbar^2r^2}}$$

汤川势(1)

当$kr << 1$

$$\frac{u_k(r)}{u_{0,k}(r)} \approx \frac{\delta_0}{kr} = -\frac{\alpha\sqrt{k}}{kr} = -\frac{\alpha}{r}k^{-1/2}$$

统一表达式，当$(r > r_0)$及在低能极限$(k \to 0)$下，对任意固定的$r > r_0$，均有$kr << 1$，因此

$$\frac{u_k(r)}{u_{0,k}(r)} = -\frac{\alpha}{r}k^{-1/2}[1 + O(r\mu^{-1})]$$

其中，高阶项在$r >> \mu^{-1}$时可以忽略

$$R(r,v) = \frac{2g_c}{\hbar\mu^2 r^2} \cdot \frac{1}{v}[1 + O(r\mu^{-1})]$$

- **阈效应条件与物理解释**

阈效应条件

$$g = g_c, \qquad v < v_c = \frac{\hbar\mu}{m}$$

临界耦合强度(存在零能束缚态)：$g = g_c$，$v < v_c$称为汤川势特征速度。

汤川势(2)

- **汤川势的另一套解法**

s波径向薛定谔方程

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2u(r)}{dr^2}-g\frac{e^{-\mu r}}{r}u(r)=Eu(r),\quad r>r_0,\quad E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

引入无量纲变量

$$\rho=\mu r,\quad \lambda=\frac{2mg}{\mu},\qquad \epsilon=\frac{k^2}{\mu^2}$$

方程化为

$$\frac{d^2u(\rho)}{dr^2}+(\epsilon+\lambda\frac{e^{-\rho}}{\rho})u(\rho)=0$$

在低能极限下，零能方程为

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\lambda\frac{e^{-\rho}}{\rho}=0$$

临界耦合λ_c，对应临界$g_c=\lambda_c\mu/2m$，当$\lambda=\lambda_c$，存在零能束缚态解

$$u_0(\rho)\sim\rho e^{-\rho}$$

汤川势(2)

- 自由粒子波函数s波

$$u_{0,k}(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot j_0(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{\sin(kr)}{kr}$$

在低能极限和固定点r_0下，$k\to 0$，$v\to 0$

$$u_{0,k}(r_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot r_0=\sqrt{\frac{2\hbar^2 r_0^2}{\pi m}}\cdot\sqrt{k}$$

- 零能解$k\sim 0$的临界行为。在$g=g_c$时，零能方程存在幂律解

$$u_0(r)\propto\sqrt{r}\cdot K_1(2\sqrt{\frac{2mg_c r}{\hbar^2}})$$

其渐进行为：

* $r\to 0^+$：　$u_0(r)\propto\sqrt{r}$

* $r\to\infty$：　$u_0(r)\propto r^{-1/2}$

对于$k<<\mu$，在势阱内$(r<\mu^{-1})$

$$u_k(r)\approx A(k)u_0(r)$$

汤川势(2)

在$g=g_c$时，匹配在远处$r>>\mu^{-1}$的渐进行为

$$u_k(r)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kr+\delta_0)$$

相位移在阈效应点满足

$$\delta_0=-a\sqrt{k}+O(k),\quad a=\sqrt{\frac{2mg_c}{\hbar^2\mu^2}}$$

在匹配点$r_{match}\sim\mu^{-1}$，有

$$A(k)u_0(r_{match})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kr_{match}+\delta_0)$$

代入$\delta_0\sim a\sqrt{k}$和$k\to 0$，得

$$A(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-a\sqrt{k})\frac{1}{u_0(r_{match})}$$

- 波函数比值模平方

$$R(r_0,v)=|\frac{u_k(r_0)}{u_{0,k}(r_0)}|^2=\frac{2m^2g_c}{\hbar^4\mu^2}|\frac{u_0(r_0)}{u_0(r_{match})}|^2\frac{1}{r_0^2}\cdot\frac{1}{v}$$

相对论性赝标介子

- 考虑介子对末态自旋和相对论
  - (赝)标量介子

克莱因-高登方程

$$[(i\partial - V(r))^2 + \nabla^2 - m^2]\psi(\vec{r},t) = 0$$

分离变量：$\psi(\vec{r},t) = e^{-iEt}\phi(\vec{r})$，得定态方程

$$-\nabla^2\phi - [(E-V)^2 - m^2]\phi = 0$$

考虑s波(角动量$l=0$)，波函数仅依赖径向坐标，$\phi(\vec{r}) = R(r)$，令$u(r) = rR(r)$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + [k^2 + \frac{2\alpha E}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}]u = 0$$

其中，$k^2 = E^2 - m^2$(相对论波数)。其通解为合流超几何函数

$$u(r) = C \cdot e^{ikr}(i2kr^{i\eta})F(i\eta, 1, -i2kr)$$

参数$\eta = \alpha E/k$。

相对论性赝标介子

- **波函数在原点($r\sim 0^+$)的行为**

$$|\phi(0)|^2=|R(0)|^2=\lim_{r\to 0}|\frac{u(r)}{r}|^2=\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}$$

引入相对速度$\beta=2\sqrt{1-4m^2/s}$，$\eta=2\alpha/\beta$。

- **库伦相互作用修正散射振幅**

$$\mathcal{M}=\frac{\phi_C(0)}{\phi_0(0)}\cdot\mathcal{M}_0$$

截面修正为

$$\sigma=S\cdot\sigma_0,\quad S=\frac{2\pi\alpha/\beta}{1-e^{-2\pi\alpha/\beta}}$$

阈行为($\beta\to 0$)

$$S\approx\frac{2\pi\alpha}{\beta}$$

相对论性重子(费米子)

- 正反重子对相对论波函数与阈效应
  - 相对论性狄拉克方程

$$[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m+\gamma^{0}V(r)]\psi(\vec{r},t)=0,\quad V(r)=-\frac{\alpha}{r}$$

