

分类号 _____

密级 _____

UDC _____

编号 _____

中国高等科技中心 博士后研究报告

分波分析方法

李 刚

合作导师 叶铭汉 院士，朱永生 研究员

工作完成日期 2004年7月— 2006年8月

报告提交日期 2006年8月

中国高等科技中心（北京）
2006年8月

Typeset by L^AT_EX 2 ϵ at February 6, 2010

With package **PostDocRep** v0.1d of C_TE_X.ORG

分波分析方法

The Methodology of Partial Wave analysis

博士后姓名	李 刚
合作导师	叶铭汉 院士，朱永生 研究员
流动站（一级学科）名称	物理学
专 业（二级学科）名称	粒子物理与原子核物理
研究工作起始时间	2004年7月
研究工作期满时间	2006年8月

单位名称	中国高等科技中心&中科院高能物理研究所
报告提交日期	2006年8月

前言

“因人成事，其功不难”。

学习一种全新的科学方法，如果有前人留下的系统的资料，则难度会减小很多；反之则会很不不便。这正是作者写出这个小册子的动机之一。从研究生时期开始，直到博士后阶段，我都在学习和使用分波分析和角分布理论，体会到了缺乏比较系统的学习材料和面临不同方法体系时不知所措的困难。这里我把自己的学习进行总结，而且用中文写成小册子。希望对愿意和喜欢学习分波分析的人能有所帮助，对 BESIII 的分析工作有所裨益。

在粒子物理当中，我们的最终的基本目标是找到动力学，也就是说有一个理论，我们可以用来计算各种物理过程的振幅。检验一种理论的正确性，比较初级的做法是测量各种反应的微分截面和衰变率（分支比），但是，更精细更有效的做法是测量各种和自旋相关的物理现象。在粒子物理实验中，目前有一些领域目前动力学理论尚无法精确计算，或者无法比较好地计算（比如低能QCD问题），尤其是在轻强子谱的分析当中，所以分波分析（运动学分析）就显得非常重要，通过运动学分析可以确定粒子的自旋、宇称、质量、宽度，进一步可以给出精确衰变分支比（因为分波分析可以考虑干涉效应的贡献）。

相对论粒子的运动学分析早在20世纪四、五十年代就已开始，之后就有人发展出比较完善的分波分析理论。其中所谓的张量形式（Tensor）的Zemach公式和螺旋度（Helicity）公式给出角分布的等价描述。它们的基本思想都是就是利用系统的SO(3)对称性把S矩阵元分离为角度部分和只依赖于能量（不依赖角度）的部分，或者通过所谓的协变分析的方法来把由动力学部分和运动学决定的部分分离开来。这样就可以采用拟合实验数据的方法来对末态粒子的角分布和动力学的不同模型进行检验和尝试，根据拟合的目标函数来确定不同的假设的优劣，并由此得到相关的参数以及共振态的不同自旋、宇称。这样就可以确定理论无法计算的动力学参数的同时可以确定共振态的量子数。这种方法的好处是，关于角分布以及运动学部分是严格的，从第一原理出发的，而对于动力学部分，尽管都是各种模型，但是也可以通过尝试拟合的方法来鉴定模型的优劣。

所以，分波分析中的一个重要问题是如何来描述角分布，也就是如何把我们的测量量和自旋依赖的振幅联系起来。在目前比较流行的有两种方

法，Helicity和协变张量方法。关于Helicity方法在把振幅展开为D函数和所谓Helicity振幅的这个层次上是严格的，因为它是从第一原理出发的，但是，因为Helicity振幅本身包含有能量依赖，当我们尝试把其中的能量依赖尽可能的抽取出来（约化）时就必然会用到其他的方法，比如协变分析的方法。而协变张量方法则从一开始就认为振幅是Lorentz协变的，根据这个假设，利用可能会出现变量，也就是末态粒子四动量和初态粒子的自旋波函数（包含了初态粒子的极化信息），来构造协变振幅，基于一套确定的规则，可以很给出各个独立振幅的简单表达形式（可是学习和掌握并不简单），由于振幅中只出现末态粒子的四动量，所以，一个很大的优点是计算机的计算量比较小。而实际上Helicity振幅的约化也采用了这种思想，因为Helicity振幅也是Lorentz协变量，也只能由末态粒子四动量和初态粒子的自旋波函数（包含了初态粒子的极化信息）来构造，只是，这使得构造会变得很简单，因为Helicity振幅不包含角变量且协变，我们可以采用特殊的参考系和坐标系来讨论问题，这样对人来说，问题会变得很简单，因为演算过程非常简单，而且物理概念非常清楚，但是，计算机的的运算量比较大，因为它要不断的进行旋转和Lorentz变换。

但是，由于分波分析是比较复杂的工作，其中对最后结果的影响因素很多，所以，很多情况下，人们怀疑两种Helicity和协变张量对角分布的描述是否等价。其实这个问题应该还是比较简单的，从学习两种理论和比较过程中，我们会很自然的发现其中的联系，了解到两种方法是等价的。

本书的章节安排是这样的：首先，在第一章，我们从非相对论的散射理论出发介绍分波分析的一些基本概念，比如分波展开、相移和共振等；接着，从第二章到第五章，我们着重介绍了Helicity和协变张量两种不同方法对角分布的处理，以及两种方法的相互关系，同时也把我尝试去说明两种方法的等价性，包括使用数值方法；接着第六章，我尝试着把分波分析中和动力学相关的一些问题列了出来，可以供大家讨论和进一步思考；最后一章，我们想从实用的角度出发讨论关于分波分析的一些现实问题，但是都是关于如何做最小化的，比如如何选择和使用最小化方法，如何讨论最小化参数的误差，如何对结果进行评价，即所谓统计显著性问题，以及在大样本下分波分析的一些特殊性。

当然，限于作者的知识和经验，本书肯定有不少缺陷乃至错误，希望读者能热心的指出，在此我表示感谢。

目 录

前言	i
目录	iii
第一章 分波、相移和共振	1
1.1 散射过程	1
1.1.1 散射的描述	1
1.1.2 分波相移	3
1.1.3 共振和散射振幅解析性质	4
1.1.4 共振相移和本底相移	8
1.1.5 相移与共振形状和截面	10
1.2 分波分析	12
1.2.1 分波分析的概念	12
1.2.2 分波分析特点	13
1.2.3 轻强子谱和低能QCD研究需要分波分析	14
第二章 角分布理论	15
2.1 Helicity Formalism	15
2.1.1 螺旋度的定义	15
2.1.2 态的构造	17
2.1.3 对称性	27
2.1.4 S矩阵和截面	28
2.1.5 两体衰变振幅的分波展开	30
2.1.6 级联衰变	32
2.1.7 举例	32
2.2 Covariant Tensor Formalism	40

2.2.1	从非相对论到相对论自旋波函数	41
2.2.2	动量空间的轨道角动量波函数	48
2.2.3	不变振幅的构造	49
2.2.4	处理级联衰变	54
第三章	张量形式的Helicity 耦合振幅：两种理论的等价性之一	57
3.1	自旋波函数和纯轨道角动量波函数	58
3.2	形式唯一的构造方式：根据 $L-S$ 耦合方案的Helicity振幅构造	62
3.3	举例	66
3.3.1	$\psi \rightarrow \pi^+\pi^-, K^+K^-$	66
3.3.2	$\psi \rightarrow VS[\phi f_0(980)]$	66
3.3.3	$\psi \rightarrow VA(\phi f_1(1420))$	67
3.3.4	$\psi \rightarrow VP(\rho\pi)$	68
3.3.5	$\psi \rightarrow VT[\phi f_2(1270)]$	68
3.3.6	$\psi \rightarrow K^*\bar{K}^*$	70
3.4	两种理论之间的联系	71
3.4.1	举例一： $\psi \rightarrow \pi^+\pi^-, K^+K^-$	71
3.4.2	举例二： $\psi \rightarrow \phi f_0(980)$	72
3.4.3	举例三： $\psi \rightarrow K^{*0}\bar{K}^{*0}$	73
第四章	对辐射衰变的处理:两种理论的等价性之二	77
4.1	协变张量方法	77
4.1.1	截面	78
4.1.2	极化：矢量粒子 $\rightarrow$ 光子	79
4.2	Helicity 耦合振幅振幅	82
4.3	举例	84
4.3.1	$\psi' \rightarrow \gamma\chi_{c0} \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$	85
4.3.2	$\psi' \rightarrow \gamma\chi_{c2} \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$	86
4.3.3	$\psi' \rightarrow \gamma\chi_{c1}$	88
4.4	讨论和小结	89

第五章	用数值方法证明两种理论的等价性	91
5.1	例子一: $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	91
5.1.1	采用Helicity 振幅展开	92
5.1.2	采用协变张量	93
5.2	例子二: $\psi \rightarrow \gamma \eta_c \rightarrow \gamma \rho^0 \rho^0 \rightarrow \gamma 2(\pi^+ \pi^-)$	94
5.2.1	采用Helicity 展开	95
5.2.2	采用协变张量方法	96
5.3	数值比较	97
5.3.1	$\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	97
5.3.2	$\psi \rightarrow \gamma \eta_c \rightarrow \gamma \rho^0 \rho^0 \rightarrow \gamma 2(\pi^+ \pi^-)$	98
5.4	小结	103
第六章	Dalitz-Plot 分析和动力学参数化	105
6.1	Dalitz-Plot 分析	105
6.1.1	运动学变量的数目	106
6.1.2	公式	107
6.1.3	角分布的描述	108
6.1.4	势垒因子 B_L	112
6.1.5	动力学函数 T_r 和 Breit-Wigner 公式	114
6.2	么正性和 K-Matrix	115
6.2.1	K-Matrix	115
6.2.2	应用到产生过程	118
6.2.3	宽共振和 Breit-Wigner 公式	119
6.3	一点讨论和小结	121
第七章	关于拟合的讨论	123
7.1	常见最小化方法简介	123
7.1.1	问题的定义	124
7.1.2	直接方法	125

7.1.3	解析方法	125
7.1.4	其它优化算法	126
7.1.5	局域极小问题	126
7.2	目标函数的一种构造方式	127
7.2.1	Monte Carlo 积分	129
7.2.2	拟合参数的不同处理	130
7.2.3	求最小过程中的线性化近似	132
7.3	更多可能	133
7.3.1	考虑探测器的分辨	133
7.3.2	拟合优度检验	134
7.3.3	宽共振的参数化和多个共振的干涉	135
7.3.4	引入新的优化算法	135
7.4	小结和展望	136
附录 A	自旋角动量本征态	137
A.1	单粒子角动量本征态	137
A.2	角动量的耦合	138
A.2.1	无耦合表象和耦合表象	138
A.2.2	用无耦合表象展开耦合表象: C-G系数	139
A.2.3	C-G系数的一些性质	139
A.2.4	一点应用和讨论	140
附录 B	转动矩阵, 常用D函数及其性质	141
B.1	转动矩阵	141
B.2	d函数和D函数的性质	143
B.2.1	d函数的性质	143
B.2.2	D函数的性质	144
B.3	常用d函数	146
B.4	常见角分布	147

附录 C 部分Helicity耦合振幅的约化结果	155
C.1 母粒子自旋为零的情形	155
C.2 母粒子自旋为 1 的情形	157
C.3 母粒子自旋为 2 的情形	164
附录 D 一些有用公式的汇集	177
D.1 一些有用的张量运算公式	177
D.1.1 四阶张量	177
D.1.2 三阶张量	178
D.2 Lorentz 不变量的构造	178
参考文献	181
感谢	183

表 格

2.1	构造协变耦合振幅所用的主要符号约定	51
6.1	Dalitz-Plot 分析中的独立变量数目。	106
6.2	当 $J = 0, 1, 2$, 初态无极化时的角分布, 其中 $\xi^2 = \gamma^2 - 1$, $\gamma = \frac{E_r}{m_r}$ 。	113
6.3	不同形式的势垒因子 B_L 。	113

插 图

1.1	在本底相移不同时的Breit-Wigner截面形状	11
2.1	Definition of the helicity rest frame S_A for particle A, which momentum $\vec{p}$ in a reference frame S	20
2.2	A canonical boost along $\vec{v}$ to $S \rightarrow S'''$ as shown.	21
5.1	ρ 在 J/ψ 参考系中的 θ 、 ϕ 分布: $[(1 + \cos^2 \theta)$ 、 1	98
5.2	π^+ 在 ρ^0 静止系中的 θ 、 ϕ 分布 $[(\sin^2 \theta)$ 、 $(2 + \cos 2\phi')$]	99
5.3	η_c 在 ψ 参考系中的 θ 、 ϕ 分布 $[(1 + \cos^2 \theta)$ 、 1]	101
5.4	ρ^0 在 η_c 静止系中的 θ 、 ϕ 分布 $(1,1)$	101
5.5	π^+ 在 ρ^0 静止系中的 θ 、 ϕ 分布 $[(\sin^2 \theta)$ 、 1]	102
5.6	两个 ρ^0 的极化平面夹角分布 $(\sin^2 \Delta\phi)$	102
B.1	自旋-1粒子的 d -函数图	149
B.2	自旋-2粒子的 d -函数图	150
B.3	自旋-3粒子的 d -函数图	151
B.4	自旋-4粒子的 d -函数图	152
B.5	自旋-1粒子的 d -函数图	153
B.6	自旋-1粒子的 d -函数图	154

第一章 分波、相移和共振

忆往昔，峥嵘岁月稠。

——毛泽东

本章主要是介绍早期关于散射过程的一些知识。从非相对论的散射理论出发，介绍共振、相移以及分波展开的概念。虽然我们以后将要面对相对论性的问题，但是，从非相对论理论出发，可以得到清晰的，可以很好定义的概念，对于我们理解物理过程的本质非常有益。

1.1 散射过程

早期的分波分析大多是在低能散射实验中进行的。下面我们将从低能散射现象出发讨论分波分析当中的基本概念。从低能散射出发讨论，有概念容易定义，物理意义明确等优点。

1.1.1 散射的描述

我们把出发点设在质心系中两个粒子定态散射过程的偏微分方程及其边界条件。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\rho}^2 + V(\rho) - E_{\rho} \right] \psi(\rho) = 0, \quad (1.1)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \psi(\rho) \sim N \left[e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right], \quad \psi(0) = 0. \quad (1.2)$$

其中， μ 是入射粒子和靶粒子系统的约化质量，

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}. \quad (1.3)$$

ρ 是两个粒子的相对坐标，

$$\rho = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B, \quad \rho = (\rho\theta\phi). \quad (1.4)$$

E_ρ 是相对运动能量。

$$E_\rho = \frac{p_\rho^2}{2\mu}, \quad \mathbf{p}_\rho = \mu \dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad (1.5)$$

现在我们来讨论(1.1)的解。假设体系具有旋转不变的性质(SO(3)对称), 现在我们转到球坐标系, 式(1.1)变为:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\rho^{-2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} + (\rho \sin \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + (\rho^2 \sin^2 \theta)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + V(\rho) - E_\rho \right\} \psi(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (1.6)$$

采用分离变量法, 可以把(1.6)分解为三个二阶微分方程,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\phi^2} + m^2 \right] \Phi(\phi) &= 0, \\ \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta(\theta) &= 0, \quad x = \cos \theta, \\ \left[\rho^{-2} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{d}{d\rho} + k^2 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\rho) \right] R_l(k\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中 $|m| \leq l$, $l = 0, 1, 2, \dots$ 。

方程(1.7)中角度部分的是所谓的球谐函数: $Y_{lm}(\theta\phi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right]^{1/2} P_l(\cos \theta) e^{-im\phi}$ 。其中 $P_l(\cos \theta)$ 是 Legendre 多项式。因为径向方程和 m 无关, 即对 ϕ 没有依赖, 所以我们可以略掉变量 ϕ , 可以把散射波函数用 Legendre 多项式展开为如下形式:

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos \theta) R_l(k\rho), \quad (1.8)$$

其中 a_l 是常数, 将由边界条件确定, $R_l(k\rho)$ 被称为分波。

令 $R_l(\rho) = \frac{F_l(\rho)}{k\rho}$, 则径向方程可以化为:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - 2U(\rho) \right] F_l(k\rho) = 0, \quad U(\rho) = \frac{\mu}{\hbar^2} V(\rho), \quad (1.9)$$

其中括号中第三项 $-\frac{l(l+1)}{\rho^2}$ 是所谓的离心势垒, 是转动效应对径向方程的贡献, 相当于一个排斥的势, 和轨道角动量有关。这时, 径向方程就完全化为一元二阶微分方程。

到此为止, 我们看到, 散射问题的角度部分可以严格求解, 当然是在满足SO(3)对称性的前提下。而剩下的问题则是关于径向方程的求解。这是散射问题的核心。下面我们将讨论求解径向方程的问题, 并引入一些关键概念。

1.1.2 分波相移

为了解方程(1.9)，先考虑假设 $U(\rho)$ 可以忽略的情形，这时它有两组线性独立的解，即著名的球Bessel函数：

$$k\rho j_l(k\rho), \quad k\rho n_l(k\rho). \quad (1.10)$$

当 ρ 是实数时，它们也是实函数，而且在除了原点以外具有良好的解析性质。

当 $U(\rho)$ 不能被忽略时，方程(1.9)的求解变得非常困难。实际上我们在实验中，探测器是远离相互作用区域的，即所谓渐进区域，如果在这个区域相互作用势能够被忽略的话，我们则可以猜想：

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} F_l(k\rho) \rightarrow f_l(k\rho), \quad (1.11)$$

其中 $f_l(k\rho)$ 是 $U(\rho) = 0$ 时方程(1.9)的解。

然而如果我们考虑短程势，即势在远离原点时比 ρ^{-2} 减小的还快的势。根据式(1.11)的启发，在 ρ 非常大的时候， $R_l(k\rho)$ 是(1.10)中两个线性独立解的迭加，

$$R_l(k\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} A_l j_l(k\rho) - B_l n_l(k\rho), \quad (1.12)$$

其中， A_l 和 B_l 独立于 ρ 而可能依赖于 k 。我们知道Bessel函数的渐进形式：

$$j_l(k\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin(k\rho - l\pi/2)}{k\rho}, \quad n_l(k\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\cos(k\rho - l\pi/2)}{k\rho}. \quad (1.13)$$

根据式(1.12)和式(1.13)我们得：

$$\begin{aligned} F_l(\rho) &\xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} A_l \sin(k\rho - l\pi/2) + B_l \cos(k\rho - l\pi/2) \\ &= C_l \sin \left[k\rho - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k) \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中

$$\tan \delta_l(k) \equiv \frac{B_l(k)}{A_l(k)} \quad (1.15)$$

$\delta_l(k)$ 是 l 阶分波相移， C_l 为归一化常数。到这里，我们给出了相移的概念。进一步来说，相移 δ_l 是动量的函数，而且相移的概念在非相对论散射理论中处

于基石(cornerstone)的地位。粒子在中心势场中的弹性散射截面完全由各个分波的相移决定。在弹性散射中, 相应的 δ_l 是实的, 而当势场对粒子有吸收, 则相应相移则是复数。

下面给出散射波函数、出射波函数和散射振幅的表达式如下,

$$\psi_{scatt} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \sum_0^{\infty} \frac{2l+1}{2ik} [e^{2i\delta_l} - 1] P_l(\cos \theta), \quad (1.16)$$

$$\psi(\rho, \theta) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} -\frac{(2l+1)i^l P_l(\cos \theta)}{2ik\rho} [e^{-i(k\rho-l\pi/2)} - S_l(k)e^{i(k\rho-l\pi/2)}], \quad (1.17)$$

$$f(\theta) = \sum_0^{\infty} \frac{(2l+1)[S_l(k) - 1] P_l(\cos \theta)}{2ik}. \quad (1.18)$$

其中

$$S_l(k) \equiv e^{2i\delta_l}, \quad (1.19)$$

容易证明 S 矩阵具有如下的性质:

$$S_l(k) = \frac{1}{S_l(-k)}, \quad S_l(k) = \frac{1}{S_l^*(k^*)}. \quad (1.20)$$

另外定义单道散射过程中的 T 矩阵为

$$T_l = S_l - 1 \quad (1.21)$$

利用 T_l , 式(1.18)可表示成,

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_0^{\infty} (2l+1) T_l P_l(\cos \theta), \quad (1.22)$$

1.1.3 共振和散射振幅解析性质

粒子物理最显著的现象大概就是反应截面上的共振了。下面我们从非相对论散射理论中波函数的分波展开形式出发做一点简单讨论, 并简单介绍束缚态、共振态和虚态的概念。

我们从散射方程的解(1.18)和(1.22)出发进行讨论。

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_0^{\infty} (2l+1) [S_l - 1] P_l(\cos \theta) \\ &\equiv \frac{1}{2ik} \sum_0^{\infty} (2l+1) T_l P_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (1.23)$$

下面我们来看 S 矩阵的解析性质对应了量子力学系统的可观测效应。

- 束缚态

对于S-波散射($l=0$)，其径向方程为：

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - 2U(r) \right] F(kr) = 0, \quad (1.24)$$

考虑到边界条件，其解可以表达为

$$F(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C(k) [e^{-ikr} - S(k)e^{ikr}]. \quad (1.25)$$

我们并不关心 $C(k)$ ，可以取为1，在原点 $F(0) = 0$ 。对于物理的碰撞过程作为和入射粒子能量相关的 k^2 必须是正的。但是，我们不妨考虑 $-k^2$ 的解，对于 $-k^2$

$$k = \pm i\kappa, \quad (\kappa > 0), \quad (1.26)$$

对于负能量，在无穷远的渐进区域， $U(r)$ 可以被忽略，于是(1.24)变为：

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \kappa^2 \right] F(kr) = 0, \quad (1.27)$$

这个方程具有如下形式的通解：

$$F(r) = Ae^{-\kappa r} + Be^{\kappa r}. \quad (1.28)$$

根据波函数的统计解释，我们要求几率必须有限，这必然导致： $B = 0$ 。此时，考虑边界条件(1.25)，当 $k = -i\kappa$ ，我们有

$$F(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-\kappa r} - S(k)e^{\kappa r}. \quad (1.29)$$

比较(1.29)和(1.28)，我们考虑到前面的讨论，立刻就会得到 $S(-i\kappa) = 0$ 。也就是说当S矩阵在 k 的复平面的负虚轴上的零点位置对应(1.24)如下的解

$$F(0) = 0, \quad F(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-\kappa r} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1.30)$$

这正是我们熟悉的束缚态解。到这里我们可以看出S矩阵的解析性质有着物理对应。也就是S矩阵在 k 的复平面的负虚轴上的零点或者正虚轴上的极点(根据性质1.20)对应对应了散射过程的束缚态。

- 虚态

当 $k^2 = 0$ ，即在阈上的散射，于是S-波的径向方程变为：

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - 2U(r) \right] F(kr) = 0. \quad (1.31)$$

在无穷远的区域 $U(r)$ 可以略去，易得线性解

$$F(0) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_2 r + C_1, \quad (1.32)$$

