

蒙特卡罗方法和事例产生器

平荣刚

中国科学院高能物理研究所
(pingrg@ihep.ac.cn)

[2025年（第七届）北京谱仪十一科学研讨会,2025-10月1日-8日, 贵州民族大学, 贵阳](#)

目 录

第一讲 蒙特卡罗模拟

1.1: 蒙特卡罗方法简史

1.2: 随机数产生和检验

1.3: 概率分布抽样方法

1.3.1. 离散型分布随机变量的直接抽样

1.3.2. 连续分布的随机变量抽样

1.3.3. 变换抽样方法

1.3.4. 舍选抽样方法

1.3.5. 加分布抽样

附件:

EvtGen: A Monte Carlo Generator for B-Physics

BesEvtGen: Monte Carlo Generators for Tau-Charm-Physics at BESIII

ConExc: Manual of event generators for e^+e^- scan experiments

Manual of generating continuum exclusive processes using KKMC

1.1 蒙特卡罗方法简史

蒙特卡罗方法又称随机抽样技巧或统计试验方法。半个多世纪以来，由于科学技术的发展和电子计算机的发明，这种方法作为一种独立的方法被提出来，并首先在核武器的试验与研制中得到了应用。蒙特卡罗方法是一种计算方法，但与一般数值计算方法有很大区别。它是以概率统计理论为基础的一种方法。由于蒙特卡罗方法能够比较逼真地描述事物的特点及物理实验过程，解决一些数值方法难以解决的问题，因而该方法的应用领域日趋广泛。

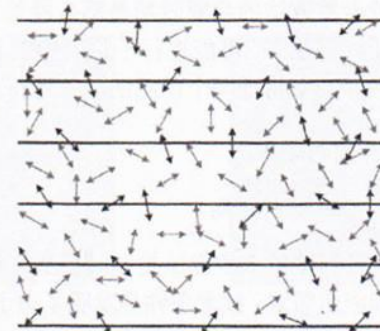
- 启蒙时期(18世纪---第二次世界大战)
- 开创时期（第二次世界大战期间。）
- 发展时期（前期...1980...后期）

- 启蒙时期

1. 蒲丰氏(Buffon)问题



(a) C.D. Buffon(1707~1788)



(b) 蒲丰随机投针实验

为了求得圆周率 π 值，在十九世纪后期，有很多人作了这样的试验：将长为 $2l$ 的一根针任意投到地面上，用针与一组相间距离为 $2a$ （ $l < a$ ）的平行线相交的频率代替概率 P ，再利用准确的关系式：

$$P = \frac{2l}{\pi a}$$

求出 π 值

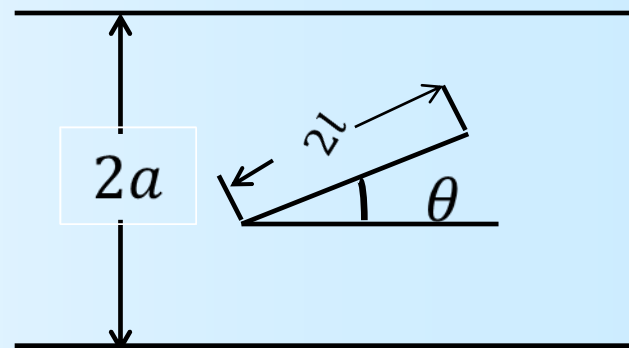
$$\pi = \frac{2l}{aP} \approx \frac{2l}{a} \left(\frac{N}{n} \right)$$

其中 N 为投计次数， n 为针与平行线相交次数。这就是古典概率论中著名的蒲丰氏问题。

关于投针实验结果的推导

针与线相交的几率为

$$f(\theta) = \left| \frac{2l \sin\theta}{2a} \right|$$



假设 θ 在 $[0 \sim \pi]$ 上分布是均匀的，密度函数为 $\frac{1}{\pi}$ ，经过大量实验后，针与水平线相交的概率为

$$P = \int_0^{\pi} \frac{l}{a} |\sin \theta| \frac{d\theta}{\pi} = \int_0^{\pi} \frac{l}{\pi a} \sin \theta d\theta = \frac{2l}{\pi a}$$

可以证明，用投针实验测量 π 值，在进行 n 次后，测量 π 值得标准误差为：

$$\delta\pi \approx \frac{2.37}{\sqrt{n}}$$

投针实验的科学意义

1. 用投针实验测量 π 值，这是一条与传统方法不同的新途径。
2. 开启了用随机性事例的模拟方法，但方差难以减小，使得这种方法难以发展。

投针次数 n	方差 $\delta\pi$
1,000	0.075
2,000	0.053
3,000	0.043
4,000	0.037
5,000	0.033
10,000	0.0075

一些人进行了实验，其结果列于下表：

实验者	年份	投计次数	π 的实验值
沃尔弗(Wolf)	1850	5000	3.1596
斯密思(Smith)	1855	3204	3.1553
福克斯(Fox)	1894	1120	3.1419
拉查里尼 (Lazzarini)	1901	3408	3.1415929

2. 费米模拟装置

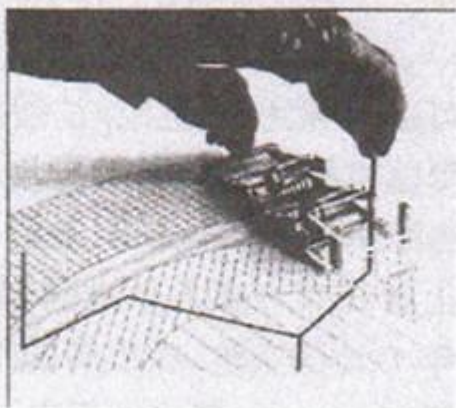
20世纪30年代，费米发明的“FERMIAC”机械模拟实验装置，用来模拟中子在核装置内的随机扩散运动。实验时

“FERMIAC”在核装置的二维平面滑动，随机地选取快中子或慢中子，确定中子运动方向和碰撞距离，得到中子随时间的变化情况，这类似蒙特卡罗方法模拟中子的随机运动。

蒙特卡罗方法的启蒙时期长达两个世纪，其主要原因是缺乏高速计算工具。没有现代的电子计算机，不可能进行千百萬次的模拟计算。



(a) E.Fermi(1901~1954)



(b)

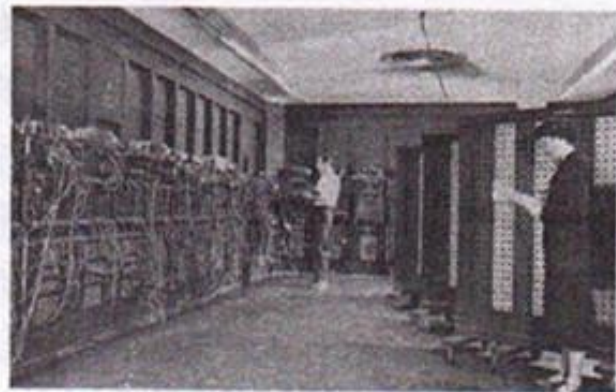


(c)