其中，γ^{μ}为狄拉克矩阵。分离变量$\psi(\vec{r},t)=e^{-iEt}\phi(\vec{r})$，得定态方程

$$(-i\alpha\cdot\nabla+\beta m+\beta\frac{\alpha}{r})\phi(\vec{r})=E\phi(\vec{r})$$

其中，$\alpha=\gamma^{0}\gamma$，$\beta=\gamma^{0}$。考虑s波(轨道角动量$l=0$)，总角动量$J=1$，波函数

$$\phi(\vec{r})=\begin{pmatrix} g(r)\chi \\ if(r)\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{r}}\chi \end{pmatrix}$$

χ是两分量旋量(描述自旋状态)，$g(r)$和$f(r)$分别为大小分量径向波函数，f比g小α量级。耦合径向方程组

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dr}&=-\frac{\kappa}{r}g+(E+m+\frac{\alpha}{r})f\\ \frac{df}{dr}&=(E-m+\frac{\alpha}{r})g-\frac{\kappa}{r}f\end{aligned}$$

其中，$\kappa=(j+1/2)$是自旋-轨道参数，s波对应$\kappa=-1$。散射态解为

$$g(r)\propto\sqrt{\frac{\kappa}{E+m}}e^{i\delta}F[i\eta,1,i(kr-\vec{k}\cdot\vec{r})]$$

相对论性重子(费米子)

波函数在原点的模方为

$$|\phi(0)|^2 = \frac{2\pi/\beta}{1-e^{2\pi\alpha/\beta}} \qquad (Sommerfeld\ factor)$$

与非相对论情况形式相同，但β为相对论速度(包含能量修正$\eta = \alpha E/\kappa$)。在非相对论极限($\eta \approx \alpha/\beta$)下，恢复为经典结果。

注：

1.狄拉克相对论性旋量方程中的势仍然采用了非相对论性带电粒子之间的库伦势

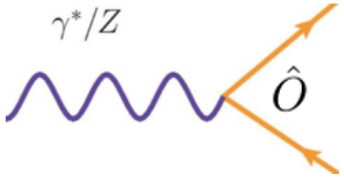
2.仍不能描述中子-反中子截面的阈效应

3.还需要找到其它的合理的机制。

Sommerfeld-Gamow-Skharov因子的自旋效应

Physics of Atomic Nuclei, 87, 476 (2024)

- 目的：两自旋1/2任意质量复合粒子在类库伦色动力学势中的S因子。
- 考虑不同的顶点函数：分别具有动量无关的旋量结构的矩阵元



赝标量$\hat{O}=\gamma_5$　　矢量$\hat{O}=\gamma_\mu$　　赝矢量$\hat{O}=\gamma_5\gamma_\mu$

- 相对论相对性准势(RQP)方法，两任意质量旋量粒子之间存在库伦势，径向S-态波函数满足下面方程：

$$\int_0^\infty d\chi[(\cosh\chi'-\cosh\chi)\sin(\rho\chi)\int_0^\infty d\rho'\sin(\rho'\chi')\varphi_0(\rho',\chi')]=-\frac{\hat{\alpha}}{\rho}\int_0^\infty d\chi[\hat{A}(\cosh\chi)\sin(\rho\chi)\int_0^\infty d\rho'\sin(\rho'\chi)\varphi_0(\rho',\chi')]$$

$$m'=\sqrt{m_1m_2}\quad\lambda'=1/m'\quad\rho=r/\lambda'\quad g'=\frac{m'}{2\mu}=\frac{m_1+m_2}{2\sqrt{m_1m_2}}\quad\hat{A}(\cosh\chi')=\frac{1}{4}[a'\cosh^2\chi'-b']$$

- 对于赝标量顶点γ_5：　$a'=g'^2\qquad b'=1-g'^2$
- 对于矢量顶点γ_μ：　$a'=\frac{1}{2}g'^2\qquad b'=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}g'^2$
- 对于赝矢量顶点$\gamma_5\gamma_\mu$：　$a'=-\frac{1}{2}g'^2\qquad b'=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}g'^2$

库伦势

波函数

Sommerfeld-Gamow-Skharov因子的自旋效应

- 径向波函数的解具有如下形式：

$$\varphi_0(\rho,\chi') = \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} R_0(\zeta,\chi')$$

$$R_0(\zeta,\chi') = \frac{C_0(\chi')}{(e^{\zeta-e^{\chi'}})^2} \times \exp[-\frac{i\hat{\alpha}a'}{4}\sinh\zeta + (1-i\hat{\rho}')\zeta + iB'\chi'] \times [\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi'}}{e^{\zeta}-e^{\chi'}}]^{-1+iB'}$$

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{\alpha}a'\cosh\chi'}{4} \qquad B' = \frac{\hat{\alpha}(a'\cosh^2\chi' + b')}{4\sinh\chi'}$$

$$\begin{aligned}\varphi_0(\rho,\chi') &= 2C_0(\chi')e^{iB'\chi'}\sinh[\pi(\rho-rho')]\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\exp[\frac{i\hat{\alpha}a'}{4}\sinh x + (1+i(\rho-\hat{\rho}'))x]}{(e^x+e^{\chi'})}[\frac{e^x+e^{-\chi'}}{e^x+e^{\chi'}}]^{-1+iB'} \\ &\approx 2\pi C_0(\chi')e^{-(1-iB')\chi'+i(\rho-\hat{\rho}')\chi'}(\rho-\hat{\rho}')\times_2 F_1(1-iB',-i(\rho-\hat{\rho}');2;1-e^{-2\chi'})\end{aligned}$$