其中 C_1 和 C_2 是积分常数。这就是虚态(Virtual State)解。所谓虚态就是能量为0($k^2 = 0$)，而且吸引势的大小刚好能容下的第一个束缚态，但是这个态是不能归一化的，而且只有 $\pi/2$ 的相移，并不是一个真正的束缚态。如果吸引势再变强一点，虚态将会转变为束缚态；从数学上来讲，可以把S矩阵在 k 的复平面的正虚轴的零点(或者负虚轴上的极点)对应的态定义为虚态。

- 共振态

如果S矩阵的零点在 $k = -\kappa_0 + i\kappa_1$ (其中 κ_0 和 κ_1 是实数)，从(1.17)我们可以得到：

$$F_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-i(\kappa_0 + i\kappa_1)r} = e^{i\kappa_0 r} e^{-\kappa_1 r} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1.33)$$

如果 $\kappa_0 > 0$ ，因为此时 $S(k) = 0$ ，那将只有出射的径向波而没有任何入射波的成分。

根据量子力学关于密度流的定义，单位时间内通过半径为 a 的球面的粒子数为：

$$\begin{aligned} N &= -\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial F}{\partial r} F^* - \frac{\partial F^*}{\partial r} F \right) 4\pi a^2 \\ &= \frac{4\pi a^2 \hbar \kappa_0}{m} e^{2\kappa_1 a} . \end{aligned} \quad (1.34)$$

定义

$$|\psi(r)|_a^2 = e^{2\kappa_1 a} . \quad (1.35)$$

所以我们有(其中 $v = \frac{\hbar \kappa_0}{m}$ ，为粒子速度)：

$$N = 4\pi a^2 |\psi(r)|_a^2 \cdot v . \quad (1.36)$$

我们可以把含时的包含数表为：

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r) e^{-iEt/\hbar} , \quad (1.37)$$

其中，

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (-\kappa_0 + i\kappa_1)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (\kappa_0^2 - \kappa_1^2 - 2i\kappa_0\kappa_1) \quad (1.38)$$

$$\equiv E_0 - i\frac{\Gamma}{2} . \quad (1.39)$$

最终我们给出几率密度表达式：

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = e^{2\kappa_1 a} e^{-t/\tau} \quad \tau \equiv \hbar/\Gamma . \quad (1.40)$$

到这里我们可以看到当 $\kappa_0 > 0$ 和 $\kappa_1 > 0$ 时，有 $\Gamma > 0$ ， Ψ 所描述的体系以平均寿命 τ 衰变。(1.40)所描述的态是准稳定态(quasi-stationary state)，也就是所谓共振态。(1.33)式中， S 矩阵的零点位置是 $k = -\kappa_0 + i\kappa_1$ ，而相应的极点为 $k = \kappa_0 - i\kappa_1$ 。

由于 $S(k) \neq S(-k)$ ，而 $k^2 = (\pm k)^2$ ，所以 k 平面上的 $\pm k$ 对应 k^2 平面上的一个点。所以一般取 k 平面的上半平面为物理叶，下半平面为非物理叶。相应的 k^2 黎曼面的第一叶为物理叶，而第二叶为非物理叶。于是束缚态

对应 S 矩阵在物理叶上的极点，而虚态和共振态对应非物理叶上的极点，在 k^2 平面上正实轴成为割线(branch cut)。

在实际散射实验中，我们只能做到让 k^2 为正实数，所以我们永远无法到除了正实轴以外的 k^2 复平面上去。但是，从理论上讲，如果 $S(k)$ 在物理的能量轴附近有一个极点，我们可以期望这样的奇异性将会对真实的物理量产生显著的影响，比如影响相移和截面。

1.1.4 共振相移和本底相移

在 1.1.3 中，我们讨论了共振态，当 $k = -\kappa_0 + i\kappa_1$ 时，式 1.16 出现共振态，这正是 S 矩阵的零点位置，同时 $k = \kappa_0 - i\kappa_1$ 是式 S 矩阵的极点。下面我们讨论共振态的相移。

我们在极点附近来看 $\delta_l(k)$ 的行为。利用 S 矩阵的定义，我们把式(1.17)改写为

$$F_l(kr) \sim e^{-i(kr - l\pi/2 + \delta_l)} - e^{i(kr - l\pi/2 + \delta_l)}, \quad (1.41)$$

因为 F_l 除了含有 r 依赖外还可以含有任意常数，那么我们进一步把 F_l 表为

$$F_l(kr) \sim A_l(E)e^{-ikr} - A_l^*(E)e^{ikr}, \quad (1.42)$$

其中，我们引入了复能量 E 的复函数

$$A_l(E) = i^l e^{-i\delta_l(E)}, \quad A_l^*(E) = (-i)^l e^{i\delta_l(E)}. \quad (1.43)$$

对于共振态，必须有

$$A_l(E) = 0 \quad E = E_r - i\frac{\Gamma}{2}, \quad (1.44)$$

成立。其中， E 和 Γ 是正实数。我们把 A_l 在它的零点附近作泰勒展开，

$$A_l(E) \approx A_l(E_r - i\frac{\Gamma}{2}) + \left[E - (E_r - i\frac{\Gamma}{2}) \right] a_l + \dots, \quad (1.45)$$

其中 a_l 是 A_l 在零点处的一阶导。因为第一项为零，故有

$$A_l(E) \approx \left[E - (E_r - i\frac{\Gamma}{2}) \right] a_l + \dots, \quad (1.46)$$

和

$$A_l^*(E) \approx \left[E - (E_r + i\frac{\Gamma}{2}) \right] a_l^* + \dots \quad (1.47)$$

把上面两个表达式代入(1.42)给出,

$$\begin{aligned} F_l(E, r) &\sim \left[E - (E_r - i\frac{\Gamma}{2}) \right] a_l e^{-ikr} - \left[E - (E_r + i\frac{\Gamma}{2}) \right] a_l^* e^{ikr} \\ &\sim i\Gamma a_l^* e^{ikr} \quad \text{at} \quad E = E_r - i\frac{\Gamma}{2}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

对比上式和(1.41)式, 在 S 矩阵极点附近, 可以得到:

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_l(E)} &= e^{i\pi l} \frac{a_l^*}{a_l} \frac{E - E_r - i(\Gamma/2)}{E - E_r + i(\Gamma/2)} \\ &\equiv e^{2i\delta_l^{pot}} \left\{ 1 - i \frac{\Gamma}{E - E_r + i(\Gamma/2)} \right\}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

其中, 我们定义所谓的势相移部分, 也就是非共振相移,

$$e^{2i\delta_l^{pot}} \equiv e^{i\pi l} \frac{a_l^*}{a_l}. \quad (1.50)$$

我们可以看到, 当 $|E - E_r| \gg \Gamma$ 时, 式(1.49)中方括号中第二项可以忽略, 故有 $\delta_l \rightarrow \delta_l^{pot}$ 。也就是说, 在能量远离极点位置时, 相移 δ_l 是由(1.50)式给出的能量的缓变函数, 也被称为本底相移。而

$$\left\{ 1 - i \frac{\Gamma}{E - E_r + i(\Gamma/2)} \right\} = \frac{E - E_r - i(\Gamma/2)}{E - E_r + i(\Gamma/2)}$$

则在 $A_l(E)$ 的零点附近给出迅速变化的 δ_l 。这一项被称为相移的共振部分, 我们定义,

$$e^{2i\delta_l^{res}} \equiv \frac{E - E_r - i(\Gamma/2)}{E - E_r + i(\Gamma/2)} \equiv \frac{\cos \delta_l^{res} + i \sin \delta_l^{res}}{\cos \delta_l^{res} - i \sin \delta_l^{res}}. \quad (1.51)$$

我们可以看到, 完整的分波相移被分为两部分,

$$e^{2i\delta_l} = e^{(2i\delta_l^{pot} + 2i\delta_l^{res})}, \quad \delta_l = \delta_l^{pot} + \delta_l^{res}. \quad (1.52)$$

从式(1.51)中可以看到

$$\frac{E - E_r}{-\Gamma/2} = \frac{\cos \delta_l^{res}}{\sin \delta_l^{res}}, \quad \cot \delta_l^{res} = \frac{E_r - E}{\Gamma/2}, \quad \delta_l^{res} = -\cot^{-1} \frac{E - E_r}{\Gamma/2}. \quad (1.53)$$

1.1.5 相移与共振形状和截面

有了共振相移和本底相移的概念后，我们来看他们以及他们的相互作用对共振形状和截面能产生什么样的效应。考虑到

$$\tan \delta_l^{res}(E) = \frac{\Gamma/2}{E_r - E}, \quad (1.54)$$

我们可以分析得到，能量从 $E < E_r$ 到 $E > E_r$ 变化过程中， $\delta_l^{res}(E)$ 则从零附近增加到接近 π ，极点两边各贡献 $\pi/2$ ；变化的速度取决于 Γ 的大小， Γ 越小，变化越迅速，而 Γ 变大，即极点距离实能量轴越远，共振相移变化越缓慢。

把相移分成本底相移和共振相移等价于把产生相移的相互作用势做分解。在单道过程中，势被分为两部分。通常如果解只含有远程排斥势的径向方程则会给出本底相移；而短程吸引势则给出产生共振的机制。

我们可以用下面的方式定义 T 矩阵，

$$\begin{aligned} T_l(E) = e^{2i\delta_l} - 1 &= e^{2i\delta_l} - e^{2i\delta_l^{pot}} + e^{2i\delta_l^{pot}} - 1 \\ &= e^{2i\delta_l^{pot}} (e^{2i\delta_l^{res}} - 1) + (e^{2i\delta_l^{pot}} - 1) \\ &\equiv T_l^{res} + T_l^{pot}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

总截面可以表达为：

$$\begin{aligned} \sigma(E) &\sim \frac{1}{4} k^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) T_l^* T_{l'} \times 2\pi \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d \cos \theta \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |T_l|^2, \end{aligned} \quad (1.56)$$

从中我们可以看出，第 L 个分波对总截面的贡献为，

$$\sigma_L \sim \frac{1}{k^2} (2L+1) |T_L^{res} + T_L^{pot}|^2, \quad (1.57)$$

其中包含共振项： $|T_L^{res}|^2$ 、本底项： $|T_L^{pot}|^2$ 和二者的干涉项。假设本底相移可以忽略，那么截面中就只有共振项，

$$\begin{aligned} \sigma_L^{res} &\sim \frac{2L+1}{k^2} |e^{2i\delta_L^{res}} - 1|^2 \\ &= \frac{4(2L+1)}{k^2} \sin^2 \delta_L^{res} \\ &= \frac{4(2L+1)}{k^2} \cdot \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

推导过程中使用了(1.53)式。(1.53)式就是著名的描写共振截面的Breit-Wigner公式。从(1.57)式中可以看出分波截面中的共振部分是和本底部分叠加在一起的，而且和其他分波也是叠加在一起的。实验上能否观察到这样一个共振，主要取决于它和本底部分相干的程度；同样也取决于它的宽度—因为一般宽共振更难被观察到。必须强调的是共振极点和特定分波相联系的。因为 Γ 描写了极点距离实能量轴的距离，我们现在可以看出(1.48)式定性性质：距离实能量轴远的共振极点对 $\sigma(E)$ 的贡献比较小，因为我们只能在正实轴上进行实验。

我们可以把(1.57)式完整的用相移表达出来，

$$\begin{aligned}
 \sigma_L &\sim \frac{(2L+1)}{k^2} |T_L^{res} + T_L^{pot}|^2 \\
 &= \frac{(2L+1)}{k^2} \{ |T_L^{res}|^2 + |T_L^{pot}|^2 + [T_L^{res*} T_L^{pot} + T_L^{res} T_L^{pot*}] \} \\
 &= \frac{4(2L+1)}{k^2} \{ \sin^2 \delta_L^{res} + \sin^2 \delta_L^{pot} + 2 \sin \delta_L^{res} \sin \delta_L^{pot} \cos(\delta_L^{res} + \delta_L^{pot}) \} \quad (1.59)
 \end{aligned}$$

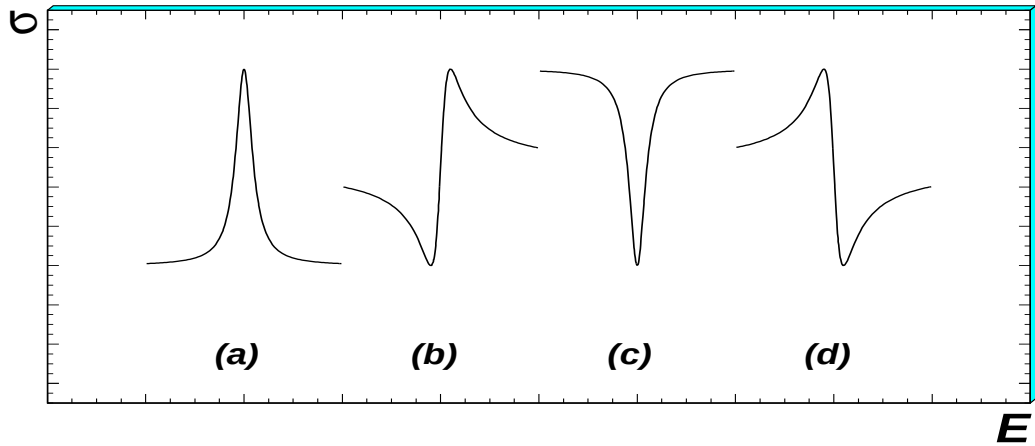


图 1.1: 本底相移分别取常数(a) 0, (b) $\pi/4$, (c) $\pi/2$, (d) $3\pi/4$ 时, Breit-Wigner共振截面的变化。这说明不同的本底相移对共振截面的形状产生显著影响。

上式中, δ_L^{pot} 是随能量缓变的光滑函数, 那么我们可以近似的把其视为常数, 而不同的 δ_L^{pot} 将对出现在截面中的共振形状产生影响。我们可以把(1.59)画

出如图 1.1所示。

我们可以看到：本底相移对共振截面的形状产生显著影响，也就是说共振并不总是以尖峰的形状出现，而是受相应分波当中的本底相移的影响。前面提到过，在散射过程中，共振的本质特征是 $S_L(E)$ 的相位的迅速变化，而振幅和截面的大小受到相移的影响，并不一定出现尖峰的典型特征。而且这只是单道散射的情形，如果是多道，可以想象，共振行为将会更复杂。

1.2 分波分析

1.2.1 分波分析的概念

如果对散射过程中的振幅做分波展开，从上面的分析我们可以得到一下几点信息：

- 每个分波的角分布是确定的，和共振的自旋有关，其他能量依赖部分包含在相移当中；但是，相移很难有严格解析解，一般由实验测量得到，最近开始有Lattice 的计算。
- 由于一定自旋的粒子出现在特定的分波里，所以，粒子的自旋宇称等量子数也就确定了粒子的角分布；反过来说，通过研究角分可以确定粒子的自旋宇称等量子数。
- 如果我们从截面的变化上观察到了共振现象，则对振幅的能量部分进行参数化时可以考虑放进共振贡献，这样，我们可以通过拟合得到共振态的质量和宽度等参数。
- 但是对于多道，并考虑本底过程的分析将会变得非常复杂，因为截面上的起伏和共振态的之间的对应变得很难确定，必须有更仔细的分析。

基于以上的特点，我们知道各个分波的角分布在很大程度上是确定的，而振幅的能量依赖部分，即动力学部分，是很难计算的，尤其是在低能QCD 中。所以分波分析的基本做法是通过各种方法把振幅中角度部分和能量依赖部分分离开来，然后对能量依赖的那部分做参数化，比如采用 Breit-Winger 传播子和势垒因子来进行参数化，而角度部分，可以表达为 D 函数，或者直接包含在张量形式振幅的当中；然后通过拟合实验数据角分布的方法来确定能量依赖部分的

全部参数，得到理论计算无法得到的相关参数。如果对质心能量分 BIN，则只能测量出不同分波在某个固定能量点上的比分，这样的结果将是没有模型依赖的。这是分波分析的基本思想。

1.2.2 分波分析特点

相对一般直接拟合截面的测量共振参数和分支比的方法，分波分析有很多优点：

- 能比较系统细致地考虑干涉效应的贡献。因为分波分析是从振幅层次上给出其的完整表达式，自然能考虑干涉效应，这样更接近物理实际。
- 构造振幅时使用了末态粒子对能量、角度变量，所以比其他任何方法都更充分地利用了实验数据的信息，这样可以使得到的结果更可靠。
- 由于角分布是严格地从第一原理得到的，所以，如果采用分BIN 拟合，则完全没有模型依赖，能给出任意能量点上各个分波的贡献以及它们的干涉细节，同时对统计量要求比较高。
- 如果采用分波分析的整体拟合，可以同时确定多个参数，充分利用全部数据的信息，并可以考虑它们之间的相关性，这样会使最终的结果更加可信。

当然，作为一种实验分析的工具，它也有自己的不足之处：

- 多参数拟合的最优化问题，在数学上并没有完美的算法，对于出现局域极小的问题，没有原则性的解决方法；虽然可以采用一些技巧改善，比如随机搜索、网格搜索等。但是，还没有达到数学上的严格性和实际上有效性的要求。
- 整体拟合中必然引进某种模型，自然就引入了模型依赖。
- 一般的分析对象都有相应的本底，对于本底的描述是一个复杂的问题，因为分波分析考虑了角分布，而本底的角分布是很难知道的，即使知道本底道的角分布，但是经过信号道的选择后，角分布也会变化。在有多个本底道，而且他们的贡献都比较相当的情况，问题会变得更加复杂。

- 统计量问题。对于多个参数拟合，如果想要得到比较小的误差，必须保证一定的统计量，那么小样本将不适合分波分析方法，或者很难得到很精确的结果；如果统计量很大，又会给计算资源提出很高要求，当放入拟合的共振态很多时，如何判断一个成分的统计显著性，也是一个挑战。
- 在目前的分波分析中，振幅的么正性并不满足，尤其时相空间比较大时。这点正是可以改进的地方之一,比如在分析中考虑采用 K-Matrix 方法。
- 对计算机资源（内存和CPU）要求在不断提高，尤其是在统计量不断提高的现在。

1.2.3 轻强子谱和低能QCD研究需要分波分析

回顾量子力学的发展，人们会发现，当初对于光谱学的大量测量结果对量子力学的产生发展起了非常大、甚至是决定性的作用。目前，粒子物理虽然有一个大家还基本能接受的理论——标准模型（SM），但是，大部分人还是倾向于认为SM只是一个有效的理论，也就是说它并不是最终的粒子物理理论。我们相信，对于轻强子谱的研究，能积累实验现象和实验数据，再通过对数据的整理，归纳，和深入理解，发现新的唯象规律，促进现有理论的发展，乃至导致新的理论产生，就像量子力学的产生一样；当然另一种情况是能对理论做出直接检验，比如如果找到胶子球，就直接肯定了QCD的非阿贝尔性质。

但是，不管是寻找胶子还是细致系统地研究轻强子谱，都需要分波分析这一工具，因为在3GeV以下的能区集中了大量的强子态，还有理论上允许存在的奇特态、混杂态，它们之间，以及它们和普通强子混合是必然存在的，复杂的客观情况需要强有力的分析工具，而分波分析正是这样的一种分析方法；并且目前这一能区的实验数据的统计量正在迅速提高。这些正好是进行分波分析的必要性和可行性条件。“工欲善其事，必先利其器”，鉴于分波分析的强大功能和一些不足之处，所以我们需要学习分波分析的知识，利用这种工具，发展完善这种分析方法，这样可能取得更多、更可靠的物理结果，对检验现有理论作出贡献，并可能促进新理论的产生。

第二章 角分布理论

如今才是十三夜，月色已如玉。

未是秋光奇艳，看十五十六。

—— 杨万里·《好事近》

在第一章，我们从散射过程的非相对论描述出发介绍了一些分波分析的基本概念，但是，我们将要面对的主要是产生和衰变过程的问题，这些都是典型的相对论问题，必须有相对论性的理论来对其进行描述，针对这一点，有专门的理论工具，所以，这章我们将会主要讨论产生和衰变过程的角分布的更加常用的相关相对论形式的角分布理论。

本章主要包含两部分，介绍两种角分布理论，即所谓的螺旋度（Helicity）理论和协变张量理论（Covariant Tensor），并试图讨论两种理论的联系。实际上，两种理论是等价的，这是本书想说明的问题之一。

2.1 Helicity Formalism

我们首先来介绍用Helicity Formalism来描述角分布的理论。

2.1.1 螺旋度的定义

所谓螺旋度就是角动量沿动量方向的投影。用 h 来代表Helicity算子，对运动粒子其定义可以表示为：

$$h = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} = \vec{J} \cdot \hat{P}, \quad (2.1)$$

其中， $\hat{P}$ 代表动量的方向。若某粒子处于静止，此时定义Helicity 为自旋沿第三轴方向的投影，即定义：

$$h = J_3. \quad (2.2)$$

但若粒子是经过一个Lorentz变换后变为静止的，此时则定义粒子的Helicity为该粒子自旋在Lorentz变换前的运动方向上的投影。通常，总角动量 $\vec{J}$ 为轨道角动量 $\vec{L}$ 与自旋角动量之和，即：

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (2.3)$$

但是由于轨道角动量 $\vec{L}$ 始终和粒子的运动方向垂直，即

$$\vec{L} \cdot \vec{P} = 0, \quad (2.4)$$

故只有粒子的自旋 $\vec{S}$ 对粒子的Helicity有贡献。

$$[J_i, \vec{J} \cdot \vec{P}] = 0. \quad (2.5)$$

Helicity 分析主要是从对称性的角度来分析散射振幅的一般形式和一些性质，而具体反应过程的动力学信息则留在约化矩阵元之中。虽然Helicity 分析中不需要从相对论的波动方程出发进行动力学计算，但是从相对论波动方程得到的一些定性的信息还是非常有用的。这些基本性质包括以下几点：

- 自旋为 s 的粒子的波动方程为Bargmann-Wigner方程。对于静止质量为 $m \neq 0$ 的粒子，对每一个动量 p ，Bargmann-Wigner 方程有 $(2s + 1)$ 个线性独立的解。通常情况下是构造这些解使其具有确定的Helicity值。若将方程的解记为 $|P\lambda\rangle$ ，则

$$h|P\lambda\rangle = \lambda|P\lambda\rangle, \quad (2.6)$$

其中 λ 取 $-s$ 到 $+s$ 之间的 $(2s + 1)$ 个值，即

$$\lambda = -s, -s + 1, \dots, s. \quad (2.7)$$

若粒子静止质量 $m = 0$ ，此时不存在粒子的静止系。于是此时的波动方程是不可约的，则 Bargmann-Wigner 方程只有两个独立的解，这两个解仍可以构造成Helicity 算子的本征态，但此时Helicity 算子的本征值只有 $\pm s$ 两个。即

$$h|P\lambda\rangle = \lambda|P\lambda\rangle, \quad (\lambda = \pm s) \quad (2.8)$$