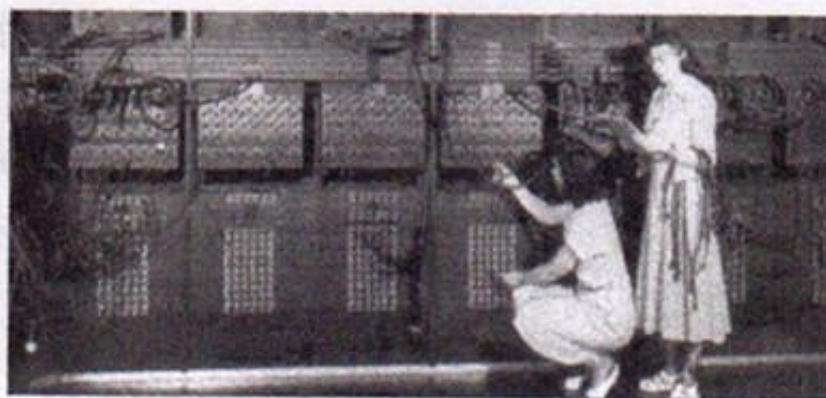
- 开创时期

1. 原子弹研制时期

20世纪40年代，是蒙特卡罗的开创时期。当时出现了蒙特卡罗方法的技术条件和应用需求。技术条件是发明了电子计算机（1945年，ENIAC）



(a)



(b)

图 世界第一台计算机“ENIAC”和计算员操作

应用需求是美国制造原子弹和氢弹。1942年到1945年是美国研制原子弹时期，实施研制原子弹的曼哈顿计划，1945年美国试验第一颗原子弹。原子弹设计需要需论上计算中子在原子弹内的扩散与增值，与各种材料元素发生碰撞、产生散射、吸收和裂变，都是随机过程。3位科学家：乌拉姆(S.Ulam)、冯.诺依曼(J.von Neumann)和梅特罗波利斯(N. Metropolis)是蒙特卡罗方法的三位开创者。

。



(a) S.Ulam(1909~1984)



(b) J.von Neumann(1903~1957)



(c) N.Metropolis (1915~1999)

图 蒙特卡罗方法的三位开创者



(a) 蒙特卡罗城



(b) 蒙特卡罗赌场



(c) 轮盘赌

图 蒙特卡罗城、蒙特卡罗赌场和轮盘赌



(a) “MANIAC” 电子计算机



(b) N. Metropolis

图 1.7 “MANIAC” 电子计算机和 N. Metropolis

1.2 随机数产生和检验

伪随机数发展中，出现了两个事件：一是 Marsaglia(1968,1972)发现线性同余法产生的随机数具有不均匀性和相关性，出现了高维随机数的降维现象，二是经典的斐波那契方法和反馈移位寄存器方法受到质疑，主要问题是产生的伪随机数序列具有相关性，出现与均匀性和独立性相矛盾的现象，并且在实际使用中出了问题（Ferrenberg,et.,al. 1992; Grassberger,1993）。

20世纪80年代后，出现了各种伪随机数产生器和统计检验方法。如：麦森变形产生器，G.马莎格利亚提出的各种组合产生器。20世纪80年代美国MathWorks公司推出的Matlab数学软件，采用的伪随机数产生器，基本上跟上了伪随机数产生器的发展。例如7.4版本使用的麦森变形产生器，周期为 10^{6001} 。

1.2.1. 真随机数产生器

用物理的方法产生的随机数称为真随机数，其最大的特点是独立性和均匀性好，没有周期；其缺点是增加硬件设备和费用，使用中由于随机序列无法重复产生，因此无法进行复算。

- **噪声真随机数产生器**

1974年，美国兰德公司用电子旋转轮产生真随机数，做成100万个真随机数表。

1978年，Frigerio, Clark, Tyler用 α 粒子放射源和高分辨率计数器产生真随机数，每秒产生1.6个真随机数。

2010年，据报道，美国ComScire量子世界公司生产出利用物理噪声源做成的随机数产生器，每秒可产生6.25万个随机数，售价895美元。

网站：<http://www.random.org>提供真随机数

1.2.2 早期伪随机数产生器

- 伪随机数的定义和性质

从均匀分布 $U(0,1)$ 抽样得到的简单子样称为随机数，其概率密度为：

$$f(x) = 1 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

随机数序列 (U_1, U_2, \dots) 具有独立同分布。随机数的一个重要性质，高维分布的均匀性。有 s 个随机数组成的 s 维空间上的点 $(U_{n+1}, U_{n+2}, \dots, U_{n+s})$ ，在 s 维空间单位立体 G_s 上均匀分布。对任意的 a_i ， $0 \leq a_i \leq 1, i=1, 2, \dots, s$ ， $U_{n+i} \leq a_i$ 的概率为：

$$P(U_{n+i} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, s) = \prod_{i=1}^s a_i$$

注意区别： 概率密度函数(pdf)， 概率

伪随机数的性能要求：

- (1)能通过严格的统计检验
- (2)产生伪随机数的算法有坚实的数学理论支撑
- (3)伪随机数序列可以重复产生，不用存储在计算机内存
- (4)速度快，有效，计算机内存占用小
- (5)周期长，至少有 10^{50} ，如果需要 N 个随机数，则周期不小于 $10N^2$ 。
- (6)多流线产生，可以在并行机上实现。
- (7)不产生0或者1的伪随机数，避免0溢出或者其他计算困难。

伪随机数产生的数学结构：

- (1)定义伪随机数的状态空间 S ，必须是有限域。
- (2)必须有初始态 S_0 ，给定伪随机数的初始值。
- (3)包含一个转换函数 $S_t=f(S_{t-1})$ ，一般是递推式，是数学结构的主体。