- 归一化系数：

$$|2\pi C_0(\chi')|^2 = e^{\pi B'}|\Gamma(1-iB')|^2$$

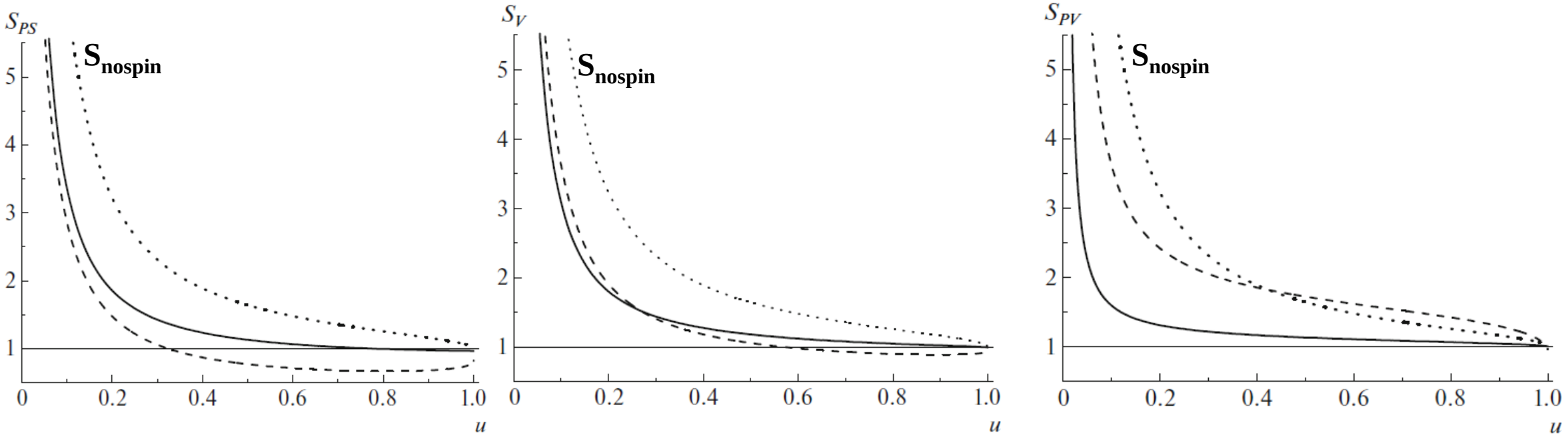
- 两相对论性旋量粒子的库伦S-因子定义：

$$\begin{aligned}S_s(\chi') &= \lim_{\rho\to i}|e^{-\pi\hat{\rho}'/2}\Gamma(1+i\hat{\rho}')\frac{\varphi_0(\rho,\chi')}{\rho}|^2 \\ &= \frac{X_s(\chi')}{1-\exp[-X_s(\chi')]}e^{-\pi\hat{\rho}'}|\Gamma(2+i\hat{\rho}')\times_2 F_1(1+iB',-i\hat{\rho}';2;1-e^{-2\chi'}|^2\end{aligned}$$

$$X_s = \frac{\pi\hat{\alpha}\sqrt{1-u^2}}{2g'u}[g'^2(a'^2+b'^2) + \frac{a'u^2}{1-u^2}] \qquad u = \sqrt{1-\frac{4\sqrt{m_1m_2}}{s-(m_1-m_2)^2}}$$

Sommerfeld-Gamow-Skharov因子的自旋效应

- 相对论性旋量粒子库伦S-因子随u的变化：



赝标顶点

$$\hat{O} = \gamma_5$$

矢量顶点

$$\hat{O} = \gamma_\mu$$

赝矢顶点

$$\hat{O} = \gamma_5\gamma_\mu$$

不考虑粒子自旋的S因子与考虑粒子自旋(1/2)在不同相互作用顶点情况下的S因子

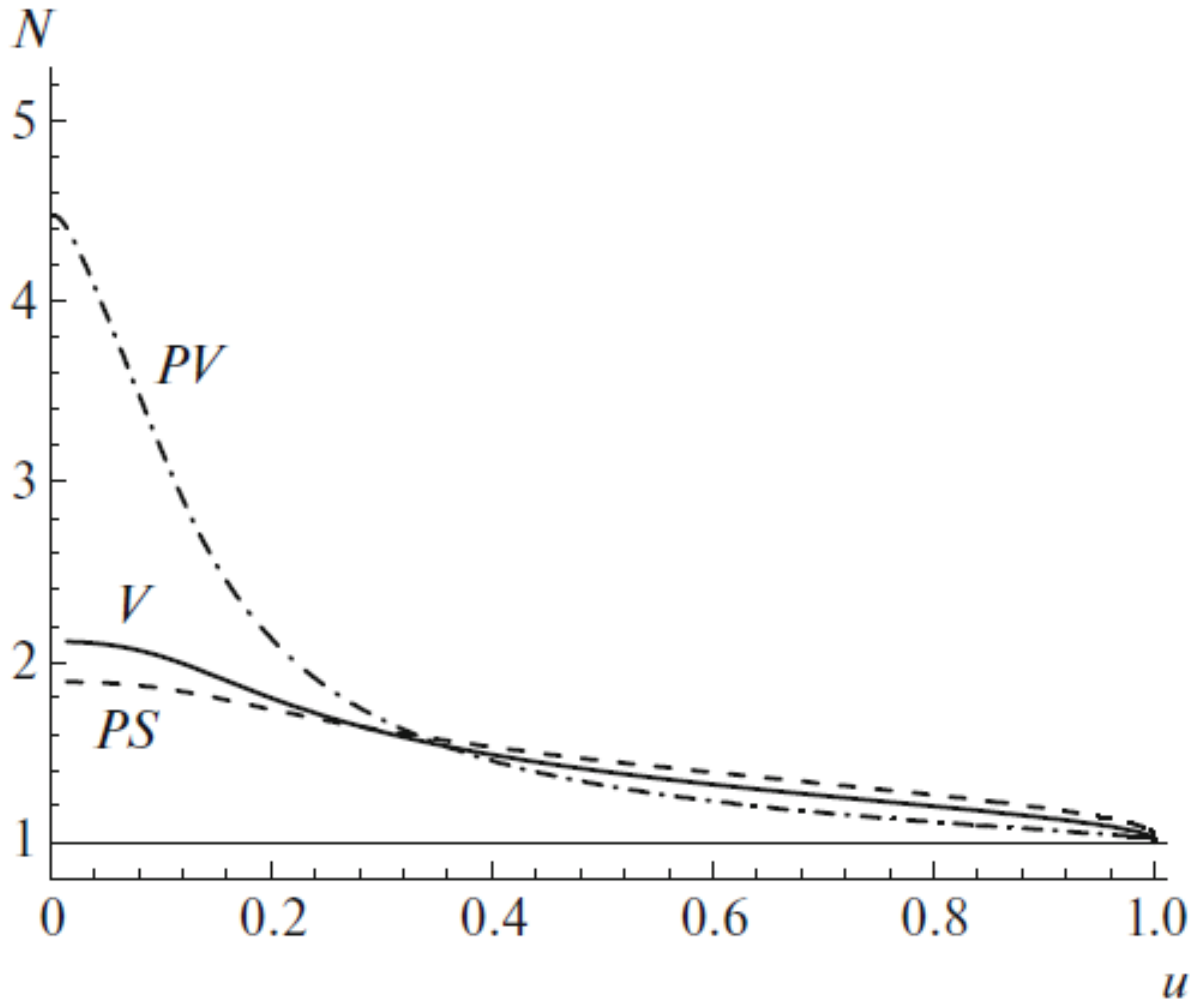
Fig. 1. The behavior of the S-factor (23) for the pseudoscalar system, $a' = g'^2$ and $b' = 1 - g'^2$, as a function of the velocity u, Eq. (7), at $\tilde{\alpha} = 0.2$: solid line corresponds to $g' = 1.5$, while the dashed one corresponds to $g' = 2.5$. The dotted line is for the spinless S-factor, Eq. (6).