- Helicity 算子和角动量算子是相互对易的:

$$[J_i, h] = 0 \quad (2.9)$$

- 转动变换下, Helicity λ 保持不变。

$$[h, R] = 0 \quad R = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}}, \quad (2.10)$$

- 宇称变换下, Helicity λ 要反号。
- 沿动量发向进行一次 Lorentz 变换, 若动量没有反向, 则 Helicity λ 保持不变; 如果动量反向, 则 Helicity λ 也反号。

2.1.2 态的构造

下面我们给出粒子态的相对论描述。相对论性的带有动量 $\vec{p}$ 单粒子态可以通过应用一个么正算符作用于 $|jm\rangle$ 上而得到, 这个么正算符代表一个把粒子从静止态变换到具有动量 $\vec{p}$ 的态 Lorentz 变换。这里, 我们同时给出了正则态的定义和 Helicity 态的定义, 并给出了它们之间的联系。后面还介绍一些它们应用, 但是重点限于 Helicity 态。

2.1.2.1 一些准备性的定义和约定

让我们来考虑一个定义如下的四动量矢量 p^μ 和张量矩阵:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}),$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

采用上面的定义, 我们可以定义带有下标的四动量矢量:

$$p_\mu = g^{\mu\nu} p_\nu (E, -\vec{p}).$$

把四动量 p^μ 变换到 p'^μ 的正常齐次正时的 Lorentz (Proper Homogeneous Orthochronous Lorentz) 变换如下:

$$p'_\mu = \Lambda_\nu^\mu p^\nu,$$

其中, Λ_ν^μ 是如下定义的 Lorentz 变换矩阵:

$$g_{\alpha\beta} \Lambda_\nu^\alpha \Lambda_\nu^\beta = g_{\nu\nu}, \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda_0^0 = 1.$$

一般来说, 形式如 Λ_ν^μ 的 Lorentz 变换包含了转动和纯 Lorentz 变换。我们可以用 $L_\nu^\mu(\vec{\beta})$ 表示一个纯的类时 Lorentz 变换, 其中 $\vec{\beta}$ 是变换的速度。具有特殊重要性的是沿着 z -轴的纯 Lorentz 变换, 记为 $L_z(\beta)$,

$$L_z(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$ 。

用 $L_z(\beta)$, 我们很容易定义一个沿着任意方向 $\vec{\beta}$ 的纯 Lorentz 变换:

$$L(\vec{\beta}) = R(\phi, \theta, 0) L_z(\beta) R^{-1}(\phi, \theta, 0), \quad (2.11)$$

其中 $R(\phi, \theta, 0)$ 是把 z -轴转到方向角为 (θ, ϕ) 的 $\vec{\beta}$ 方向的转动。

$$\hat{\beta} = R(\phi, \theta, 0) \hat{z}.$$

$L(\vec{\beta})$ 的具体形式如下:

$$L(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1 + \alpha\beta_x^2 & \alpha\beta_x\beta_y & \alpha\beta_x\beta_z \\ \gamma\beta_y & \alpha\beta_x\beta_y & 1 + \alpha\beta_y^2 & \alpha\beta_y\beta_z \\ \gamma\beta_z & \alpha\beta_x\beta_z & \alpha\beta_y\beta_z & 1 + \alpha\beta_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

其中 $\alpha = \gamma^2(1 + \gamma)^{-1}$ 。

任意作用在相对论粒子态上的 Lorentz 变换 Λ 都可以用么正算符来表示: $U[\Lambda]$, 且满足乘法律的群性质:

$$U[\Lambda_2 \Lambda_1] = U[\Lambda_2] U[\Lambda_1]. \quad (2.13)$$

从关系式2.11和群性质2.13, 我们可以得到:

$$U[L(\vec{p})] = U[\mathring{R}(\phi, \theta, 0)]U[L_z(p)]U^{-1}[\mathring{R}(\phi, \theta, 0)], \quad (2.14)$$

其中转动 $\mathring{R}(\phi, \theta, 0)$ 表示把 z -轴转到方向为 (θ, ϕ) 动量 $\vec{p}$ 方向。

$$\hat{p} = \mathring{R}(\phi, \theta, 0)\hat{z}.$$

2.1.2.2 相对论单粒子态构造

现在我们来构造相对论性的单粒子态。

我们用两种等价的方式定义自旋为 j 动量为 $\vec{p}$ 的粒子的 Helicity 态:

$$\begin{aligned} |\vec{p}, j\lambda\rangle &= |\phi\theta, p, j\lambda\rangle = h(\vec{p})|j\lambda\rangle \\ &= U[L(\vec{p})]U[\mathring{R}(\phi, \theta, 0)]|j\lambda\rangle \\ &= U[\mathring{R}(\phi, \theta, 0)]U[L_z(p)]|j\lambda\rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

第一种先把静止的 Helicity 态 $|J\lambda\rangle$ 用 $\mathring{R}$ 旋转, 使其量子轴沿 $\vec{p}$ 方向, 然后再沿着 $\vec{p}$ 方向把系统做 Lorentz 变换得到 Helicity 态 $|\vec{p}, J\lambda\rangle$, 如图2.1所示; 第二种是, 先对静止的 Helicity 态 $|J\lambda\rangle$ 沿 z -轴做 Lorentz 变换, 然后再旋转系统得到 $|\vec{p}, J\lambda\rangle$ 。两种定义方式是等价的, 这点容易从式2.14看出。这里我们给出 $h(\vec{p})$ 的一般表达式:

$$\begin{aligned} h(\vec{p}) &= U[L(\vec{p})]U[\mathring{R}(\phi, \theta, 0)] = U[\mathring{R}(\phi, \theta, 0)]U[L_z(p)] \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ \gamma\beta_x & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \gamma\beta_x/\beta \\ \gamma\beta_y & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \gamma\beta_y/\beta \\ \gamma\beta_z & -\sin\theta & 0 & \gamma\beta_z/\beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

从定义当中, 我们容易看出, Helicity 量子数 λ 是自旋沿着粒子运动方向的分量, 因而它是旋转不变的, 因为在转动情形下, 量子轴也随之转动。这一事实我们容易从定义式2.15中看出:

$$\begin{aligned} U[R]|\vec{p}, j\lambda\rangle &= U[\mathring{R}R]U[L_z]|j\lambda\rangle \\ &= |R\vec{p}, j\lambda\rangle. \end{aligned}$$

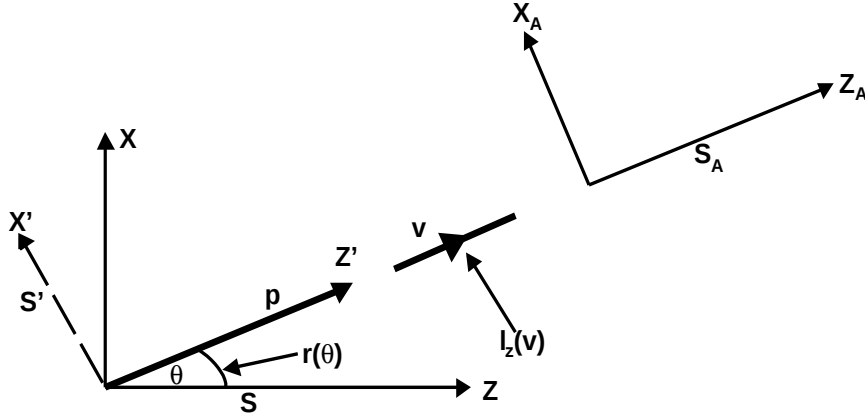


图 2.1: Definition of the helicity rest frame S_A for particle A, which momentum $\vec{p}$ in a reference frame S .

进一步, Helicity λ 在平行于动量方向并且把动量从 $\vec{p}$ 变换为 $\vec{p}'$ 的纯 Lorentz 变换下也保持不变。在 Lorentz 变换 L' 作用下的 λ 的不变性从下式可以看出:

$$\begin{aligned} U[L']|\vec{p}, j\lambda\rangle &= U[L']U[L(\vec{p})]U[\hat{R}]|j\lambda\rangle \\ &= U[L(\vec{p}')]U[\hat{R}]|j\lambda\rangle \\ &= |\vec{p}', j\lambda\rangle. \end{aligned}$$

我们还可以用 2.14 式中的纯 Lorentz 变换来定义“标准”的描述动量为 $\vec{p}$ 正则态和自旋为 j 的单粒子态:

$$\begin{aligned} |\vec{p}, jm\rangle &= |\phi, \theta, p, jm\rangle = U[L(\vec{p})]|jm\rangle \\ &= U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]U[L_z(p)]U^{-1}[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]|jm\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中 $|jm\rangle$ 是静止系中的单粒子正则态。其中纯的 Lorentz 变换的意义可以参看图 2.2。这里我们必须强调的是: 自旋的 z -分量 m 是在粒子的静止系中测量的, 而不是在粒子具有动量 $\vec{p}$ 的参考系中测量的。

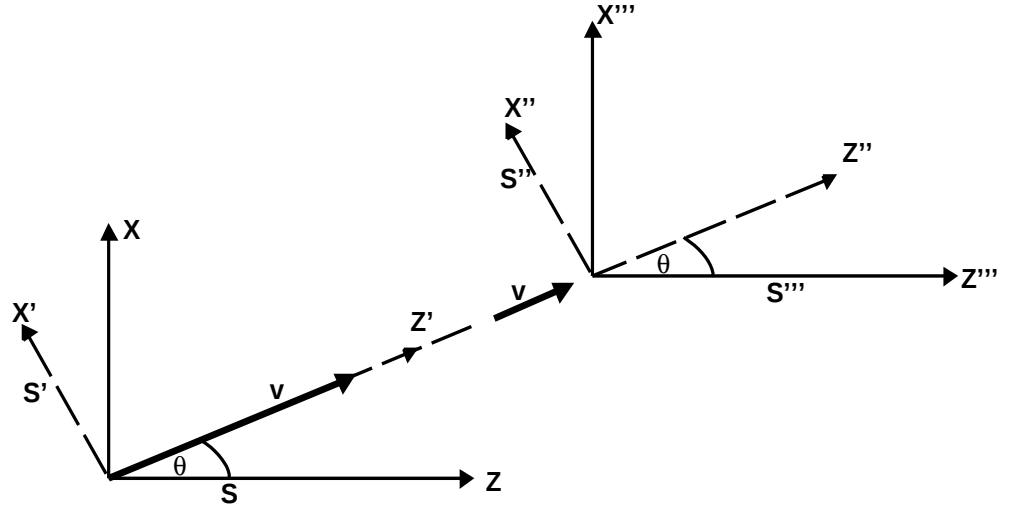


图 2.2: A canonical boost along $\vec{v}$ to $S \rightarrow S'''$ as shown.

采用正则态的定义2.17的好处是在旋转变换下，正则态的变换行为在形式上和静止系中的态 $|jm\rangle$ 一样：

$$\begin{aligned}
 U[\mathbf{R}]|\vec{p}, jm\rangle &= U[\mathbf{R}\mathbf{R}^\circ]U[L_z(p)]U^{-1}[\mathbf{R}\mathbf{R}^\circ]U[\mathbf{R}]|jm\rangle \\
 &= \sum_{m'} D_{m'm}^j(\mathbf{R})|\mathbf{R}\vec{p}, jm'\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

从关系式2.18，可以非常清楚的看到：我们可以把非相对论的那些自旋公式直接拿过来应用到相对论情形的自旋粒子。但是，我们必须记住，粒子的自旋的 z -分量仅仅只在对动量为 $\vec{p}$ 的粒子通过纯Lorentz变换 $L^{-1}(\vec{p})$ 后得到静止系中的才有好的定义。

在两种不同的对自旋粒子的Helicity和正则描述之间有着简单的联系。从定义式2.15和2.17，我们很容易得到：

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}, j\lambda\rangle &= U[\mathbf{R}^\circ]U[L_z]U^{-1}[\mathbf{R}^\circ]U[\mathbf{R}^\circ]|j\lambda\rangle \\
 &= \sum_m D_{m\lambda}^j(\mathbf{R}^\circ)|\vec{p}, jm\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

对于我们所定义的单粒子正则态和Helicity态，将采用如下的归一化方式：

$$\langle \vec{p}' j' \lambda' | \vec{p} j \lambda \rangle = \tilde{\delta}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{jj'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.20a)$$

$$\langle \vec{p}' j' m' | \vec{p} j m \rangle = \tilde{\delta}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{jj'} \delta_{mm'} , \quad (2.20b)$$

其中 $\tilde{\delta}(\vec{p} - \vec{p}')$ 是Lorentz不变的 δ -函数，形式如下：

$$\tilde{\delta}(\vec{p} - \vec{p}') = (2\pi)^3 (2E) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') . \quad (2.21)$$

利用归一化关系2.20式，我们容易看出：作用在单粒子态 $|\vec{p}, j \lambda\rangle$ 和 $|\vec{p}, j m\rangle$ 上的任意Lorentz变换算符 $U(\Lambda)$ 确实是么正算符，也就是说： $U^\dagger U = I$ 。采用定义如下的不变体积元：

$$\tilde{d}p = \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 (2E)} , \quad (2.22)$$

我们所定义的正则态和Helicity态的完备性关系可以写成如下形式：

$$\sum_{j\lambda} \int |\vec{p} j \lambda\rangle \tilde{d}p \langle \vec{p} j \lambda| = I \quad (2.23a)$$

$$\sum_{jm} \int |\vec{p} j m\rangle \tilde{d}p \langle \vec{p} j m| = I \quad (2.23b)$$

其中 I 是恒等算符。

2.1.2.3 相对论双粒子态的构造

含有任意自旋的双粒子态也有两种构造方法：第一种是采用Helicity基矢 $|\vec{p}, \lambda\rangle$ ，另一种是采用正则基矢 $|\vec{p}, j m\rangle$ 。这里我们将会采用两种方法来构造，并且给出其中的联系。

考虑由两个粒子1和2组成的一个体系。两粒子质量分别为 w_1 和 w_2 ，自旋为 s_1 和 s_2 ，在两粒子静止系中，动量分别为 $\vec{p}$ 和 $-\vec{p}$ ，将 $\vec{p}$ 的极角记为 θ, ϕ 。我们可以这样来定义双粒子态的helicity态：

$$\begin{aligned} |\phi \theta \lambda_1 \lambda_2\rangle &= a U[\hat{R}] \{ U[L_z(p)] |s_1 \lambda_1\rangle U[L_{-z}(p)] |s_2 - \lambda_2\rangle \} \\ &\equiv U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)] |00 \lambda_1 \lambda_2\rangle , \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中 a 是归一化常数， $|s_i \lambda_i\rangle$ 是静止系中的Helicity态。但是如上定义的态，并不是角动量算子得本征态，而是各种角动量本征态的混合态，下面设法从这样

的态中投影出角动量本征态。记体系的总角动量为 J ，磁量子数为 M ，两粒子相对动量为 $\vec{p}$ ，Helicity 为 λ_1 和 λ_2 ，则具有确定角动量 J 的态定义如下：

$$|p, JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \frac{N_J}{2\pi} \int dR D_{M\nu}^{*J}(R) U[R] |00\lambda_1\lambda_2\rangle, \quad (2.25)$$

其中 N_J 是归一化常数，将在后面确定。当一个旋转操作 R' 作用在态 2.25 上时：

$$U[R'] |p, JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \frac{N_J}{2\pi} \int dR D_{M\nu}^{*J}(R) U[R''] |00\lambda_1\lambda_2\rangle,$$

这里 $R'' = R'R$ 。用 B.24 和 D 函数的么正性，有：

$$\begin{aligned} D_{M\nu}^{*J}(R) &= D_{M\nu}^{*J}(R'^{-1}R'') \\ &= \sum_{M'} D_{MM'}^{*J}(R'^{-1}) D_{M'\nu}^{*J}(R'') \\ &= \sum_{M'} D_{M'M}^J(R') D_{M'\nu}^{*J}(R''). \end{aligned}$$

利用这一关系和 $dR = dR''$ ，我们可以得到：

$$U[R'] |JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^J(R') |JM'\lambda_1\lambda_2\rangle \quad (2.26)$$

这样我们可以看到态 2.25 确实具有确定的角动量 J ，而 λ_1 和 λ_2 旋转不变也是和我们的预期一致。下面我们来考察态 2.25 中的旋转操作 R ，记 $R = R(\phi, \theta, \gamma)$ 并留意到 $[R(0, 0, \gamma), L_{\pm z}(p)] = 0$ ，则

$$\begin{aligned} U[R(\phi, \theta, \gamma)] |00\lambda_1\lambda_2\rangle &= U[R(\phi, \theta, 0)] U[R(0, 0, \gamma)] |00\lambda_1\lambda_2\rangle \\ &= e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma} U[R(\phi, \theta, 0)] |00\lambda_1\lambda_2\rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

把 2.27 替换到 2.25 中，并且把 $d\gamma$ 积掉，我们得到：

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = N_J \int dR D_{M\lambda}^{*J}(\phi, \theta, 0) |\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle, \quad (2.28)$$

其中： $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ 。

下来，我们再来定义正则双粒子态：

$$|\phi\theta m_1 m_2\rangle = a U[L(\vec{p})] |s_1 m_1\rangle U[L(-\vec{p})] |s_2 m_2\rangle \quad (2.29)$$

其中, 同样 a 也是归一化常数而 $|s_i m_i\rangle$ 静止系中的单粒子态, $L(\pm\vec{P})$ 是纯Lorentz变换:

$$U[L(\vec{p})] = R(\phi, \theta, 0) L_{\pm z}(p) R^{-1}(\phi, \theta, 0) \quad (2.30)$$

其中 $R(\phi, \theta, 0)$ 还是把 z -轴转向 $\vec{p}$ 方向的旋转操作, $L_{\pm z}(p)$ 是沿着 $\pm z$ -轴的Lorentz变换。

依据单粒子正则态旋转性质2.18, 我们可以定义总自旋为 s 的态为:

$$|\phi \theta s m_s\rangle = \sum_{m_1 m_2} (s_1 m_2 s_2 m_2 | s m_s) |\phi \theta m_1 m_2\rangle \quad (2.31)$$

其中 $(s_1 m_2 s_2 m_2 | s m_s)$ 是Clebsch-Gordan系数。根据式B.25, 如果旋转 R 把 $\Omega = (\theta, \phi)$ 变为 $\Omega' = R\Omega$, 我们很容易得出如下性质,

$$U[R] |\Omega s m_s\rangle = \sum_{m'_s} D_{m'_s m_s}^s(R) |\Omega' s m'_s\rangle \quad (2.32)$$

因此, 总自旋 s 式旋转不变量。

具有确定轨道角动量的态可以从2.31按照平常的方法构造:

$$|l m s m_s\rangle = \int d\Omega Y_m^l(\Omega) |\Omega m_1 m_2\rangle \quad (2.33)$$

其中 $d\Omega = d\phi d\cos\theta$ 。我们来看看2.33的旋转性质。用式2.32,

$$U[R] |l m s m_s\rangle = \int d\Omega Y_m^l(\Omega) D_{m'_s m_s}^s(R) |\Omega' s m'_s\rangle \quad (2.34)$$

其中 $\Omega' = R\Omega$, $d\Omega = d\phi' d\cos\theta'$ 。根据B.24和B.22有:

$$\begin{aligned} Y_m^l(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_{m0}^{l*}(R^{-1}R') \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m'} D_{mm'}^{l*}(R^{-1}) D_{m'0}^{l*}(R') \\ &= \sum_{m'} D_{m'm}^l(R) Y_m^l(\beta', \alpha') \end{aligned} \quad (2.35)$$

我们可以得到:

$$U[R] |l m s m_s\rangle = \sum_{m' m'_s} D_{m'm}^l(R) D_{m'_s m_s}^s(R) |l m' s m'_s\rangle \quad (2.36)$$

这表明态 $|lmsm_s\rangle$ 在旋转操作下，象两个静止的态 $|lm\rangle$ 和 $|sm_s\rangle$ 的乘积一样变换。

现在，我们非常容易构造总角动量 J 的态，

$$\begin{aligned} |JMls\rangle &= \sum_{mm_s} (lmsm_s|JM) |lmsm_s\rangle \\ &= \sum_{\substack{mm_s \\ m_1m_2}} (lmsm_s|JM) (s_1m_1s_2m_2|sm_s) \\ &\quad \times \int d\Omega Y_m^l(\Omega) |\Omega m_1 m_2\rangle \end{aligned} \quad (2.37)$$

从2.36和B.25，我们马上可以得到：

$$U[R]|JMls\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^J(R) |JM'ls\rangle. \quad (2.38)$$

我们注意到，也是我们的预期： l 和 s 都是旋转不变量，2.38和非相对论的 $L-S$ 耦合完全等价。

2.1.2.4 态的归一

最后,我们来讨论前面介绍的态的归一化问题。对于态2.24和2.29，我们采用通用的归一化方式：

$$\langle \theta' \phi' \lambda'_1 \lambda'_2 | \theta \phi \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}, \quad (2.39)$$

$$\langle \theta' \phi' m'_1 m'_2 | \theta \phi m_1 m_2 \rangle = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \quad (2.40)$$

对单粒子态采用如2.20的归一化，容易得到前面双粒子态的归一化常数 a ：

$$a = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{p}{w}} \quad (2.41)$$

其中 p 是相对动量， w 是双粒子系统的等效质量。采用2.39和2.40，我们所定义的态2.28和2.37 遵守下面的归一化：

$$\langle J' M' \lambda'_1 \lambda'_2 | JM \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} \quad (2.42)$$

$$\langle J' M' l' s' | J M l s \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \quad (2.43)$$

如果把归一化常数 N_J 设为 $N_J = \frac{2J+1}{4\pi}$, 则双粒子Helicity态和正则态的完备性关系可以表示如下:

$$\sum_{JM\lambda_1\lambda_2} |JM\lambda_1\lambda_2\rangle \langle JM\lambda_1\lambda_2| = I, \quad (2.44)$$

$$\sum_{J M l s} |J M l s\rangle \langle J M l s| = I. \quad (2.45)$$

根据2.24和2.39, 我们有:

$$\langle \theta \phi \lambda'_1 \lambda'_2 | J M \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta) \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}, \quad (2.46)$$

根据2.37和2.40, 我们有:

$$\langle \theta \phi m'_1 m'_2 | J M l s \rangle = \sum_{\substack{m m_s \\ m_1 m_2}} (l m s m_s | J M) (s_1 m_1 s_2 m_2 | s m_s) Y_m^l(\theta, \phi) \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (2.47)$$

2.1.2.5 Helicity态和正则态的联系

我们从2.24出发, 用2.14, A.4和2.29, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} |\phi \theta \lambda_1 \lambda_2\rangle &= a U[\hat{\mathbf{R}}] \{ U[L_z(p)] |s_1 \lambda_1\rangle U[L_{-z}(p)] |s_2 - \lambda_2\rangle \} \\ &= a U[L(\vec{p})] U[\hat{\mathbf{R}}] |s_1 \lambda_1\rangle U[L(-\vec{p})] U[\hat{\mathbf{R}}] |s_2 - \lambda_2\rangle \\ &= \sum_{m_1 m_2} D_{m_1 \lambda_1}^{s_1}(\phi, \theta, 0) D_{m_2 - \lambda_2}^{s_2}(\phi, \theta, 0) |\phi \theta m_1 m_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.48)$$

