《李政道讲座》★GUCAS 报告
2008年6月26日 · 北京

格点上的赌博

An Introduction to Lattice QCD

刘 川

北京大学理论物理所

liuchuan@pku.edu.cn

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

格点量子色动力学介绍

第一章　导 言－从量子场论到格点量子色动力学

导　　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

格点量子色动力学介绍

- 第一章　导 言－从量子场论到格点量子色动力学
- 第二章　格点QCD的理论框架

导　　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

格点量子色动力学介绍

- 第一章　导 言－从量子场论到格点量子色动力学
- 第二章　格点QCD的理论框架
- 第三章　格点QCD的物理量测量

导　　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

格点量子色动力学介绍

- 第一章　导 言－从量子场论到格点量子色动力学
- 第二章　格点QCD的理论框架
- 第三章　格点QCD的物理量测量
- 第四章　格点QCD的数值模拟

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

格点量子色动力学介绍

- 第一章　导 言－从量子场论到格点量子色动力学
- 第二章　格点QCD的理论框架
- 第三章　格点QCD的物理量测量
- 第四章　格点QCD的数值模拟
- 第五章　格点QCD所研究的问题

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

格点量子色动力学介绍

- 第一章　导 言－从量子场论到格点量子色动力学
- 第二章　格点QCD的理论框架
- 第三章　格点QCD的物理量测量
- 第四章　格点QCD的数值模拟
- 第五章　格点QCD所研究的问题
- 第六章　总　结

References

- J. Smit,*Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- M. Creutz,*Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983
- C. Rebbi,*Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulations*, World Scientific, Singapore, 1983
- H.J. Rothe,*Introduction to Lattice Gauge Theories*, World Scientific, Singapore, 1992
- G. Münster and I. Montvay,*Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

路 线 图

$$\text{相互作用（标准模型）} \Longrightarrow \begin{cases} \text{电弱相互作用（弱电统一模型）} \\ \text{强相互作用（量子色动力学）} \end{cases} \tag{1}$$

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

路 线 图

$$\text{相互作用（标准模型）} \Longrightarrow \begin{cases} \text{电弱相互作用（弱电统一模型）} \\ \text{强相互作用（量子色动力学）} \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{量子场论} \Longrightarrow \begin{cases} \text{微扰量子场论} \\ \text{非微扰量子场论} \Longrightarrow \begin{cases} \text{格点场论} \Longrightarrow \begin{cases} \text{格点量子色动力学} \\ \text{其他} \end{cases} \\ \text{其他（sum rule, models, etc.）} \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

1 导言－From QFT to LQCD

- 0-62mph: 3.6s; Top track speed: 204 mph; Horse Power: 530bhp@6,500rpm

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 源自古希腊的信仰

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

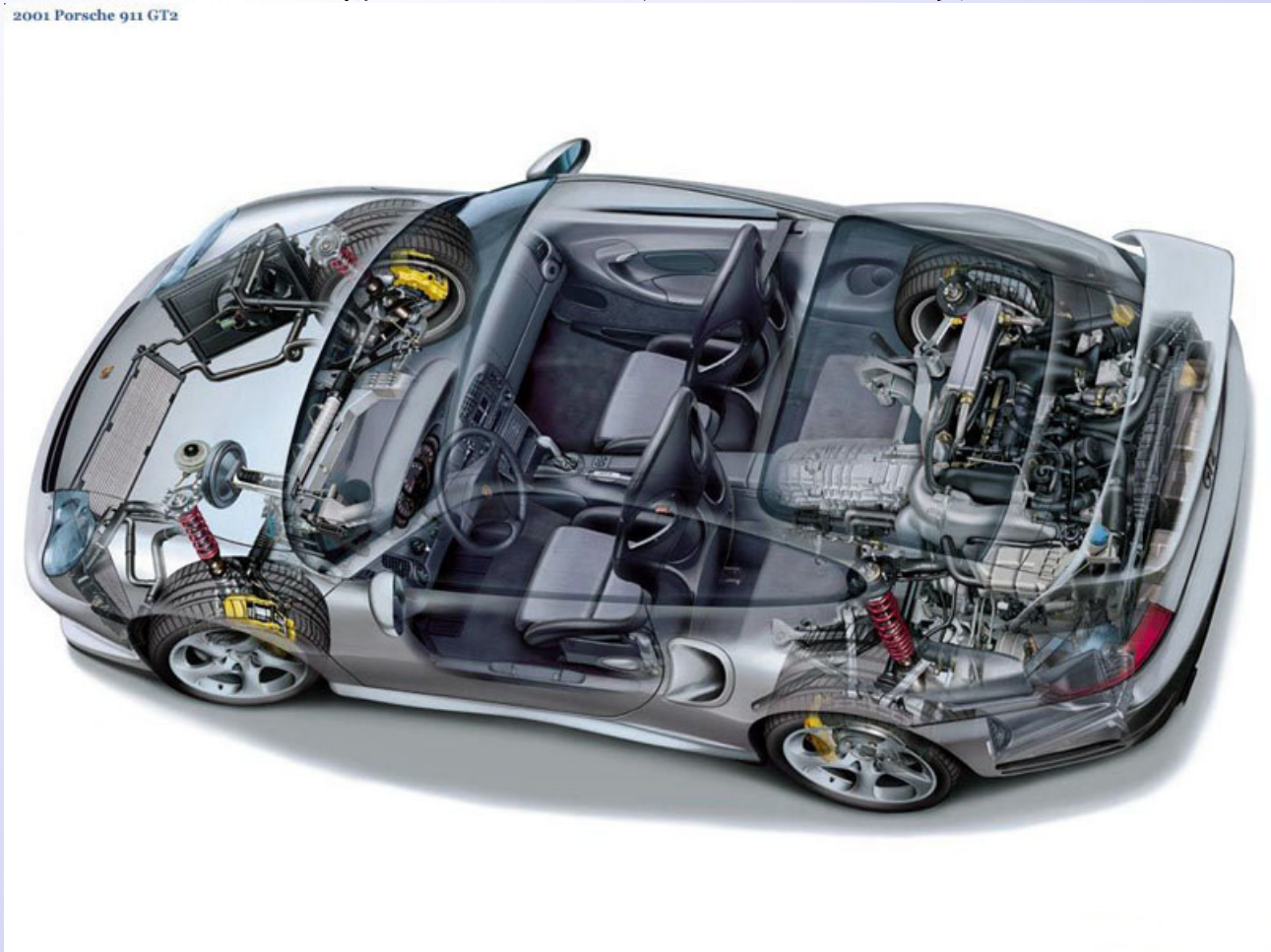
- 源自古希腊的信仰

☞ 物体的构成以及各部分的相互作用决定了物体的性质

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 源自古希腊的信仰

☞ 物体的构成以及各部分的相互作用决定了物体的性质



导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 人类对自然界基本构成及其相互作用的认识
  - ⋆ (很久)^{2}以前，人们开始了对于经典的引力相互作用 的认识【太阳系】；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 人类对自然界基本构成及其相互作用的认识
  - ⋆ (很久)^{2}以前，人们开始了对于经典的引力相互作用 的认识【太阳系】；
  - ⋆ 很久以前，人们就开始对于经典的电磁相互作用的认识【电、磁、光之统一】；

- 人类对自然界基本构成及其相互作用的认识
  - ⋆ (很久)^{2}以前，人们开始了对于经典的引力相互作用 的认识【太阳系】；
  - ⋆ 很久以前，人们就开始对于经典的电磁相互作用的认识【电、磁、光之统一】；
  - ⋆ 二次大战后，人们了解了量子的电磁相互作用 【电子、正电子、光子】；

- 人类对自然界基本构成及其相互作用的认识
  - ⋆ (很久)^{2}以前，人们开始了对于经典的引力相互作用 的认识【太阳系】；
  - ⋆ 很久以前，人们就开始对于经典的电磁相互作用的认识【电、磁、光之统一】；
  - ⋆ 二次大战后，人们了解了量子的电磁相互作用【电子、正电子、光子】；
  - ⋆ 后来，人们开始认识（量子水平的）强相互作用【介子、重子⇒夸克、胶子】；

- 人类对自然界基本构成及其相互作用的认识
  - ⋆ (很久)^{2}以前，人们开始了对于经典的引力相互作用 的认识【太阳系】；
  - ⋆ 很久以前，人们就开始对于经典的电磁相互作用的认识【电、磁、光之统一】；
  - ⋆ 二次大战后，人们了解了量子的电磁相互作用【电子、正电子、光子】；
  - ⋆ 后来，人们开始认识（量子水平的）强相互作用【介子、重子⇒夸克、胶子】；
  - ⋆ 和（量子水平的）弱相互作用【各种轻子】；

- 人类对自然界基本构成及其相互作用的认识
  - ⋆ (很久)^{2}以前，人们开始了对于经典的引力相互作用 的认识【太阳系】；
  - ⋆ 很久以前，人们就开始对于经典的电磁相互作用的认识【电、磁、光之统一】；
  - ⋆ 二次大战后，人们了解了量子的电磁相互作用【电子、正电子、光子】；
  - ⋆ 后来，人们开始认识（量子水平的）强相互作用【介子、重子⇒夸克、胶子】；
  - ⋆ 和（量子水平的）弱相互作用【各种轻子】；
  - ⋆ 再后来，电磁和弱相互作用被统一在一起【W、Z、Higgs】；

- 人类对自然界基本构成及其相互作用的认识
  - ⋆ (很久)^{2}以前，人们开始了对于经典的引力相互作用 的认识【太阳系】；
  - ⋆ 很久以前，人们就开始对于经典的电磁相互作用的认识【电、磁、光之统一】；
  - ⋆ 二次大战后，人们了解了量子的电磁相互作用【电子、正电子、光子】；
  - ⋆ 后来，人们开始认识（量子水平的）强相互作用【介子、重子⇒夸克、胶子】；
  - ⋆ 和（量子水平的）弱相互作用【各种轻子】；
  - ⋆ 再后来，电磁和弱相互作用被统一在一起【W、Z、Higgs】；
  - ⋆ 最后，他们整出个标准模型...

- 量子场论

  ⋆ 量子场论是关于多（趋于$\aleph_1$或$\aleph_0$）自由度系统的的量子理论；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 量子场论
  - ⋆ 量子场论是关于多（趋于$\aleph_1$或$\aleph_0$）自由度系统的的量子理论；
  - ⋆ 量子场论 可以大致分为
    - ∗ 非相对论性量子场论；➠ 凝聚态物理、低能核物理；

- 量子场论
  - ⋆ 量子场论是关于多（趋于$\aleph_1$或$\aleph_0$）自由度系统的的量子理论；
  - ⋆ 量子场论 可以大致分为
    - ∗ 非相对论性量子场论；➠ 凝聚态物理、低能核物理；
    - ∗ 相对论性量子场论；➠ 中高能核物理和高能物理；

- 量子场论
  - ⋆ 量子场论是关于多（趋于$\aleph_1$或$\aleph_0$）自由度系统的的量子理论；
  - ⋆ 量子场论 可以大致分为
    - ∗ 非相对论性量子场论；➠ 凝聚态物理、低能核物理；
    - ∗ 相对论性量子场论；➠ 中高能核物理和高能物理；
  - ⋆ 目前我们关于自然界三种基本相互作用的量子理论都可以在量子场论的框架下加以概括；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 量子场论
  - ⋆ 量子场论是关于多（趋于$\aleph_1$或$\aleph_0$）自由度系统的的量子理论；
  - ⋆ 量子场论 可以大致分为
    - ∗ 非相对论性量子场论；➠ 凝聚态物理、低能核物理；
    - ∗ 相对论性量子场论；➠ 中高能核物理和高能物理；
  - ⋆ 目前我们关于自然界三种基本相互作用的量子理论都可以在量子场论的框架下加以概括；
  - ⋆ 标准模型就是这样一个理论

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 各种基本量子场

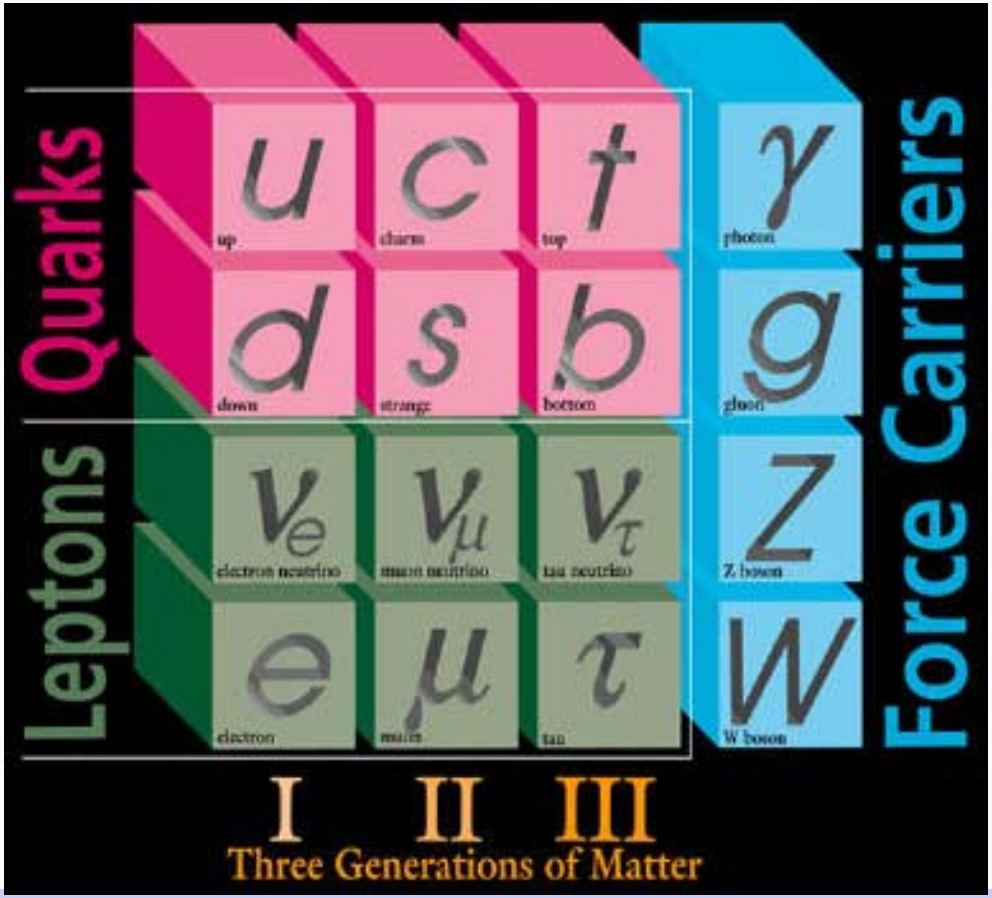
分类	自旋	粒子及其场	相互作用
标量场	0	Higgs 场	电弱
旋量场	1/2	轻子场（带电轻子、中微子）	电弱
		夸克场（三色、六味）	强、电弱
矢量场	1	电磁场	电磁
		$W^{\pm}$，Z 场	电弱
		胶子场	强

- 各种非基本量子场
  - 重子场、介子场、电子场、声子场.....