Fig. 2. The behavior of the S-factor (23) for the vector system, $a' = (1/2)g'^2$, $b' = 3/4 - (1/2)g'^2$. The meaning of the lines is the same as in Fig. 1.

Fig. 3. The behavior of the S-factor (23) for the pseudovector system, $a' = -(1/2)g'^2$ and $b' = 1/4 + (1/2)g'^2$. The meaning of the lines is the same as in Fig. 1.

Sommerfeld-Gamow-Skharov因子的自旋效应

$$N(u)=\frac{S_{nospin}(u)}{S_{spin}(u)}$$



不考虑粒子自旋的S因子与考虑粒子自旋(1/2)在不同相互作用顶点情况下的S因子之比

- S-因子与粒子自旋有关，
- 与相互作用顶点形式有关

手征有效场论中核子-反核子相互作用

手征有效场论(χEFT)基于QCD的手征对称性破缺模式，将核子和π介子作为有效自由度，提供了一种系统性的与模型无关的方法推导核力。与NN系统相比，$N\bar{N}$由于存在湮灭过程更加复杂，因为在静止时$N\bar{N}$系统可能有许多湮灭道，不仅有助于理解丰富的强相互作用，还与中子-反中子振荡等奇特物理现象相关。

手征有效场论中核子-反核子相互作用

- **手征有效场论如何描述核子-反核子之间的非微扰相互作用**
  - **手征有效场论**：通过手征对称性约束和有效自由度，将非微扰相互作用分解为可计算的长程介子交换、短程接触等，实现低能区相互作用系统性描述。
  - **阈效应**：有效场论明确了阈值附近长程π介子交换主导地位，量子数相关相互作用，通过拟合实验数据，定量解释阈附近散射、束缚态或共振现象。
  - **手征有效理论优势**：在于基于QCD的基本对称性，兼具理论严谨性和实验可认证性。
  - **核子-反核子势**：在坐标空间的表示由介子交换势和接触项共同构成，其形式通过傅里叶变换从动量空间推导而来，并结合自旋-同位旋耦合和低能常数描述非微扰相互作用。

- **核心组成部分与坐标空间形式**
  - **单π介子交换势**：单π交换主导长程相互作用($r \sim 1-2$ fm)，其坐标空间形式为汤川势，并包含自旋-同位旋耦合项：

$$V_\pi(r) = -\frac{g_A^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\pi r}}{r}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_2)$$

g_A为轴矢耦合常数，m_π是π介子质量，$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$描述自旋相互作用，$\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$描述同位旋耦合；核子与反核子同位旋符号相反，$\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$项在$N\bar{N}$系统中符号反转，导致吸引力增强或减弱。

- **自旋算符：** $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$是作用在核子自旋空间(二维空间，对应自旋向上或向下自旋态$|\uparrow>$和$|\downarrow>$)泡利矩阵：

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

- **自旋-自旋耦合：** 自旋相互作用通过标量积$\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2=\sigma_{1x}\sigma_{2x}+\sigma_{1y}\sigma_{2y}+\sigma_{1z}\sigma_{2z}$：

$$\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

- **同位旋算符：** $\boldsymbol{\tau}=(\tau_x,\tau_y,\tau_z)$是作用在同位旋空间(二维空间，同位旋态为质子$|p>$和中子$|n>$)泡利矩阵:

$$\tau_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \tau_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \tau_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

反核子同位旋矩阵$\bar{\tau}$满足符号反转关系：$\bar{\tau}=-\tau$。同位旋算符的乘积：

$$\tau_{1x}\tau_{2x}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\tau_{1y}\tau_{2y}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\tau_{1z}\tau_{2z}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{I}_1\cdot\boldsymbol{I}_2$$

- **矢量介子(ρ、ω)交换势**

矢量介子主导中短程相互作用($r\sim0.2-1\mathrm{fm}$)，其坐标空间形式为：

$$V_V(r)=-\frac{g_V^2}{4\pi}\frac{e^{-m_V r}}{r}\left[(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)+\frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{r}_1)(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{r}_1)}{r^2}\right](\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)$$

g_V是矢量介子耦合常数，m_V是矢量介子质量；张量项$3(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{r}_1)/r^2$描述自旋-轨道耦合，影响散射角分布。