接着利用2.28,

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = N_J \sum_{m_1 m_2} \int d\Omega D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, 0) D_{m_1 \lambda_1}^{s_1}(\phi, \theta, 0) D_{m_2 - \lambda_2}^{s_2}(\phi, \theta, 0) |\phi \theta m_1 m_2\rangle \quad (2.49)$$

上式中的三个 D 函数的乘积可以按照下面方式化简, 根据B.25有:

$$D_{m_1 \lambda_1}^{s_1} D_{m_2 \lambda_2}^{s_2} = (s_1 m_1 s_2 m_2 | s m_s) (s_1 \lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s \lambda) D_{m_s \lambda}^s \quad (2.50)$$

根据B.26有

$$D_{M\lambda}^{J*} D_{m_s\lambda}^s = \sum_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right) (lmsm_s|JM)(l0s\lambda|J\lambda) Y_m^l. \quad (2.51)$$

把这些代入2.49并且把结果和2.37比较，最后我们得到：

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_{ls} \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l0s\lambda|J\lambda)(s_1\lambda_1s_2 - \lambda_2|s\lambda)|JMs\rangle, \quad (2.52)$$

这样Helicity态和正则态之间的耦合系数是：

$$\langle J'M's|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l0s\lambda|J\lambda)(s_1\lambda_1s_2 - \lambda_2|s\lambda)\delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \quad (2.53)$$

2.52的逆向表达式：

$$\begin{aligned} |JMs\rangle &= \sum_{\lambda_1\lambda_2} |JM\lambda_1\lambda_2\rangle \langle JM\lambda_1\lambda_2|JMs\rangle \\ &= \sum_{\lambda_1\lambda_2} \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l0s\lambda|J\lambda)(s_1\lambda_1s_2 - \lambda_2|s\lambda)|JM\lambda_1\lambda_2\rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.1.3 对称性

限于本文的重点不在于对称性的讨论，所以这里只是列出了相应的结论。篇幅少不代表不重要，对称性的应用对于减少计算量非常重要，最好能从别的文献中了解其细节，最少也要牢记其结果。

2.1.3.1 宇称对称性

$$\Pi|JMs\rangle = \eta_1\eta_2(-1)^l|JMs\rangle \quad (2.55)$$

$$\Pi|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \eta_1\eta_2(-1)^{J-s_1-s_2}|JM\lambda_1\lambda_2\rangle \quad (2.56)$$

2.1.3.2 时间对称性

$$\mathcal{T}|JMs\rangle = (-1)^{J-M}|J-Ms\rangle \quad (2.57)$$

$$\mathcal{T}|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = (-1)^{J-M}|J-M\lambda_1\lambda_2\rangle \quad (2.58)$$

2.1.3.3 全同粒子交换对称性

对于正则态，当对态进行全同粒子交换操作时，有：

$$|JMls\rangle_s = a_s [1 + (-1)^{l+s}] |JMls\rangle, \quad (2.59)$$

其中，当 $l+s$ = 偶数时， $a_s = \frac{1}{2}$ ，当 $l+s$ = 奇数时，这样的态不存在。

对于Helicity 态，当对态进行全同粒子交换操作时，有：

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = b_s(\lambda_1\lambda_2) \{ |JM\lambda_1\lambda_2\rangle + (-1)^J |JM\lambda_2\lambda_1\rangle \}, \quad (2.60)$$

其中，当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时 $b_s(\lambda_1\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时 $b_s(\lambda_1\lambda_2) = \frac{1}{2}$ 。

2.1.4 S矩阵和截面

知道了态的构造，就可以开始讨论S矩阵元。考虑如下的二元反应：

$$a + b \rightarrow c + d \quad (2.61)$$

这个过程的S矩阵元由下式代表：

$$\langle \vec{p}_c \vec{p}_d \lambda_c \lambda_d | S | \vec{p}_a \vec{p}_b \lambda_a \lambda_b \rangle. \quad (2.62)$$

质心系中，用 w_0 表示质心系能量，初末态两粒子的动量的大小分别记为 p_i 和 p_f ，让入射粒子沿 z -轴运动，则动量的极角分别记做 $(0,0)$ 和 $\Omega_0 = (\theta_0, \phi_0)$ 。则过程2.61不变的 S -矩阵元在质心系中可以表示为：

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c \vec{p}_d \lambda_c \lambda_d | S | \vec{p}_a \vec{p}_b \lambda_a \lambda_b \rangle &= \langle \vec{p}_f \lambda_c; -\vec{p}_f \lambda_d | S | \vec{p}_i \lambda_a; -\vec{p}_i \lambda_b \rangle \\ &= (4\pi)^2 \frac{w_0}{\sqrt{p_f p_i}} \langle \theta_0 \phi_0 \lambda_c \lambda_d | S | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle, \end{aligned} \quad (2.63)$$

其中我们用了2.24并采用了2.41的归一化常数。因为我们采用了2.20的单粒子态的归一形式，所以，对 λ_a, λ_b 求和后2.63振幅模方是Lorentz不变量，也就是说式中的 S -矩阵元可以被看作“不变的 S -矩阵元”。由于能动量守恒，我们可以写出：

$$\langle \theta_0 \phi_0 \lambda_c \lambda_d | S | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_c + p_d - p_a - p_b) \langle \theta_0 \phi_0 \lambda_c \lambda_d | S | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle \quad (2.64)$$

如果定义算符 T 为: $iT = S - 1$, 其中1代表没有发生反应的部分, 很容易看出, 上面的式子对 T 也成立, 只要简单的把 S 替换为 T 。现在我们用 T 定义不变转变振幅 $\mathcal{M}_{fi}$ 为:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_c + p_d - p_a - p_b) \mathcal{M}_{fi} = \langle \vec{p}_f \lambda_c; -\vec{p}_f \lambda_d | T | \vec{p}_i \lambda_a; -\vec{p}_i \lambda_b \rangle$$

或者

$$\mathcal{M}_{fi} = (4\pi)^2 \frac{w_0}{\sqrt{p_f p_i}} \langle \theta_0 \phi_0 \lambda_c \lambda_d | T | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle \quad (2.65)$$

则对于和 $\mathcal{M}_{fi}$ 相联系确定Helicity的微分截面可以表示为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = \frac{p_f}{p_i} \left| \frac{\mathcal{M}_{fi}}{8\pi w_0} \right|^2 \quad (2.66)$$

把 $\mathcal{M}_{fi}$ 做分波展开, 可以得到:

$$\begin{aligned} & \langle \theta_0 \phi_0 \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle \\ = & \sum_{JM} \langle \theta_0 \phi_0 \lambda_c \lambda_d | JM \lambda_c \lambda_d \rangle \langle JM \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | JM \lambda_a \lambda_b \rangle \langle JM \lambda_a \lambda_b | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle \\ = & \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) \langle \lambda_c \lambda_d | T^J(w_0) | \lambda_a \lambda_b \rangle D_{\lambda\lambda'}^{J*}(\phi_0, \theta_0, 0) \end{aligned} \quad (2.67)$$

这里 $\lambda = \lambda_a - \lambda_b$, $\lambda' = \lambda_c - \lambda_d$, $T^J(w_0)$ 是 $T(w_0)$ 的一个有固定角动量 J 的子矩阵。上式最后一步用到了下面的关系式:

$$\langle JM \lambda_a \lambda_b | 0, 0 \lambda_a \lambda_b \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \delta_{M\lambda}, \quad (2.68)$$

$$\langle \theta_0, \phi_0 \lambda_c \lambda_d | JM \lambda_c \lambda_d \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{M\lambda'}^{J*}(\phi_0, \theta_0, 0). \quad (2.69)$$

我们定义所谓“散射振幅” $f(\Omega_0)$ 如下:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = |f(\Omega_0)|^2, \quad (2.70)$$

可以得到:

$$f(\Omega_0) = \frac{(p_f/p_i)^{\frac{1}{2}}}{8\pi w_0} \mathcal{M}_{fi}. \quad (2.71)$$

这一公式把非相对论的散射振幅 $f(\Omega_0)$ 和 Lorentz 不变的转变振幅 $\mathcal{M}_{fi}$ 联系了起来。从 2.65 和 2.67，立刻可以看出：

$$f(\Omega_0) = \frac{1}{p_i} \sum_J \frac{J+1}{2} < \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | \lambda_a \lambda_b > D_{\lambda\lambda'}^{J*}(\phi_0, \theta_0, 0). \quad (2.72)$$

分波 T -矩阵元和分波 S -矩阵元有如下关系：

$$< \lambda_c \lambda_d | S^J(w_0) | \lambda_a \lambda_b > = \delta_{fi} \delta_{\lambda_c \lambda_a} \delta_{\lambda_d \lambda_b} + i < \lambda_c \lambda_d | T^J(w_0) | \lambda_a \lambda_b >, \quad (2.73)$$

其中 $\delta_{fi} = 1$ 表示弹性散射，而其他情况则是 0。

如果 2.61 过程的宇称守恒条件被满足，则由 2.73 给出的分波振幅满足如下关系：

$$< -\lambda_c - \lambda_d | S^J(w_0) | -\lambda_a - \lambda_b > = \eta < \lambda_c \lambda_d | S^J(w_0) | \lambda_a \lambda_b >, \quad (2.74)$$

其中

$$\eta = \frac{\eta_c \eta_d}{\eta_a \eta_b} (-1)^{s_c + s_d - s_a - s_b}.$$

2.1.5 两体衰变振幅的分波展开

考虑两体衰变过程。

$$J \rightarrow 1 + 2 \quad (2.75)$$

设初态自旋(宇称)为 $J(\eta_J)$ ，末态两粒子的自旋(宇称)为 $s_1(\eta_1)$ 和 $s_2(\eta_2)$ 。若将衰变的不变算子记为 $\mathcal{M}$ ，在母粒子静止系中，令 $\vec{p}$ 表示粒子 1 的动量，并且方向角为 $\Omega = (\theta, \phi)$ 。我们先采用 Helicity 振幅，则这一过程的衰变振幅可以表示为：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2}^J &= < \vec{p} \lambda_1; -\vec{p} \lambda_2 | \mathcal{M} | J M > \\ &= 4\pi \left(\frac{w}{p} \right)^{\frac{1}{2}} < \theta \phi \lambda_1 \lambda_2 | J M \lambda_1 \lambda_2 > < J M \lambda_1 \lambda_2 | \mathcal{M} | J M > \\ &= N_J F_{\lambda_1 \lambda_2}^J D_{M, \lambda}^{J*}(\phi, \theta, 0), \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \end{aligned} \quad (2.76)$$

其中用到了 2.41，2.44 和 2.46。Helicity 耦合振幅 $F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$ 为定义为：

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}^J = 4\pi \left(\frac{w}{p} \right)^{\frac{1}{2}} < J M \lambda_1 \lambda_2 | \mathcal{M} | J M >, \quad (2.77)$$

从以上表达式可以看出衰变振幅的角度依赖关系完全包含在 D 函数当中， $F_{\lambda_1\lambda_2}^J$ 是转动不变的，只能依赖于转动不变的量，比如： λ_1 ， λ_2 ， J 和能量 E 。若反应过程中宇称守恒，则由于

$$P|JM\rangle = \eta_J|JM\rangle,$$

和

$$P|JM, \lambda_1\lambda_2\rangle = \eta_1\eta_2(-)^{J-s_1-s_2}|JM, \lambda_1\lambda_2\rangle,$$

可以证明螺旋度耦合振幅有如下性质：

$$F_{\lambda_1\lambda_2}^J = \eta_J\eta_s\eta_\sigma(-)^{J-s_1-s_2}F_{-\lambda_1-\lambda_2}^J. \quad (2.78)$$

现在我们把衰变振幅用正则态做分波展开。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ls}^J &= \langle \vec{p}m_1; -\vec{p}m_2 | \mathcal{M} | JM \rangle \\ &= 4\pi \left(\frac{w}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \langle \theta\phi m_1 m_2 | JMls \rangle \langle JMls | \mathcal{M} | JM \rangle \\ &= \sum_{\substack{mm_s \\ m_1 m_2}} g_{ls}^J(lmsm_s | JM)(s_1 m_1 s_2 m_2 | sm_s) Y_m^l(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (2.79)$$

其中用到了2.41，2.45和2.47。分波耦合振幅 g_{ls}^J 为定义为：

$$g_{ls}^J = 4\pi \left(\frac{w}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \langle JMls | \mathcal{M} | JM \rangle, \quad (2.80)$$

利用2.52和2.54，很容易建立起Helicity耦合振幅和分波耦合振幅之间的联系为：

$$\begin{aligned} F_{\lambda_1\lambda_2}^J &= \langle JM\lambda_1\lambda_2 | \mathcal{M} | JM \rangle \\ &= \sum_{ls} \langle JM\lambda_1\lambda_2 | JMls \rangle \langle JMls | \mathcal{M} | JM \rangle \\ &= \sum_{ls} \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l0s\lambda | J\lambda)(s_1\lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s\lambda) \langle JMls | \mathcal{M} | JM \rangle \\ &= \sum_{ls} \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l0s\lambda | J\lambda)(s_1\lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s\lambda) g_{ls}^J, \end{aligned} \quad (2.81)$$

和

$$g_{ls}^J = \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (l0s\lambda | J\lambda) (s_1 \lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s\lambda) F_{\lambda_1 \lambda_2}^J \quad (2.82)$$

其归一化有非常简单的关系：

$$\sum_{\lambda_1 \lambda_2} |F_{\lambda_1 \lambda_2}^J|^2 = \sum_{ls} |g_{ls}^J|^2. \quad (2.83)$$

$F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$ 中，三个指标 J, λ_1, λ_2 都是转动不变的量，而由于 $F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$ 是在 J 粒子静止系中定义的，它没有洛伦兹变换自由度。由此我们猜想 $F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$ 可以写成明显协变的形式，即 $F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$ 可以用一些物理量构造出的洛伦兹标量来表达。而这些用来构造洛伦兹标量的物理量是在衰变振幅表达式中可能出现的量，如初态粒子 J 在动量空间的波函数，末态两粒子 1 和 2 在动量空间的波函数。与轨道角动量有关的末态两粒子的相对动量 $\mathbf{r}$ 以及初态粒子四动量 p^α ，而引入 p^α 是为了满足宇称守恒的要求。

这种所谓协变分析的构造螺旋度耦合振幅的方法其实属于 Zemach 等人的方法的一种特殊情况情形，我们将在下章专门介绍。

2.1.6 级联衰变

在 Helicity 理论的框架下，对于级联衰变的处理比较自然，也比较容易，因为每一级的自旋部分（角度部分）和能量部分都被清晰的分离开，而且每一级的处理都是在其母粒子质心系当中进行的，都是独立的；因此只要在相邻两级衰变之间用共振态的 Breit-Wigner 传播子连起来就可以了。关于级联衰变的仔细讨论和例子一并放在下一节进行。

2.1.7 举例

2.1.7.1 $\psi \rightarrow l^+ l^-$ or $N \bar{N}$

这个过程是一个 $1^- \rightarrow \frac{1}{2}^+ \frac{1}{2}^-$ 的过程，因为 $\eta_a \eta_b \eta_c = +1$ ，再结合宇称守恒和角动量守恒，我们知道只有两个分波：S-wave 和 D-wave，所以独立的 Helicity 振幅也只有两个。即 $A = F_{++}^1 = F_{--}^1$ 和 $B = F_{-+}^1 = F_{+-}^1$ 。不变振幅：

$$\mathcal{M}_{\lambda\nu}(M) = F_{\lambda\nu}^1 D_{M, \lambda-\nu}^{1*}(\phi, \theta, 0),$$

而截面

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_{M,\lambda,\nu} |\mathcal{M}_{\lambda\nu}(M)|^2 \\
 &= |A|^2 \left[\sum_{M,\lambda-\nu=0} |D_{M,0}^{1*}(\phi, \theta, 0)|^2 \right] + |B|^2 \left[\sum_{M,\lambda-\nu=\pm 1} |D_{M,\lambda-\nu}^{1*}(\phi, \theta, 0)|^2 \right] \\
 &= |A|^2 [(d_{1,0}^1(\theta))^2 + (d_{-1,0}^1(\theta))^2] + |B|^2 [2(d_{1,1}^1(\theta))^2 + 2(d_{1,-1}^1(\theta))^2] \\
 &= |A|^2 [1 - \cos^2 \theta] + |B|^2 [1 + \cos^2 \theta]
 \end{aligned}$$

如果末态是轻子对，则由于QED的耦合性质： $A \approx 0$ 则末态分布为 $(1 + \cos^2 \theta)$ ，这我们的经验相符；如果末态为重子，则 A 一般不为零，故

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |A|^2 [1 - \cos^2 \theta] + |B|^2 [1 + \cos^2 \theta] \\
 &= (|A|^2 + |B|^2) + (|B|^2 - |A|^2) \cos^2 \theta \\
 &= (|A|^2 + |B|^2)(1 + \alpha \cos^2 \theta),
 \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \frac{|B|^2 - |A|^2}{|A|^2 + |B|^2}$ ，这个分布正是我们熟悉的 $(1 + \alpha \cos^2 \theta)$ 分布。

2.1.7.2 $\psi \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $K^+ K^-$

这个过程是一个 $1^- \rightarrow 0^- 0^-$ 的过程，因为 $\eta_a \eta_b \eta_c = -1$ 和角动量守恒，因此只有1个分波：P-wave，所以独立的Helicity振幅也只有一个。即 $F = F_{00}^1$ ，不变振幅：

$$\mathcal{M}(M) = F D_{M,0}^{1*}(\phi, \theta, 0),$$

可以计算微分截面：

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_M |\mathcal{M}(M)|^2 \\
 &= \sum_M [|F|^2 |D_{M,0}^{1*}(\phi, \theta, 0)|^2] \\
 &= |F|^2 [(d_{1,0}^1(\theta))^2 + (d_{-1,0}^1(\theta))^2] \\
 &= |F|^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

这是个简单的分布，相信也已经为大家所熟悉。

2.1.7.3 $\psi \rightarrow VV$

这个过程的可能末态是：

- $V\bar{V}$ ，例如： $\psi \rightarrow K^* \bar{K}^*$
- 全同粒子末态： $\psi \rightarrow \phi\phi$
- 全同粒子末态，且末态粒子无质量： $\psi \rightarrow \gamma\gamma$

假设P宇称守恒，则Helicity振幅满足关系式满足2.78；如果末态粒子是全同粒子，其Helicity振幅除了满足 (2.78) 外，还满足：

$$F_{\lambda\nu}^J = (-1)^J F_{\nu\lambda}^J \quad (2.85)$$

全部可能地Helicity振幅列举如下：

$$F_{\lambda\nu}^1 = \begin{pmatrix} F_{11}^1 & F_{10}^1 & F_{1-1}^1 \\ F_{01}^1 & F_{00}^1 & F_{0-1}^1 \\ F_{-11}^1 & F_{-10}^1 & F_{-1-1}^1 \end{pmatrix},$$

由于角动量守恒要求 $|\lambda - \nu| \leq J$ ，因此， $F_{-1-1}^1 = F_{1-1}^1 = 0$ ，这个是严格成立的。

如果宇称守恒，则有 $F_{11}^1 = F_{-1-1}^1$ ， $F_{10}^1 = F_{-10}^1$ 和 $F_{01}^1 = F_{0-1}^1$ ，加上 F_{00}^1 ，总共有4个独立的helicity振幅。

如果末态是全同粒子，则 (2.85)式成立，所以有 $F_{00}^1 = -F_{00}^1 = 0$ ， $F_{11}^1 = -F_{11}^1 = 0$ ， $F_{-1-1}^1 = -F_{-1-1}^1 = 0$ ， $F_{10}^1 = -F_{01}^1$ 和 $F_{-10}^1 = -F_{0-1}^1$ ，所以只留下2个独立的Helicity振幅不为零：

$$F_{10}^1 = -F_{01}^1, \quad F_{-10}^1 = -F_{0-1}^1.$$

如果宇称对称性和全同粒子对称性同时成立，则只剩下一个独立的Helicity振幅：

$$F_{10}^1 = -F_{01}^1 = F_{-10}^1 = -F_{0-1}^1.$$

所以只有一个独立的螺旋度振幅，下面假设 $M = 1$ 做计算，并不失一般性：

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &\propto \sum_{\lambda\nu} |F_{\lambda\nu}^1 d_{1,\lambda-\nu}^1(\theta)|^2 \\
 &= |F_{11}^1 d_{1,0}^1(\theta)|^2 + |F_{-1-1}^1 d_{1,0}^1(\theta)|^2 + |F_{00}^1 d_{1,0}^1(\theta)|^2 \\
 &\quad + |F_{10}^1 d_{1,1}^1(\theta)|^2 + |F_{0-1}^1 d_{1,1}^1(\theta)|^2 \\
 &\quad + |F_{01}^1 d_{1,-1}^1(\theta)|^2 + |F_{-10}^1 d_{1,-1}^1(\theta)|^2 \\
 &= |d_{1,0}^1(\theta)|^2 [|F_{11}^1|^2 + |F_{-1-1}^1|^2 + |F_{00}^1|^2] \\
 &\quad + |d_{1,1}^1(\theta)|^2 [|F_{10}^1|^2 + |F_{0-1}^1|^2] \\
 &\quad + |d_{1,-1}^1(\theta)|^2 [|F_{01}^1|^2 + |F_{-10}^1|^2]
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

现在来对这一结果进行分类讨论：

- 如果宇称不守恒且末态粒子不是全同粒子，则角分布就是目前的形式。
- 如果宇称守恒：

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |d_{1,0}^1(\theta)|^2 [2|F_{11}^1|^2 + |F_{00}^1|^2] \\
 &\quad + |d_{1,1}^1(\theta)|^2 [|F_{10}^1|^2 + |F_{0-1}^1|^2] \\
 &\quad + |d_{1,-1}^1(\theta)|^2 [|F_{10}^1|^2 + |F_{0-1}^1|^2] \\
 &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{2} [2|F_{11}^1|^2 + |F_{00}^1|^2] + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} [2|F_{10}^1|^2 + |F_{0-1}^1|^2]
 \end{aligned}$$

其中的Helicity振幅是未知的，所以角分布无法完全确定下来。

- 如果末态粒子是全同粒子：

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} [2|F_{10}^1|^2 + |F_{-10}^1|^2] \\
 &\propto 1 + \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

这时，角分布已经确定下来了，因为只关心角分布时，前面的因子可以忽略。

- 宇称守恒和全同粒子对成性同时成立，角分布依然是 $(1 + \cos^2 \theta)$ 。
- 如果末态是两个光子，则Helicity不能取零，且宇称守恒，而且末态是全同粒子，全部振幅都是零。这个过程被禁戒。