(4)定义伪随机数的输出空间 U ，通常是整数。

(5)包含一个输出函数 $U = g(St)$ ，把整数转变成 $(0,1)$ 随机数。
重复(3),(4),(5)部分，产生随机数序列。

早期伪随机数产生方法：

1. 经典的斐波那契产生器

Taussky 和Todd(1966)加同余产生器，递推公式为：

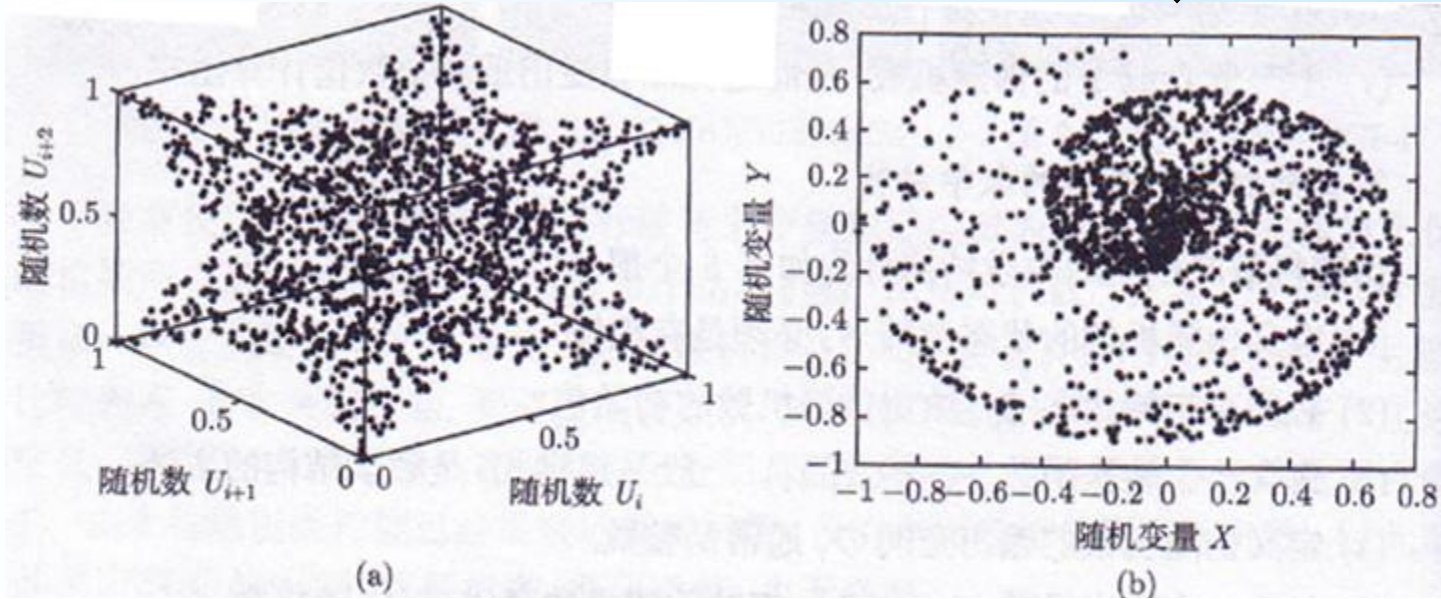
$$X_i \equiv (X_{i-2} + X_{i-1})(\text{mod } M), \quad i > 2, \quad U_i = \frac{X_i}{M}$$

当 $X_0=X_1=1$ 时，产生的随机数系列时间点的斐波那契系列：

1,1,2,3,5,8,13,21,

问题：Dieter(1971),Knuth(1981)指出这种随机数序列存在不居中现象，而且产生显著的序列相关，出现随机数只能分布在3维空间的8个等边三角形平面上。

$$X_i = \sqrt{U_i} \cos(2\pi U_{i+1}) \sin(\pi U_{i+2}), Y_i = \sqrt{U_i} \sin(2\pi U_{i+1}) \sin(\pi U_{i+2})$$



2. 反馈移位寄存器产生器

Tausworthe(1965)提出反馈移位寄存器产生器，其数学基础时 本原多项式 和 异或运算 (\oplus)，递推公式为：

$$\begin{aligned} X_i &\equiv (X_{i-p} \oplus X_{i-q}) \text{ 或} \\ X_i &\equiv (X_{i-p} \oplus X_{i-p+q}) \\ &(p > q) \end{aligned}$$

$$\text{输出函数: } U_t = \sum_{t=1}^w X_{ts+l-1} 2^{-l}$$

产生随机数系列需要 p 个二进制数值的初始值。产生随机数的速度快，而且周期长($2^p - 1$),例如, $p = 521$, $q = 32$, 周期为 6.86×10^{156}

- 1981年, Knuth对反馈移位寄存器产生器提出过异议和警告
- 1992年(Phys.Rev.Lett., 69, 3382), 美国佐治亚大学的三位物理学家(Ferrenberg,Laudau,Wong), 他们发现在伊辛模型模拟中, 5个计算程序由于使用了反馈移位寄存器产生的伪随机数, 存在着微妙的相关性, 导致了模拟结果完全错误。
- 1993年, Grassberger发现在自回避游动模型模拟时也出现了类似的问题。

3.线性同余产生器

Lehmer (1951) 年提出了乘同余产生器, Roterberg(1960)提出了混合同余产生器, 线性同余产生器产生整数随机数的递推同余式为:

$$X_i=(A * X_{i-1}+C) \text{ (Mod } M), \quad U_i=X_i/M$$

式中, M 为模, A 为乘子, C 为增量。当 $C=0$ 时, 是乘同余产生器, 当 $C>0$ 时, 是混合同余产生器, 线性同余产生器产生随机数序列需要一个初始值 X_0 , 参数 (M,A,C,X_0) 通过线性同余产生器的参数。

1.2.3 随机数理论检验和统计检验

- **随机数理论检验**

伪随机数的理论检验方法是一种事前检验方法，它是指在构造伪随机数产生器之前，选取算法和参数时，就行理论检验。为了避免出现降维现象和产生稀疏栅格，理论检验方法有相邻平行超平面之间最大距离检验（也称为谱检验），平行超平面最小数目检验和最接近点距离检验。

- **统计检验**

不管用什么方法产生的伪随机数，它们能否作为随机数使用，最终都要靠统计检验来确定。检验的内容是随机数的参数是否与理论分布一致，随机数是否有较好的均匀性、独立性和连贯性。按实数随机数10进制数值大小的检验方法我们称为一般检验。

一般检验方法有均匀性检验（包括矩检验、频率检验和累积频率检验），相关性检验（包括相关系数检验、无重复联列表检验、有重复联列表检验和均方相继差检验），组合规律性检验（包括最小距离检验、距离检验、配套检验、扑克检验和空隙检验）。

严格检验方法的检验对象是整数随机数，整数随机数用2进制数字串表示，对于32位计算机，整数随机数用32位2进制位串表示，随机数产生器产生整数随机数序列是以2进制位串形式排列，严格检验方法是对这样的2进制位串序列应具有随机性能和规律，进行统计检验，所以严格检验方法是按整数随机数二进制位串排列的检验方法。按整数随机数二进制位串排列检验比按(0,1)随机数10进制数值大小排列检验要严格得多。在检验方法设计上，有很多独到之处。比如，Marsaglia (1995, 2008, 2010) 提出的严格检验方法，目前比较流行的Diehard程序，包括**2进制秩检验、猴子检验、计数1检验、生日间隔检验、最大公因数检验和大猩猩检验**。