- **接触项**

接触项描述极短程($r\ll1\mathrm{fm}$)相互作用，势能形式为δ函数：

$$V_{cont}(r)=C_S\delta(r)+C_T\delta(r)(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)$$

其中，C_S和C_T由低能常数决定，通过拟合实验数据确定；反核子的接触项因重子符号($B=-1$)导致C_S和C_T的符号变化。

- **湮灭势**

$$V_{ann}(r) = -(U_0 + iW_0)e^{-r^2/R^2}$$

其中，实部U_0吸引势，描述核子-反核子之间的强吸引力，物理机制是正反夸克可能发生部分湮灭，剩余夸克通过胶子场强耦合形成中间准束缚态，产生净吸引效应；虚部W_0描述$N\bar{N}$相互靠近时转化为介子，导致波函数随时间衰减$|\psi(t)|^2 \approx e^{-\Gamma t}$，湮灭宽度$\Gamma = 2W_0/\hbar$。

- **总势能**

核子-反核子势在坐标空间的完整表达式为：

$$V(r) = V_\pi(r) + V_V(r) + V_{cont}(r) + V_{ann}(r) + \cdots$$

- **单π交换势推导**
  - π介子与核子耦合的拉式量：

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{g_A}{2f_\pi}\bar{N}\gamma^\mu\gamma_5\tau\cdot\partial_\mu\pi N$$

  - 动量空间势：

顶点因子为

$$\frac{g_A}{2f_\pi}\gamma^\mu\gamma_5\tau\cdot q^\mu$$

π传播子为

$$\frac{1}{q^2+m_\pi^2}$$

动量空间的势为

$$V_\pi(\mathbf{q}) = -\frac{g_A^2 m_N^2}{4f_\pi^2}\cdot(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)$$

  - 坐标空间的势：

对于汤川势

$$V(r) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}V(q)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{g_A^2 m_N^2}{4f_\pi^2}\frac{e^{-m_\pi r}}{4\pi r}$$

◦ 基本理论框架

在χEFT中，π介子作为手征对称性破缺的Goldstone玻色子，与$N\bar{N}$一起视为基本自由度，构建包含核子场Ψ和反核子场$\bar{\Psi}$的有效拉氏量。在动量空间中，核子-反核子势的一般形式可以表示为：

$$V(p,p') = \sum_i C_i \left[\bar{v}(p,s_1')\Gamma_i v(p',s_1')\right]\left[\bar{u}(-p',s_2')\Gamma^i u(-p,s_2)\right]$$

其中，C_i是低能常数，Γ_i是相应的Clifford代数矩阵，$u(p,s)$和$v(p,s)$分别是核子和反核子旋量。最低阶有效拉式量包括了以下几个部分：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(2)}_{\pi\pi} + \mathcal{L}^{(1)}_{\pi N} + \mathcal{L}^{(1)}_{\pi\bar{N}} + \mathcal{L}^{(1)}_{\pi N} + \mathcal{L}^{(0)}_{N\bar{N}}$$

- **π自相互作用部分**

$$\mathcal{L}^{(2)}_{\pi\pi}=\frac{f_\pi^2}{4}Tr\left[\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger+(U+U^\dagger)m_\pi^2\right]$$

其中，$f_\pi=92.4\mathrm{MeV}$是π介子衰变常数，m_π是π介子质量，$U=\exp(i\Phi/f_\pi)$是手征场矩阵，Φ是π介子矩阵场：

$$\Phi=\begin{pmatrix}\pi^0 & \sqrt{2}\pi^+\\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0\end{pmatrix}$$

- **π介子与核子/反核子耦合部分**

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\pi N}=\mathcal{L}^{(1)}_{\pi\bar{N}}=\bar{\Psi}\left(i\not{D}-M+\frac{g_A}{2}\gamma^\mu\gamma_5 u_\mu\right)\Psi$$

$g_A=1.29$是轴矢耦合常数，M是核子质量，协变导数和轴矢流u_μ分别为：

$$D_\mu=\partial_\mu\Psi+[\Gamma_\mu,\Psi],\quad \Gamma_\mu=\frac{1}{2}\left(u^\dagger\partial_\mu u\right)+u\partial_\mu u^\dagger\right),\quad u_\mu=i\left(u^\dagger\partial_\mu u-u\partial_\mu u^\dagger\right)$$

- **核子-反核子接触相互作用部分**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)}_{N\bar{N}} &= C_S(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\Psi)+C_S(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)+C_V(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)\\ &+ C_{AV}(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi)+C_T(\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi)(\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi)\end{aligned}$$

其中，C_S，C_A，C_{AV}，C_T是低能常数。

- **核子-反核子湮灭道势**

$$V_{ann}=\sum_X V_{N\bar{N}\to X}G_X V_{X\to N\bar{N}},\qquad X=2\pi,3\pi\cdots$$

X表示所有的衰变道，G_X是中间态X传播子。

手征有效场论中核子-反核子相互作用

- **核子-反核子势的一般构造**

在χEFT框架下，核子-反核子势可以分为实部和虚部：

$$V_{N\bar{N}} = V^R + V^I$$

实部描述弹性散射，虚部描述非弹性散射和湮灭。

- 实部1：单π交换，长程项，由π介子交换产生；
- 实部2：接触相互作用，由点相互作用项产生；
- 实部3：多π交换势，包括2π，3π等交换，贡献中程和短程相互作用。
- 虚部主要来源于湮灭过程，需要考虑多π产生等多体末态道。

- **动量空间中核子-反核子势领头阶实部势**
  - 单π动量空间交换势：

$$V_{OPE}^{R}(p.p') = \frac{g_A^2}{4f_\pi^2}\frac{[\bar{v}(p,s_1)\tau_1\gamma_\mu\gamma_5 v(p',s_1')][\bar{u}(-p',s_2')\tau_2\gamma_\nu\gamma_5 g^\nu u(-p,s_2)]}{(E_{p'}-E_p)^2-(p'-p)^2-m_\pi^2}$$