2.1.7.4 $\psi \rightarrow \phi f_0$

因为 $V \rightarrow V'S$ 过程宇称满足 $\eta_a\eta_b\eta_c = 1$ ，所以末态两个粒子间的相对轨道角动量只能为偶数 $[\eta_a\eta_b\eta_c(-1)^l = 1]$ ；而由于角动量守恒，故 $l = 0, 2$ 。所以末态例子系统只能有两个独立的分波。当宇称守恒时，Helicity 振幅必须满足：

$$F_{\lambda\nu}^J = \eta_a\eta_b\eta_c(-1)^{J_a-J_b-J_c}F_{-\lambda-\nu}^J \quad (2.87)$$

故仅有的两个独立螺旋度振幅如下所示：

$$A = F_1 = F_{10}^1 = F_{-10}^1, \quad B = F_0 = F_{00}^1 \quad (2.88)$$

于是可以计算末态角分布（假设 $M = +1$ ）：

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_{\lambda} |F_{\lambda}^1 D_{1,\lambda}^1(\phi\theta)|^2 = \sum_{\lambda} |F_{\lambda}^1 [d_{1,\lambda}^1(\theta)]|^2 \\ &= |A|^2 \{ [d_{1,1}^1(\theta)]^2 + [d_{1,-1}^1(\theta)]^2 \} + |B|^2 [d_{1,0}^1(\theta)]^2 \\ &\propto |A|^2 [1 + \cos^2 \theta] + |B|^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.89)$$

其中A, B 为独立的参数，他们是分波振幅 G_{01}, G_{21} 的线性组合，但是由于势垒因子的原因，一般预期D 分量可能要比S 波小很多，则可以假设A 和B 比较接近，这样末态角分布将是近似的均匀分布。这个问题在后面的Helicity振幅的讨论中还会再次提到。如果末态矢量介子 ϕ 是一个光子，则Helicity振幅 F_{00}^1 将等于零，末态角分布变成简单的 $(1 + \cos^2 \theta)$ 。

2.1.7.5 $\psi \rightarrow \phi f_2$

因为 $V \rightarrow V'T$ 过程宇称满足 $\eta_a\eta_b\eta_c = 1$ ，所以末态两个粒子间的相对轨道角动量只能为偶数 $[\eta_a\eta_b\eta_c(-1)^l = 1]$ ；而由于角动量守恒，故 $l = 0, 2, 4$ ，总共有五个分波振幅 $G_{01}, G_{21}, G_{22}, G_{23}$ 和 G_{43} 。所有可能的Helicity振幅如下：

$$F_{\lambda\nu}^1 = \begin{pmatrix} F_{21}^1 & F_{11}^1 & F_{01}^1 & F_{-11}^1 & F_{-21}^1 \\ F_{20}^1 & F_{10}^1 & F_{00}^1 & F_{-10}^1 & F_{-20}^1 \\ F_{2-1}^1 & F_{1-1}^1 & F_{0-1}^1 & F_{-1-1}^1 & F_{-2-1}^1 \end{pmatrix},$$

因为角动量守恒，即 $|\lambda-\nu| \leq J$ ，所以有 $F_{-11}^1, F_{-21}^1, F_{2-1}^1, F_{0-1}^1, F_{20}^1$ 和 F_{-20}^1 为零；又根据宇称守恒的关系2.78，仅有的五个独立螺旋度振幅表示如下：

$$\begin{aligned} F_{21}^1 &= F_{-2-1}^1, & F_{11}^1 &= F_{-1-1}^1, & F_{01}^1 &= F_{0-1}^1, \\ F_{10}^1 &= F_{-10}^1 & \text{和} & & F_{00}^1, \end{aligned}$$

现在我们来计算末态角分布（假设 $M = +1$ ）：

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_{\lambda\nu} |F_{\lambda\nu}^1 D_{1,\lambda-\nu}^1(\phi\theta)|^2 = \sum_{\lambda\nu} |F_{\lambda\nu}^1 [d_{1,\lambda-\nu}^1(\theta)]|^2 \\
 &= |F_{21}^1|^2 \{[d_{1,1}^1(\theta)]^2 + [d_{1,-1}^1(\theta)]^2\} \\
 &\quad + 2|F_{11}^1|^2 [d_{1,0}^1(\theta)]^2 \\
 &\quad + |F_{01}^1|^2 \{[d_{1,-1}^1(\theta)]^2 + [d_{1,1}^1(\theta)]^2\} \\
 &\quad + |F_{10}^1|^2 \{[d_{1,1}^1(\theta)]^2 + [d_{1,-1}^1(\theta)]^2\} \\
 &\quad + |F_{00}^1|^2 [d_{1,0}^1(\theta)]^2 \\
 &= \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} [|F_{21}^1|^2 + |F_{10}^1|^2 + |F_{01}^1|^2] \\
 &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{2} [2|F_{11}^1|^2 + |F_{00}^1|^2] \tag{2.90}
 \end{aligned}$$

可以看到这个角分布中含有更多的位置参数有待确定。

2.1.7.6 $\psi \rightarrow \rho\pi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$

这个衰变道主要是通过中间共振态来进行的，比如通过 $\rho(770)$ 同位旋三重态和它们的激发态来进行的。如果是通过 1^- 的中间共振态来衰变，则由于角动量守恒和宇称守恒，两级级联衰变都是纯的 P-wave；如果是通过 3^- 或者 5^- 等来衰变的，则中间都是纯的 F-wave 或者 H-wave。现在我们为了考虑问题简单，选择 $\rho^0(770)$ 来讨论，则这个过程是 $\psi \rightarrow \rho^0(770)\pi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 。微分截面的一般表达式为：

$$\frac{d\sigma}{d\Phi} = \sum_M \left| \sum_{\lambda} \mathcal{A}(M) \right|^2, \tag{2.91}$$

其中振幅的完整表达式(其中 g 为常数参数)：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(M) &= C_1 [D_{M1}^{1*}(\theta\phi) D_{10}^{1*}(\theta'\phi') - D_{M-1}^{1*}(\theta\phi) D_{-10}^{1*}(\theta'\phi')] \\
 C_1 &= gM_{\psi} B_1(r_{\rho^0\pi^0}) B_1(r_{\pi^+\pi^-}) BW_{\rho^0}, \tag{2.92}
 \end{aligned}$$

不考虑能量依赖（积掉）， $\psi \rightarrow \rho^0\pi^0 \rightarrow 3\pi$ 衰变末态的角分布为

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Phi}\right) &\propto \sum_M |D_{M1}^{1*}(\phi\theta) D_{10}^{1*}(\phi'\theta') - D_{M-1}^{1*}(\phi\theta) D_{-10}^{1*}(\phi'\theta')|^2 \\
 &= \frac{1}{2} [(1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta' + \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos 2\phi'], \tag{2.93}
 \end{aligned}$$

这是我们讨论的第一个级联衰变，做一点讨论，可以得到一些有益的认识。

- 角分布中不包含 ρ 的方位角，这正是系统轴对称性的体现；
- 如果把其他变量积掉我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &\propto 1 + \cos^2\theta \\ \frac{d\sigma}{d\cos\theta'} &\propto \sin^2\theta' = 1 - \cos^2\theta' \\ \frac{d\sigma}{d\phi'} &\propto 1 + \frac{1}{5}\cos 2\phi',\end{aligned}\tag{2.94}$$

第一个是 $1 + \cos^2\theta$ 分布，这和我们的预期一致，正是 $\psi \rightarrow VP$ 衰变过程的特征；而第二个的 $\sin^2\theta$ 分布也是我们所已知的，第一个例子就是这种情况；第三个的 ϕ' 角分布是非平庸的，这个和前面的例子的情形不同，这是由于 ρ 产生时并不是静止的，没有轴对称的特征。

2.1.7.7 $\psi \rightarrow \gamma\eta_c \rightarrow \gamma\rho\rho \rightarrow \gamma 4\pi$

这个过程看来似乎很复杂，是三级衰变，而且有中间三个共振态，但是通过对称性分析发现这个过程非常简单，每一级都只有一个分波：

- 因为每一级都满足 $\eta_a\eta_b\eta_c = -1$ ，因此根据角动量守恒和宇称守恒，每一级都只有纯的P-wave；相应的Helicity振幅只有一个：
- 第一级： $1^- \rightarrow 1^-0^-$ $L=1$ $F_{10}^1 = -F_{-10}^1, F_{00}^1 = 0$
- 第二级： $0^- \rightarrow 1^-1^-$ $L=1$ $F_{11}^0 = -F_{-1-1}^0, F_{00}^0 = 0$
- 第三级（两个 ρ ）： $1^- \rightarrow 0^-0^-$ $L=1$ F_{00}^1

则整个级联过程的总衰变振幅为：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M) &= F_{\lambda 0}^1 D_{M\lambda}^{1*}(\theta_2\phi_2, 0) BW_{\eta_c} F_{s\sigma}^0 F_{00}^1 BW_{\rho_{56}} D_{s0}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) F_{00}^1 BW_{\rho_{78}} D_{\sigma 0}^{1*}(\theta_7\phi_7, 0), \\ &= \mathcal{C} D_{M\lambda}^{1*}(\theta_2\phi_2, 0) D_{s0}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) D_{\sigma 0}^{1*}(\theta_7\phi_7, 0),\end{aligned}$$

其中的 $\mathcal{C}$ 是所有能量依赖的因子的乘积（和角分布无关）：

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= F_{\lambda 0}^1 BW_{\eta_c} F_{s\sigma}^0 F_{00}^1 BW_{\rho_{56}} F_{00}^1 BW_{\rho_{78}} \\ &= g B_1(r_{\gamma\eta_c}) B_1(r_{\rho\rho}) B_1(r_{\pi^5\pi^6}) B_1(r_{\pi^7\pi^8}) BW_{\eta_c} BW_{\rho_{56}} BW_{\rho_{78}},\end{aligned}$$

则总的联合角分布为（假设 $M = +1$ ）：

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Phi} &= \sum_{\lambda} \left| \sum_{s\sigma} \mathcal{A}^{(+1)} \right|^2 \\ &\propto \sum_{\lambda} \left| d_{1\lambda}^1(\theta_2) D_{10}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) D_{10}^{1*}(\theta_7\phi_7) - d_{1\lambda}^1(\theta_2) D_{-10}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_7\phi_7, 0) \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda} \left| d_{1\lambda}^1(\theta_2) \sin\theta_5 \sin\theta_7 \sin(\phi_5 + \phi_7) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} [(1 + \cos^2\theta_2) \sin^2\theta_5 \sin^2\theta_7 \sin^2(\phi_5 + \phi_7)],\end{aligned}\tag{2.95}$$

我们也来讨论一下这个角分布。

- 同样 η_c 方位角也不出现在角分布当中，是平庸的，是系统对称性的体现。
- 而且 ρ 在 η_c 的 Helicity 参考系中的角变量也不出现在角分布表达式中，这是因为母粒子的自旋为零，末态的角分布是均匀的。但是母粒子的宇称是负的，这个体现在下一级的角分布当中，也就是两个 ρ 的衰变平面的夹角满足 $\sin^2(\phi_5 + \phi_7)$ 分布（注意到在 η_c 的静止系中两个 ρ 是背对背的，它们的各自的 Helicity 系的坐标是不同的，结果两个平面的夹角恰好是 $[\phi_5 + \phi_7]$ ），如果母粒子的宇称是正的，这个分布将会变成 $\cos^2(\phi_5 + \phi_7)$ 。这个特征是非常有用的， π^0 的宇称确定就是通过两光子衰变过程，然后光子各转变成一对正负电子，它们的衰变平面具有这样的特征：带着上一级衰变母粒子的宇称信息。
- 通过积分得到各个非平庸的角分布如下：

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &\propto 1 + \cos^2\theta_2 \\ \frac{d\sigma}{d\cos\theta_{5,7}} &\propto \sin^2\theta_{5,7} = 1 - \cos^2\theta_{5,7} \\ \frac{d\sigma}{d\phi'} &\propto \sin^2(\phi_5 + \phi_7),\end{aligned}\tag{2.96}$$

2.1.7.8 $\psi \rightarrow \gamma\eta' \rightarrow \gamma\gamma\rho \rightarrow \gamma\gamma 2\pi$

和上面的 $\psi \rightarrow \gamma\eta_c \rightarrow \gamma\rho\rho \rightarrow \gamma 4\pi$ 非常类似，只是相应的一个 ρ 不再衰变。

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Phi} &= \sum_{\lambda} \left| \sum_s \mathcal{A}(+1) \right|^2 \\
 &\propto \sum_{\lambda} \left| d_{1\lambda}^1(\theta_2) D_{10}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) - d_{1\lambda}^1(\theta_2) D_{-10}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) \right|^2 \\
 &\propto \sum_{\lambda} \left| d_{1\lambda}^1(\theta_2) \sin\theta_5 \cos\phi_5 \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} [(1 + \cos^2\theta_2) \sin^2\theta_5 \cos^2\phi_5]
 \end{aligned}$$

2.2 Covariant Tensor Formalism

用非协变张量方法来构造分波展开公式最早是由Zemach [4, 5]等人发展起来的在衰变粒子的静止系用三动量来定义振幅的自旋部分，因为没有 Lorentz 变换，所以在最后的公式里含有不同参考系定义的张量，故而，它们是非协变的。虽然在很多情形下（但不是所有情形），协变和非协变的理论的差别并不明显，但是，协变作为一种理论要求应该是被满足的。在后来的工作中人们采用了所谓的 Rarita-Schwinger 条件[7]使张量满足了协变性：这个条件要求自旋张量和四动量之间满足正交性。因此有人把这种张量叫做 Rarita-Schwinger 张量。在本书中，Rarita-Schwinger 张量和协变 Zemach 张量（简称协变张量）指的是同一种公式。

这里介绍的协变张量是使用完全反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu\delta\sigma}$ 和度规张量 $g_{\mu\nu}$ 和母粒子、子粒子和他们的自旋波函数等构造不变振幅，在经过Filippini, Chung [6, 8]等人的进一步发展完善，现在成为粒子物理实验中非常重要的工具之一。它的优点是：*The advantage of using the tensor formalism is that a spin tensor, its indices being those of four-momenta, can be coupled to any four-momenta and/or other spin tensors to form the simplest scalar amplitude satisfying the requirement of the Lorentz invariance.* 下面我们介绍变张量方法，首先介绍动量空间波函数的定义，然后是张量的构造方法，以及如何保证张量的协变性。然后在下一章中介绍Helicity振幅的类似的构造方式，最后，我们将会非常看到：Helicity 振幅和协变张量方法之间的等价性是自然的。

2.2.1 从非相对论到相对论自旋波函数

这里我们介绍自旋波函数在动量空间的表示。因为我们实验上测量到是实验室系里的末态粒子四动量，因此，在动量空间来讨论问题会有很多便利，而且如果能保证方法是协变的，则可以直接使用实验室系的末态粒子四动量，这些正是实验数据分析者所希望的。这里我们首先介绍采用三动量构造非协变的自旋1态波函数，这样做只是为了引入必要的方法和概念，然后接着就系统地介绍协变的张量波函数。

2.2.1.1 静止系中的自旋1态

考虑一个任意的三动量 $\vec{p}$ ，它可以在笛卡儿坐标系展开成：

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^3 p_i \vec{e}_i, \quad (2.97)$$

其中 $\vec{e}_i$ 分别是沿着x-, y-和z-轴的单位矢量。 $\vec{p}$ 也可以采用球基矢展开：

$$\vec{p} = \sum_m p(m) \vec{e}(m) \quad (m = \pm 1, 0), \quad (2.98)$$

其中

$$\begin{aligned} \vec{e}(\pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm i \vec{e}_2), \quad \vec{e}(0) = \vec{e}_3, \\ p(\pm) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 \pm i p_2), \quad p(0) = p_3. \end{aligned} \quad (2.99)$$

这里指出矢量 $\vec{e}(m)$ 是三动量空间中的极化矢量，它们和静止系中的自旋1态一一对应。

显而易见，式2.99的矢量 $\vec{e}(m)$ 恰恰是 J_k 的角动量本征态：

$$J_3 e(m) = m e(m) \quad (m = -1, 0, 1), \quad (2.100a)$$

$$J_{\mp} e(\pm 1) = \sqrt{2} e(0), \quad (2.100b)$$

$$J_{\pm} e(\pm 1) = 0, \quad (2.100c)$$

$$J_{\pm} e(0) = \sqrt{2} e(\pm 1), \quad (2.100d)$$

其中： $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ ， $\vec{e}(m)$ 是下面的列矢量：

$$e(\pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.101a)$$

$$e(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.101b)$$

比较式2.100和式A.2，我们可以看出 $\vec{e}(m)$ 确实代表了自旋1粒子的波函数，即类似于附录A中讨论的 $|jm\rangle$ ($j=1$)。我们看到 $\vec{e}(m)$ 带有两种不同的指标，一种对应于自旋的第三分量，另一种对应于三动量。

根据式A.4我们发现 $\vec{e}(m)$ 在转动变换 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 下满足如下关系：

$$R(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}(m) = \sum_{m'} \vec{e}(m') D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.102)$$

其中，变换没有用 $U[\]$ 表示，是为了强调正则态 $\vec{e}(m)$ 并不是某种抽象的Hilbert空间的基矢，而只是是三动量空间的基矢。因为 $\vec{p}$ 和 $\vec{e}(m)$ 可以用同一套基矢展开（见式2.97和式2.99），所以我们可以得到旋转变换的另一种表示方式：

$$R(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}_i(m) = \sum_j \vec{e}_j(m) R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.103)$$

由此容易得到 $\vec{e}(m)$ 和任意三动量的点积具有转动不变的性质，即：

$$\vec{e}(m) \cdot \vec{p} = \vec{e}'(m) \cdot \vec{p}', \quad \text{其中 } \vec{e}'_i(m) = R_{ij}\vec{e}_j(m) \text{ 和 } \vec{p}'_i = R_{ij}\vec{p}_j,$$

其中的转动矩阵 $R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma)$ 是正交阵：它的逆阵等于它的转置。后面，我们将利用这一性质从 $\vec{e}(m)$ 和 $\vec{p}$ 出发来构造转动不变振幅。我们再简单列出极化矢量的一些性质：

$$\vec{e}^*(m) \cdot \vec{e}(m') = \delta_{mm'}, \quad (2.104a)$$

$$\sum_m \vec{e}_i(m) \cdot \vec{e}_j^*(m) = \delta_{ij}, \quad (2.104b)$$

$$\vec{e}^*(m) = (-)^m \vec{e}(-m). \quad (2.104c)$$

2.2.1.2 相对论性自旋1 态

到目前为止，我们考虑的 $\vec{e}(m)$ 依然是描述静止系当中自旋1粒子的正则态或者波函数，它们只是满足一定的旋转性质，可以和三动量一起构成旋转不变的振幅，但是我们必须考虑更复杂的情况，比如级联衰变，这时将会面对多个参考系的情形，这时必然会要求构造出来的振幅满足Lorentz 协变性。因此我们必须把静止系中的波函数推广到任意参考系，也就是得到协变的波函数。根据定义，自旋描述了处于静止系当中的粒子在空间旋转作用下的行为特征；因此动量空间中的自旋波函数也就不可能有能量分量。知道了这一特点，我们可以这样形式地定义一个描述静止系中自旋1粒子的四矢量：

$$\vec{e}^\mu(0, m) = \{0, \vec{e}(m)\}, \quad (2.105a)$$

$$\vec{e}_\mu(0, m) = \{0, -\vec{e}(m)\}. \quad (2.105b)$$

现在我们做好准备来定义Helicity态和正则态矢量。与2.24和2.29类似，我们做如下定义：

$$e^\mu(\vec{p}, m) = [\mathring{R}L_z(p)\mathring{R}^{-1}]^\mu{}_\nu e^\nu(0, m), \quad (2.106a)$$

$$e^\mu(\vec{p}, \lambda) = [\mathring{R}L(\vec{p})]^\mu{}_\nu e^\nu(0, \lambda), \quad (2.106b)$$

其中的 $L_z(p)$ 和以前的定义相同， $\mathring{R}$ 则变为：

$$\mathring{R}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{ij} \end{pmatrix}$$

其中 R_{ij} 是 3×3 阶旋转矩阵。如果 $\vec{p}$ 沿着 z -轴，则2.106 中的两式具有相同形式。我们可以写出其显式表达式：

$$e^\mu(p\hat{z}, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0), \quad (2.107a)$$

$$e^\mu(p\hat{z}, 0) = \left(\frac{p}{w}, 0, 0, \frac{E}{w} \right) = (\gamma\beta, 0, 0, \gamma), \quad (2.107b)$$

其中 E , p 和 w 分别是自旋1粒子的能量、动量和质量， β 是粒子速度， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 。在更一般的情况下， $\vec{p}$ 沿着任意方向运动，则对于Helicity态有：

$$e^\mu(\vec{p}, \pm 1) = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} (0, \cos\theta \cos\phi \mp i \sin\phi, \cos\theta \sin\phi \pm i \cos\phi, -\sin\theta), \quad (2.108a)$$

$$e^\mu(\vec{p}, 0) = \left(\gamma\beta_z, \frac{\beta_z\beta_x}{(1+\gamma)/\gamma^2}, \frac{\beta_z\beta_y}{(1+\gamma)/\gamma^2}, 1 + \frac{\beta_z^2}{(1+\gamma)/\gamma^2} \right), \quad (2.108b)$$

对于正则态则有：

$$e^\mu(\vec{p}, \pm 1) = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \left(\gamma\beta_x \pm i\gamma\beta_y, 1 + \frac{\beta_x(\beta_x \pm i\beta_y)}{(1+\gamma)/\gamma^2}, \pm i + \frac{\beta_y(\beta_x \pm i\beta_y)}{(1+\gamma)/\gamma^2}, \frac{\beta_z(\beta_x \pm i\beta_y)}{(1+\gamma)/\gamma^2} \right), \quad (2.109a)$$

$$e^\mu(\vec{p}, 0) = \left(\gamma\beta_z, \frac{\beta_z\beta_x}{(1+\gamma)/\gamma^2}, \frac{\beta_z\beta_y}{(1+\gamma)/\gamma^2}, 1 + \frac{\beta_z^2}{(1+\gamma)/\gamma^2} \right). \quad (2.109b)$$

性质2.103保证了2.106这样地态在旋转变换下与前面讨论的 $|\vec{p}, jm\rangle$ 和 $|\vec{p}, j\lambda\rangle$ 变换方式相同。因此，我们有：

$$Re^\mu(\vec{p}, m) = \sum_{m'} D_{m'm}^{(1)} e^\mu(R\vec{p}, m'), \quad (2.110a)$$

$$Re^\mu(\vec{p}, \lambda) = e^\mu(R\vec{p}, \lambda), \quad (2.110b)$$

和前面讨论类似，Helicity 态和正则态矢的联系很简单，如下：

$$e^\mu(\vec{p}, \lambda) = \sum_m D_{m\lambda}^{(1)}(R) e^\mu(\vec{p}, m). \quad (2.111)$$