1.3 概率分布抽样方法

随机变量的随机抽样指的是由该变量的总体分布产生简单随机子样。在用蒙特卡罗法解题时，经常会遇到具有不同分布的各种随机变量，要求产生对应于该随机变量的随机子样，也即随机数列。这一步骤称为对该随机变量的随机模拟或随机抽样。

为方便起见，用 X_F 表示由已知分布 $F(x)$ 中产生的简单子样的个体。对于连续型分布，常用分布密度函数 $f(x)$ 表示总体的已知分布，用 X_f 表示由已知分布密度函数 $f(x)$ 产生的简单子样的个体。另外，在抽样过程中用到的伪随机数均称随机数。

1.3.1 离散型分布随机变量的直接抽样

对于任意离散型分布:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P_i$$

其中 x_1, x_2, \dots 为离散型分布函数的跳跃点, P_1, P_2, \dots 为相应的概率, 根据前述直接抽样法, 有离散型分布的直接抽样方法如下:

$$X_F = x_I, \quad \text{当} \quad \sum_{i=1}^{I-1} P_i < \xi \leq \sum_{i=1}^I P_i, \quad \xi \sim U(0,1)$$

该结果表明, 为了实现由任意离散型分布的随机抽样, 直接抽样方法是非常理想的。

→直方图分布抽样

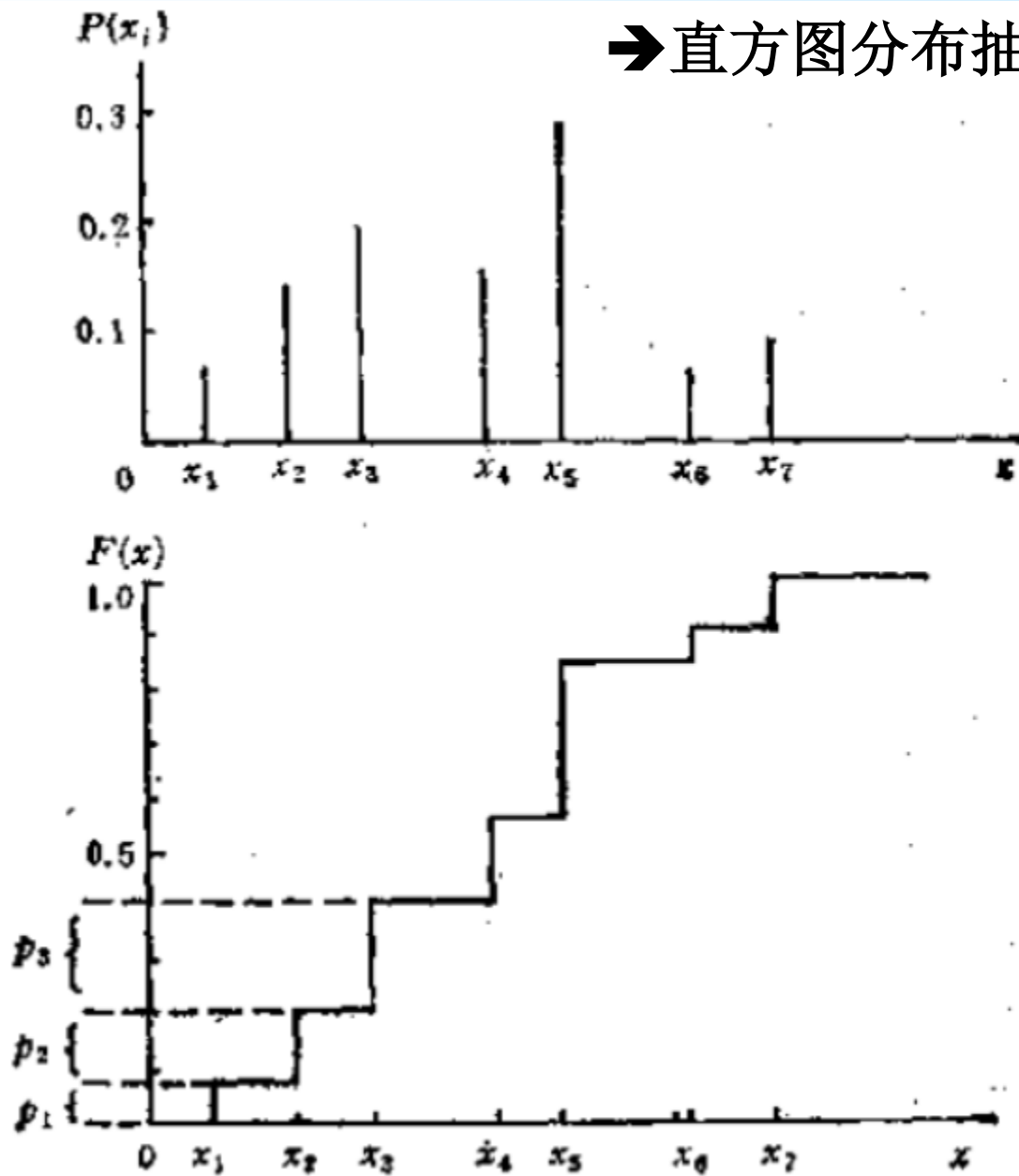


图 13.2 离散随机变量的概率分布和累积分布

例1. 掷骰子点数的抽样

掷骰子点数 $X=n$ 的概率为:

$$P(X = n) = \frac{1}{6}$$

选取随机数 $\xi \sim U(0,1)$ ，如

$$\frac{n-1}{6} < \xi \leq \frac{n}{6}$$

则

$$X_F = n$$

在等概率的情况下，可使用如下更简单的方法:

$$X_F = [6 \cdot \xi] + 1$$

其中 $[]$ 表示取整数。

例2. 中子与核的反应类型的确定

假设中子与核的反应类型有如下几种:弹性散射, 非弹性散射, 裂变, 吸收, 相应的反应截面分别为 Σ_{el} , Σ_{in} , Σ_f , Σ_a 。则发生每一种反应类型的概率依次为:

$$P_1 = \frac{\Sigma_{el}}{\Sigma_t}, P_2 = \frac{\Sigma_{in}}{\Sigma_t}, P_3 = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_t}, P_4 = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t}$$

其中反应总截面 $\Sigma_t = \Sigma_{el} + \Sigma_{in} + \Sigma_f + \Sigma_a$ 。抽样方法类似例5。

产生一个随机数 $\xi \sim U(0,1)$, 如果

$$\sum_{i=1}^{I-1} P_i < \xi \leq \sum_{i=1}^I P_i$$

则中子与核发生第 I 种反应。

例3. $\psi(2S)$ 跃迁到 J/ψ 的几个强衰变道的分支比分别为:

$$B_1 = Br(\psi(2S) \rightarrow \pi^0 J/\psi) = (1.268 \pm 0.032) \times 10^{-3}$$

$$B_2 = Br(\psi(2S) \rightarrow \eta J/\psi) = (3.37 \pm 0.06) \times 10^{-2}$$

$$B_3 = Br(\psi(2S) \rightarrow \pi^0 \pi^0 J/\psi) = (18.2 \pm 0.5) \times 10^{-2}$$

$$B_4 = Br(\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi) = (34.69 \pm 0.34) \times 10^{-2}$$