其中，$q=p'-p$是动量转移，τ_1和τ_2是同位旋Pauli矩阵，E_p和$E_{p'}$是初态和末态能量。

  - 单π动量空间交换势的非相对论近似：对于$^1S_0$ $^3S_1$道，单π交换势为

$$^1S_0 \ : \ V_\pi^{^1S_0}(q) = \frac{3g_A^2m_\pi^2}{4f_\pi^2}\frac{1}{q^2+m_pi^2}\tau_1\cdot\tau_2$$

$$^3S_1 \ : \ V_\pi^{^3S_1}(q) = -\frac{3g_A^2m_\pi^2}{4f_\pi^2}\frac{q^2+m_\pi^2}{q^2+m_pi^2}\tau_1\cdot\tau_2$$

◦ 接触势：领头阶在动量空间势常数。根据Clifford代数分解，利用Fierz变换，接触势可以统一表示为

$$V_{CT}^{R}(p,p') \quad =$$

在实际运用中，通常将接触势投影到LSJ耦合基下(轨道角动量L，总自旋S，总角动量J)，各部分波的贡献为：

$^1S_0$道：$V_{^1S_0} = \xi\left[C_{^1S_0}(R_p^2+R_{p'}^2)+\hat{C}_{^1S_0}(1+R_p^2R_{p'}^2)\right]$；

$^3P_0$道：$V_{^3P_0} = \xi C_{^3P_0}R_pR_{p'}$；

$^3S_1$道：$V_{^3S_1}\xi\left[C_{^2S_1}(R_p^2+R_{p'}^2)+\hat{C}_{^3S_1}(9+R_p^2R_{p'}^2)\right]$；

其中，$\xi=-4\pi N_p^2N_{p'}^2$，$R_p=|p|/\epsilon_p$，$\epsilon_p=E_p+M$，$C_{^1S_0}$，$\hat{C}_{^1S_0}$，$C_{^3S_1}$，$\hat{C}_{^3S_1}$，C_{3P_0}是原始低能常数C_S，C_A，C_V，C_{AV}，C_T的线性组合。

- **动量空间中核子-反核子势领头阶虚部势**

核子-反核子势的虚部主要来自湮灭过程。在领头阶虚部势的一般形式为：

$$V^I = -i\pi \sum_X V_{N\bar{N}\to X} V_{X\to N\bar{N}}$$

对于S波，虚部势可以写成：

$$V^I_{^1S_0} = \left(C^a_{^1S_0} + \hat{C}^a_{^1S_0}\frac{p^2}{4M^2}\right)\left(C^a_{^1S_0} + \hat{C}^a_{^1S_0}\frac{p'^2}{4M^2}\right)$$

$$V^I_{^3S_0} = \left(C^a_{^3S_1} + \hat{C}^a_{^3S_1}\frac{p^2}{4M^2}\right)\left(C^a_{^3S_1} + \hat{C}^a_{^3S_1}\frac{p'^2}{4M^2}\right)$$

- 坐标空间中的核子-反核子势
  - 傅里叶变换关系

$$V(\boldsymbol{r})=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}V(\boldsymbol{q})e^{+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\quad\leftrightarrows\quad V(\boldsymbol{q})=\int\frac{d^3r}{(2\pi)^3}V(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$$

  - 单π交换势

汤川势：

$$\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{q^2+m_\pi^2}=\frac{1}{4\pi r}e^{-m_\pi r}$$

$^1S_0$道：

$$V^\pi_{^1S_0}(r)=\frac{3g_A^2m_pi^2}{16\pi^2f_\pi^2}\frac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{r}e^{-m_pir}$$

$^3S_1$道：

$$V^\pi_{^3S_1}(r)=-\frac{g_A^2}{16\pi^2f_\pi^2}\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2\{\frac{m_\pi^2}{r}e^{-m_\pi r}+\frac{1}{r^3}\left[1-(1+m_\pi^2r)\right]e^{-m_\pi r}\}$$

◦ **接触势**

在动量空间是常数，傅里叶变换为δ函数，对应坐标空间点相互作用：

$$V_{CT}(\boldsymbol{r}) = [C_S + C_A\gamma_5\gamma_5 + C_V\gamma_\mu\gamma^\mu + C_{AV}\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5 + C_T\sigma^{\mu\nu}_{\mu\nu}]\delta^3(\boldsymbol{r})$$

在LSJ耦合基下的表达式为：

$$\begin{aligned} V_{^1S_0}(\boldsymbol{r}) &= \chi\left[C_{^1S_0}(-\nabla^2) + \hat{C}_{^1S_0}\right]\delta^3(\boldsymbol{r}) \\ V_{^3S_1}(\boldsymbol{r}) &= \chi\left[C_{^3S_1}(-\nabla^2) + \hat{C}_{^3S_1}\right]\delta^3(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

- **次领头阶实部势**

双π交换势直接图：

$$V_{TPE}^{(1)}(r)=\frac{g_A^2}{16\pi^2 f_\pi^4}\frac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{r}\left[c_1\left(\frac{1}{r}-m_\pi\right)+c_2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{m_\pi}{r^2}+\frac{m_\pi^2}{2r}\right)\right]e^{-m_\pi r}$$

$$V_{TPE}^{(2)}(r)=\frac{g_A^2}{16\pi^2 f_\pi^4}\frac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{r}\left[c_3\left(\frac{1}{r}-2m_\pi\right)+c_4\left(\frac{1}{r^3}-\frac{2m_\pi}{r^2}+\frac{2m_\pi^2}{2r}\right)\right]e^{-m_\pi r}$$

其中，c_1，c_2，c_3,c_4是低能常数。

- **束缚态和共振态**

通过求解薛定谔方程，可以得到系统的波函数和能谱。在核子-反核子系统中，由于存在湮灭过程，束缚态的寻找变得很复杂，通常采用的方法是寻找复能谱中的极点，它们对应共振态和准束缚态。