这里我们简单列出几个极化四矢的性质：

$$p^\mu e_\mu(\vec{p}, m) = 0, \quad (2.112a)$$

$$e_\mu^*(\vec{p}, m) e_\mu(\vec{p}, m') = \delta_{mm'}, \quad (2.112b)$$

$$P_{\mu\nu}^{(1)} = \sum_m e_\mu(\vec{p}, m) e_\nu^*(\vec{p}, m) = \bar{g}_{\mu\nu}(p), \quad (2.112c)$$

$$\bar{g}_{\mu\nu}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{w^2} = -g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (2.112d)$$

式2.112a是定义的必然结果，它可以看作自旋1波函数必须满足的必要条件，因为它虽然以四维的形式出现，却只有三个独立分量。式2.112d中 u_μ , u_ν 是粒子的四速度 $u = p/w$ ，我们容易知道 $u^2 = 1$ ，而 $P_{\mu\nu}^{(1)}$ 被称作自旋1投影算子， $\bar{g}_{\mu\nu}(p)$ 被称为修正的Lorentz 度规 (Modified Lorentz Metric)，在有质量粒子的质心系将会约化为 δ_{ij} (没有能量分量)。2.112 的前三个性质其实是2.104的推广。我们还注意到投影算子满足如下关系：

$$P_{\mu\alpha}^{(1)} P_\nu^{(1)\alpha} = P_\nu^{(1)} \quad (2.113)$$

因之， $P_\nu^{(1)}$ 可以被当作投影算子也就是基于性质2.112a：当它被应用到任意4矢量，生成的矢量都和 p^μ 垂直。而且，必须提到的是，对于Helicity态也存在类似的性质。

2.2.1.3 自旋2和更高自旋的态

描述自旋2粒子波函数的可以从极化矢量和C-G系数来构造。

$$e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m) = \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | 2m) e_{\mu}(\vec{p}, m_1) e_{\nu}(\vec{p}, m_2) \quad (2.114)$$

极化矢量的旋转性质2.110式保证我们的自旋2态也具有正确的旋转性质：

$$R e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m) = \sum_{m'} D_{m' m}^{(2)}(R) e_{\mu\nu}(R\vec{p}, 2m') \quad (2.115)$$

自旋2的Helicity态也可以用自旋1的Helicity态矢量用和2.114 完全相同的方式构造出来；我们只要把 m 用 λ 替换掉即可。关系式2.111可以用来表明自旋2的粒子的正则态和Helicity态之间的联系：

$$e^{\mu\nu}(\vec{p}, 2\lambda) = \sum_m D_{m\lambda}^{(2)}(\hat{R}) e^{\mu\nu}(\vec{p}, 2m) . \quad (2.116)$$

其中，和以前一样， $\hat{R}$ 描述了 $\vec{p}$ 的方向。

由于自旋2粒子只有5种自旋第三分量可供选择，所以它的态也就只有5个独立分量。但是另一方面，式2.114却表明这是一个2阶张量有16个独立分量。因此，这意味着将会有相应的条件限制会使独立分量个数减小到5个。这正是所谓的整数自旋粒子的 Rarita-Schwinger 条件。从定义式2.114我们可以看出，实际上有：

$$p^{\mu} e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m) = 0 \quad (2.117a)$$

$$e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m) = e_{\nu\mu}(\vec{p}, 2m) \quad (2.117b)$$

$$g^{\mu\nu} e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m) = 0 , \quad (2.117c)$$

很容易看到，这些条件把 $e_{\mu\nu}$ 的独立分量个数减少到了5个。在自旋2粒子的静止系，2.117简化为：

$$e_{ij}(2m) = e_{ji}(2m) \quad (2.118a)$$

$$\sum_i e_{ii}(2m) = 0 , \quad (2.118b)$$

2.118a简单表明在静止系中标 μ 和 ν 只有空间分量，也就是1, 2, 3；2.118b则表明 $e_{ij}(2m)$ 是对称无迹张量。

我们按照如下方式归一化 $e_{\mu\nu}$:

$$e_{\mu\nu}^*(\vec{p}, 2m)e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m') = \delta_{mm'} . \quad (2.119)$$

与2.112c类似, 我们可以定义自旋2粒子的投影算子:

$$P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)} = \sum_m e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m)e_{\alpha\beta}^*(\vec{p}, 2m) , \quad (2.120)$$

它的归一化满足:

$$P_{\mu\nu\sigma\rho}^{(2)}P_{\alpha\beta}^{(2)\sigma\rho} = P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)} . \quad (2.121)$$

自旋2的投影算子从任意2阶张量投影出来的结果肯定都满足性质2.117; 在自旋2粒子的静止系, 投影算子只是简单的投影出张量对称无迹的那部分。根据这个观点, 我们马上就可以写出静止系中的投影算子的另一种形式:

$$P_{ijkm}^{(2)} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} . \quad (2.122)$$

在任意参考系中定义的投影算子必须能在静止系是化简到2.122, 因此我们有:

$$P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\mu\alpha}\bar{g}_{\nu\beta} + \bar{g}_{\mu\beta}\bar{g}_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}_{\alpha\beta} . \quad (2.123)$$

其中 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 由2.112d给出, 在静止系中约化到 δ_{ij} 。

和上面的类似, 我们可以构造描述更高自旋的粒子张量态。下面简单介绍自旋3的粒子的张量波函数的构造:

$$e_{\mu\nu\sigma}(\vec{p}, 3m) = \sum_{m_1 m_2} (2m_1 1 m_2 | 3m) e_{\mu\nu}(\vec{p}, 2m_1) e_{\sigma}(\vec{p}, m_2) , \quad (2.124)$$

它的归一化满足:

$$e_{\mu\nu\sigma}^*(\vec{p}, 3m)e_{\mu\nu\sigma}(\vec{p}, 3m') = \delta_{mm'} . \quad (2.125)$$

自旋3粒子的张量波函数的选装性质由构造方式得到保证。而且波函数满足 Rarita-Schwinger 条件:

$$p^\mu e_{\mu\nu\sigma} = 0 \quad (2.126a)$$

$$e_{\mu\nu\sigma} = \text{paitwise symmetric} \quad (2.126b)$$

$$g^{\mu\nu} e_{\mu\nu\sigma} = 0 , \quad (2.126c)$$

条件2.126b表示, $e_{\mu\nu\sigma}$ 对任何两个指标的交换都不变。在静止系中, $e_{\mu\nu\sigma}$ 化简为 e_{ijk} , 只含有空间指标并且两两对称且无迹。

自旋三投影算子可以类似定义如下:

$$P_{\mu\nu\sigma\alpha\beta\gamma}^{(2)} = \sum_m e_{\mu\nu\sigma}(\vec{p}, 3m) e_{\alpha\beta\gamma}^*(\vec{p}, 3m), \quad (2.127)$$

在自旋3粒子的静止系中, 此投影算子可以从任意三阶张量中投影出指标两两对称且无迹的3阶张量。因此, 和2.122类似, 我们很容易构造出静止系中的投影算符:

$$P_{ijklmn}^S = \frac{1}{6} \sum_p \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \quad (2.128a)$$

$$P_{ijklmn}^{(3)} = P_{ijklmn}^S - \frac{1}{5} [\delta_{ij} P_{aaklmn}^S + \delta_{jk} P_{aailmn}^S + \delta_{ki} P_{aaajlmn}^S], \quad (2.128b)$$

其中, 第一式 p 表示对 (i, j, k) 的6中交换方式求和。

2.2.1.4 两个自旋波函数的耦合

在构造不变振幅的时候一般需要采用 $L - S$ 耦合方案, 因此必须先考虑 $S - S$ 耦合。下面我们来考虑两个末态粒子的自旋态的耦合。

- 如果两个粒子都无自旋, 也就无所谓耦合, 它们的耦合态是1。
- 如果一个粒子有自旋, 而另一个无自旋, 则它们的耦合态就是有自旋粒子的自旋波函数。
- 如果两个粒子都有自旋, 按照一般的考虑, 他们会耦合出若干个总自旋态, 比如, 假设 $s_1 \geq s_2$, 则 $S = s_1 - s_2, s_1 - s_2 + 1, s_1 - s_2 + 2, \dots, s_1 + s_2$, 总共 $(2s_2 + 1)$ 个自旋态; 假设两个粒子自旋都是1, 它们的波函数分别为: $\omega_\alpha(m_1)$ 和 $\epsilon_\beta(m_2)$ 则有总自旋 $s = 0, 1, 2$, 它们的耦合态是:

$$\chi_{\alpha\beta}^{(0)}(0) = \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | 00) \omega_\alpha(m_1) \epsilon_\beta(m_2) \quad (2.129a)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{(1)}(m) = \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | 1m) \omega_\alpha(m_1) \epsilon_\beta(m_2) \quad (2.129b)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{(2)}(m) = \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | 2m) \omega_\alpha(m_1) \epsilon_\beta(m_2) \quad (2.129c)$$

可以看到，自旋1张量 $\chi_{\alpha\beta}^{(0)}(1)$ 是完全反对称的，而自旋2张量 $\chi_{\alpha\beta}^{(0)}(2)$ 是对称且无迹的。

我们可以采用投影算符的形式来得到耦合自旋波函数。投影算符定义如下：

$$P_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(S)} = \sum_m \chi_{\alpha\beta}^S(m) \chi_{\gamma\sigma}^{S*}(m), \quad (2.130)$$

经过化简后得到：

$$P_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(0)} = \frac{1}{3} \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{g}_{\gamma\sigma} \quad (2.131a)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{\alpha\gamma} \bar{g}_{\beta\sigma} - \bar{g}_{\alpha\sigma} \bar{g}_{\beta\gamma}) \quad (2.131b)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{\alpha\gamma} \bar{g}_{\beta\sigma} + \bar{g}_{\alpha\sigma} \bar{g}_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3} \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{g}_{\gamma\sigma}. \quad (2.131c)$$

当投影算符作用到纯自旋波函数上时：

$$\chi_{\alpha\beta}^{(0)} = (\tilde{\omega} \cdot \epsilon) \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (2.132a)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} (\tilde{\omega}_\alpha \tilde{\epsilon}_\beta - \tilde{\epsilon}_\alpha \tilde{\omega}_\beta) \quad (2.132b)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^{(2)} = \tilde{\omega}_\alpha \tilde{\epsilon}_\beta + \tilde{\epsilon}_\alpha \tilde{\omega}_\beta - \frac{2}{3} (\tilde{\omega} \cdot \epsilon) \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (2.132c)$$

其中：

$$(\tilde{\omega} \cdot \epsilon) = (\omega \cdot \tilde{\epsilon}) = (\tilde{\omega} \cdot \tilde{\epsilon}), \quad \tilde{\omega}_\alpha = -\omega_\alpha + \frac{p \cdot \omega}{W^2} p_\alpha. \quad (2.133)$$

从中可以看出，完全反对称张量有3个独立分量，而对称张量有5个独立分量，正好反应了它们分别是自旋1和自旋2的波函数。

- 更高阶的自旋之间的耦合和上面的耦合类似，可以按照相同的方法的耦合。

2.2.2 动量空间的轨道角动量波函数

因为后面的讨论将会用到，我们再来讨论纯轨道角动量波函数在动量空间的表示，轨道角动量波函数在后面将会有非常重要的应用。利用前面定义的自旋投影算符，可以非常方便的得到轨道角动量波函数。

当轨道角动量 $l = 0$ 态即S-wave时, 坐标空间中的波函数是各向同性的, 在动量空间的表现出的特征为: 与相对动量 $\vec{r}$ 无关, 也就是说: $\tilde{t}^{(0)} = 1$; 当轨道角动量为 $l = 1$, 即P-wave时, 我们可以用 $\tilde{t}^{(1)}$ 来表示其波函数, 它可以用前面定义的自旋投影算符2.112c 作用到末态粒子的相对动量 $r = p_1 - p_2$ 上得到:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_\mu^{(1)} &= P_{\mu\nu}^{(1)} r^\nu = \bar{g}_{\mu\nu}(p) r^\nu \\ &= -r_\mu + \frac{m^2 - \mu^2}{W^2} p_\mu \\ &\equiv \tilde{r}_\mu,\end{aligned}\quad (2.134)$$

其中 m, μ 分别是末态两个粒子的质量。很容易得到在任意参考系中都有:

$$(\tilde{r} \cdot \tilde{r}) = (r \cdot \tilde{r}) = \vec{r} \cdot \vec{r}. \quad (2.135)$$

当轨道角动量为 $l = 2$, 即D-wave时, $\tilde{t}^{(2)}$ 也类似, 用前面定义的自旋投影算符2.120 作用到末态粒子的相对动量上得到:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{\mu\nu}^{(2)} &= P_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)} r^\alpha r^\beta \\ &= \left[\tilde{r}_\mu \tilde{r}_\nu - \frac{1}{3} (\tilde{r} \cdot \tilde{r}) \bar{g}_{\mu\nu}(p) \right],\end{aligned}\quad (2.136)$$

同理, $\tilde{t}^{(3)}$ 按照如下方式得到:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{\mu\nu\lambda}^{(3)} &= P_{\mu\nu\lambda\alpha\beta\gamma}^{(3)} r^\alpha r^\beta r^\gamma \\ &= \tilde{r}_\mu \tilde{r}_\nu \tilde{r}_\lambda - \frac{1}{5} (\tilde{r} \cdot \tilde{r}) [\bar{g}_{\mu\nu}(p) \tilde{r}_\lambda + \bar{g}_{\nu\lambda}(p) \tilde{r}_\mu + \bar{g}_{\lambda\mu}(p) \tilde{r}_\nu],\end{aligned}\quad (2.137)$$

多数情况下, 我们将会用到母粒子静止系当中的轨道角动量波函数的形式, 所以我们给出在母粒子静止系中前三阶的轨道角动量波函数的明显表达式:

$$\tilde{t}_i^{(1)} = r_i \quad (2.138a)$$

$$\tilde{t}_{ij}^{(2)} = r_i r_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \quad (2.138b)$$

$$\tilde{t}_{ijk}^{(3)} = r_i r_j r_k - \frac{r^2}{5} [\delta_{ij} r_k + \delta_{jk} r_i + \delta_{ki} r_j], \quad (2.138c)$$

2.2.3 不变振幅的构造

现在我们做好了各种准备, 定义了不同整数自旋粒子动量空间的波函数, 用它们来构造Lorentz不变的振幅。

2.2.3.1 一般性的构造规则

在构造过程中，一般会用到：初末态粒子的自旋波函数，纯轨道角动量张量，总自旋波函数还有可能会用到初态粒子的四动量。读者应该留意到，所有这些量都是从末态粒子的四动量出发定义的，也就是用我们的实验测量量构造的，而且我们要求所构造的振幅是协变的，所以，只需要实验室系中的四动量就足够了。这点对于实验分析非常重要。

基本的构造规则如下：

- 可以使用的成分包括：初末态粒子的自旋波函数（极化矢量） $\phi^*(m)$ ，纯轨道角动量张量 $\tilde{t}^{(l)}$ 和协变自旋波函数 $\omega(m_s)$ 和 $\epsilon(m_\sigma)$ 耦合成的总自旋波函数，初态粒子的四动量 p^μ 以及 $\epsilon_{\mu\nu\sigma\gamma}$ 和Lorentz度规 $g_{\mu\nu}$ ；
- 振幅必须保持Lorentz不变，宇称守恒等对称性的要求；
- 要把符合上面要求的可能振幅按照和 $L-S$ 耦合的概念全部构造出来，个数正好的独立分波数目相同；
- 为了保持宇称守恒，当 $(J + s_1 + s_2 + l)$ 为奇数时需要 $\epsilon_{\mu\nu\sigma\gamma}p^\mu$ ，其他情况则不需要。

按照上面的这套规则，在构造过程中参考自旋-自旋耦合，以及总自旋-轨道角动量的耦合关系，可以非常清楚的看到其物理对应，对于构造出相应独立个数的耦合振幅非常有利。尤其是复杂的级联衰变，这种方法按部就班，结果唯一确定，易于保证正确性。但是，它要求给出各种协变张量的明显表达式，并需要进一步化简，使工作量增大。而化简的过程的工作量大，也就容易出错。但是由于构造过程有确定的规则可以遵循，所以对于初学者和当作练习比较合适。

一般来说，只要用自旋波函数，初末态粒子四动量、 $\epsilon_{\mu\nu\sigma\gamma}$ 和Lorentz度规 $g_{\mu\nu}$ 就可以直接得到等价的结果，并不用拘泥于 $L-S$ 耦合的概念，只要要求构造的振幅之间是独立的即可。按照这种思路由于避免了轨道角动量张量的构造，可以使工作量减小，但是对于经验不足者不容易看出每个量的物理意义，构造时比较灵活，结果也不唯一，任意性太大，容易出错，不好掌握。所以，比较适合有经验且比较熟练的人使用。

对于初学者，比较合理的方式是先按照上述第一种规则按部就班采用 $L - S$ 耦合概念来构造不变振幅，然后进一步化简，而且适当的化简工作会很快提高能力和培养物理感觉；等一段时间，熟悉了以后，就可以不用拘泥于这些规则，再按照比较简单的方式来构造不变振幅。这样学习者由于已经有了经验，也比较熟悉张量的计算技巧，就比较容易避免出错。

我们在构造协变形式耦合振幅时，为了方便和一致性，采用了一定的符号约定，比如对： $J \rightarrow s + \sigma$ 型的两体衰变时，所用到的主要记号列于表2.1中。请注意，为了方便和以后的一致性，这里的记号和前面的不太一样；还有就是我们用 r 来表示末态两个粒子的四动量差 $r = q - k$ ，同时我们也用 r 表示其三动量的模，一般不至于混淆。

表 2.1: 构造协变耦合振幅所用的主要符号约定

	母粒子	子粒子1	子粒子2
自旋	J	s	σ
宇称	η_J	η_s	η_σ
Helicity	δ	λ	ν
自旋 z -分量	m	m_s	m_σ
动量	p	q	k
能量	p_0	q_0	k_0
质量	W	m	μ
能量/质量	γ_J	γ_s	γ_σ
波函数	$\phi^*(\delta)$	$\omega(\lambda)$	$\epsilon(-\nu)$

2.2.3.2 张量形式的衰变振幅

最好说明方式是从一个简单的例子出发，比如 $\psi \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $K^+ K^-$ 。这是一个 $1^- \rightarrow 0^- 0^-$ 的过程，末态粒子没有自旋，自旋波函数为1，由于角动量守恒，末态粒子间的轨道角动量 $l = 1$ ，则有 $(J + s + \sigma + l) = 2$ ，是偶数，则不需要 $\epsilon_{\mu\nu\sigma\gamma} p^\mu$ 的出现。

采用前面所述耦合振幅构造规则，则振幅中出现末态纯轨道角动量 $\tilde{t}^{(1)}$ 波

函数而不会出现末态粒子的动量。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(m) &\propto \phi_\mu^*(m) \tilde{t}^{\mu(1)} = \phi_\mu^*(m) \tilde{r}^\mu \\
&= \phi_\mu^*(m) \bar{g}_{\mu\nu}(p) r^\nu = \phi_i^*(m) r^i \quad (\text{in } \psi \text{ rest frame}) \\
&\propto \phi_i^*(m) q^i \\
&= \frac{-\text{sign}(m)}{\sqrt{2}} [q_1 - \text{sign}(m) i q_2], \quad m \neq 0
\end{aligned} \tag{2.139}$$

上面用到了在 ψ 静止系中动量守恒条件 $\vec{q} + \vec{k} = 0$ 和 ψ 没有纵向极化分量的条件。

另一种得到角分布的技巧很简单：

$$\frac{d\sigma}{d\phi} \propto \sum_m \phi_\mu^*(m) q^\mu \phi_{\mu'}(m) q^{\mu'} \tag{2.140}$$

而 ψ 由正负电子对撞产生，自旋第三分量只能取 ± 1 ，则有

$$\sum_m \phi_\mu^*(m) \phi_{\mu'}(m) = \delta_{\mu\mu'} (\delta_{\mu 1} + \delta_{\mu 2}) \tag{2.141}$$

则截面：

$$\frac{d\sigma}{d\phi} \propto q_x^2 + q_y^2 = q^2 \times \sin^2 \theta. \tag{2.142}$$

这和我们前面用 Helicity 方法得到角分布正好完全相同，只是前面多了一个 q^2 的因子，这正好说明 F_{00}^1 具有和末态粒子在母粒子静止系中动量一次方成正比。

再看一个例子 $\psi \rightarrow \phi f_0(980)$ 。这是一个 $1^- \rightarrow 1^- 0^+$ 的过程，因为宇称和角动量守恒，只能有 S-wave 和 D-wave，因此在 $L-S$ 耦合中，有以下两个分波振幅 $\mathcal{M}_{01}^1$ 和 $\mathcal{M}_{21}^1$ 。因为对所有的振幅 $\mathcal{M}_{ls}^1$ 有 $J + l + s + \sigma = \text{偶数}$ ，所以不需要 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\sigma$ 的出现。

下面我们逐个来构造。第一个：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{01}(\lambda) &= \phi_\mu^*(m) \omega^\mu \\
&= [\phi^*(m) \cdot \omega] \\
&= \phi_i^* \omega^i, \quad (\text{in } \psi \text{ rest frame})
\end{aligned} \tag{2.143}$$

第二个：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{21}(\lambda) &= \phi_\mu^*(m) \tilde{t}^{(2)\mu\nu} \omega_\nu \\ &= [\tilde{r} \cdot \omega \tilde{r} \cdot \phi^*(m)] - \frac{1}{3}(\tilde{r} \cdot \tilde{r})[\tilde{\omega} \cdot \phi^*(m)],\end{aligned}\quad (2.144)$$

再讨论一个更复杂的例子 $\psi \rightarrow K^{*0} \bar{K}^{*0}$ 。这是一个 $1^- \rightarrow 1^- 1^-$ 的过程，因为宇称和角动量守恒，只能有 P-wave 和 F-wave，因此在 $L-S$ 耦合中，有以下四个分波振幅 $\mathcal{M}_{10}^1$ ， $\mathcal{M}_{11}^1$ ， $\mathcal{M}_{12}^1$ 和 $\mathcal{M}_{32}^1$ 。因为对所有的振幅 $\mathcal{M}_{lS}^1$ 有 $J+l+s+\sigma = \text{偶数}$ ，所以不需要 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\sigma$ 的出现。

下面我们逐个来构造。第一个：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{10}(\lambda\nu) &= \phi_\mu^*(m) \chi^{(0)\mu\nu}(0) \tilde{t}_\nu^{(1)} = (\tilde{\omega} \cdot \epsilon) \phi_\mu^*(m) \bar{g}^{\mu\nu}(p) \tilde{t}_\nu^{(1)} \\ &= (\omega \cdot \epsilon) [\phi^*(m) \cdot \tilde{r}^\dagger], \quad (\text{in } \psi \text{ rest frame})\end{aligned}\quad (2.145)$$