写出抽取 B_1, \dots, B_4 衰变的算法。

$$\text{令 } t = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$r_1 = \frac{B_1}{t} = 0.00224875, r_2 = \frac{(B_1+B_2)}{t} = 0.06201451$$

$$r_3 = \frac{B_1+B_2+B_3}{t} = 0.38478509, r_4 = 1.$$

抽样算法: 产生(0, 1)的随机数 r :

1. 如果 $r < r_1$, 抽取 $\psi(2S) \rightarrow \pi^0 J/\psi$ 衰变;
2. 如果 $r_1 < r < r_2$, 抽取 $\psi(2S) \rightarrow \eta J/\psi$ 衰变;
3. 如果 $r_2 < r < r_3$, 抽取 $\psi(2S) \rightarrow \pi^0 \pi^0 J/\psi$ 衰变;
4. 如果 $r_3 < r < r_4$, 抽取 $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ 衰变.

1.3.2.连续分布的随机变量抽样

- **A: 直接抽样方法(反函数法)**

任意连续随机变量 Y 的概率密度为 $g(y)$, **累积分布函数为**

$$G(y) \quad x = G(y) = \int_{-\infty}^y g(t) dt$$

为(0,1)区间中均匀分布的随机变量。 若 $G(y)$ 的反函数存在.

上式可写成

$$y = G^{-1}(x)$$

所以若令 ξ_i 为随机变量 Y 的随机子样(随机数列), r_i 为(0,1)区间均匀分布的随机子样(随机数列), 则应在

$$r_i = G(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} g(y) dy$$

写成反函数形式

$$\xi_i = G^{-1}(r_i)$$

利用这个公式可从 r_i 求出任意连续随机变量的随机 ξ_i 系列。

例1：对指数分布的直接抽样

满足指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$ 的随机数 ξ_i

$$r_i = \int_0^{\xi_i} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \xi_i}$$

求得： $\xi_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$.

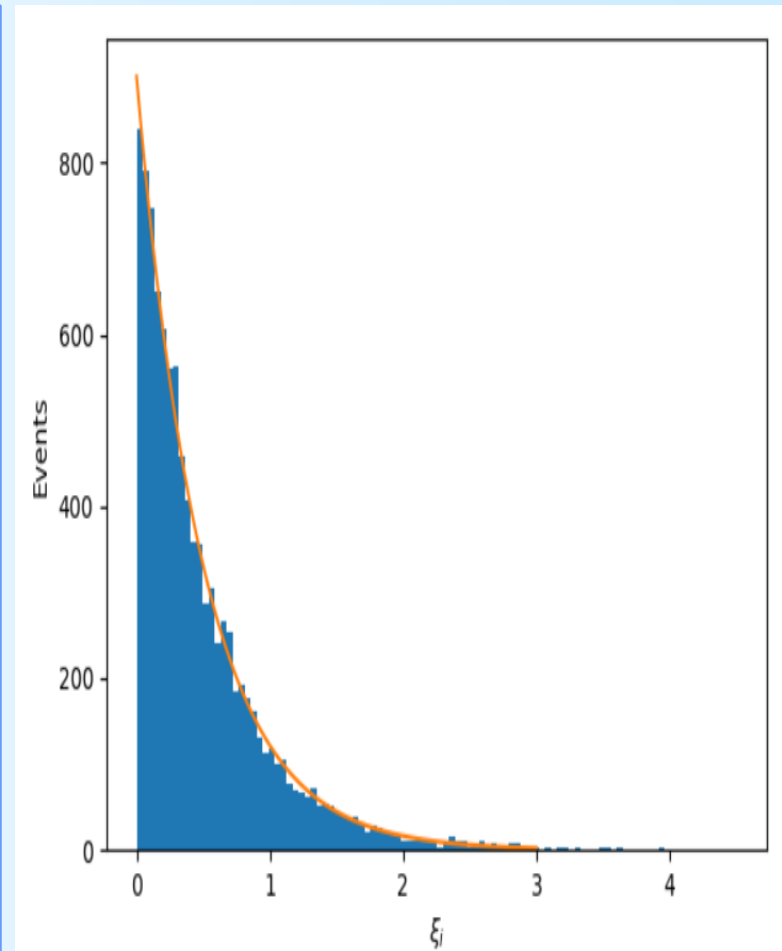
注意到 r_i 与 $1 - r_i$ 都是 $[0,1]$ 区间均匀分布的随机数，故上式可以写成：