- **中子-反中子振荡**

中子-反中子振荡的振幅可以通过核子-反核子势来计算：

$$<\bar{n}|V|n>=\int d^3r\bar{\psi}_{\bar{n}}(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})$$

手征有效场论中核子-反核子相互作用

- **小结**

上面列举了手征有效场论中核子-反核子势的构造及其在动量空间和坐标空间的表达式。主要包括：

- **领头阶实部**
  - 单π交换势在动量空间和坐标空间的表达式；
  - 接触势在动量空间和坐标空间的表达式；
  - 在不同自旋-同位旋道中的具体形式。
- **次领头阶实部**
  - 双π交换势动量空间表达式及其傅里叶变换到坐标空间；
  - 高阶接触势的构造。
- **虚部势**
  - 势的虚部对应的湮灭过程贡献；
  - 虚部势的一般形式及其部分波分解。
- **薛定谔方程**
  - 薛定谔方程求解，寻找近似波函数和相移；
  - 束缚态和共振态的寻找；

小结

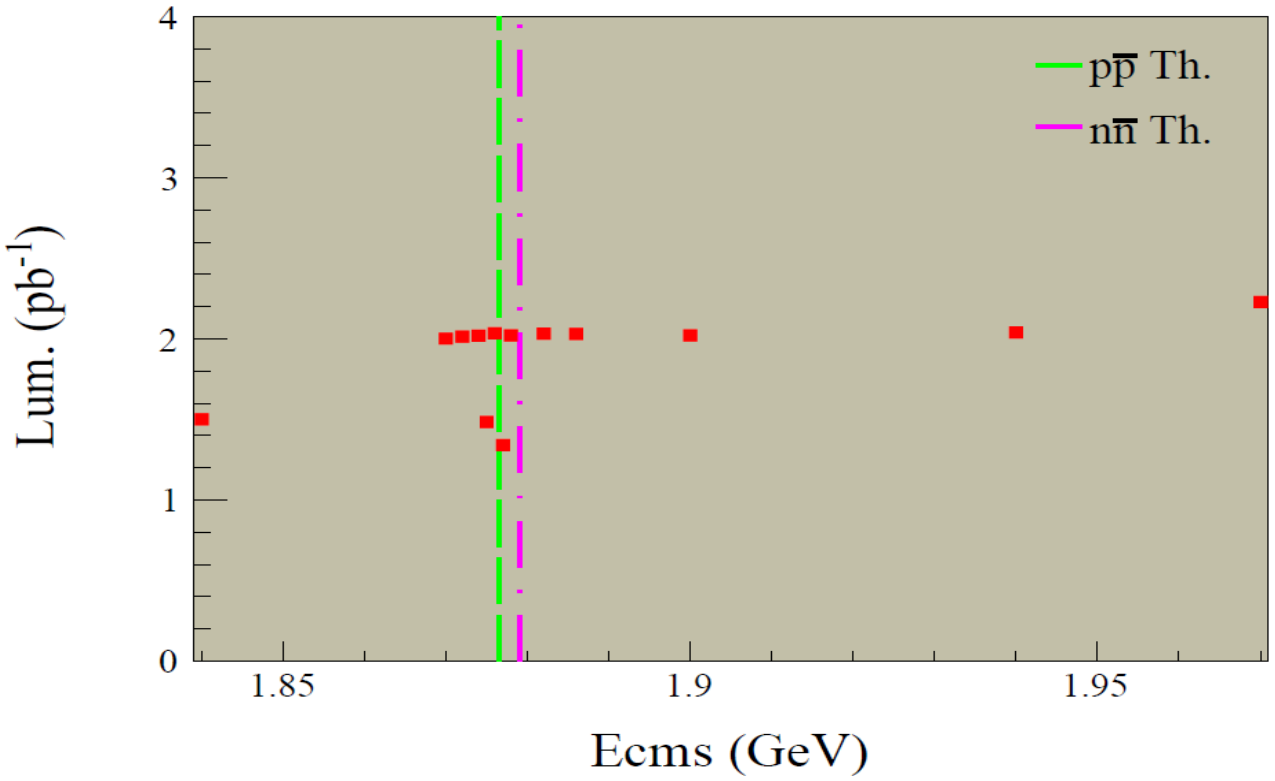
- 实验所用到的体现阈效应的S因子是不考虑粒子自旋情况下的非相对论库伦相互作用情况下的结果。
- 库伦势可以导致带电核子末态阈效应
- 范德瓦尔斯势不会引起阈效应
- 汤川势相互作用可引起可观测的阈效应
- 不同分波的不考虑自旋的相对论性S因子
- 自旋1/2粒子末态不同作用顶点情况下的S因子
- 手征有效场论中核子-反核子的各种势(动量空间和坐标空间形式)，待求解薛定谔方程。
- 实验提供阈效应的信息→确立理论模型→了解阈效应机制
- 注：以上结果除库伦势外，其它势结果均是采取某些近似下得到的，尚待进一步检查和更正。
- 方法：采用某种势模型V(r)，求解薛定谔方程，计算：

$$[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}+V(r)]u_{kl}(r)=Eu_{kl}(r)$$

$$R_{k,l}(r)=\frac{u_{k,l}(r)}{r} \longrightarrow |R(r)|^2=\left|\frac{R_0(r)}{R_0^{free}(r)}\right|^2$$