第二个不变振幅，我们仍旧把 ϕ^* 在 $\vec{q}$ ，也就是 $\vec{r}$ 方向展开，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{11}(\lambda\nu) &= \phi_\mu^* \chi^{(1)\mu\nu} \tilde{t}_\nu^{(1)} \\ &= (\tilde{r} \cdot \omega) [\tilde{\epsilon} \cdot \phi^*(m)] - (\tilde{r} \cdot \epsilon) [\tilde{\omega} \cdot \phi^*(m)],\end{aligned}$$

第三个不变振幅：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{12}(\lambda\nu) &= \phi_\mu^* \chi^{(2)\mu\nu} \tilde{t}_\nu^{(1)} \\ &= (\tilde{r} \cdot \omega) [\tilde{\epsilon} \cdot \phi^*(m)] + (\tilde{r} \cdot \epsilon) [\tilde{\omega} \cdot \phi^*(m)] - \frac{2}{3}(\tilde{\omega} \cdot \epsilon) [\tilde{r} \cdot \phi^*(m)]\end{aligned}\quad (2.146)$$

第四个不变振幅：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{32}(\lambda\nu) &= \phi^{*\lambda} \tilde{t}_{\mu\nu\lambda}^{(3)} \chi^{(2)\mu\nu} \\ &= (\tilde{r} \cdot \omega) (\tilde{r} \cdot \epsilon) (\tilde{r} \cdot \phi^*) \\ &\quad - \frac{1}{5} [\tilde{r} \cdot \tilde{r}] [(\tilde{\omega} \cdot \epsilon) (\tilde{r} \cdot \phi^*) + (\tilde{r} \cdot \epsilon) (\tilde{\omega} \cdot \phi^*) + (\tilde{r} \cdot \omega) (\tilde{\epsilon} \cdot \phi^*)]\end{aligned}\quad (2.147)$$

我们可以清楚的从中看到 r 幂次和分波 L 相对应。

2.2.4 处理级联衰变

上面讨论的是只有一级衰变的情形，但是我们在实际中碰到的更多的是级联衰变；而在研究介子谱时，往往大多数情况最终末态都是无自旋粒子（ π 和 K ）（这里不讨论末态包含费米子的情形），他们的自旋波函数是常数，这就会导致一个非常有用的结论：考虑级联衰变时，由于末态粒子自旋都是零，那么振幅中将不会有末态粒子的自旋波函数（常数1）出现，而中间态的自旋波函数和相应的纯轨道角动量波函数是等价的，可以用后者来代替前者，根据是一个有自旋的粒子通过两体衰变到两个无自旋的粒子，那么由于角动量守恒，末态的轨道角动量等于母粒子的自旋。关于这点在文献[6]中有比较仔细的讨论。

在邹冰松教授的回顾性的工作[12]中，有大量关于 J/ψ 和 ψ' 衰变过程的例子。这里我们引用其中几个做一点分析和讨论，目的在于介绍方法。

2.2.4.1 $\psi \rightarrow \rho\pi_3 \rightarrow \pi_1\pi_2\pi_3$

这个衰变道是通过中间共振态 $\rho(770)$ 来进行的，而 $\rho(770)$ 是 1^- 的，则由于角动量守恒和宇称守恒，两次级联衰变都是纯的P-wave，而且只有一个分波。不变振幅的构造使用到了两级的轨道角动量波函数，因为 $J + s + \sigma + l = 3$ 是奇数，所以有完全反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p_\psi^\sigma$ 出现。唯一的振幅如下：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(m) &= \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \phi^{*\mu}(m) p_\psi^\sigma \tilde{T}_{\rho 3}^{(1)\nu} BW_\rho \tilde{t}_{12}^{(1)\lambda} \\
 &= BW_\rho B_1(r_{\rho 3}) B_1(r_{12}) \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \phi^{*\mu}(m) (p_1 + p_2 + p_3)^\sigma \\
 &\quad \left[(p_1 + p_2 - p_3)^\nu - \frac{(p_1 + p_2 + p_3)^\nu (m_\rho^2 - m_{\pi 3}^2)}{m_\psi^2} \right] \\
 &\quad \left[(p_1 - p_2)^\lambda - \frac{(p_1 + p_2)^\lambda (m_{\pi 1}^2 - m_{\pi 2}^2)}{m_\rho^2} \right] \\
 &= -4 BW_\rho B_1(r_{\rho 3}) B_1(r_{12}) \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \phi^{*\mu}(m) p_1^\nu p_2^\lambda p_3^\sigma,
 \end{aligned}$$

计算当中，用到完全反对称张量交换相邻两个指标出现一个符号的特征，可以把其他的项完全消掉，只剩下最后四项完全相同。值得指出的是其中的 $B_1(r)$ 是势垒因子，而且这时候与Helicity理论中用到的势垒因子不同。因为振幅中的 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \phi^{*\mu}(m) p_1^\nu p_2^\lambda p_3^\sigma$ 已经隐式的包含了普通的势垒因子的分子部分，

而这里的势垒因子只出现分母部分。前三阶的势垒因子具体形式如下，

$$B_1(r) = \sqrt{\frac{2}{r^2 + r_0^2}}$$

$$B_2(r) = \sqrt{\frac{13}{r^4 + 3r^2r_0^2 + 9r_0^4}}$$

$$B_3(r) = \sqrt{\frac{277}{r^6 + 6r^4r_0^2 + 45r^2r_0^4 + 225r_0^6}}$$

其中， r 是末态粒子在母粒子质心中的动量模， r_0 代表强相互作用的半径对应的典型动量，一般取一个费米对应的动量约 $197.327 \text{ MeV}/c^2$ 。

如果利用在 ψ 的静止系中的条件，可以进一步把上面结果化简，

$$\mathcal{M}(m) = \mathcal{C} \epsilon_{ijk} \phi^{*i}(m) p_1^j p_2^k \quad (2.148)$$

其中 $\mathcal{C} = -4BW_\rho B_1(r_{\rho 3}) B_1(r_{12})$ 。这个时候，振幅已经完全用末态粒子的在实验室系中的四动量表示出来了，形式非常简单，而且不需要进行任何旋转和 Lorentz 变换，计算量很小，直接用到实验拟合当中非常适合。这也正是协变张量方法的优点。

2.2.4.2 $\psi \rightarrow \phi \pi^+ \pi^- \rightarrow K^+ K^- \pi^+ \pi^-$

这个过程中 $\pi^+ \pi^-$ 一般可以通过 f_0 或者 f_2 中间态衰变。我们首先来考虑通过 f_0 的情形，此时只有两个分波 $L = 0, 2$ ，把末态四个粒子顺次编号为 1, 2, 3, 4，令 $q_{12} = p_1 - p_2$ ，振幅可以记为 $\langle \phi f_0 | 01 \rangle$ 和 $\langle \phi f_0 | 21 \rangle$ ，现在我们可以逐个来构造，

$$\langle \phi f_0 | 01 \rangle = \phi_\mu^*(m) \tilde{t}_{(12)}^{(1)\mu} BW_\phi BW_{f_0}, \quad (2.149)$$

$$\langle \phi f_0 | 21 \rangle = \phi_\mu^*(m) \tilde{T}_{(\phi f_0)}^{(2)\mu\nu} \tilde{t}_{(12)\nu}^{(1)} BW_\phi BW_{f_0}, \quad (2.150)$$

其中， $\tilde{t}_{(12)}^{(1)\mu}$ 是 $\phi \rightarrow K^+ K^-$ 过程的轨道角动量波函数，

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{(12)}^{(1)\mu} &= [\bar{g}^{\mu\mu'}(p_1 + p_2)] q_{\mu'} B_1(r_{12}) \\ &= \left[q^\mu - \frac{(p_1 + p_2)^\mu (m_1^2 - m_2^2)}{m_\phi^2} \right] B_1(r_{12}) \\ &= q^\mu B_1(r_{12}), \end{aligned} \quad (2.151)$$

其中最后一步的化简是因为 $K^\pm$ 的质量相等，其实，因为 ϕ 的宽度很小，所以其势垒因子的影响也很小，故可以忽略。 $\tilde{T}_{(\phi f_0)}^{(2)\mu\nu}$ 是第一级 $\psi \rightarrow \phi f_0$ 过程的轨道角动量波函数($L = 2$)，记 $q_{(12,34)} = p_1 + p_2 - p_3 - p_4$ ，则有

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{(\phi f_0)}^{(2)\mu\nu} &= \left\{ [\bar{g}^{\mu\mu'}(p)][\bar{g}^{\nu\nu'}(p)] - \frac{1}{3}[\bar{g}^{\mu'\nu'}(p)][\bar{g}^{\mu\nu}(p)] \right\} q_{(12,34)\mu'} q_{(12,34)\nu'} B_2(r_{(12,34)}) \\ &= \left\{ q_{(12,34)}^\mu q_{(12,34)}^\nu - \frac{1}{3} q_{(12,34)} \cdot q_{(12,34)} [\bar{g}^{\mu\nu}(p)] \right\} B_2(r_{(12,34)}),\end{aligned}\quad (2.152)$$

利用 ψ 静止系的条件则只剩下空间分量 τ^{ij} ,

$$\tau^{ij} = \left\{ q_{(12,34)}^i q_{(12,34)}^j - \frac{1}{3} \vec{q}_{(12,34)} \cdot \vec{q}_{(12,34)} \delta_{ij} \right\} B_2(r_{(12,34)}), \quad (2.153)$$

因此振幅可以化简成:

$$\langle \phi f_0 | 01 \rangle = \phi_\mu^*(m) q^\mu B_1(r_{12}) BW_\phi BW_{f_0}, \quad (2.154)$$

$$\langle \phi f_0 | 21 \rangle = \phi_i^*(m) \tau^{ij} q_j B_2(r_{(12,34)}) B_1(r_{12}) BW_\phi BW_{f_0}. \quad (2.155)$$

我们仍然可以看到此时的振幅公式形式很复杂，无法看到显式的角分布，这是协变张量方法的不足之处：角分布和能量依赖的因子是混在一起的。这个特点既是缺点，也是优点；因为角度和能量依赖都在一起，而靠协变性来保证结果的正确性，虽然形式不够直观，但是会使实际的计算量会大大减小。Filippini 指出协变张量方法所消耗的计算机机时大概是Helicity方法的四分之一[6]。这点对于实际的计算机数值计算是一个非常重要的有利因素。

第三章 张量形式的Helicity 耦合振幅：两种理论的等价性之一

前一章我们把不变振幅用Helicity 态展开，并定义了Helicity 耦合振幅，但是从张量形式的振幅构造中我们又可以看出，Helicity 耦合振幅其实是有能量依赖的。在实际的分析中，我们很有必要把这部分能量依赖分离出来，把剩余部分当作实验测量参数。现在我们就来如何构造Helicity 耦合振幅并显式的把其中的能量依赖抽取出来。

由于 $F_{\lambda_1\lambda_2}^J$ 中，三个指标 J, λ_1, λ_2 都是转动不变的量，而由于 $F_{\lambda_1\lambda_2}^J$ 是在 J 粒子静止系中定义的，它没有洛伦兹变换自由度。由此我们猜想 $F_{\lambda_1\lambda_2}^J$ 可以写成明显协变的形式，即 $F_{\lambda_1\lambda_2}^J$ 可以用一些物理量构造出的洛伦兹标量来表达。而这些用来构造洛伦兹标量的物理量是在衰变振幅表达式中可能出现的量，如初态粒子 J 在动量空间的波函数，末态两粒子1和2在动量空间的波函数。与轨道角动量有关的末态两粒子的相对动量 $\mathbf{r}$ 以及初态粒子四动量 p^α ，而引入 p^α 是为了满足宇称守恒的要求。总之螺旋度耦合振幅可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} F_{\lambda_1\lambda_2}^J &= \sum_{\alpha} g_{\alpha} A_{\alpha}(\lambda\nu) \\ &\equiv \sum_{\alpha} g_{\alpha} A_{\alpha}(p^n, r^l, \omega(\lambda_1), \epsilon(-\lambda_2), \phi^*(\delta)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 A_{α} 是洛伦兹标量， g_{α} 则可以被看作随能量缓变的，或者可以近似看作是常数。关于 A_{α} ，原则上我们可以把所有的独立的 A_{α} 都构造出来，只要满足Lorentz不变，旋转不变和相互独立条件就行。但是如果这样，可选的方案不是唯一的；但是我们用物理上 $L-S$ 的概念[9]，把相应的 A_{α} 构造出来，此时的 α 对应于不同的 $L-S$ 耦合，则可以证明这样得到的Helicity耦合振幅的结果是唯一的，而且他们对于相对论变换因子 γ_s 和 γ_{σ} 的依赖也是唯一的。这一想法是受到在非相对论的极限情况下Helicity振幅和分波振幅的联系启发：

$$F_{\lambda\nu}^J = \sum_{lS} \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} (l0S\delta|J\delta)(s\lambda\sigma - \nu) G_{lS}^J \quad (3.2)$$

从两者之间的联系中，我们会发现Helicity理论和协变张量理论的等价性，

至少对于有质量的粒子是等价的。这正是本章的目的之一，也是本书的目的之一。

应该指出的是本章我们只讨论末态粒子为有质量粒子的过程，对于末态含有没有质量粒子（辐射衰变），由于其特殊性，我们将在下章单独讨论。下面我们就来介绍这样的Helicity 振幅的协变张量构造方案。

3.1 自旋波函数和纯轨道角动量波函数

因为 A_α 是旋转不变的，所以，我们为了简单可以选择特殊的参考系和坐标系让两体衰变过程的母粒子处于静止系和两个衰变粒子则沿着 z -轴运动。波函数的构造和前面的完全相同，只是选取了特殊的坐标系和参考系。如果和前面的结果重复我们这里只是简单的列举，我们的注意力将会集中在一些新的形式、性质和有用的关系式。

采用表2.1的约定，在我们选定的特殊参考系和坐标系中，三个粒子的动量如下：

$$\begin{aligned}
 p^\alpha &= (W; 0, 0, 0) \quad \text{母粒子} \\
 q^\alpha &= (q_0, 0, 0, q) = (\gamma_s m; 0, 0, \gamma_s \beta_s m) \quad \text{子粒子1, 沿着} +z \text{-轴运动} \\
 k^\alpha &= (k_0, 0, 0, k) = (\gamma_\sigma \mu; 0, 0, -\gamma_\sigma \beta_\sigma \mu) \quad \text{子粒子2, 沿着} -z \text{-轴运动} \\
 r^\alpha &= (q_0 - k_0; 0, 0, 2q) \quad \text{相对动量}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

三个粒子的自旋如果都为0，则它们的波函数为1；三个粒子的自旋如果都为1，则它们的自旋波函数如下：

$$\begin{aligned}
 \phi^\alpha(\pm) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 1, \pm i, 0), \\
 \phi^\alpha(0) &= (0; 0, 0, 1),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \omega^\alpha(\pm) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 1, \pm i, 0), \\
 \omega^\alpha(0) &= (\gamma_s \beta_s; 0, 0, \gamma_s),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^\alpha(\pm) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 1, \pm i, 0), \\
 \epsilon^\alpha(0) &= (-\gamma_\sigma \beta_\sigma; 0, 0, \gamma_\sigma).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

同样，它们都满足和动量正交，波函数之间正交等性质，如2.112所示。

现在我们可以列举出全部的采用上面的自旋1波函数和四动量构成的Lorentz标量。它们在实际的演算中会经常用到，并且都能从定义出发经过简单的计算得到。这里我们采用了表 2.1有关符号约定和母粒子静止系的假设。

首先是第一类Lorentz标量，它们用 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 收缩得到。

$$[r \cdot \omega(m)] = \gamma_s r \delta_{m0} , \quad (3.7a)$$

$$[r \cdot \epsilon(m)] = \gamma_\sigma r \delta_{m0} , \quad (3.7b)$$

$$[r \cdot \phi^*(m)] = r \delta_{m0} , \quad (3.7c)$$

$$[\tilde{\omega}(m) \cdot \epsilon(m')] = (-1)^m [m^2 + \gamma_s \gamma_\sigma (1 - m^2)] \delta_{m, -m'} , \quad (3.7d)$$

$$[\tilde{\omega}(m) \cdot \phi^*(m')] = [m^2 + \gamma_s (1 - m^2)] \delta_{m, m'} , \quad (3.7e)$$

$$[\tilde{\epsilon}(m) \cdot \phi^*(m')] = [m^2 + \gamma_\sigma (1 - m^2)] \delta_{m, m'} , \quad (3.7f)$$

第二类Lorentz标量，它们用 $\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma}$ 收缩得到，定义四个四矢量的收缩如下：

$$[abcd] = \epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma} a^\mu b^\nu c^\gamma d^\sigma ,$$

则上面的波函数和四动量的各种耦合形式如下：

$$[p\omega(m)r\phi^*(m')] = imWr\delta_{m, m'} , \quad (3.8a)$$

$$[p\epsilon(m)r\phi^*(m')] = imWr\delta_{m, m'} , \quad (3.8b)$$

$$[p\omega(m)r\epsilon(m')] = -imWr\delta_{m, m'} , \quad (3.8c)$$

$$[p\omega(m)\epsilon(m')\phi^*(m'')] = iW[m(1 - m''^2) + m''(1 - m'^2)\gamma_\sigma - m'(1 - m^2)\gamma_s]\delta_{m'', (m+m')} . \quad (3.8d)$$

如果粒子的自旋大于1，则使用自旋-1粒子的波函数层层耦合出来，和高阶的波函数定义完全一样。比如自旋2的波函数可以写成：

$$\phi^{\alpha\beta}(m) = \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | 2m) \phi^\alpha(m_1) \phi^\beta(m_2) \quad (3.9)$$

其中 $m = m_1 + m_2$ 。波函数满足和动量正交，对称且无迹的性质，所谓无迹是说在用度规 g 或者 $\tilde{g}(W)$ 收缩的结果为零。对于自旋2的两个末态粒子 s 和 σ 也可以用类似的方法构造出它们的波函数。但是它们用 $\tilde{g}(W)$ 收缩的结果并不是零。

$$[\tilde{g}(W) : \omega(m)] = \sqrt{\frac{2}{3}}(\gamma_s^2 - 1)\delta_{m0} \quad (3.10)$$

其中的冒号表示相邻的两个指标收缩。但是当 $\gamma_s \rightarrow 1$ 时，结果将会变成零。自旋-3粒子的波函数也可以进一步用CG 系数耦合的方式构造出来：

$$\begin{aligned} \phi^{\alpha\beta\gamma}(m) &= \sum_{n_1 m_3} (2n_1 1 m_3 | 3m) \phi^{\alpha\beta}(n_1) \phi^\gamma(m_3) \\ &= \sum_{m_1 m_2 m_3} (2n_1 1 m_3 | 3m) (1m_1 1m_2 | 2n_1) \phi^\alpha(m_1) \phi^\beta(m_2) \phi^\gamma(m_3) \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $m = n_1 + m_3 = m_1 + m_2 + m_3$ 。

同理我们可以给出自旋- J 的波函数，一个 J 阶的张量：

$$\begin{aligned} \phi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_J}(m) &= \sum_{m_1 m_2 \dots m_J} (1m_1 1m_2 | 2n_1) (2n_1 1m_3 | 3n_2) \dots (J-1 n_{J-2} 1m_J | Jm) \\ &\times \phi^{\alpha_1}(m_1) \phi^{\alpha_2}(m_2) \dots \phi^{\alpha_J}(m_J), \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中： $m = m_1 + m_2 + \dots + m_J$ ，并且采用如下归一化方式：

$$\phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_J}^* \phi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_J} = (-1)^J \delta_{mm'} \quad (3.13a)$$

$$[\phi^*(m) \otimes \phi(m')] = \delta_{mm'}, \quad (3.13b)$$

其中 $\otimes$ 表示用修正度规对任何两个同阶张量的指标收缩。

上面的耦合用到了CG系数，因为只用到了有限的几个，所以我们给出其具体表达式：

$$(jm+11-1|j+1m) = \left[\frac{(j-m)(j-m+1)}{(2j+1)(2j+2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.14a)$$

$$(jm10|j+1m) = \left[\frac{(j-m+1)(j+m+1)}{(2j+1)(j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.14b)$$

$$(jm-11+1|j+1m) = \left[\frac{(j+m)(j+m+1)}{(2j+1)(2j+2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.14c)$$

用这些CG系数，我们可以把自旋-J波函数3.12 化简成为：

$$\phi^{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_J}(m) = [a^J(m)]^{\frac{1}{2}} \sum_{m_0} 2^{\frac{m_0}{2}} \times \sum_P \phi^{\alpha_1}(+) \dots \phi^{\beta_1}(0) \dots \phi^{\gamma_1}(-) \dots \quad (3.15)$$

其中 $[a^J(m)]^{\frac{1}{2}}$ 是，

$$[a^J(m)]^{\frac{1}{2}} = \frac{(J+m)!(J-m)!}{(2j)!} \quad (3.16)$$

二指标 $\{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_J\}$ 可以分成三类：其中的 m 分别为+1、0、-1，即 $\{\alpha_i\}$ ，其中 $\{i = 1, 2, \dots, m_+\}$ ， $\{\beta_i\}$ ，其中 $\{i = 1, 2, \dots, m_0\}$ ， $\{\gamma_i\}$ ，其中 $\{i = 1, 2, \dots, m_-\}$ ， m_+ ， m_0 分别是 $\phi(\pm)$ 和 $\phi(0)$ 的数目。则有简单的结果： $J = m_+ + m_0 + m_-$ 、 $m = m_+ - m_-$ 和

$$2m_{\pm} = J \pm m - m_0,$$

容易看到公式的右边必然是偶数。式3.15的第一个求和将遍历所有允许的 m_0 。对于确定的 J 和 m ，很显然： m_0 的最大值为 $J-m$ ，所以 m_0 的取值将会是一个系列要么是奇数，要么是偶数（取决于 $J-m$ 的奇偶），即： $0, 2, \dots, (J-m)$ 或者， $1, 3, \dots, (J-m)$ 。第二个求和则表示对

$$\{(+)(+)\dots(0)(0)\dots(-)(-)\dots\},$$

所有不同排列形式求和。这是一个简单的排列组合问题，求和项数为：

$$b^J(m, m_0) = \frac{J!}{m_+! m_0! m_-!},$$

利用关系式

$$\phi(-m) = (-1)\phi^*(m),$$

可以使我们直接构造的波函数数目减少大约一半。下下面显式的给出最低的几阶的自旋波函数，自旋-1的就是 $\phi(+)$ 和 $\phi(0)$ ；自旋为二的，我们给出：

$$\phi^{\alpha\beta}(+2) = \phi^{\alpha}(+)\phi^{\beta}(+) \quad (3.17a)$$

$$\phi^{\alpha\beta}(+1) = \sqrt{\frac{1}{2}} [\phi^{\alpha}(+)\phi^{\beta}(0) + \phi^{\alpha}(0)\phi^{\beta}(+)] \quad (3.17b)$$

$$\phi^{\alpha\beta}(0) = \sqrt{\frac{1}{6}} [\phi^{\alpha}(+)\phi^{\beta}(-) + \phi^{\alpha}(-)\phi^{\beta}(+)] + \sqrt{\frac{2}{3}} \phi^{\alpha}(0)\phi^{\beta}(0) \quad (3.17c)$$

$$\phi^{\alpha\beta\gamma}(+3) = \phi^\alpha(+) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(+) \quad (3.18a)$$

$$\phi^{\alpha\beta\gamma}(+2) = \sqrt{\frac{1}{3}} [\phi^\alpha(+) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(0) + \phi^\alpha(+) \phi^\beta(0) \phi^\gamma(+) + \phi^\alpha(0) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(+)] \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned} \phi^{\alpha\beta\gamma}(+1) = & \sqrt{\frac{1}{15}} [\phi^\alpha(+) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(-) + \phi^\alpha(+) \phi^\beta(-) \phi^\gamma(+) + \phi^\alpha(-) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(+)] \\ & + \sqrt{\frac{2}{15}} [\phi^\alpha(+) \phi^\beta(0) \phi^\gamma(0) + \phi^\alpha(0) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(0) + \phi^\alpha(0) \phi^\beta(0) \phi^\gamma(+)] \end{aligned} \quad (3.18c)$$

$$\begin{aligned} \phi^{\alpha\beta\gamma}(0) = & \sqrt{\frac{1}{10}} [\phi^\alpha(0) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(-) + \phi^\alpha(0) \phi^\beta(-) \phi^\gamma(+) + \phi^\alpha(-) \phi^\beta(+) \phi^\gamma(0) + \\ & \phi^\alpha(+) \phi^\beta(0) \phi^\gamma(-) + \phi^\alpha(-) \phi^\beta(0) \phi^\gamma(+)] + \sqrt{\frac{2}{5}} \phi^\alpha(0) \phi^\beta(0) \phi^\gamma(0), \end{aligned} \quad (3.18d)$$