$$\xi_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i$$

Python代码

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

ri = np.random.rand(10000)
xi = -1/2*np.log(ri)
plt.hist(xi,bins = 100)
x = np.linspace(0,3,100)
y = 2*np.exp(-2*x)*450
plt.plot(x,y)
plt.xlabel(r'$\xi_{i}$')
plt.ylabel('Events')
plt.show()
```



小结：直接抽样方法

1. 检查密度函数 $f(x)$ 是否归一，若不归一，要做归一化处理。

2. 计算

$$r_i = G(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} g(y)dy$$

3. 反解出 ξ_i ，即得到满足分布密度函数 $g(y)$ 的抽样

$$\xi_i = G^{-1}(r_i)$$

1.3.3. 变换抽样方法

已知某个随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 且其随机数 η_i ，则任意随机变量的随机数 ξ_i 可通过对 η_i 的某种变换求得. 设随机变量 $Y=Y(x)$ 是 X 的一一对应变换。则 Y 的概率密度为

$$g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|$$

随机变量 Y (或概率分布 $g(y)$)的随机数 ξ_i 可由下式求得:

$$\xi_i = y(\eta_i)$$

特例： X 是 $(0,1)$ 区间均匀分布的随机变量, $f(x) = 1$; 任意随机变量 Y 的概率密度令为 $g(y)$ ， 则有

$$g(y) = \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|, dx = g(y)dy = dG$$

例：在分支比计算中， $B = \frac{N^{sig}}{\epsilon * N * R(M \rightarrow S)}$ ， N^{sig} ， ϵ ， N ， $R(M \rightarrow S)$ 的误差可以认为满足Gaussian分布，用toyMC的方法，给出B的均值和它的统计误差。

算法：

1. 按照独立的Gaussian分布，分别抽取 N^{sig} ， ϵ ， N ， $R(M \rightarrow S)$ 的一组值。
2. 利用抽取的 N^{sig} ， ϵ ， N ， $R(M \rightarrow S)$ 值，计算B的值。
3. 多次重复1，2步，得到B的一组统计样本，确定它的均值和方差。

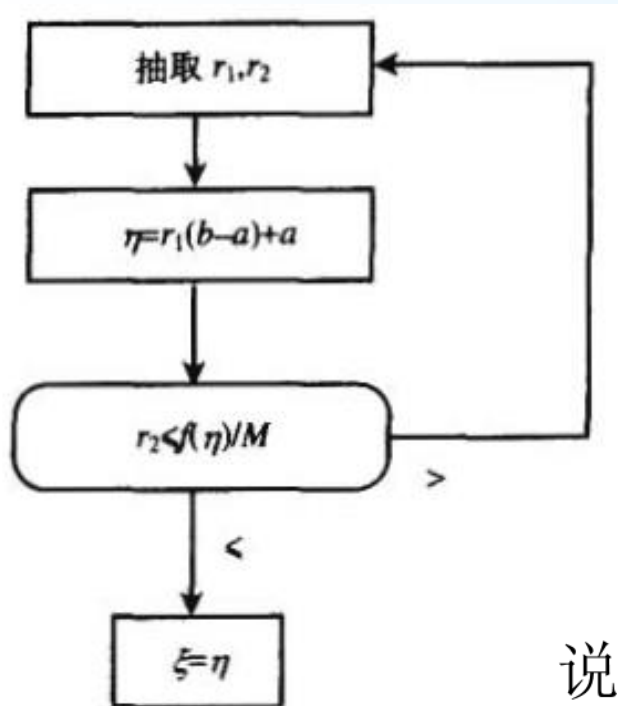
思考题：B满足什么分布？

1.3.4. 舍选抽样方法

舍选法是冯·诺曼(Von Neumann)为克服直接抽样和变换抽样方法的时难最早提出来的。它抽样的基本思想是按照给定的分布密度函数 $\phi(\xi)$ 对均匀分布的随机数序列 $\{\xi_i\}$ 进行舍选。舍选的原则是在 $\phi(\xi)$ 大的地方，保留较多的随机数 ξ_i ；在 $\phi(\xi)$ 小的地方，保留较少的随机数 ξ_i 。使得到的子样中 ξ_i 的分布满足分布密度函数 $\phi(\xi)$ 的要求。这种方法对分布密度函数 $\phi(\xi)$ 在抽样范围内有界，且其上界是容易得到的情况，总是可以采用的。它使用起来十分灵活，计算也较简单，因而使用也比较广泛。但是这种方法，对 $\phi(\xi)$ 在抽样范围内函数值变化很大的时候，效率是很低的，因为大量的均匀分布的抽样点被舍弃了。由于这个原因，有时我们选择另外一些更有效的方法。

• 第一类舍选法

设随机变量 X 的取值域为 $[a, b]$, 概率密度 $f(x)$ 为有界函数, 其极大值用 M 表示 $f(x) \leq M$, 舍选抽样的流程图:



框图的含义如下:

η 是 $[a, b]$ 间内均匀分布随机数, 考察 $r_2 \leq \phi(\eta)/M$ 是否成立. 若成立, 则 η 取为随机变量 X 的随机数 ξ_i ; 否则, η 被舍弃。重复以上过程可求得 X 的随机数列 $\{\xi_i\}$.

说明: M 可以比最大值大, 但不能比最大值小。在实际工作中, M 通过有限次计算得到时, 为安全起见, 可以把 M 适当放大, 如10%或更高。

舍选抽样法的证明

讨论:

- 对于无限区间的情形, 可进行截尾处理. 即选择有限区间 $[a,b]$ 时, 满足

$$\int_a^b f(x)dx > 1 - \varepsilon.$$

只要 ε 且够小. 就可以应用上述方法而使计算误差满足要求。

- 舍选抽样的效率

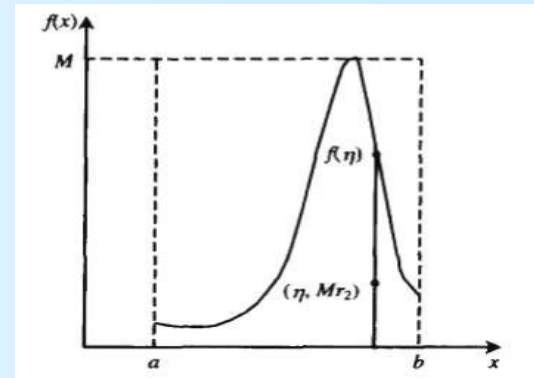
在舍选法中, 假定产生 n 对 r_1, r_2 (共 $2n$ 个随机数). 其中满足不等式 $r_2 \leq f(\eta)/M$ 的 η 的个数 m 与 n 之比. 等于曲线 $f(x)$ 下的面积与总面积 $(b-a)M$ 之比.

$$\frac{m}{n} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)M} = \frac{1}{(b-a)M}$$

因此, 舍选法的抽样效率为

$$E = \frac{m}{2n} = \frac{1}{2M(b-a)}.$$

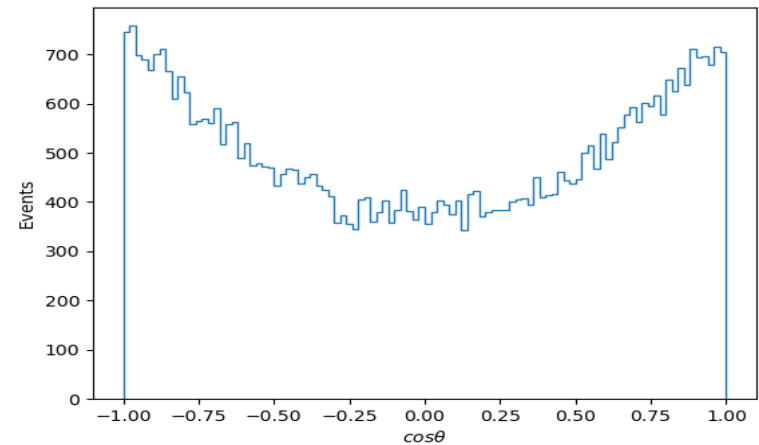
$f(x)$ 可以是不归一的



例：在 $J/\psi \rightarrow VP$ 衰变中， V 的角分布为 $\frac{d}{d\cos\theta} \propto 1 + \cos^2\theta$ ，用舍选抽样法产生事例。

算法：

1. 置 $N = 0$ ，抽取 $r_1, r_2 \in (0, 1)$