- 标准模型

  ⋆ 标准模型包含关于电弱部分的Weinberg-Salam模型和关于强相互作用部分的量子色动力学（QCD）；

  ⋆ 它是关于这三种基本相互作用的量子规范理论，相应的规范群为：$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$；



- That's the end?

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- That's the end?
- No...

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- That's the end?
- No...
  - Unification? Gravitation?

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- That's the end?
- No...
  - Unification? Gravitation?
  - Understand SM better...

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- That's the end?
- No...
  - Unification? Gravitation?
  - Understand SM better...
    - EW phase transition (Higgs)

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- That's the end?
- No...
  - Unification? Gravitation?
  - Understand SM better...
    - EW phase transition (Higgs)
    - the strong interaction!

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 强相互作用的性质

  ⋆ 构成通常物质的基本单元是夸克和反夸克。它们依靠强相互作用（交换胶子）形成强子进而构成了通常的物质；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 强相互作用的性质
  - ⋆ 构成通常物质的基本单元是夸克和反夸克。它们依靠强相互作用（交换胶子）形成强子进而构成了通常的物质；
  - ⋆ QCD: 夸克场、反夸克场、胶子场（规范场）的量子规范理论；

- 强相互作用的性质
  - ⋆ 构成通常物质的基本单元是夸克和反夸克。它们依靠强相互作用（交换胶子）形成强子进而构成了通常的物质；
  - ⋆ QCD: 夸克场、反夸克场、胶子场（规范场）的量子规范理论；
  - ⋆ 量子色动力学 （Quantum Chromodynamics, QCD）被认为是关于强相互作用的基本理论；它是标准模型的重要组成部分；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 强相互作用的性质
  - ⋆ 构成通常物质的基本单元是夸克和反夸克。它们依靠强相互作用（交换胶子）形成强子进而构成了通常的物质；
  - ⋆ QCD: 夸克场、反夸克场、胶子场（规范场）的量子规范理论；
  - ⋆ 量子色动力学（Quantum Chromodynamics, QCD）被认为是关于强相互作用的基本理论；它是标准模型的重要组成部分；
  - ⋆ 量子色动力学的基本特性：低能时的色禁闭、手征对称性破缺、非微扰特性、高能区的渐进自由。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

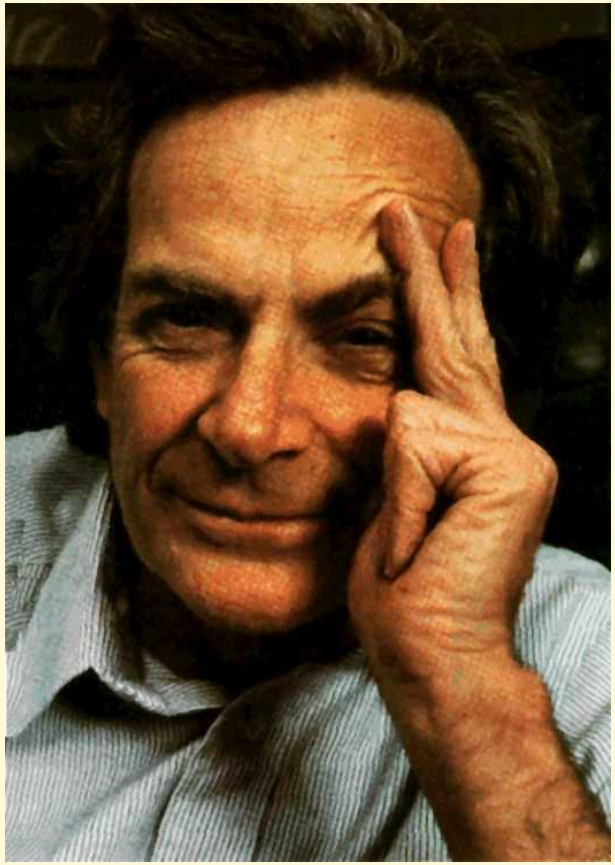
- 强相互作用的性质
  - ⋆ 构成通常物质的基本单元是夸克和反夸克。它们依靠强相互作用（交换胶子）形成强子进而构成了通常的物质；
  - ⋆ QCD: 夸克场、反夸克场、胶子场（规范场）的量子规范理论；
  - ⋆ 量子色动力学（Quantum Chromodynamics, QCD）被认为是关于强相互作用的基本理论；它是标准模型的重要组成部分；
  - ⋆ 量子色动力学的基本特性：低能时的色禁闭、手征对称性破缺、非微扰特性、高能区的渐进自由。

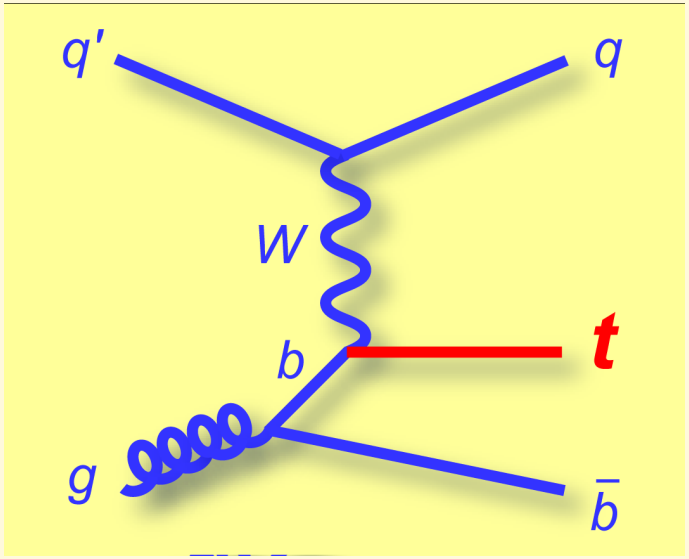
☞ 格点量子色动力学（Lattice QCD）就是一个从定义到计算完全非微扰的量子场论方法。

- 什么是量子场论？什么是非微扰？

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 量子场论初体验（自由场+微扰的相互作用）





导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 什么是量子场论？

  Q 什么定义了一个量子场论？

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 什么是量子场论？

  Q 什么定义了一个量子场论？

  A 场（动力学自由度）$\oplus$ 拉氏量（作用量）；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 什么是量子场论？

  Q 什么定义了一个量子场论？

  A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

  ✖ 这仅仅定义了一个经典场论

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 什么是量子场论？

  Q 什么定义了一个量子场论？

  A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

  ✖ 这仅仅定义了一个经典场论

  A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 什么是量子场论？

Q 什么定义了一个量子场论？

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

✖ 这仅仅定义了一个经典场论

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则；

✖ 圈图的紫外发散；

- 什么是量子场论？

Q 什么定义了一个量子场论？

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

✖ 这仅仅定义了一个经典场论

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则；

✖ 圈图的紫外发散；

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则✚ 自恰的正规化和重整化；

- 什么是量子场论？

Q 什么定义了一个量子场论？

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

✖ 这仅仅定义了一个经典场论

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则；

✖ 圈图的紫外发散；

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则✚ 自恰的正规化和重整化；

✖ 这仍然仅仅定义了微扰量子场论；

- 什么是量子场论？

Q 什么定义了一个量子场论？

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

✖ 这仅仅定义了一个经典场论

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则；

✖ 圈图的紫外发散；

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则✚ 自恰的正规化和重整化；

✖ 这仍然仅仅定义了微扰量子场论；

■ 微扰量子场论 $\neq$ 量子场论；

- 什么是量子场论？

Q 什么定义了一个量子场论？

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

✖ 这仅仅定义了一个经典场论

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则；

✖ 圈图的紫外发散；

A 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）✚ 费曼规则✚ 自恰的正规化和重整化；

✖ 这仍然仅仅定义了微扰量子场论；

■ 微扰量子场论 $\neq$ 量子场论；

■ 微扰量子场论 $\ll$ 量子场论！

- 一个例子（微扰论的局限性）

  ⋆ 考虑一个“微扰展开”：

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! \lambda^n \simeq 1 - \lambda + 2\lambda^2 - 6\lambda^3 + \cdots \tag{3}$$

  ⋆ 这个级数在通常数学意义下并不收敛；它的收敛半径为零；我们将它的前 N 项的和记为：$S_N(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! \lambda^n$；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 一个例子（微扰论的局限性）

  ⋆ 考虑一个“微扰展开”：

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! \lambda^n \simeq 1 - \lambda + 2\lambda^2 - 6\lambda^3 + \cdots \tag{3}$$

  ⋆ 这个级数在通常数学意义下并不收敛；它的收敛半径为零；我们将它的前 N 项的和记为：$S_N(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! \lambda^n$；

  ⋆ 另一方面，考虑参数积分：

$$F(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+\lambda t} dt, \tag{4}$$

  容易发现，如果我们将被积函数中的$1/(1+\lambda t)$展开并且逐项积分，我们就得到展开式 (3)；

- 一个例子（微扰论的局限性）

  ⋆ 考虑一个“微扰展开”：

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! \lambda^n \simeq 1 - \lambda + 2\lambda^2 - 6\lambda^3 + \cdots \tag{3}$$

  ⋆ 这个级数在通常数学意义下并不收敛；它的收敛半径为零；我们将它的前 N 项的和记为：$S_N(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! \lambda^n$；

  ⋆ 另一方面，考虑参数积分：

$$F(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+\lambda t} dt, \tag{4}$$

  容易发现，如果我们将被积函数中的$1/(1+\lambda t)$展开并且逐项积分，我们就得到展开式 (3)；

  ⋆ 这是渐近展开的一个典型的例子。级数 (3)不是一个收敛的级数，积分 (4)也不允许逐项积分。但是，展开级数仍然具有一定的意义。事实上它满足：

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-N} \left(F(\lambda) - S_N(\lambda) \right) = 0, \tag{5}$$

  满足这个条件的级数展开 (3)被称为函数 (4)的渐近展开。

- 渐近展开的意义

  ⋆ 例如如果我们计算 $F(\lambda = 0.1)$，并且假定我们并不知道函数 $F(\lambda)$ 的表达式 (4)，而是仅仅知道它的渐近展开式 (3)，我们能够得到什么信息呢？

- 渐近展开的意义

  ⋆ 例如如果我们计算 $F(\lambda = 0.1)$，并且假定我们并不知道函数 $F(\lambda)$ 的表达式 (4)，而是仅仅知道它的渐近展开式 (3)，我们能够得到什么信息呢？

  ⋆ 我们可以分别计算渐近展开的前 N 项的和 $S_N(\lambda = 0.1)$。我们得到下面的结果：

n	3	5	10	11	16	20	25
S_n	0.92	0.9164	0.915463	0.915819	0.914840	0.907614	1.355180

注意在这个例子中，S_{10} 和 S_{11} 相当接近；随后，S_N 的数值开始趋于发散；

- 渐近展开的意义

  ⋆ 例如如果我们计算 $F(\lambda = 0.1)$，并且假定我们并不知道函数 $F(\lambda)$ 的表达式 (4)，而是仅仅知道它的渐近展开式 (3)，我们能够得到什么信息呢？

  ⋆ 我们可以分别计算渐近展开的前 N 项的和 $S_N(\lambda = 0.1)$。我们得到下面的结果：

n	3	5	10	11	16	20	25
S_n	0.92	0.9164	0.915463	0.915819	0.914840	0.907614	1.355180

  注意在这个例子中，S_{10} 和 S_{11} 相当接近；随后，S_N 的数值开始趋于发散；

  ⋆ 数值计算积分 (4)我们发现：$F(\lambda = 0.1) \simeq 0.915633$，十分接近$S_{10}$ 和 S_{11} 的数值；这是因为 $\lambda = 0.1$ 还是比较小的，毕竟：$|S_N(\lambda) - F(\lambda)| \sim o(\lambda^N)$；

- 渐近展开的意义

  ⋆ 例如如果我们计算 $F(\lambda = 0.1)$，并且假定我们并不知道函数 $F(\lambda)$ 的表达式 (4)，而是仅仅知道它的渐近展开式 (3)，我们能够得到什么信息呢？

  ⋆ 我们可以分别计算渐近展开的前 N 项的和 $S_N(\lambda = 0.1)$。我们得到下面的结果：

n	3	5	10	11	16	20	25
S_n	0.92	0.9164	0.915463	0.915819	0.914840	0.907614	1.355180

  注意在这个例子中，S_{10} 和 S_{11} 相当接近；随后，S_N 的数值开始趋于发散；

  ⋆ 数值计算积分 (4)我们发现：$F(\lambda = 0.1) \simeq 0.915633$，十分接近$S_{10}$ 和 S_{11} 的数值；这是因为 $\lambda = 0.1$ 还是比较小的，毕竟：$|S_N(\lambda) - F(\lambda)| \sim o(\lambda^N)$；

  ✔ **只要 λ 足够小，即使是发散的渐近展开 $S_N(\lambda)$ 仍然可以给出函数足够好的估计！**

- 渐近展开的起源

  ⋆ 之所以函数 $F(\lambda)$ 的展开式 (3)仅仅是渐近展开而不是收敛的Taylor级数是有原因的。

- 渐近展开的起源
  - ⋆ 之所以函数 $F(\lambda)$ 的展开式 (3)仅仅是渐近展开而不是收敛的Taylor级数是有原因的。
  - ⋆ 考察函数 $F(\lambda)$ 的定义式 (4) 我们可以很容易证明：只要 $\lambda < 0$ 这个积分就是发散的；

- 渐近展开的起源
  - ⋆ 之所以函数 $F(\lambda)$ 的展开式 (3)仅仅是渐近展开而不是收敛的Taylor级数是有原因的。
  - ⋆ 考察函数 $F(\lambda)$ 的定义式 (4) 我们可以很容易证明：只要 $\lambda < 0$ 这个积分就是发散的；
  - ⋆ 因此，在复 λ 平面上，$\lambda = 0$ 是函数 $F(\lambda)$ 的本性奇点；