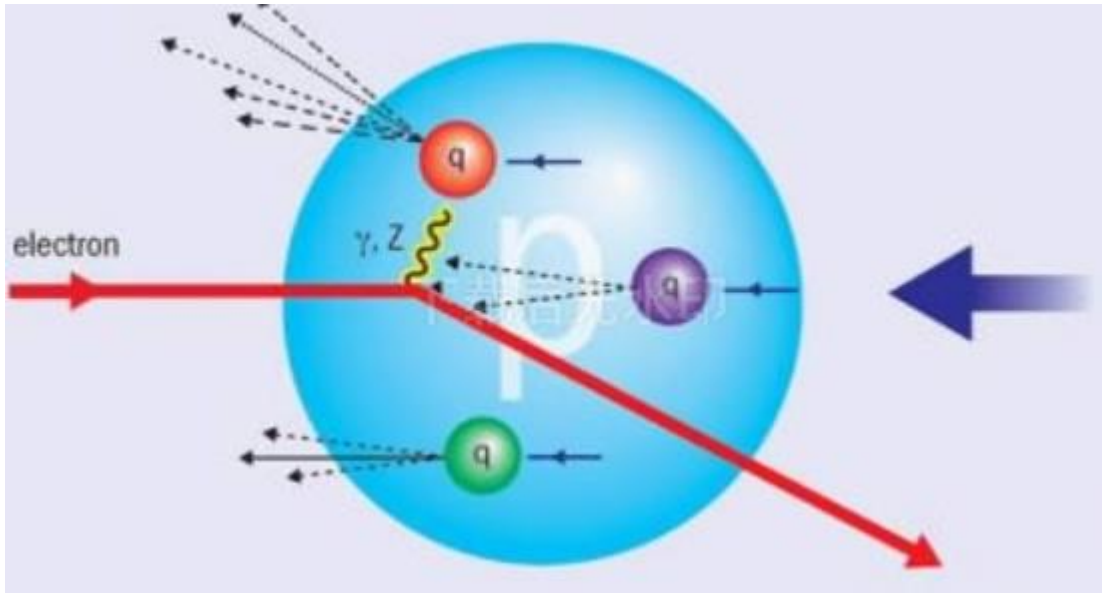
BEPCII/BESIII数据获取

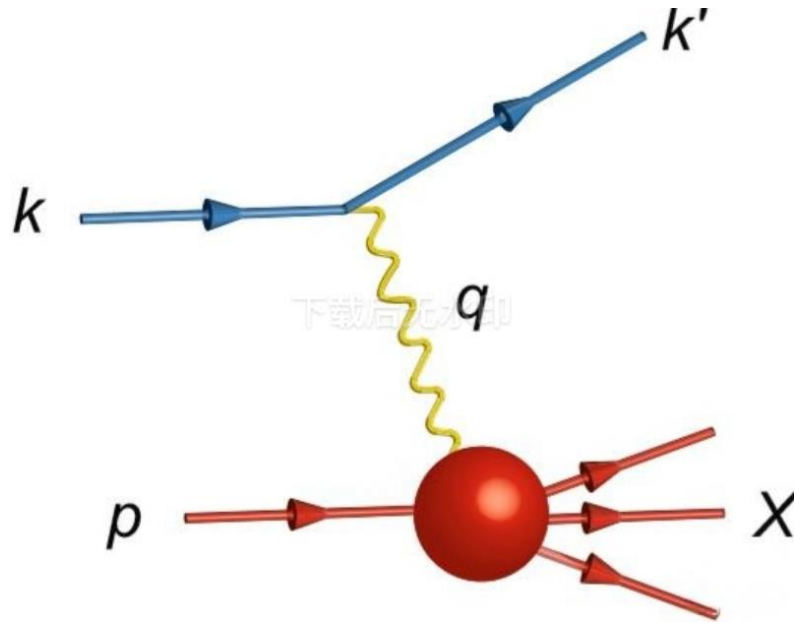
- 2018 提议2.0GeV一下阈效应项目计划。
- 2024 完成实验取数：13个能量点，能量范围1.84–1.97GeV。
- 2025, 完成数据刻度、重建、检查，进行初步分析。

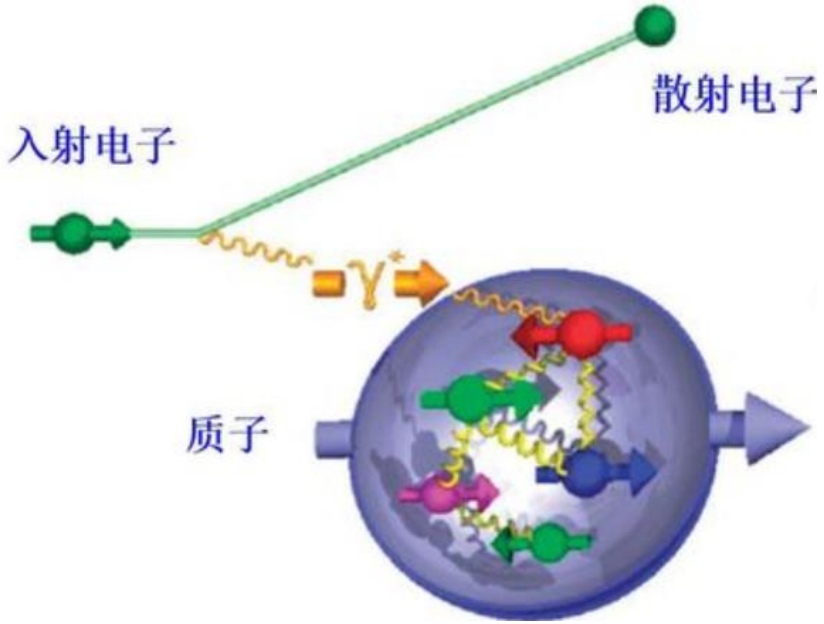


Ecm (MeV)	Run range	#runs	$\mathcal{L}_{online}$ (nb^{-1})
1840	81849-81970	113	1501.22
1870	81971-82104	131	2002.61
1872	82543-82656	112	2014.24
1874	82657-82783	107	2018.93
1875	82835-82909	71	1485.36
1876	82105-82203	88	2032.83
1877	82784-82834	50	1340.88
1878	82204-82261	57	2020.96
1882	82262-82310	49	2032.73
1886	82311-82358	47	2031.15
1900	82359-82404	46	2022.17
1940	82405-82462	57	2036.92
1970	82463-82530	66	2229.10
Total	81849-82909	994	24769.10

backup


electron
γ, Z
q
q
q


k'
k
q
p
X


散射电子
入射电子
γ*
质子