2. $\cos\theta = 2 * r_1 - 1$
3. 如果 $r_1 < (1 + \cos^2\theta)/2$ ，那么抽取 $\cos\theta, N += 1$ ，如果 $N < N_0$ ，回到1. 否则，结束抽样。



[code](#)

例. 利用直方图pdf抽样(BesEvtGen)

A. massH1:

Decay A

1 son1 son2 son... MassH1;

Enddecay

B. massH2:

Decay A

1 son1 son2 son... MassH2;

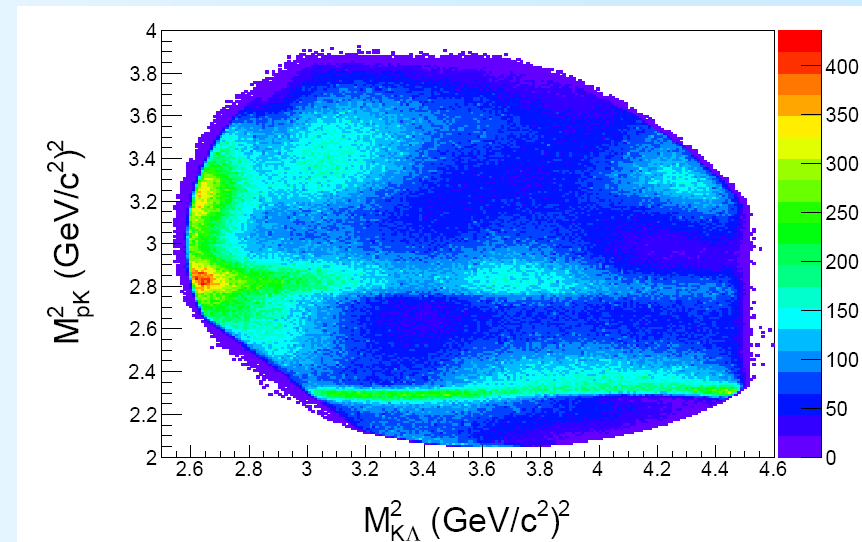
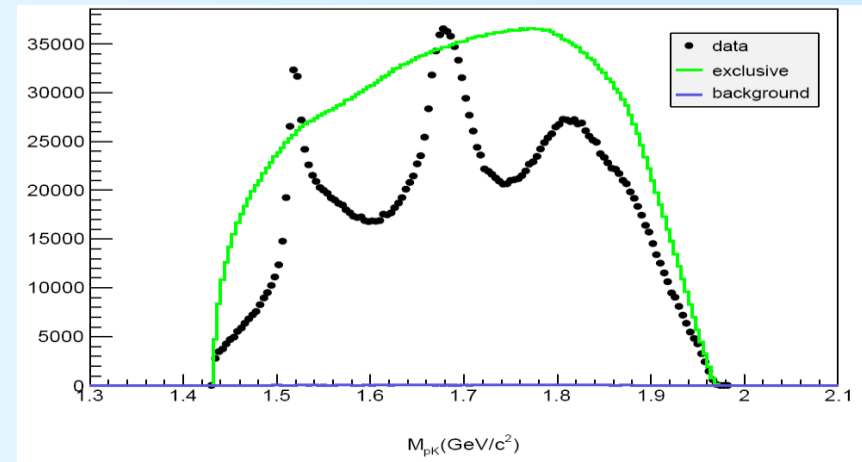
Enddecay

C. Body3:

Decay A

1 pi+ pi- pi0 Body3;

Enddecay



例：对随机变量 η 抽样，使它满足分布函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解：在 $x \in [0, 1]$, 分布函数的最大值 $M = 2$. 产生两个随机数 $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$, 判断

$$\xi_2 \leq f(\xi_1)/2, \quad \text{或者} \quad \xi_2 \leq \xi_1$$

是否成立，若成立，取 $\xi = \xi_1$, 若不成立，再取两组随机数，重复以上操作。实际上，由于随机数的独立性， ξ_1, ξ_2 的值可以互换，使它们满足舍选要求，所以可以取

$\xi = \max(\xi_1, \xi_2)$. (思考题：用反函数法怎么抽样？)

类似地，可以推广到高幂次情况：

$$f(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1.3.5. 加分布抽样

加分布抽样是复合抽样的特殊情况，它的密度函数在数学上一般形式为

$$f(x) = \sum_n p_n h_n(x), \quad 0 < p_n < 1, \sum p_n = 1$$

抽样步骤：

(a) 用分离抽样确定 n ，取 $(0,1)$ 区间上均匀分布随机数 ξ ，解下面的不等式求得 n

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i < \xi \leq \sum_{i=1}^n p_i.$$

(b) 找到对应的 $h_n(x)$ 并对其抽样，得到最后的抽样值 $\eta = \eta_{hn}$ 。

例：球壳均匀分布的抽样。设球壳内外半径分别为 R_0 和 R_1 ，球壳内一点到球心距离为 r 。则 r 的分布密度函数为

$$f(r) = \frac{3r^2}{R_1^3 - R_0^3}, R_0 \leq r \leq R_1,$$

解：令 $r = (R_1 - R_0)x + R_0$, $\lambda = R_1^2 + R_1 R_0 + R_0^2$, 分布函数化为：

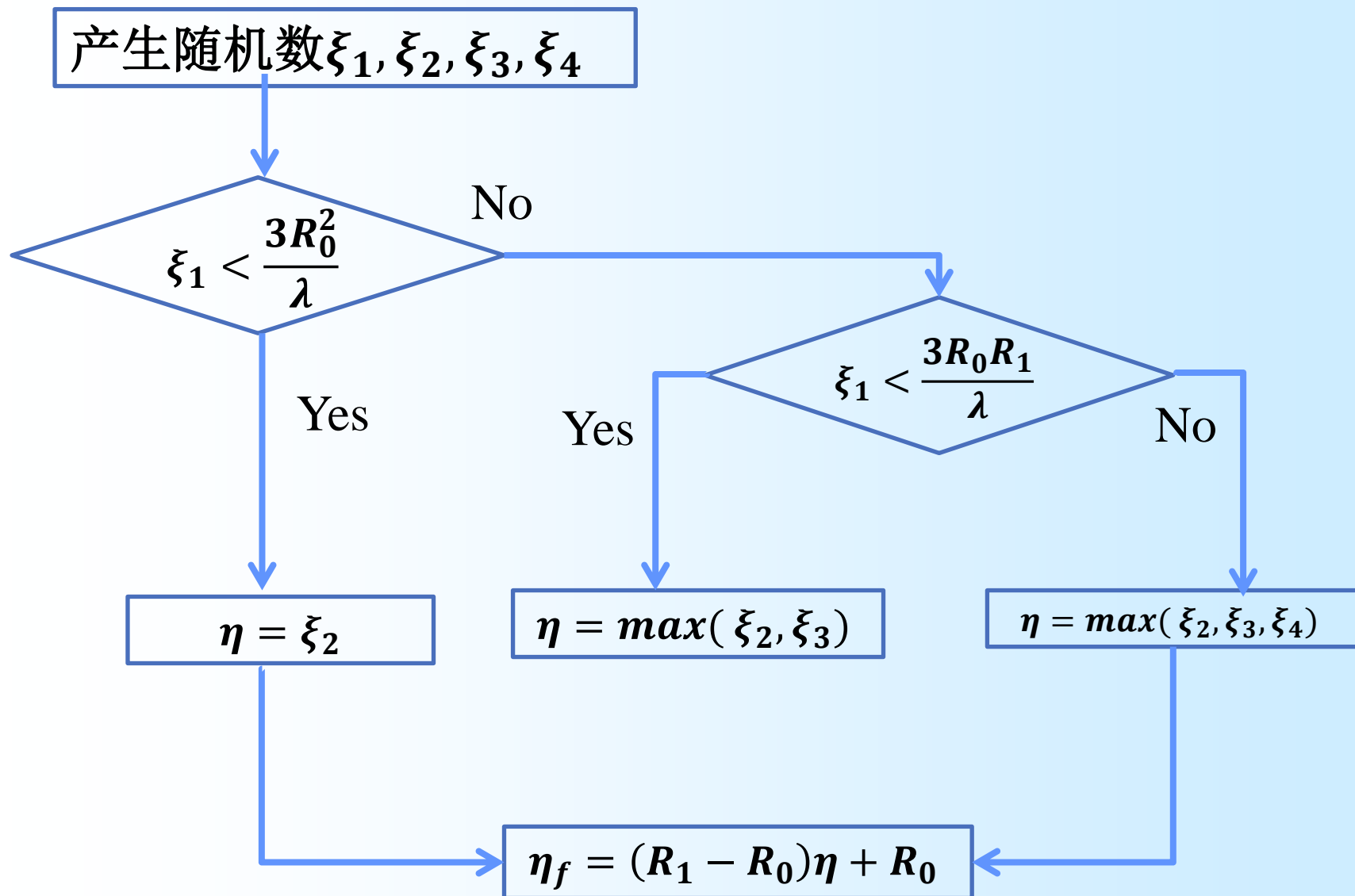
$$f(x) = \frac{(R_1 - R_0)^2}{\lambda} 3x^2 + \frac{3R_0(R_1 - R_0)}{\lambda} 2x + \frac{3R_0^2}{\lambda} * 1,$$

$$\text{取： } p_1 = \frac{3R_0^2}{\lambda}, p_2 = \frac{3R_0(R_1 - R_0)}{\lambda}, p_3 = \frac{(R_1 - R_0)^2}{\lambda},$$

$$p_1 + p_2 = \frac{3R_0R_1}{\lambda},$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

抽样方框图



附录：

随机变量函数的分布

例如：有随机变量 X, Y ，已知 X 的密度函数为 $f(x)$ ，随机变量满足 $Y = X^2$ ，求随机变量 Y 的密度函数 $g(y)$ ？

更一般的情形，随机变量满足一一对应关系 $y = y(x)$ 。

a. 考虑离散随机变量的情况

	x_1	x_2	...	x_n
$y = y(x)$	y_1	y_2	...	y_n
$P(x)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$...	$P(x_n)$
$P(y)$	$P(x(y_1))$	$P(x(y_2))$...	$P(x(y_n))$

注意：由于一一对应的关系， Y 取 $y_i = y(x_i)$ 的概率与 X 取值 x_i 的概率相等，即

$$p(y_i) = p(x_i) = p(x(y_i))$$

随机变量函数的分布

b. 对于连续随机变量, Y 在 a, b 之间的概率为
 $P(a < Y < b)$

$$= \int_a^b g(y) dy \xrightarrow{x \text{与} y \text{的一一对应关系}} \left| \int_{x(y=a)}^{x(y=b)} f(x) dx \right|,$$

利用 $dx \rightarrow \frac{dx(y)}{dy} dy$ 得到

$$\int_a^b g(y) dy = \int_a^b f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| dy$$

得到:

$$g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|.$$

如果 X, Y 不是一一对应函数, X 的值域有 k 个不相重叠的值域

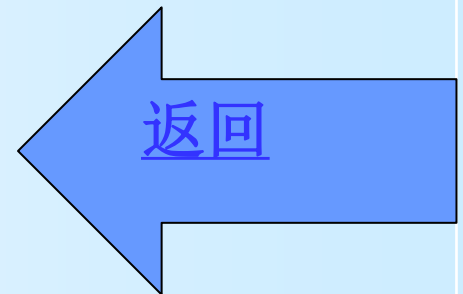
$$g(y) = \sum_{i=1}^k f(x_i(y)) \left| \frac{dx_i(y)}{dy} \right|.$$

返回