- 渐近展开的起源
  - ⋆ 之所以函数 $F(\lambda)$ 的展开式 (3)仅仅是渐近展开而不是收敛的Taylor级数是有原因的。
  - ⋆ 考察函数 $F(\lambda)$ 的定义式 (4) 我们可以很容易证明：只要 $\lambda < 0$ 这个积分就是发散的；
  - ⋆ 因此，在复 λ 平面上，$\lambda = 0$ 是函数 $F(\lambda)$ 的本性奇点；
  - ⋆ 函数在其本性奇点附近不可能存在收敛的级数展开，仅仅能够存在渐近展开。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 量子场论中的微扰展开
  - ✔ 目前已知的、描写自然界中各种相互作用的量子场论（包括QED，标量场论、QCD等等）之微扰展开都不是收敛的级数，而是发散的渐近展开；

- 量子场论中的微扰展开
  - ✔ 目前已知的、描写自然界中各种相互作用的量子场论（包括QED，标量场论、QCD等等）之微扰展开都不是收敛的级数，而是发散的渐近展开；
  - ♣ 真实的量子场论中总是存在微扰展开无法描写的效应，我们统称为非微扰效应。

- 量子场论中的微扰展开

✔ 目前已知的、描写自然界中各种相互作用的量子场论（包括QED，标量场论、QCD等等）之微扰展开都不是收敛的级数，而是发散的渐近展开；

♣ 真实的量子场论中总是存在微扰展开无法描写的效应，我们统称为非微扰效应。

❖ 对于强耦合的系统（例如QCD）非微扰效应体现的特别明显；

- 量子场论中的微扰展开

✔ 目前已知的、描写自然界中各种相互作用的量子场论（包括QED，标量场论、QCD等等）之微扰展开都不是收敛的级数，而是发散的渐近展开；

♣ 真实的量子场论中总是存在微扰展开无法描写的效应，我们统称为非微扰效应。

❖ 对于强耦合的系统（例如QCD）非微扰效应体现的特别明显；

☞ 研究量子场论的性质需要非微扰的理论方法。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 回到前面提到的重要问题

Q 什么定义了一个量子场论？

❶ 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

- 回到前面提到的重要问题

Q 什么定义了一个量子场论？

❶ 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

❷ 我们还需要的一个非微扰的截断（正规化）和重整化方法；

- 回到前面提到的重要问题

Q 什么定义了一个量子场论？

❶ 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

❷ 我们还需要的一个非微扰的截断（正规化）和重整化方法；

❑ 格点场论可以作为一个很好的候选者，它满足上述所有条件；

- 回到前面提到的重要问题

Q 什么定义了一个量子场论？

❶ 场（动力学自由度）✚ 拉氏量（作用量）；

❷ 我们还需要的一个非微扰的截断（正规化）和重整化方法；

❑ 格点场论可以作为一个很好的候选者，它满足上述所有条件；

❑ 事实上，很多情况下，格点量子场论几乎是唯一的候选者！

❑ 连续时空量子场论可被定义为格点量子场论的连续极限！

- 在实际的方面
  - ❖ 格点场论不仅仅提供了非微扰的理论框架，它还提供了非微扰的计算方法；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 在实际的方面
  - 格点场论不仅仅提供了非微扰的理论框架，它还提供了非微扰的计算方法；
  - 利用路径积分的表述和计算机的Monte Carlo数值模拟，我们可以非微扰地计算感兴趣的物理量；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 在实际的方面
  - 格点场论不仅仅提供了非微扰的理论框架，它还提供了非微扰的计算方法；
  - 利用路径积分的表述和计算机的Monte Carlo数值模拟，我们可以非微扰地计算感兴趣的物理量；
  - 格点QCD是唯一从QCD基本自由度出发的、系统的非微扰理论方法。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 在实际的方面
  - ❖ 格点场论不仅仅提供了非微扰的理论框架，它还提供了非微扰的计算方法；
  - ❖ 利用路径积分的表述和计算机的Monte Carlo数值模拟，我们可以非微扰地计算感兴趣的物理量；
  - ❖ 格点QCD是唯一从QCD基本自由度出发的、系统的非微扰理论方法。

❀ 格点 QCD 既是世界观；又是方法论！

2 格点QCD的基本理论框架

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- Lattice QCD 的基本理论方法

  ⋆ 时空被分立化。夸克场 ψ_x、反夸克场 $\bar{\psi}_x$ 定义在格点 x 上；规范场 $U_\mu(x) \in SU(3)$ 定义在由点 x 指向 $x + \hat{\mu}a$ 的链接上；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- Lattice QCD 的基本理论方法

  ⋆ 时空被分立化。夸克场 ψ_x、反夸克场 $\bar{\psi}_x$ 定义在格点 x 上；规范场 $U_\mu(x) \in SU(3)$ 定义在由点 x 指向 $x+\hat{\mu}a$ 的链接上；

  ⋆ 规范不变的作用量：

$$S[\bar{\psi}, \psi, U_\mu] = S_g[U_\mu] + S_f[\bar{\psi}, \psi, U_\mu], \tag{6}$$

  其中 S_g 为纯规范场作用量；$S_f = \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \mathcal{M}[U_\mu]_{x,y} \psi_y$ 为费米子作用量；$\mathcal{M}[U_\mu]$ 称为费米子矩阵。

- Lattice QCD 的基本理论方法

  ⋆ 时空被分立化。夸克场 ψ_x、反夸克场 $\bar{\psi}_x$ 定义在格点 x 上；规范场 $U_\mu(x) \in SU(3)$ 定义在由点 x 指向 $x+\hat{\mu}a$ 的链接上；

  ⋆ 规范不变的作用量：

$$S[\bar{\psi}, \psi, U_\mu] = S_g[U_\mu] + S_f[\bar{\psi}, \psi, U_\mu], \tag{6}$$

  其中 S_g 为纯规范场作用量；$S_f = \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \mathcal{M}[U_\mu]_{x,y} \psi_y$ 为费米子作用量；$\mathcal{M}[U_\mu]$ 称为费米子矩阵。

  ⋆ 整个理论由欧式空间的路径积分（配分函数、生成泛函）定义：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U_\mu e^{-S[\bar{\psi},\psi,U_\mu]} = \int \mathcal{D}U_\mu e^{-S_g[U_\mu]} \det \mathcal{M}[U_\mu], \tag{7}$$

  其中 $\mathcal{D}U_\mu = \prod_{\mu,x} dU_\mu(x)$ 为规范群上的 Haar measure；

- Lattice QCD 的基本理论方法

  ⋆ 时空被分立化。夸克场 ψ_x、反夸克场 $\bar{\psi}_x$ 定义在格点 x 上；规范场 $U_\mu(x) \in SU(3)$ 定义在由点 x 指向 $x+\hat{\mu}a$ 的链接上；

  ⋆ 规范不变的作用量：

$$S[\bar{\psi}, \psi, U_\mu] = S_g[U_\mu] + S_f[\bar{\psi}, \psi, U_\mu], \tag{6}$$

  其中 S_g 为纯规范场作用量；$S_f = \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \mathcal{M}[U_\mu]_{x,y} \psi_y$ 为费米子作用量；$\mathcal{M}[U_\mu]$ 称为费米子矩阵。

  ⋆ 整个理论由欧式空间的路径积分（配分函数、生成泛函）定义：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U_\mu e^{-S[\bar{\psi},\psi,U_\mu]} = \int \mathcal{D}U_\mu e^{-S_g[U_\mu]} \det \mathcal{M}[U_\mu], \tag{7}$$

  其中 $\mathcal{D}U_\mu = \prod_{\mu,x} dU_\mu(x)$ 为规范群上的 Haar measure；

  ⋆ 理论的物理可观测量体现在各种算符的期望值中：

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U_\mu \mathcal{O}[\bar{\psi}, \psi, U_\mu] e^{-S[\bar{\psi},\psi,U_\mu]}, \tag{8}$$

  其中 $\mathcal{O}[\bar{\psi}, \psi, U_\mu]$ 是任何一个由场变量构成的物理量。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 几点评述

  ⋆ 格点上的作用量都是所谓的裸作用量；其中的参数都是裸参数；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 几点评述
  - ⋆ 格点上的作用量都是所谓的裸作用量；其中的参数都是裸参数；
  - ⋆ 对于一个有限大的格点，它的格距 a 自然地提供了一个紫外截断：π/a；它的尺度 L 自然地提供了一个红外截断：$2\pi/L$。因此，格点QCD是已经正规化的理论；

- 几点评述
  - ⋆ 格点上的作用量都是所谓的裸作用量；其中的参数都是裸参数；
  - ⋆ 对于一个有限大的格点，它的格距 a 自然地提供了一个紫外截断：π/a；它的尺度 L 自然地提供了一个红外截断：$2\pi/L$。因此，格点QCD是已经正规化的理论；
  - ⋆ 格点QCD的配分函数的路径积分的测度是具有完全良好定义的量，因此它不仅仅是形式的表达式；

- 几点评述
  - ⋆ 格点上的作用量都是所谓的裸作用量；其中的参数都是裸参数；
  - ⋆ 对于一个有限大的格点，它的格距 a 自然地提供了一个紫外截断：π/a；它的尺度 L 自然地提供了一个红外截断：$2\pi/L$。因此，格点QCD是已经正规化的理论；
  - ⋆ 格点QCD的配分函数的路径积分的测度是具有完全良好定义的量，因此它不仅仅是形式的表达式；
  - ⋆ 欧式空间的格点QCD完全是非微扰的；这包括配分函数、正规化、关联函数的定义和计算等等都是非微扰的；

- 几点评述
  - ⋆ 格点上的作用量都是所谓的裸作用量；其中的参数都是裸参数；
  - ⋆ 对于一个有限大的格点，它的格距 a 自然地提供了一个紫外截断：π/a；它的尺度 L 自然地提供了一个红外截断：$2\pi/L$。因此，格点QCD是已经正规化的理论；
  - ⋆ 格点QCD的配分函数的路径积分的测度是具有完全良好定义的量，因此它不仅仅是形式的表达式；
  - ⋆ 欧式空间的格点QCD完全是非微扰的；这包括配分函数、正规化、关联函数的定义和计算等等都是非微扰的；
  - ⋆ 与连续时空的规范场不同，格点QCD中的（格点）规范场的取值是在相应的规范群中，而不是在其李代数中。这样可以避免所谓的Gribov不确定性，同时也可以不必做规范固定。

- 规范作用量的选择

  ⋆ 格点上的规范变换的规则是：

$$
\begin{aligned}
\psi_x &\rightarrow g_x \psi_x \ , \quad \bar{\psi}_x \rightarrow \bar{\psi}_x g_x^\dagger, \\
U_\mu(x) &\rightarrow g_x U_\mu(x) g_{x+\hat{\mu}}^\dagger,
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中 $g_x \in SU(3)$ 为规范变换的群元素；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 规范作用量的选择

  ⋆ 格点上的规范变换的规则是：

$$\begin{aligned} \psi_x &\rightarrow g_x \psi_x \,, \quad \bar{\psi}_x \rightarrow \bar{\psi}_x g_x^\dagger, \\ U_\mu(x) &\rightarrow g_x U_\mu(x) g_{x+\hat{\mu}}^\dagger, \end{aligned} \tag{9}$$

  其中 $g_x \in SU(3)$ 为规范变换的群元素；

  ⋆ 构造规范不变的纯规范场作用量：原则上可以沿着格点上任何一个闭合回路，顺序将相应规范场相乘，最后取其特征标（即相应表示矩阵的迹）。这称为 Wilson 圈。

- 规范作用量的选择

  ⋆ 格点上的规范变换的规则是：

$$\begin{aligned} \psi_x &\rightarrow g_x\psi_x\,, \quad \bar{\psi}_x \rightarrow \bar{\psi}_x g_x^\dagger, \\ U_\mu(x) &\rightarrow g_x U_\mu(x) g_{x+\hat{\mu}}^\dagger, \end{aligned} \tag{9}$$

  其中 $g_x \in SU(3)$ 为规范变换的群元素；

  ⋆ 构造规范不变的纯规范场作用量：原则上可以沿着格点上任何一个闭合回路，顺序将相应规范场相乘，最后取其特征标（即相应表示矩阵的迹）。这称为 Wilson 圈。

  ⋆ 格点上最小的非平庸的闭合回路就是所谓的小方格（plaquette）。最简单的规范场作用量就是 Wilson 的plaquette 作用量；

$$S_g[U_\mu] = \beta \sum_P \left(1 - \frac{1}{3} ReTr(U_P)\right), \tag{10}$$

  其中 $U_P = U_\mu(x)U_\nu(x+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)$ 为格点上的 plaquette；$\beta = 6/g_0^2$，而 g_0 为裸的规范耦合常数。

- 规范作用量的选择

  ⋆ 格点上的规范变换的规则是：

$$\begin{aligned} \psi_x &\rightarrow g_x\psi_x\,, \quad \bar{\psi}_x \rightarrow \bar{\psi}_x g_x^\dagger, \\ U_\mu(x) &\rightarrow g_x U_\mu(x) g_{x+\hat{\mu}}^\dagger, \end{aligned} \tag{9}$$

  其中 $g_x \in SU(3)$ 为规范变换的群元素；

  ⋆ 构造规范不变的纯规范场作用量：原则上可以沿着格点上任何一个闭合回路，顺序将相应规范场相乘，最后取其特征标（即相应表示矩阵的迹）。这称为 Wilson 圈。

  ⋆ 格点上最小的非平庸的闭合回路就是所谓的小方格（plaquette）。最简单的规范场作用量就是 Wilson 的plaquette 作用量；

$$S_g[U_\mu] = \beta \sum_P \left(1 - \frac{1}{3} ReTr(U_P)\right), \tag{10}$$

  其中 $U_P = U_\mu(x)U_\nu(x+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)$ 为格点上的 plaquette；$\beta = 6/g_0^2$，而 g_0 为裸的规范耦合常数。

  ⋆ 为了减少格距误差，目前通常使用各种规范场的改进作用量（Symanzik，Iwasaki等等）。

- 夸克作用量的选择则是一个更加复杂的问题
  - ⋆ 手征对称性的实现不是一个容易的事情。
  - ⋆ 将连续时空的费米子作用量：$S = \int d^4x\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi$ 分立化，给出天真费米子（naive fermion）；

- 夸克作用量的选择则是一个更加复杂的问题
  - ⋆ 手征对称性的实现不是一个容易的事情。
  - ⋆ 将连续时空的费米子作用量：$S = \int d^4x\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi$ 分立化，给出天真费米子（naive fermion）；
  - ⋆ 它具有典型的费米子加倍问题（fermion doubling problem）；不同的加倍子位于布里渊区的不同位置；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 夸克作用量的选择则是一个更加复杂的问题
  - ⋆ 手征对称性的实现不是一个容易的事情。
  - ⋆ 将连续时空的费米子作用量：$S = \int d^4x\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi$ 分立化，给出天真费米子（naive fermion）；
  - ⋆ 它具有典型的费米子加倍问题（fermion doubling problem）；不同的加倍子位于布里渊区的不同位置；
  - ⋆ **Too simple, sometimes naive!**

- 手征费米子与反常
  - ⋆ 费米子加倍问题与费米子的手性有着重要的联系；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 手征费米子与反常
  - ⋆ 费米子加倍问题与费米子的手性有着重要的联系；
  - ⋆ 位于布里渊区不同位置的加倍子正好使得手征反常相消；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 手征费米子与反常
  - ⋆ 费米子加倍问题与费米子的手性有着重要的联系；
  - ⋆ 位于布里渊区不同位置的加倍子正好使得手征反常相消；
  - ⋆ 费米子加倍问题不仅仅是格点的技术问题；它是一个根本性的理论问题。这个问题的存在反映了一个事实：我们缺乏手征规范理论的非微扰定义。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 手征费米子与反常
  - ⋆ 费米子加倍问题与费米子的手性有着重要的联系；
  - ⋆ 位于布里渊区不同位置的加倍子正好使得手征反常相消；
  - ⋆ 费米子加倍问题不仅仅是格点的技术问题；它是一个根本性的理论问题。这个问题的存在反映了一个事实：我们缺乏手征规范理论的非微扰定义。
  - ⋆ Nielsen-Ninomiya 定理（即所谓的No-go定理）：无法找到费米子作用量同时满足：
    1. 无加倍子；
    2. 局域性；
    3. 厄密性；
    4. 手征性：$\{\gamma_5, \mathcal{M}\} = 0$；

- Wilson 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。
  - ⋆ Wilson 费米子选择的是破坏手征性。
  - ⋆ 在 Naive fermion 作用量中加上量纲为 5 的算符：$\bar{\psi}\nabla^2\psi$；

$$\mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum_\mu \left[U_\mu(x)(1-\gamma_\mu)\delta_{x+\hat{\mu},y} + U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})(1+\gamma_\mu)\delta_{x-\hat{\mu},y} \right] . \tag{11}$$

其中 κ 称为跳跃参数，它与裸夸克质量有关。

- Wilson 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。
  - ⋆ Wilson 费米子选择的是破坏手征性。
  - ⋆ 在 Naive fermion 作用量中加上量纲为 5 的算符：$\bar{\psi}\nabla^2\psi$；

$$\mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum_\mu \left[U_\mu(x)(1-\gamma_\mu)\delta_{x+\hat{\mu},y} + U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})(1+\gamma_\mu)\delta_{x-\hat{\mu},y} \right] . \tag{11}$$

    其中 κ 称为跳跃参数，它与裸夸克质量有关。
  - ⋆ Wilson 项的加入使得所有的加倍子都等效获得了正比于截断（即 π/a）量级的质量，因此所有加倍子都在低能时脱耦；

- Wilson 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。
  - ⋆ Wilson 费米子选择的是破坏手征性。
  - ⋆ 在 Naive fermion 作用量中加上量纲为 5 的算符：$\bar{\psi}\nabla^2\psi$；

$$\mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum_\mu \left[U_\mu(x)(1-\gamma_\mu)\delta_{x+\hat{\mu},y} + U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})(1+\gamma_\mu)\delta_{x-\hat{\mu},y} \right] . \tag{11}$$

    其中 κ 称为跳跃参数，它与裸夸克质量有关。
  - ⋆ Wilson 项的加入使得所有的加倍子都等效获得了正比于截断（即 π/a）量级的质量，因此所有加倍子都在低能时脱耦；
  - ⋆ 手征对称性的破缺使得质量重整化、算符混合等问题复杂化。

- Wilson 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。
  - ⋆ Wilson 费米子选择的是破坏手征性。
  - ⋆ 在 Naive fermion 作用量中加上量纲为 5 的算符：$\bar{\psi}\nabla^2\psi$；

$$\mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum_\mu \left[U_\mu(x)(1-\gamma_\mu)\delta_{x+\hat{\mu},y} + U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})(1+\gamma_\mu)\delta_{x-\hat{\mu},y} \right] . \tag{11}$$

    其中 κ 称为跳跃参数，它与裸夸克质量有关。
  - ⋆ Wilson 项的加入使得所有的加倍子都等效获得了正比于截断（即 π/a）量级的质量，因此所有加倍子都在低能时脱耦；
  - ⋆ 手征对称性的破缺使得质量重整化、算符混合等问题复杂化。
  - ⋆ 手征对称性在连续极限下得以恢复。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- Kogut-Susskind (staggered) 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。

  ⋆ Staggered 费米子选择的是部分破坏手征性；部分解决加倍问题。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- Kogut-Susskind (staggered) 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。
  - ⋆ Staggered 费米子选择的是部分破坏手征性；部分解决加倍问题。
  - ⋆ staggered 费米子作用量为：

$$\mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = m_f\delta_{xy} + \frac{1}{2}\sum_\mu (-)^{x_0+\cdots+x_{\mu-1}}\left[U_\mu(x)\delta_{x+\hat{\mu},y} - U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu},y}\right]. \tag{12}$$

其中 m_f 为裸夸克质量。

- Kogut-Susskind (staggered) 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。
  - ⋆ Staggered 费米子选择的是部分破坏手征性；部分解决加倍问题。
  - ⋆ staggered 费米子作用量为：

$$\mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = m_f\delta_{xy} + \frac{1}{2}\sum_\mu (-)^{x_0+\cdots+x_{\mu-1}}\left[U_\mu(x)\delta_{x+\hat{\mu},y} - U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu},y}\right]. \tag{12}$$

    其中 m_f 为裸夸克质量。
  - ⋆ staggered 费米子具有 $U(1)$ 的（而不是QCD所要求的 $SU(2)$）手征对称性；

- Kogut-Susskind (staggered) 费米子： $S_f = \bar{\psi}\mathcal{M}[U_\mu]\psi$。
  - ⋆ Staggered 费米子选择的是部分破坏手征性；部分解决加倍问题。
  - ⋆ staggered 费米子作用量为：

$$\mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = m_f\delta_{xy} + \frac{1}{2}\sum_\mu (-)^{x_0+\cdots+x_{\mu-1}}\left[U_\mu(x)\delta_{x+\hat{\mu},y} - U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu},y}\right]. \tag{12}$$

    其中 m_f 为裸夸克质量。
  - ⋆ staggered 费米子具有 $U(1)$ 的（而不是QCD所要求的 $SU(2)$）手征对称性；
  - ⋆ 仍然存在加倍问题。一味（flavor）的 staggered 费米子实际上存在 4 种品味（taste）。

- 重整化、重整化群与连续极限

  ⋆ 格点场论的连续极限 $\Longleftrightarrow$ 二级相变的临界现象；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 重整化、重整化群与连续极限
  - ⋆ 格点场论的连续极限 $\Longleftrightarrow$ 二级相变的临界现象；
  - ⋆ 在临界区域，系统中物理的关联长度 $\xi/a \gg 1$，因此时空的分立性不再重要，连续时空的对称性得以恢复；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 重整化、重整化群与连续极限
  - ⋆ 格点场论的连续极限 $\Longleftrightarrow$ 二级相变的临界现象；
  - ⋆ 在临界区域，系统中物理的关联长度 $\xi/a \gg 1$，因此时空的分立性不再重要，连续时空的对称性得以恢复；
  - ⋆ 二级相变的临界现象 ➠ 普适性➠ 连续时空的量子场论；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 重整化、重整化群与连续极限
  - ⋆ 格点场论的连续极限 $\Longleftrightarrow$ 二级相变的临界现象；
  - ⋆ 在临界区域，系统中物理的关联长度 $\xi/a \gg 1$，因此时空的分立性不再重要，连续时空的对称性得以恢复；
  - ⋆ 二级相变的临界现象 ➠ 普适性➠ 连续时空的量子场论；
  - ⋆ Wilson 的重整化群理论还告诉我们，系统在临界区域的行为可以通过重整化群变换（block-spin 变换）来研究；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 重整化、重整化群与连续极限

  ⋆ 格点场论的连续极限 $\Longleftrightarrow$ 二级相变的临界现象；

  ⋆ 在临界区域，系统中物理的关联长度 $\xi/a \gg 1$，因此时空的分立性不再重要，连续时空的对称性得以恢复；

  ⋆ 二级相变的临界现象 ➠ 普适性➠ 连续时空的量子场论；

  ⋆ Wilson 的重整化群理论还告诉我们，系统在临界区域的行为可以通过重整化群变换（block-spin 变换）来研究；

  ⋆ 格点作用量是定义在截断尺度的：

$$S[\phi] = \sum_x a^4 \sum_i c_i(\pi/a)\mathcal{O}_i[\phi], \tag{13}$$

  取决于算符 $\mathcal{O}_i$ 的量纲，系数 $c_i(\pi/a)$ 必须具有合适的量纲以保证作用量具有正确的量纲；

- 重整化、重整化群与连续极限

  ⋆ 格点场论的连续极限 $\Longleftrightarrow$ 二级相变的临界现象；

  ⋆ 在临界区域，系统中物理的关联长度 $\xi/a \gg 1$，因此时空的分立性不再重要，连续时空的对称性得以恢复；

  ⋆ 二级相变的临界现象 ➠ 普适性➠ 连续时空的量子场论；

  ⋆ Wilson 的重整化群理论还告诉我们，系统在临界区域的行为可以通过重整化群变换（block-spin 变换）来研究；

  ⋆ 格点作用量是定义在截断尺度的：

$$S[\phi] = \sum_x a^4 \sum_i c_i(\pi/a)\mathcal{O}_i[\phi], \tag{13}$$

  取决于算符 $\mathcal{O}_i$ 的量纲，系数 $c_i(\pi/a)$ 必须具有合适的量纲以保证作用量具有正确的量纲；

  ⋆ 在路径积分的语言里，重整化群变换实际上就是一个不断将场分量的高频部分积掉并保持长程物理不变的过程；

- 重整化、重整化群与连续极限

  ⋆ 格点场论的连续极限 $\Longleftrightarrow$ 二级相变的临界现象；

  ⋆ 在临界区域，系统中物理的关联长度 $\xi/a \gg 1$，因此时空的分立性不再重要，连续时空的对称性得以恢复；

  ⋆ 二级相变的临界现象 ➠ 普适性➠ 连续时空的量子场论；

  ⋆ Wilson 的重整化群理论还告诉我们，系统在临界区域的行为可以通过重整化群变换（block-spin 变换）来研究；

  ⋆ 格点作用量是定义在截断尺度的：

$$S[\phi] = \sum_x a^4 \sum_i c_i(\pi/a)\mathcal{O}_i[\phi], \tag{13}$$

  取决于算符 $\mathcal{O}_i$ 的量纲，系数 $c_i(\pi/a)$ 必须具有合适的量纲以保证作用量具有正确的量纲；

  ⋆ 在路径积分的语言里，重整化群变换实际上就是一个不断将场分量的高频部分积掉并保持长程物理不变的过程；

  ⋆ 在重整化群变换下，耦合系数 $c_i(\mu)$ 随着尺度 μ 的变化形成重整化群流；固定点附近的行为决定了一个模型的连续极限。

凝聚态物理与粒子物理的完美结合

粒子物理

- 四维欧氏空间；
- 作用量 $S[\phi]$；
- 生成泛函：$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$；
- 连续极限、重整化；
- 连续时空量子场论；
- 重整化群；

凝聚态物理

- D 维欧氏空间
- 哈密顿量 $\mathcal{H}[\phi]$
- 配分函数：$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}[\phi]}$；
- 临界现象；
- 普适性；
- 重整化群；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 格点 QCD 的连续极限

  ⋆ 规范场的 Naive 连续极限：

$$U_\mu(x) = e^{ig_0 a A_\mu(x+a\hat{\mu}/2)} \simeq 1 + ig_0 a A_\mu - \frac{1}{2} g_0^2 a^2 A_\mu A_\mu \cdots, \qquad (14)$$

  貌似是按照 $(g_0 a)^2$ 展开，但考虑到紫外发散，实际上是按照 g_0^2 展开，因此称这种微扰论为裸微扰论。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 格点 QCD 的连续极限

  ⋆ 规范场的 Naive 连续极限：

$$U_\mu(x) = e^{ig_0 a A_\mu(x+a\hat{\mu}/2)} \simeq 1 + ig_0 a A_\mu - \frac{1}{2} g_0^2 a^2 A_\mu A_\mu \cdots, \tag{14}$$

  貌似是按照 $(g_0 a)^2$ 展开，但考虑到紫外发散，实际上是按照 g_0^2 展开，因此称这种微扰论为裸微扰论。

  ⋆ QCD β-函数与渐近自由：

$$a\frac{dg_0}{da} = b_0 g_0^3 + b_1 g_0^5 + \cdots, \tag{15}$$

  其中的系数 $b_0 = (1/16\pi^2)(11 - 2N_f/3)$，$b_1 = (1/16\pi^2)^2(102 - 38N_f/3)$。

- 格点 QCD 的连续极限

  ⋆ 规范场的 Naive 连续极限：

$$U_\mu(x) = e^{ig_0 a A_\mu(x+a\hat{\mu}/2)} \simeq 1 + ig_0 a A_\mu - \frac{1}{2} g_0^2 a^2 A_\mu A_\mu \cdots, \tag{14}$$

  貌似是按照 $(g_0 a)^2$ 展开，但考虑到紫外发散，实际上是按照 g_0^2 展开，因此称这种微扰论为裸微扰论。

  ⋆ QCD β-函数与渐近自由：

$$a\frac{dg_0}{da} = b_0 g_0^3 + b_1 g_0^5 + \cdots, \tag{15}$$

  其中的系数 $b_0 = (1/16\pi^2)(11 - 2N_f/3)$，$b_1 = (1/16\pi^2)^2(102 - 38N_f/3)$。

  ⋆ 在连续极限下，$\beta \to \infty$ 或：$g_0^2 \to 0$，因此我们期待裸的微扰论可以给出可靠的估计。这个区域称为格点QCD的 scaling 区域。

- 手征极限
  - 手征费米子在格点上的困难；
  - 手征规范理论仍然无法非微扰的定义；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 手征极限
  - 手征费米子在格点上的困难；
  - 手征规范理论仍然无法非微扰的定义；
  - 对于矢量形的规范理论（例如 QCD），主要的问题是技术层面的（这被称为临界放慢）；
  - 在格点 QCD 中，人们往往不得不模拟高于（有时甚至是远高于）其物理质量的夸克。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 手征极限
  - 手征费米子在格点上的困难；
  - 手征规范理论仍然无法非微扰的定义；
  - 对于矢量形的规范理论（例如 QCD），主要的问题是技术层面的（这被称为临界放慢）；
  - 在格点 QCD 中，人们往往不得不模拟高于（有时甚至是远高于）其物理质量的夸克。
  - 手征对称性及其破缺对于低能 QCD 的唯象学十分重要；
  - 格点 QCD 中，手征外推是一个十分重要的问题。这时格点上的各种手征微扰论会起到相当的作用。