```
import random
import math
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
import matplotlib
matplotlib.use('Agg')

def sample(N0):
    N = 0
    sam=[]
    while N < N0:
        r1 = random.uniform(0, 1)
        r2 = random.uniform(0, 1)
        cos_theta = 2 * r1 - 1
        if r2 < (1 + math.pow(cos_theta, 2)) / 2:
            N += 1
            sam.append( cos_theta)
    if N >= N0:
        return np.array(sam)
```

```
N0 = 50000 # Set the value of N0
evt=sample(N0)
print('events:',evt)
plt.figure()
plt.hist(evt,bins=100,histtype='step')
plt.xlabel("$cos\\theta$")
plt.ylabel("Events")
plt.savefig("fig1.png")
```



习题一：取 **$A=137$** , **$C=187$** , **$M=256$** 和 **$X_0 = 1$** ,用线性同余法产生**3维随机数**和**2维随机数**, 然后分别绘出其**3维**和**2维分布图**。

习题二：证明**Breit-Wigner**分布 $f(x) = \frac{\Gamma}{\pi (x-x_0)^2 + \Gamma^2}$ 可以通过抽样)抽样 $x_i = x_0 + \Gamma \cot(\pi \xi_i)$ 得到, 其中, ξ_i 是在**(0,1)**区间的均匀分布随机数。

习题三：如果 **ξ_1, ξ_2** 是**(0,1)**之间均匀分布的随机数子样, 试推导出以下随机变量的密度分布函数:

1. $X_1 = \xi_1^2$, **2. $X_2 = \xi_1 + \xi_2$** , **3. $X_3 = \xi_1 * \xi_2$** ,
并用蒙特卡罗方法检验你的密度分布函数的正确性。

习题四：在 **$J/\psi \rightarrow e^+e^-$** 衰变中, 电子的极角余弦 **$x = \cos \theta$** 的分布密度函数为 **$f(x) = \frac{3}{8}(1 + x^2)$** , 给出两种随机变量 **$x$** 的不同蒙特卡罗抽样算法。