- Minkowski 空间的场论
  - ⋆ 通常的量子场论建立在 Minkowski 空间，然后通过 Wick 转动，得到欧氏空间的量子场论；

- Minkowski 空间的场论
  - ⋆ 通常的量子场论建立在 Minkowski 空间，然后通过 Wick 转动，得到欧氏空间的量子场论；
  - Q 但是格点QCD是直接建立在欧氏空间的。它是否对应于闵氏空间的一个良好定义的量子场论？

- Minkowski 空间的场论

  ⋆ 通常的量子场论建立在 Minkowski 空间，然后通过 Wick 转动，得到欧氏空间的量子场论；

  Q 但是格点QCD是直接建立在欧氏空间的。它是否对应于闵氏空间的一个良好定义的量子场论？

  ⋆ Osterwalder-Schrader 定理告诉我们，只要我们的欧氏空间的量子场论满足所谓的反射正定性（reflection positivity），这个理论一定可以对应于一个闵氏空间的量子场论。

- Minkowski 空间的场论

  ⋆ 通常的量子场论建立在 Minkowski 空间，然后通过 Wick 转动，得到欧氏空间的量子场论；

  Q 但是格点QCD是直接建立在欧氏空间的。它是否对应于闵氏空间的一个良好定义的量子场论？

  ⋆ Osterwalder-Schrader 定理告诉我们，只要我们的欧氏空间的量子场论满足所谓的反射正定性（reflection positivity），这个理论一定可以对应于一个闵氏空间的量子场论。

  ⋆ M. Lüscher 首先证明了，在相当一般的条件下，Wilson 格点QCD的确满足这些条件，因此它定义了一个闵氏空间的量子场论：

$$\mathcal{Z} = Tr\mathbb{T}^{N_t},\ \mathbb{T} = \mathbb{P}_0 e^{-a\mathbb{H}} \tag{16}$$

  其中 $\mathbb{T}$ 称为转移矩阵；$\mathbb{P}_0$ 是规范不变的投影算符；$\mathbb{H}$ 为所定义的哈密顿量；

- Minkowski 空间的场论

  ⋆ 通常的量子场论建立在 Minkowski 空间，然后通过 Wick 转动，得到欧氏空间的量子场论；

  Q 但是格点QCD是直接建立在欧氏空间的。它是否对应于闵氏空间的一个良好定义的量子场论？

  ⋆ Osterwalder-Schrader 定理告诉我们，只要我们的欧氏空间的量子场论满足所谓的反射正定性（reflection positivity），这个理论一定可以对应于一个闵氏空间的量子场论。

  ⋆ M. Lüscher 首先证明了，在相当一般的条件下，Wilson 格点QCD的确满足这些条件，因此它定义了一个闵氏空间的量子场论：

$$\mathcal{Z} = Tr\mathbb{T}^{N_t},\ \mathbb{T} = \mathbb{P}_0 e^{-a\mathbb{H}} \tag{16}$$

  其中 $\mathbb{T}$ 称为转移矩阵；$\mathbb{P}_0$ 是规范不变的投影算符；$\mathbb{H}$ 为所定义的哈密顿量；

- Minkowski 空间的场论

  ⋆ 通常的量子场论建立在 Minkowski 空间，然后通过 Wick 转动，得到欧氏空间的量子场论；

  Q 但是格点QCD是直接建立在欧氏空间的。它是否对应于闵氏空间的一个良好定义的量子场论？

  ⋆ Osterwalder-Schrader 定理告诉我们，只要我们的欧氏空间的量子场论满足所谓的反射正定性（reflection positivity），这个理论一定可以对应于一个闵氏空间的量子场论。

  ⋆ M. Lüscher 首先证明了，在相当一般的条件下，Wilson 格点QCD的确满足这些条件，因此它定义了一个闵氏空间的量子场论：

$$\mathcal{Z} = Tr\mathbb{T}^{N_t},\ \mathbb{T} = \mathbb{P}_0 e^{-a\mathbb{H}} \tag{16}$$

  其中 $\mathbb{T}$ 称为转移矩阵；$\mathbb{P}_0$ 是规范不变的投影算符；$\mathbb{H}$ 为所定义的哈密顿量；

  ⋆ 事实上，这可以看成是QCD的一个非微扰定义。我们所希望的连续时空的QCD可以看成是这个理论的连续极限。

3 格点QCD的物理量测量

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 两点关联函数

  ⋆ 量子场论的所有物理信息都包含在该理论的关联函数（编时格林函数）之中；

  ⋆ 最为常用的是某个（或者某类）算符的两点关联函数：

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(t)\mathcal{O}(0)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} Tr\left[\mathbb{T}^{N_t-t}\mathcal{O}\mathbb{T}^t\mathcal{O}\right] \tag{17}$$

  其中 $\mathbb{T} = e^{-\mathbb{H}}$ 为系统的转移矩阵；

- 两点关联函数

  ⋆ 量子场论的所有物理信息都包含在该理论的关联函数（编时格林函数）之中；

  ⋆ 最为常用的是某个（或者某类）算符的两点关联函数：

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(t)\mathcal{O}(0)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} Tr\left[\mathbb{T}^{N_t-t}\mathcal{O}\mathbb{T}^t\mathcal{O}\right] \tag{17}$$

  其中 $\mathbb{T} = e^{-\mathbb{H}}$ 为系统的转移矩阵；

  ⋆ 如果 $N_t \to \infty$，对上述关联函数贡献最大的是相关算符在系统基态中的期望值；

- 两点关联函数

  ⋆ 量子场论的所有物理信息都包含在该理论的关联函数（编时格林函数）之中；

  ⋆ 最为常用的是某个（或者某类）算符的两点关联函数：

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(t)\mathcal{O}(0)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} Tr\left[\mathbb{T}^{N_t-t}\mathcal{O}\mathbb{T}^t\mathcal{O}\right] \tag{17}$$

  其中 $\mathbb{T} = e^{-\mathbb{H}}$ 为系统的转移矩阵；

  ⋆ 如果 $N_t \to \infty$，对上述关联函数贡献最大的是相关算符在系统基态中的期望值；

  ⋆ 于是，我们可以在 $\mathcal{O}(0)$ 和 $\mathcal{O}(t)$ 之间插入哈密顿量 $\mathbb{H}$ 的完备本征态 $|n\rangle$：

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(t)\mathcal{O}(0)\rangle \simeq \sum |\langle n|\mathcal{O}|0\rangle|^2 e^{-E_n t} \tag{18}$$

  这里 E_n 是哈密顿量严格本征态 $|n\rangle$ 的相应本征值；

  ⋆ 根据关联函数随时间的指数衰减的快慢，可以得到系统的严格能量本征值 E_n；

- QCD 强子谱

  Q 什么是强子（曾经的基本粒子）？

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- QCD 强子谱

  Q 什么是强子（曾经的基本粒子）？

  A 强子是强相互作用下形成的、具有确定 QCD 量子数（$I^G J^{PC}$）的束缚态（稳定强子，例：质子、中子、π 介子等）或共振态（不稳定强子，例：ρ，f_0 等）；

- QCD 强子谱

  ℚ 什么是强子（曾经的基本粒子）？

  𝔸 强子是强相互作用下形成的、具有确定 QCD 量子数（$I^G J^{PC}$）的束缚态（稳定强子，例：质子、中子、π 介子等）或共振态（不稳定强子，例：ρ，f_0 等）；

  ⋆ 所谓强子谱的研究一般是指对它的质量、宽度（对共振态）等参数的研究；

  ⋆ 稳定强子态对应于 QCD 的严格能量本征态；其本征值就是该强子的能量。如果我们取总动量为零的参照系，这个能量也就是该稳定强子的质量；

- QCD 强子谱

  ℚ 什么是强子（曾经的基本粒子）？

  𝔸 强子是强相互作用下形成的、具有确定 QCD 量子数（$I^G J^{PC}$）的束缚态（稳定强子，例：质子、中子、π 介子等）或共振态（不稳定强子，例：ρ，f_0 等）；

  ⋆ 所谓强子谱的研究一般是指对它的质量、宽度（对共振态）等参数的研究；

  ⋆ 稳定强子态对应于 QCD 的严格能量本征态；其本征值就是该强子的能量。如果我们取总动量为零的参照系，这个能量也就是该稳定强子的质量；

  ⋆ 不稳定强子对应于强子共振态。如果不稳定强子的宽度足够小（窄共振），它对应于系统的一个近似能量本征态；

- 算符的构建与混合
  - ⋆ 要计算某个特定量子数的强子谱，我们需要构建具有该量子数的强子算符；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 算符的构建与混合
  - ⋆ 要计算某个特定量子数的强子谱，我们需要构建具有该量子数的强子算符；
  - ⋆ 内部自由度一般与连续时空场论没有大区别；

- 算符的构建与混合
  - ⋆ 要计算某个特定量子数的强子谱，我们需要构建具有该量子数的强子算符；
  - ⋆ 内部自由度一般与连续时空场论没有大区别；
  - ⋆ 时空对称性与连续场论不同；$SU(2)$ 的转动对称性被破缺到相应的点群对称性；
  - ⋆ 按照点群不同的表示构建相关的强子算符；

- 算符的构建与混合
  - ⋆ 要计算某个特定量子数的强子谱，我们需要构建具有该量子数的强子算符；
  - ⋆ 内部自由度一般与连续时空场论没有大区别；
  - ⋆ 时空对称性与连续场论不同；$SU(2)$ 的转动对称性被破缺到相应的点群对称性；
  - ⋆ 按照点群不同的表示构建相关的强子算符；
  - ⋆ 不同点群对称性的算符不会混合；相同点群对称性的算符一般一定会混合；

- 算符的构建与混合
  - ⋆ 要计算某个特定量子数的强子谱，我们需要构建具有该量子数的强子算符；
  - ⋆ 内部自由度一般与连续时空场论没有大区别；
  - ⋆ 时空对称性与连续场论不同；$SU(2)$ 的转动对称性被破缺到相应的点群对称性；
  - ⋆ 按照点群不同的表示构建相关的强子算符；
  - ⋆ 不同点群对称性的算符不会混合；相同点群对称性的算符一般一定会混合；
  - ⋆ 一般需要构建同样量子数算符的关联矩阵系统研究其谱学性质：$\langle \mathcal{O}_\alpha^\dagger(t)\mathcal{O}_\beta(0)\rangle$，其中 $\alpha,\beta = 1,2,\cdots,n$，$n$ 为具有同样量子数的独立的算符个数。

- 化为夸克传播子

  ⋆ 任意的强子算符的关联函数总可以利用Wick 定理化为（在规范场背景下的）夸克传播子的乘积：

$$\langle \psi_{\alpha,a,x} \bar{\psi}_{\beta,b,y} \rangle_F = \mathcal{M}^{-1}[U_\mu]_{\alpha,a,x;\beta,b,y} \tag{19}$$

  其中的传播子可以通过求解线性方程：$\mathcal{M}[U_\mu] \cdot X = \Phi$ 获得。

- 化为夸克传播子

  ⋆ 任意的强子算符的关联函数总可以利用Wick 定理化为（在规范场背景下的）夸克传播子的乘积：

$$\langle \psi_{\alpha,a,x} \bar{\psi}_{\beta,b,y} \rangle_F = \mathcal{M}^{-1}[U_\mu]_{\alpha,a,x;\beta,b,y} \tag{19}$$

  其中的传播子可以通过求解线性方程：$\mathcal{M}[U_\mu] \cdot X = \Phi$ 获得。

  ⋆ 在某个固定规范场组态下的夸克传播子是通过解线性方程获得的。然后，按照强子算符的形式，将不同的夸克传播子按照 Wick 定理进行适当组合，就得到了一个固定规范场组态下的对关联函数的贡献；

- 化为夸克传播子

  ⋆ 任意的强子算符的关联函数总可以利用Wick 定理化为（在规范场背景下的）夸克传播子的乘积：

$$\langle \psi_{\alpha,a,x} \bar{\psi}_{\beta,b,y} \rangle_F = \mathcal{M}^{-1}[U_\mu]_{\alpha,a,x;\beta,b,y} \tag{19}$$

  其中的传播子可以通过求解线性方程：$\mathcal{M}[U_\mu] \cdot X = \Phi$ 获得。

  ⋆ 在某个固定规范场组态下的夸克传播子是通过解线性方程获得的。然后，按照强子算符的形式，将不同的夸克传播子按照 Wick 定理进行适当组合，就得到了一个固定规范场组态下的对关联函数的贡献；

  ⋆ 对符合 QCD 概率分布的不同规范场求平均，就给出了我们需要的强子算符的关联函数；

- 化为夸克传播子

  ⋆ 任意的强子算符的关联函数总可以利用Wick 定理化为（在规范场背景下的）夸克传播子的乘积：

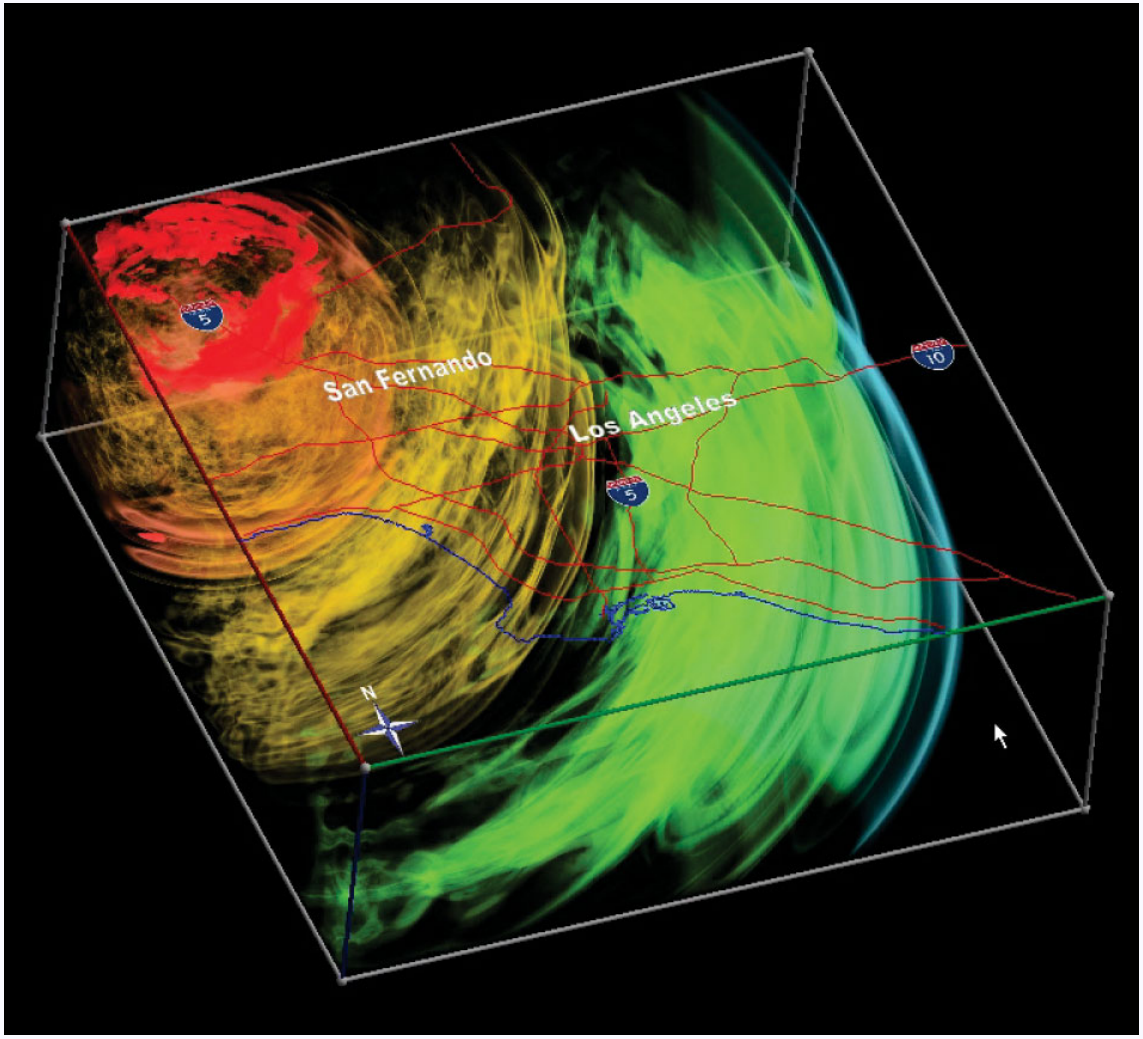
$$\langle \psi_{\alpha,a,x} \bar{\psi}_{\beta,b,y} \rangle_F = \mathcal{M}^{-1}[U_\mu]_{\alpha,a,x;\beta,b,y} \tag{19}$$

  其中的传播子可以通过求解线性方程：$\mathcal{M}[U_\mu] \cdot X = \Phi$ 获得。

  ⋆ 在某个固定规范场组态下的夸克传播子是通过解线性方程获得的。然后，按照强子算符的形式，将不同的夸克传播子按照 Wick 定理进行适当组合，就得到了一个固定规范场组态下的对关联函数的贡献；

  ⋆ 对符合 QCD 概率分布的不同规范场求平均，就给出了我们需要的强子算符的关联函数；

4 格点QCD的数值模拟



导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- LQCD 的基本实践方法

  ⋆ 积分无法严格计算，求助于数值方法；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- LQCD 的基本实践方法
  - ⋆ 积分无法严格计算，求助于数值方法；
  - ⋆ 直接数值积分不可能，利用Monte Carlo 方法 （Markov 过程）：

$$P^{(n+1)}[\phi] = \int \mathcal{D}\phi' W[\{\phi'\} \to \{\phi\}] P^{(n)}[\phi'], \tag{20}$$

$$P^{(\infty)}[\phi] \propto e^{-S[\phi]}. \tag{21}$$

对于QCD来说，就是要产生如下概率分布的规范场组态：

$$P^{(\infty)}[U_\mu] \propto e^{-S_g[U_\mu]} \det \mathcal{M}[U_\mu]. \tag{22}$$

其中的费米子行列式来源于对费米子场的积分；

- LQCD 的基本实践方法

  ⋆ 积分无法严格计算，求助于数值方法；

  ⋆ 直接数值积分不可能，利用Monte Carlo 方法 （Markov 过程）：

$$P^{(n+1)}[\phi] = \int \mathcal{D}\phi' W[\{\phi'\} \to \{\phi\}] P^{(n)}[\phi'], \tag{20}$$

$$P^{(\infty)}[\phi] \propto e^{-S[\phi]}. \tag{21}$$

对于QCD来说，就是要产生如下概率分布的规范场组态：

$$P^{(\infty)}[U_\mu] \propto e^{-S_g[U_\mu]} \det \mathcal{M}[U_\mu]. \tag{22}$$

其中的费米子行列式来源于对费米子场的积分；

⋆ 产生合适分布的规范场组态，然后求平均：

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U_\mu \mathcal{O}[\bar{\psi}, \psi, U_\mu] e^{-S[\bar{\psi},\psi,U_\mu]} \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathcal{O}_j, \tag{23}$$

其中 $\mathcal{O}_j$ 是按照第 j 个场组态计算出来的算符 $\mathcal{O}$ 的数值。

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- LQCD 的计算步骤

  ❶ 选择合适的格点QCD算法来产生符合概率分布：$e^{-S_g[U_\mu]}\det\mathcal{M}[U_\mu]$ 的规范场组态并储存它们；

- LQCD 的计算步骤

❶ 选择合适的格点QCD算法来产生符合概率分布：$e^{-S_g[U_\mu]}\det\mathcal{M}[U_\mu]$ 的规范场组态并储存它们；

❷ 将感兴趣的强子算符用夸克传播子表达。对于每个规范场组态计算其贡献并且对于规范场进行平均得到相应的关联函数；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- LQCD 的计算步骤

❶ 选择合适的格点QCD算法来产生符合概率分布：$e^{-S_g[U_\mu]}\det\mathcal{M}[U_\mu]$ 的规范场组态并储存它们；

❷ 将感兴趣的强子算符用夸克传播子表达。对于每个规范场组态计算其贡献并且对于规范场进行平均得到相应的关联函数；

❸ 对得到的关联函数进行数值分析（包括：误差分析，数值拟和等等）得到感兴趣的物理量；

- LQCD 的计算步骤

❶ 选择合适的格点QCD算法来产生符合概率分布：$e^{-S_g[U_\mu]}\det\mathcal{M}[U_\mu]$ 的规范场组态并储存它们；

❷ 将感兴趣的强子算符用夸克传播子表达。对于每个规范场组态计算其贡献并且对于规范场进行平均得到相应的关联函数；

❸ 对得到的关联函数进行数值分析（包括：误差分析，数值拟和等等）得到感兴趣的物理量；

- 各个计算步骤耗费的资源

❶ 产生规范场组态：

* 如果需要考虑费米子行列式，这部分将耗费了绝大多数的计算时间；★★★★★
* 如果不考虑费米子行列式（这称为淬火近似，quenched approximation），这不需要太多计算时间；★
* 组态的储存总是需要一定的硬盘空间；★

- 各个计算步骤耗费的资源

❶ 产生规范场组态：

* 如果需要考虑费米子行列式，这部分将耗费了绝大多数的计算时间；★★★★★
* 如果不考虑费米子行列式（这称为淬火近似，quenched approximation），这不需要太多计算时间；★
* 组态的储存总是需要一定的硬盘空间；★

❷ 计算夸克传播子和构建关联函数：

* 对于轻夸克，夸克传播子将耗费相当多的时间；★★★
* 复杂的强子关联函数的构建也可能很费计算时间；★★
* 如果需要储存夸克传播子，需要海量的硬盘空间；★★

- 各个计算步骤耗费的资源

❶ 产生规范场组态：

* 如果需要考虑费米子行列式，这部分将耗费了绝大多数的计算时间；★★★★★
* 如果不考虑费米子行列式（这称为淬火近似，quenched approximation），这不需要太多计算时间；★
* 组态的储存总是需要一定的硬盘空间；★

❷ 计算夸克传播子和构建关联函数：

* 对于轻夸克，夸克传播子将耗费相当多的时间；★★★
* 复杂的强子关联函数的构建也可能很费计算时间；★★
* 如果需要储存夸克传播子，需要海量的硬盘空间；★★

❸ 关联函数的数值分析：几乎不耗费计算资源；☆

5 格点QCD计算举例

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 静态夸克－反夸克势

  ⋆ 考虑空间上间隔为 R，时间方向间隔为 t 的长方形的闭合圈 $\mathcal{C}$，我们构造 Wilson 圈：

$$W(R,t) = Tr\left(\prod_{l\in C} U_l\right) \tag{24}$$

其中的乘积沿着闭合圈 $\mathcal{C}$ 环行一周；

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 静态夸克－反夸克势

  ⋆ 考虑空间上间隔为 R，时间方向间隔为 t 的长方形的闭合圈 $\mathcal{C}$，我们构造 Wilson 圈：

$$W(R,t) = Tr\left(\prod_{l\in C} U_l\right) \tag{24}$$

  其中的乘积沿着闭合圈 $\mathcal{C}$ 环行一周；

  ⋆ Wilson 圈有着明确的物理含义，它代表了两个空间上相距为 R 一对静态（无穷大质量）的夸克和反夸克之间的势能 $V(R)$：

$$W(R,t) \propto e^{-V(R)t} \tag{25}$$

  这个表达式对于大的 t 是最主要的贡献；利用规范场组态计算 $W(R,t)$，就可以得到一对静态夸克－反夸克之间的势能；

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 静态夸克－反夸克势

  ⋆ 考虑空间上间隔为 R，时间方向间隔为 t 的长方形的闭合圈 $\mathcal{C}$，我们构造 Wilson 圈：

$$W(R,t) = Tr\left(\prod_{l\in C} U_l\right) \tag{24}$$

  其中的乘积沿着闭合圈 $\mathcal{C}$ 环行一周；

  ⋆ Wilson 圈有着明确的物理含义，它代表了两个空间上相距为 R 一对静态（无穷大质量）的夸克和反夸克之间的势能 $V(R)$：

$$W(R,t) \propto e^{-V(R)t} \tag{25}$$

  这个表达式对于大的 t 是最主要的贡献；利用规范场组态计算 $W(R,t)$，就可以得到一对静态夸克－反夸克之间的势能；

  ⋆ 对于色禁闭的情形，势能 $V(R)$ 在大距离处随距离 R 线性增长：

$$V(R) = V_0 + \frac{\alpha}{R} + \sigma R, \tag{26}$$

  其中的系数 σ 称为弦张力；

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 静态夸克－反夸克势

  ⋆ 考虑空间上间隔为 R，时间方向间隔为 t 的长方形的闭合圈 $\mathcal{C}$，我们构造 Wilson 圈：

$$W(R,t) = Tr\left(\prod_{l\in C} U_l\right) \tag{24}$$

  其中的乘积沿着闭合圈 $\mathcal{C}$ 环行一周；

  ⋆ Wilson 圈有着明确的物理含义，它代表了两个空间上相距为 R 一对静态（无穷大质量）的夸克和反夸克之间的势能 $V(R)$：

$$W(R,t) \propto e^{-V(R)t} \tag{25}$$

  这个表达式对于大的 t 是最主要的贡献；利用规范场组态计算 $W(R,t)$，就可以得到一对静态夸克－反夸克之间的势能；

  ⋆ 对于色禁闭的情形，势能 $V(R)$ 在大距离处随距离 R 线性增长：

$$V(R) = V_0 + \frac{\alpha}{R} + \sigma R, \tag{26}$$

  其中的系数 σ 称为弦张力；

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

♣ 夸克－反夸克势

G.S. Bali / Physics Reports 343 (2001) 1–136

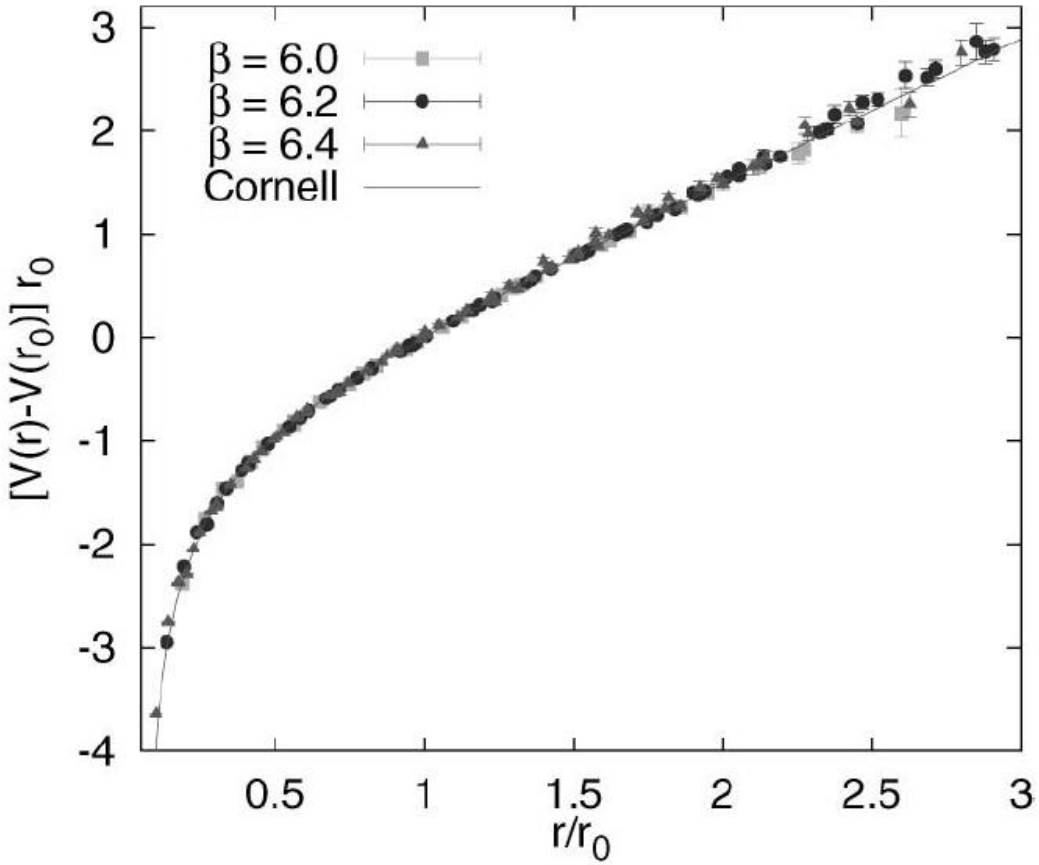


Fig. 4.2. The quenched Wilson action $SU(3)$ potential, normalised to $V(r_0) = 0$.

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 轻强子谱
  - ⋆ 曾几何时，强子被认为是基本粒子，它们的质量也是自然界的基本常数；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 轻强子谱
  - ⋆ 曾几何时，强子被认为是基本粒子，它们的质量也是自然界的基本常数；
  - ⋆ 现在我们知道它们不是。作为强相互作用的基本理论，格点QCD应当可以计算强子态的谱性质；

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 轻强子谱

  ⋆ 曾几何时，强子被认为是基本粒子，它们的质量也是自然界的基本常数；

  ⋆ 现在我们知道它们不是。作为强相互作用的基本理论，格点QCD应当可以计算强子态的谱性质；

  ⋆ 需要具有正确量子数的强子算符。例如，我们可以采用下列介子和重子算符：

$$\pi(t) = \bar{u}(x)\gamma_5 d(x),\ P(x) = \epsilon_{abc}[u_a^T(x)(C^{-1}\gamma_5)d_b(x)]u_c(x)] \qquad (27)$$

  计算这些算符的关联函数就可以得到相应的强子谱；

- 轻强子谱

  ⋆ 曾几何时，强子被认为是基本粒子，它们的质量也是自然界的基本常数；

  ⋆ 现在我们知道它们不是。作为强相互作用的基本理论，格点QCD应当可以计算强子态的谱性质；

  ⋆ 需要具有正确量子数的强子算符。例如，我们可以采用下列介子和重子算符：

$$\pi(t) = \bar{u}(x)\gamma_5 d(x),\ P(x) = \epsilon_{abc}[u_a^T(x)(C^{-1}\gamma_5)d_b(x)]u_c(x)] \tag{27}$$

  计算这些算符的关联函数就可以得到相应的强子谱；

  ⋆ 对于轻强子谱的问题主要存在于两个方面：第一是淬火近似的问题；第二是手征极限的问题；

- 轻强子谱

  ⋆ 曾几何时，强子被认为是基本粒子，它们的质量也是自然界的基本常数；

  ⋆ 现在我们知道它们不是。作为强相互作用的基本理论，格点QCD应当可以计算强子态的谱性质；

  ⋆ 需要具有正确量子数的强子算符。例如，我们可以采用下列介子和重子算符：

$$\pi(t) = \bar{u}(x)\gamma_5 d(x),\ P(x) = \epsilon_{abc}[u_a^T(x)(C^{-1}\gamma_5)d_b(x)]u_c(x)] \qquad (27)$$

  计算这些算符的关联函数就可以得到相应的强子谱；

  ⋆ 对于轻强子谱的问题主要存在于两个方面：第一是淬火近似的问题；第二是手征极限的问题；

  ⋆ 手征极限与手征外推总是非常.....

- 轻强子谱

  ⋆ 曾几何时，强子被认为是基本粒子，它们的质量也是自然界的基本常数；

  ⋆ 现在我们知道它们不是。作为强相互作用的基本理论，格点QCD应当可以计算强子态的谱性质；

  ⋆ 需要具有正确量子数的强子算符。例如，我们可以采用下列介子和重子算符：

$$\pi(t) = \bar{u}(x)\gamma_5 d(x),\ P(x) = \epsilon_{abc}[u_a^T(x)(C^{-1}\gamma_5)d_b(x)]u_c(x)] \qquad (27)$$

  计算这些算符的关联函数就可以得到相应的强子谱；

  ⋆ 对于轻强子谱的问题主要存在于两个方面：第一是淬火近似的问题；第二是手征极限的问题；

  ⋆ 手征极限与手征外推总是非常.....

  ⋆ 淬火近似直到近一两年才真正破冰.....

- 轻强子谱

  ⋆ 曾几何时，强子被认为是基本粒子，它们的质量也是自然界的基本常数；

  ⋆ 现在我们知道它们不是。作为强相互作用的基本理论，格点QCD应当可以计算强子态的谱性质；

  ⋆ 需要具有正确量子数的强子算符。例如，我们可以采用下列介子和重子算符：

$$\pi(t) = \bar{u}(x)\gamma_5 d(x),\ P(x) = \epsilon_{abc}[u_a^T(x)(C^{-1}\gamma_5)d_b(x)]u_c(x)] \qquad (27)$$

  计算这些算符的关联函数就可以得到相应的强子谱；

  ⋆ 对于轻强子谱的问题主要存在于两个方面：第一是淬火近似的问题；第二是手征极限的问题；

  ⋆ 手征极限与手征外推总是非常.....

  ⋆ 淬火近似直到近一两年才真正破冰.....

♣ 轻强子谱（quenched）

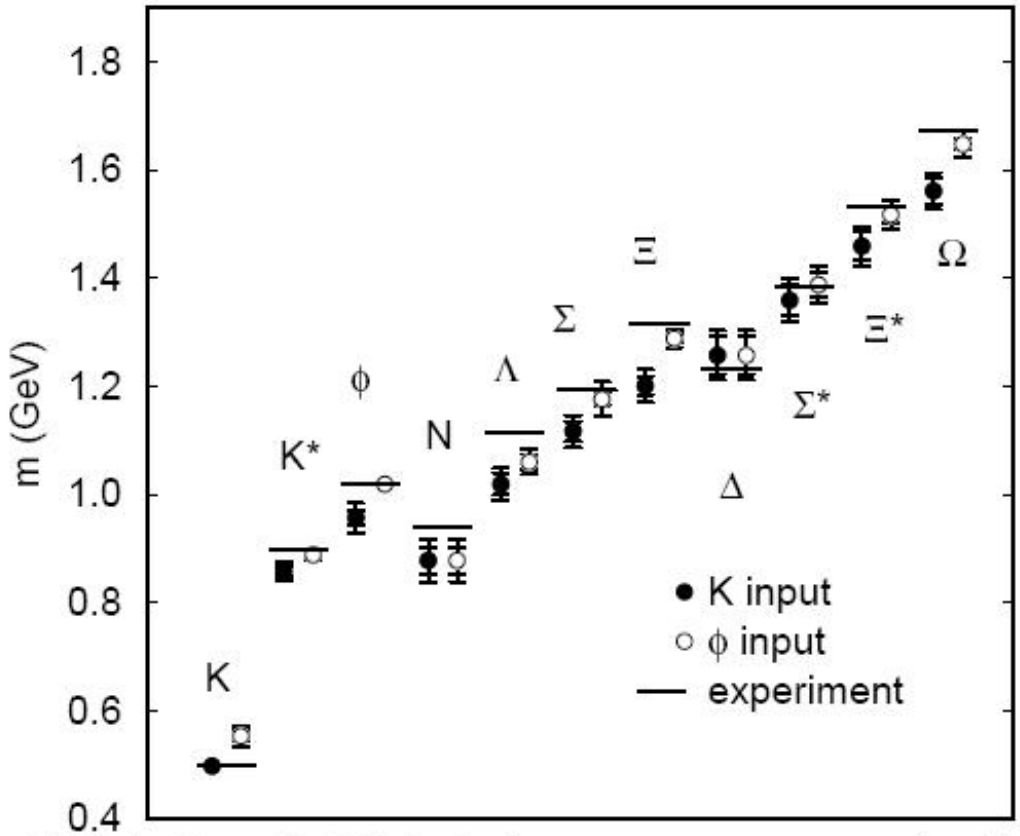
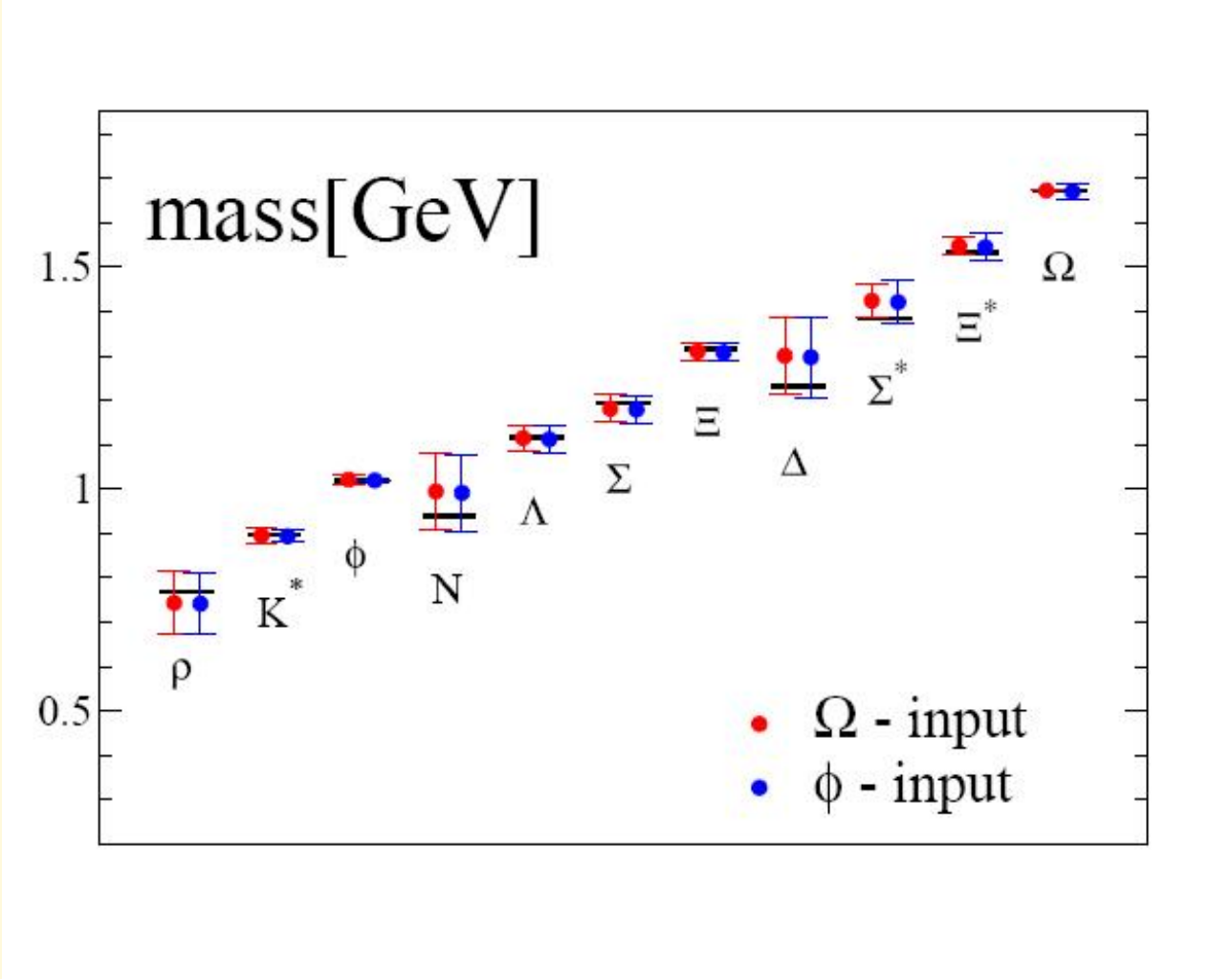


FIG. 6. Quenched light hadron spectrum compared with experiment. The statistical error and the sum of the statistical and systematic errors are indicated.

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

♣ 轻强子谱（unquenched）



导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 强子－强子散射
  - ⋆ 强子－强子散射体现了强相互作用的基本特性；

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

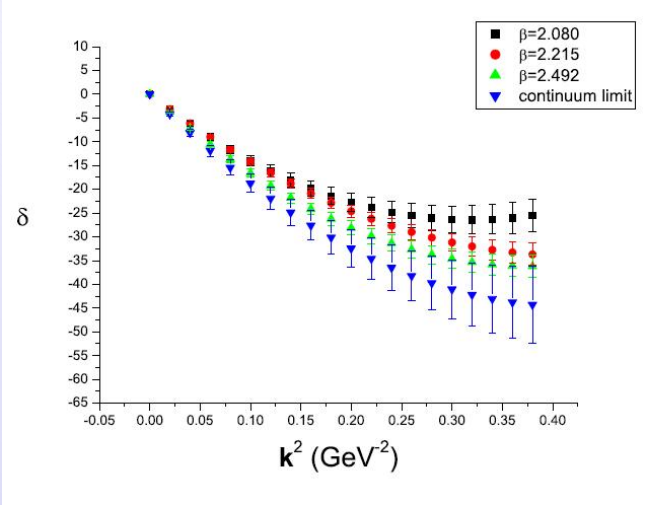
- 强子－强子散射
  - ⋆ 强子－强子散射体现了强相互作用的基本特性；
  - ⋆ 利用有限体积的技术，我们可以通过计算有限体积中两个强子的能量谱推出相关两个强子的散射相移（Lüscher 公式）；

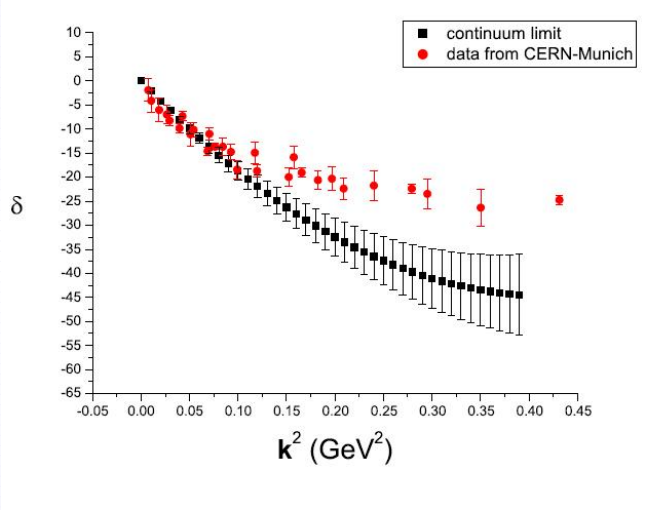
导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

- 强子－强子散射
  - ⋆ 强子－强子散射体现了强相互作用的基本特性；
  - ⋆ 利用有限体积的技术，我们可以通过计算有限体积中两个强子的能量谱推出相关两个强子的散射相移（Lüscher 公式）；
  - ⋆ 格点 QCD 是唯一从 QCD 基本自由度出发计算强子散射的理论方法；

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

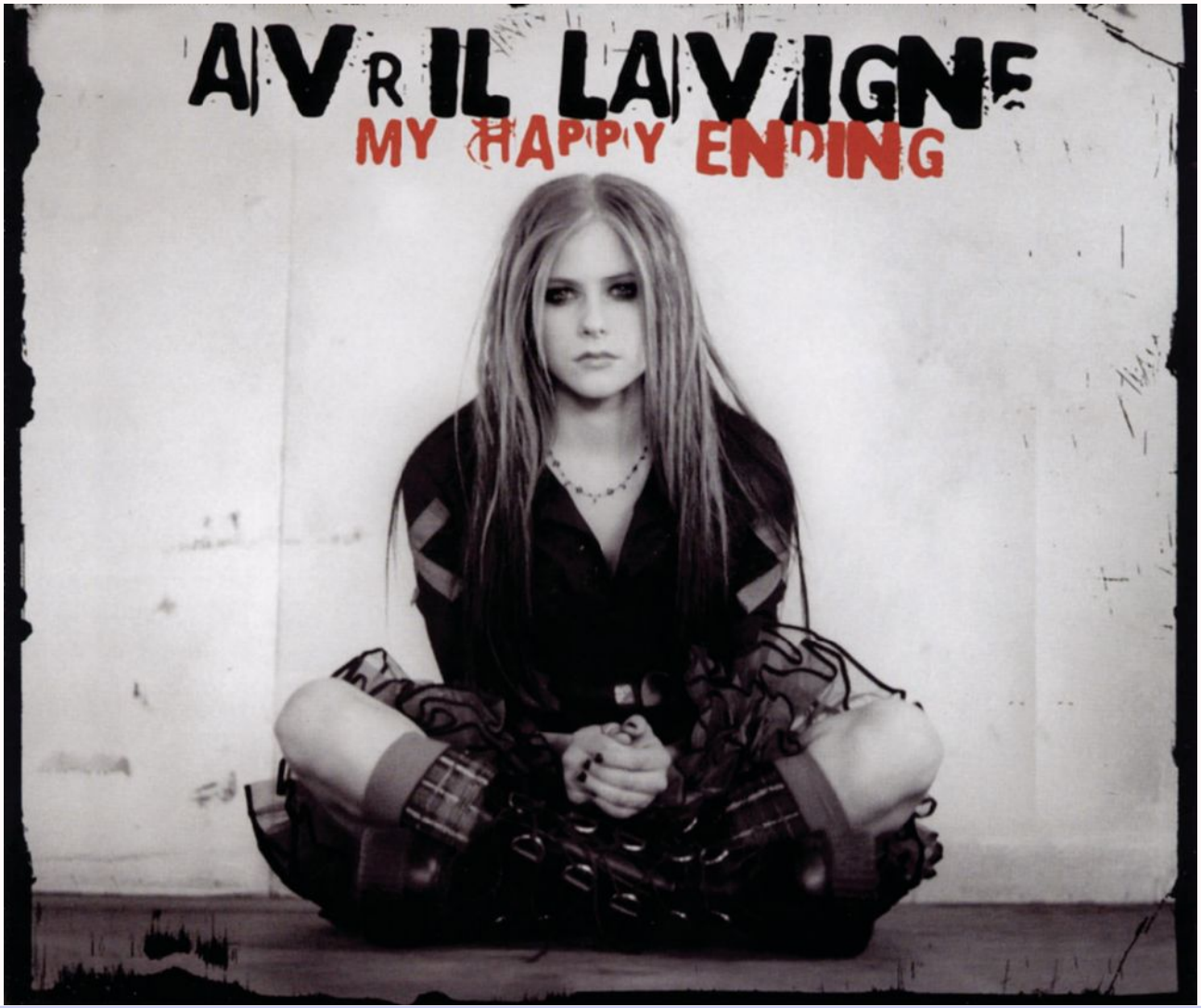
♣ $I=2$，$J=0$ 道的 $\pi\pi$ 散射相移





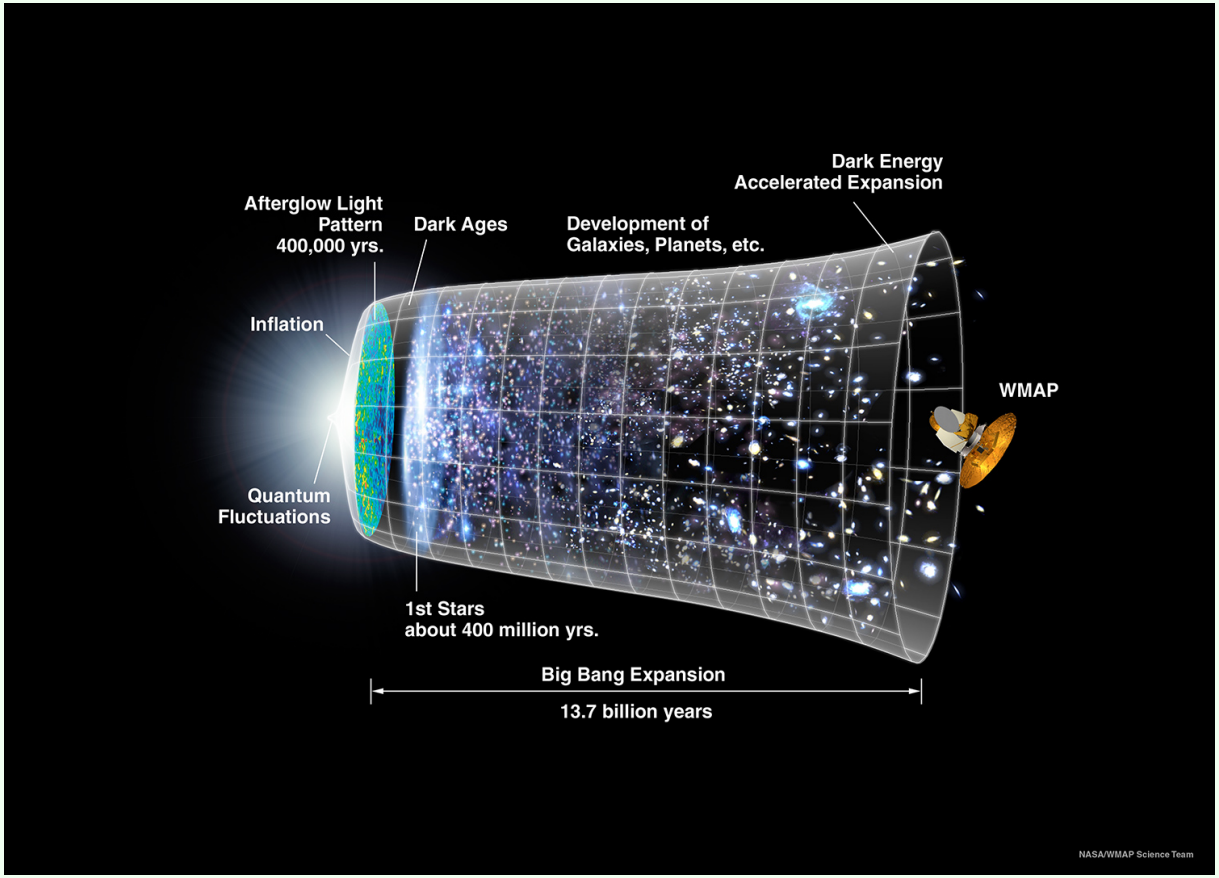
导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

6 总结与展望



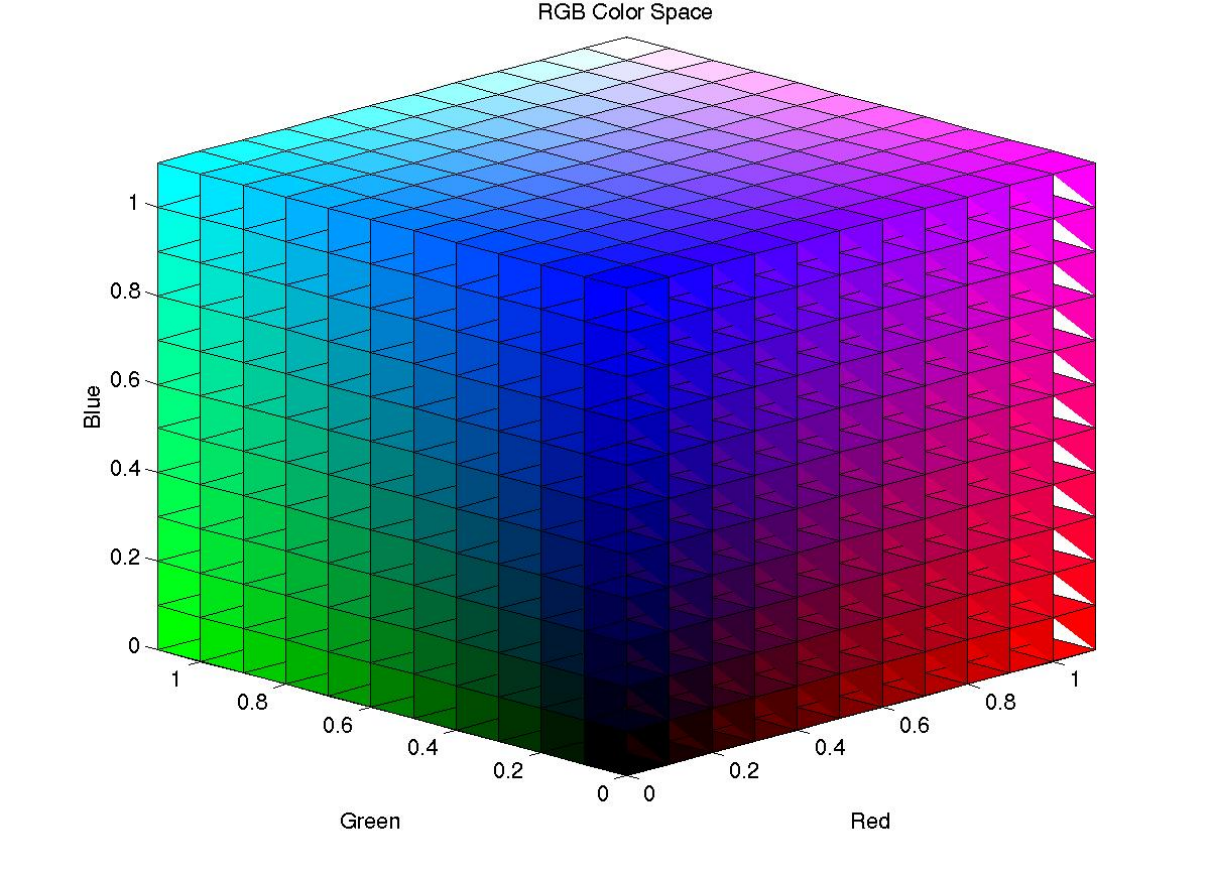
导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

❶ 量子场论框架下的标准模型概括了自然界中几十个量级内的物质基本构成及其相互作用!



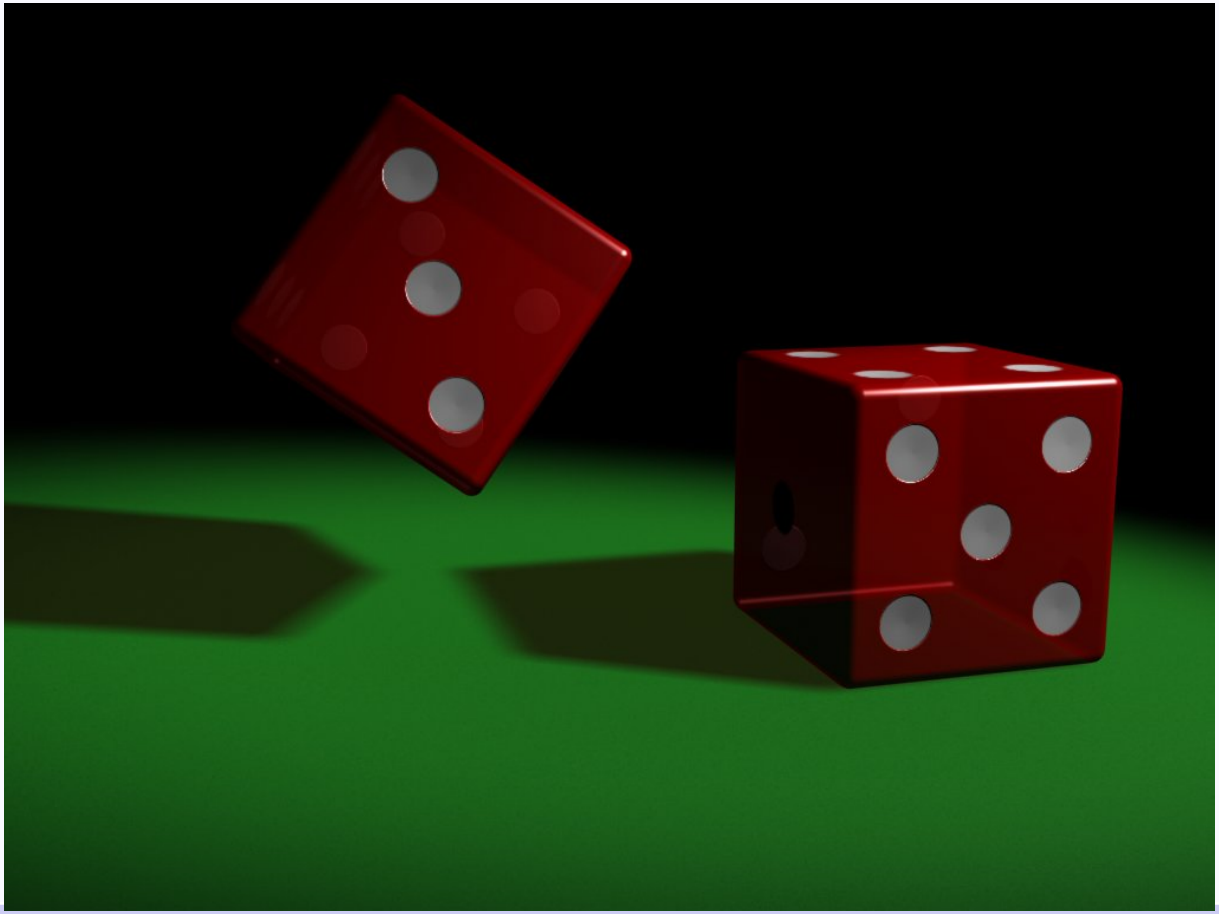
导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

❷ 量子场论需要非微扰的研究方法；格点场论提供了从第一原理出发的非微扰方法；



导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

❸ 利用路径积分的语言和Monte Carlo数值模拟的方法，格点 QCD 提供了研究强相互作用中非微扰物理的系统方法；



导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

❹ 随着格点 QCD 的发展和计算技术的进步，格点 QCD 将为我们提供强相互作用更全面、更详实的信息；

导　言－From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

谢 谢

导　　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望

Thank you!

Address: Institute of Theoretical Physics,
School of Physics, Peking Univ., Beijing, 100871

导　言—From QFT...
格点QCD的基本理论框架
格点QCD的物理量测量
格点QCD的数值模拟
格点QCD计算举例
总结与展望