3.2 形式唯一的构造方式：根据 $L - S$ 耦合方案的 Helicity 振幅构造

为了构造结果唯一的 Helicity 耦合振幅，我们必须把张量公式和 $L-S$ 耦合的方案联系起来，为此必须引进由 s 和 σ 耦合而成的总内禀自旋 S 和用 r 构造的纯轨道角动量 l 。现在我们考虑用来构造 $|SM_S\rangle$ 的一组基：波函数 $\chi^S(m_S)$ ，我们要求它在 J 静止系中时间分量为零，这与 3.6 和 3.12 中 ϕ 的定义完全一样。

$$\chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s; \beta_1 \dots \beta_\sigma}^S(m_S) = \sum_{m_s m_\sigma} (s m_s \sigma m_\sigma | S m_S) \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^s(m_s) \chi_{\beta_1 \dots \beta_\sigma}^\sigma(m_\sigma) \quad (3.19)$$

其中， s -阶张量 $\chi^s(m_s)$ 和 σ -阶张量 $\chi^\sigma(m_\sigma)$ 是可以用来构造投影算符的“静止态”波函数，只要把 3.12 中的 J 换成 s 或者 σ 。于是 $\chi_{\alpha_1 \dots \alpha_s; \beta_1 \dots \beta_\sigma}^S(m_S)$ 是一个可以作用到 ω 和 ϵ 上的 $s + \sigma$ -阶波张量，而 ω 和 ϵ 是衰变产物 s 和 σ 的“正确的”相对论性张量波函数，相应的投影算符是一个 $2(s + \sigma)$ 阶张量，如下：

$$P^S = \sum_{m_S} \chi^S(m_S) \chi^{*S}(m_S). \quad (3.20)$$

可以很容易地发现，不变振幅必然会含有如下收缩乘积：

$$[\chi^{*s}(m_s) \otimes \omega(\lambda)] = f_\lambda^s(\gamma_s) \delta_{m_s \lambda}, \quad (3.21a)$$

$$[\chi^{*\sigma}(m_\sigma) \otimes \epsilon(-\nu)] = f_\nu^\sigma(\gamma_\sigma) \delta_{m_\sigma - \nu}, \quad (3.21b)$$

其中 $\otimes$ 表示对两个同阶张量间用修正度规 $\tilde{g}(W)$ 收缩。函数 f 采用的归一方式是：当 $\gamma \rightarrow 1$ 时等于1，将在下面给出。一个相应于纯自旋 S 态的不变振幅：

$$\begin{aligned} e^S(\lambda\nu) &= [\omega(\lambda) \otimes \chi^{*S}(m_S) \otimes \epsilon(\nu)] \\ &= (s\lambda\sigma - \nu|S\sigma) f_\lambda^s(\gamma_s) f_\nu^\sigma(\gamma_\sigma) \delta_{m_S \delta}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中 $\delta = \lambda - \nu$ 。 $\otimes$ 表示分别对指标 $\{\alpha_1 \alpha_2 \dots\}$ 和 $\{\beta_1 \beta_2 \dots\}$ 的收缩（见3.19）。一个非常重要的化简是，当我们采用特殊的坐标系和参考系，即Helicity系，这时定义的波函数是沿着Helicity轴，于是对于投影算符中的 m_S 的求和将会消失。投影算符只有一项，就是 $\chi^S(\delta)$ ，作用在式3.22上。

当 $s = 1$ 时，函数 $f_\lambda^s(\gamma_s)$ 非常简单，根据3.7式的结果，可以给出如下：

$$\xi_s(\lambda) \equiv f_\lambda^s(\gamma_s) = \begin{cases} [\chi^{(1)*}(\lambda) \cdot \omega(\lambda)] \\ 1 & \text{for } \lambda = \pm 1 \\ \gamma_s & \text{for } \lambda = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

当 $s = 2$ 时，函数 $f_\lambda^s(\gamma_s)$ 可以取如下形式：

$$f_\lambda^s(\gamma_s) = \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (1\lambda_1 1\lambda_2 | 2\lambda)^2 \xi_s(\lambda_1) \xi_s(\lambda_2) \quad (3.24)$$

于是，

$$f_\lambda^s(\gamma_s) = \begin{cases} 1 & \text{for } \lambda = \pm 2 \\ \gamma_s & \text{for } \lambda = \pm 1 \\ \frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3} & \text{for } \lambda = 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

类似的当 $s = 3$ 时，

$$f_\lambda^s(\gamma_s) = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (1\lambda_1 1\lambda_2 | 2\lambda_a)^2 (2\lambda_a 1\lambda_3 | 3\lambda)^2 \xi_s(\lambda_1) \xi_s(\lambda_2) \xi_s(\lambda_3) \quad (3.26)$$

$$f_{\lambda}^s(\gamma_s) = \begin{cases} 1 & \text{for } \lambda = \pm 3 \\ \gamma_s & \text{for } \lambda = \pm 2 \\ \frac{4}{5}\gamma_s^2 + \frac{1}{5} & \text{for } \lambda = \pm 1 \\ \frac{2}{5}\gamma_s^3 + \frac{3}{5}\gamma_s & \text{for } \lambda = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

这里我们最后给出当 $s = 4$ 时的显式表达式:

$$f_{\lambda}^s(\gamma_s) = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} (1\lambda_1 1\lambda_2 | 2\lambda_a)^2 (2\lambda_a 1\lambda_2 | 3\lambda_b)^2 (3\lambda_b 1\lambda_4 | 3\lambda)^2 \\ \times \xi_s(\lambda_1) \xi_s(\lambda_2) \xi_s(\lambda_3) \xi_s(\lambda_4) \quad (3.28)$$

$$f_{\lambda}^s(\gamma_s) = \begin{cases} 1 & \text{for } \lambda = \pm 4 \\ \gamma_s & \text{for } \lambda = \pm 3 \\ \frac{6}{7}\gamma_s^2 + \frac{1}{7} & \text{for } \lambda = \pm 2 \\ \frac{4}{7}\gamma_s^3 + \frac{3}{7}\gamma_s & \text{for } \lambda = \pm 1 \\ \frac{8}{35}\gamma_s^4 + \frac{24}{35}\gamma_s^2 + \frac{3}{35} & \text{for } \lambda = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

考虑到式3.15和3.21, 我们可以给出 $f_{\lambda}^s(\gamma_s)$ 的一般形式:

$$f_m^s(\gamma_s) = a^j(m) \sum_{m_0} b^j(m, m_0) (2\gamma)^{m_0}, \quad (3.30)$$

其中, j , m 和 γ 表示 s , λ 和 γ_s 或者 σ , ν 和 γ_{σ} ; 和前面一样 m_0 取值范围为: $0(1), 2(3), \dots (J-m)$, 或奇或偶 (取决于 $(J-m)$ 奇偶) 的系列。很容易用这个通用表达式给出 $s = 1, 2, 3, 4$ 的结果和上面的完全一致。

和自旋类似, 轨道角动量本征态 $|lm\rangle$ 也可以用—个时间分量为零的 l -阶张量 $\tau^l(m)$ 来表示, 而且这个张量定义在母粒子静止系中 (因为轨道角动量只能定义在这个参考系中)。张量 $\tau^l(m)$ 和前面定义的张量 $\chi^s(m_s)$ 等完全一样, 它可以采用3.12 的方式来定义, 同样可以用来构造出投影算符, 是一个 $2l$ -阶张量:

$$P^l = \sum_{m_l} \tau^l(m) \tau^{*l}(m). \quad (3.31)$$

同样, 和前面类似, 我们可以采用Helicity系来使对于轨道角动量的处理。例如, 当 $l = 1$, 我们发现:

$$[\tau^{(1)*}(m) \cdot r] = r \delta_{m0}, \quad (3.32)$$

这个关系可以推广到 $l > 1$ 的情形：

$$[\tau^{(l)*}(m) \otimes rr \dots] = c_l r^l \delta_{m0}, \quad (3.33)$$

其中

$$\begin{aligned} c_l &= (1010|20)(2010|30) \dots (l-1010|l0) \\ &= l! \left[\frac{2^l}{(2l)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

现在我们已经做好准备来计算 $L-S$ 耦合的不变振幅的最终结果：

$$[p^n, \chi^S(\delta), \tau^l(0), \phi^*(\delta)], \quad (3.34)$$

其中当 $s + \sigma + l - J$ 为奇数时 $n = 1$ ，反之为零。举例来说，当 $\sigma = 0$ ， $s = l = J = 1$ 时，不变振幅可以写成：

$$[p\chi(\delta)\tau(0)\phi^*(\delta)] = W(101\delta|1\delta).$$

我们可以推断出，一般来说，不变振幅3.34在 J 静止系中，应该取下如下形式：

$$[p^n, \chi^S(\delta), \tau^l(0), \phi^*(\delta)] \propto W^n(l0S\delta|J\delta),$$

上式左边其实正比于矩阵元：

$$\langle l0S\delta | \mathcal{M} | J\delta \rangle,$$

我们可以把 $|J\delta\rangle$ 做如下展开：

$$|J\delta\rangle = \sum_{j_1\delta_1 j_2\delta_2} (j_1\delta_1 j_2\delta_2 | J\delta) |j_1\delta_1 j_2\delta_2\rangle,$$

如果先把 $\mathcal{M}$ ，接着把 $|l0S\delta\rangle$ 从左面作用到上式，我们可以很容易得到式3.35的结果：

$$\begin{aligned} \langle l0S\delta | \mathcal{M} | J\delta \rangle &= [p^n, \chi^S(\delta), \tau^l(0), \phi^*(\delta)] \\ &= (l0S\delta | J\delta) \mathcal{M}_{lS}^J, \end{aligned}$$

根据式3.22 和式3.35, 我们可以把Helicity耦合振幅写成:

$$F_{\lambda\nu}^J = \sum_{lS} g_{lS} A_{lS}(\lambda\nu), \quad (3.35)$$

其中:

$$A_{lS}(\lambda\nu) = \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} (l0S\delta|J\delta)(s\lambda\sigma - \nu|S\delta) W^n r^l f_\lambda^s(\gamma_s) f_\nu^\sigma(\gamma_\sigma). \quad (3.36)$$

其中引入平方根项是为了保持3.2严格成立。系数 c_l 被吸收到了 g_{lS} 中。而 g 是未知的复参数, 等待实验来确定。这一公式体现了在 $L-S$ 耦合的概念下构造出来的Helicity 振幅的形式唯一确定的, 有了实际可以操作的准则, 所以完全可以通过编程的方式来代替推导给出Helicity振幅的表达式。

如果把3.36式“单位化”, 即, 让 $\hat{W} = W/W_0$, $\hat{r} = r/r_0$, 并用它们来代替 W 和 r , 我们会发现式3.36会变成3.2, 因为此时 $\hat{W} \rightarrow 1$, $\hat{r} \rightarrow 1$, $f_\lambda^s \rightarrow 1$, $f_\nu^\sigma \rightarrow 1$ 和 $g_{lS} \rightarrow G_{lS}$ 。其中 W_0 和 r_0 分别是 W 和 r 的名义值。

3.3 举例

3.3.1 $\psi \rightarrow \pi^+\pi^-, K^+K^-$

前面介绍过, 这个衰变道末态粒子没有自旋, 而且由于角动量守恒末态只有 $l=1$ 的P-wave, 而且只有一个Helicity耦合振幅 F_{00}^1 , 它必然和分波耦合振幅 G_{10} 成正比, 而且它只能用纯轨道角动量波函数 $\tau^1(0)$ 和初态粒子自旋波函数 $\phi^*(m)$ 来构成:

$$\begin{aligned} F_{00}^1 &= \tau_\mu^1(0) \phi^{\mu*}(m) = [r \cdot \phi^*(m)] \\ &= g_{10} r. \end{aligned} \quad (3.37)$$

而结果中含有动量的一次方依赖, 恰恰是P-wave的特征。

3.3.2 $\psi \rightarrow VS[\phi f_0(980)]$

这个衰变道的宇称满足 $\eta_J \eta_s \eta_\sigma = +1$, 那么如果宇称守恒和角动量守恒, 末态只能是S-wave 和D-wave, 所以, 只有两个分波振幅; 同样可以推断出只有两个独立的helicity振幅, 因为它们之间满足2.78, 有 $F_+^1 = F_-^1$, 加上 F_{00}^1 。我

们可以把 F_λ^1 表示成： $F_\lambda^1 = g_{01}A_{01}(\lambda) + g_{21}A_{21}(\lambda)$ ，而根据前面的讨论 A_{LS} 是下面的结果：

$$A_{01}^\lambda = [\tilde{\omega}(\lambda) \cdot \phi^*(m)] = \sqrt{\frac{1}{3}}f_\lambda^{(1)}(\gamma_s)$$

$$A_{21}^\lambda = [\tilde{\omega} \cdot \tau^2(0) \cdot \phi^*] = \sqrt{\frac{5}{3}}(201\lambda|1\lambda)r^2f_\lambda^{(1)}(\gamma_s)$$

因此有

$$F_\pm^1 = \sqrt{\frac{1}{3}}g_{01} + g_{21}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 \quad (3.39a)$$

$$F_0^1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}g_{01} - g_{21}\sqrt{\frac{2}{3}}r^2 \right) \gamma_s \quad (3.39b)$$

其中分别出现 r^0 和 r^2 表示S-wave和D-wave的贡献。

3.3.3 $\psi \rightarrow VA(\phi f_1(1420))$

因为初末态粒子的宇称乘积 $\eta_\psi\eta_\phi\eta_f = +1$ ，再结合角动量守恒，我们知道独立的分波振幅有三个： G_{01} 、 G_{21} 和 G_{22} 。同样独立Helicity的振幅也只有三个： $F_{++}^1 = -F_{--}^1$ 、 $F_{10}^1 = -F_{-10}^1$ 和 $F_{01}^1 = -F_{0-1}^1$ 。

这个过程的两个末态粒子的自旋都是1，宇称相反，它们需要先耦合起来成为 $\chi_{\alpha\beta}^{(S)}$ ，然后再和轨道角动量波函数以及母粒子波函数藕荷而构成振幅，而因为 $J + s + \sigma + l = 3, 5$ ，所以振幅中有母粒子的四动量出现。如果严格遵从 $L - S$ 耦合的概念的指导，则结果是唯一确定的：

$$A_{01} = [p\chi^{(1)}(\lambda\sigma)\phi^*(\delta)] \quad (3.40a)$$

$$A_{21} = [p\chi^{(1)}(\lambda\sigma)\tilde{\tau}^2 \cdot \phi^*(\delta)] \quad (3.40b)$$

$$A_{22} = [p\chi^{(2)}(\lambda\sigma)\tilde{\tau}^2 \cdot \phi^*(\delta)] \quad (3.40c)$$

其中的方括号表示用四阶完全反对称张量进行收缩。最后的化简结果如下：

$$F_{1,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0 - g_{21}\sqrt{\frac{1}{3}}r^2 \quad (3.41a)$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0\gamma_\sigma + g_{21}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\gamma_\sigma \quad (3.41b)$$

$$F_{0,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0\gamma_s + g_{21}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_s - g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\gamma_s \quad (3.41c)$$

值得说明的是，如果采用前面所说的 $L - S$ 的概念来构造方法，就能得到唯一确定的结果；当然也可以采用别的方式，可以得到等价的结果，只是形式上有所区别，因为这时候的构造原则只有 Lorentz 协变性和宇称守恒，所以结果往往不是唯一的，一般可以证明这些符合条件的不变量是不独立的，而且最终的独立变量个数和前面的一致（[8]中有针对这个例子的详细讨论）。

3.3.4 $\psi \rightarrow VP(\rho\pi)$

这个道由于有宇称守恒和角动量守恒，必须是 P-wave，而且只有一个分波 G_{11} ，也只有一个独立的 Helicity 振幅 $F_{10}^1 = -F_{-10}^1$ ，因而有 $F_{00}^1 = 0$ ；因为 $J + s + \sigma + l = 3$ ，所以振幅中有母粒子的四动量出现

$$\begin{aligned} F_{\pm}^1 &= g_{11}[pr\omega(\pm)\phi^*(\pm)] \\ &= \pm g_{11}iWr. \end{aligned} \quad (3.42)$$

出现 r^1 表示 P-wave 的贡献。

3.3.5 $\psi \rightarrow VT[\phi f_2(1270)]$

这个衰变道的宇称满足 $\eta_J\eta_s\eta_\sigma = +1$ ，那么如果宇称守恒和角动量守恒，末态只能是 S-wave、D-wave 和 F-wave，但是自旋的耦合结果却有 1, 2, 3 三个值，所以，总共有五个分波振幅： G_{01} 、 G_{21} 、 G_{22} 、 G_{23} 和 G_{43} ；同样可以推断出只有五个独立的 helicity 振幅。推理过程如下：总共有 $3 \times 5 = 15$ 个可能的 Helicity 振幅，

$$F_{\lambda\nu}^1 = \begin{pmatrix} F_{21}^1 & F_{11}^1 & F_{01}^1 & F_{-11}^1 & F_{-21}^1 \\ F_{20}^1 & F_{10}^1 & F_{00}^1 & F_{-10}^1 & F_{-20}^1 \\ F_{2-1}^1 & F_{1-1}^1 & F_{0-1}^1 & F_{-1-1}^1 & F_{-2-1}^1 \end{pmatrix},$$

但是由于角动量守恒 $\lambda - \nu \leq 1$ ，所以有 F_{-11}^1 、 F_{-21}^1 、 F_{20}^1 、 F_{-20}^1 、 F_{2-1}^1 和 F_{1-1}^1 为零，剩下 9 个。再根据它们之间满足 2.78，有

$$F_{11}^1 = F_{-1-1}^1, F_{01}^1 = F_{0-1}^1, F_{10}^1 = F_{-10}^1, F_{-11}^1 = F_{1-1}^1,$$

加上 F_{00}^1 ，则独立的 Helicity 振幅只剩下了 5 个，和分波振幅的数目相同。下面我们来构造 Helicity 振幅。因为 $F_{\lambda\nu}^1 = \sum_{lS} g_{lS} A_{lS}(\lambda\nu)$ ，我们先来考虑 A_{lS} ，它们

由初末态粒子的自旋波函数和纯轨道角动量波函数构成，采用投影算符和3.36，我们有：

$$A_{01}(\lambda\nu) = e^{(1)}(\lambda\nu)\chi_{\alpha\beta;\rho}^1(\delta)\tilde{g}^{\beta\rho}(W)\tilde{g}^{\alpha\gamma}\phi_\gamma^*(\delta) \quad (3.43a)$$

$$A_{2S}(\lambda\nu) = e^{(S)}(\lambda\nu)[\tau^{(2)}(0) : \chi^S(\delta) \cdot \phi^*(\delta)]c_2r^2 \quad (3.43b)$$

$$A_{43}(\lambda\nu) = e^{(3)}(\lambda\nu)[\chi^3(\delta) \therefore \tau^{(4)}(0) \cdot \phi^*(\delta)]c_4r^4 \quad (3.43c)$$

其中第二式的 S 可以取1, 2, 3。其中 $e^{(S)}(\lambda\nu)$ 已经在3.22明确定义了。我们还需要留意到 χ^S 的三个指标，只有前两个满足对成和无迹的条件，第三个并不满足，所以用分号格开。

如果想避开使用投影算符，则 A_{lS} 可以表示成下面得形式：

$$A_{01}(\lambda\nu) = [\epsilon(-\nu) \cdot \omega(\lambda) \cdot \phi^*(\delta)] \quad (3.44a)$$

$$A_{21}(\lambda\nu) = [\epsilon(-\nu) \cdot \omega(\lambda) \cdot \tau^{(2)}(0) \cdot \phi^*(\delta)]c_2r^2 \quad (3.44b)$$

$$A_{22}(\lambda\nu) = [\epsilon(-\nu)\omega(\lambda) \cdot \tau^{(2)}(0) \cdot \phi^*(\delta)]c_2r^2 \quad (3.44c)$$

$$A_{23}(\lambda\nu) = [\epsilon(-\nu) \cdot \tau^{(2)}(0) \cdot \omega(\lambda) \cdot \phi^*(\delta)]c_2r^2 \quad (3.44d)$$

$$A_{43}(\lambda\nu) = [\epsilon(-\nu)\omega(\lambda) \therefore \tau^{(4)}(0) \cdot \phi^*(\delta)]c_4r^4 \quad (3.44e)$$

振幅的最终形式（这里我们根据3.36式，编程计算得到），我们给出如下：

$$F_{1,2}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0 + g_{21}\sqrt{\frac{1}{10}}r^2 + g_{22}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 + g_{23}\sqrt{\frac{2}{105}}r^2 + g_{43}\sqrt{\frac{1}{70}}r^4 \quad (3.45a)$$

$$F_{1,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s - g_{21}\sqrt{\frac{1}{5}}r^2\gamma_s + g_{23}\sqrt{\frac{3}{35}}r^2\gamma_s - g_{43}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_s \quad (3.45b)$$

$$F_{0,1}^1 = -g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma - g_{21}\sqrt{\frac{1}{20}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{23}\sqrt{\frac{16}{105}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{43}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \quad (3.45c)$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{21}\sqrt{\frac{1}{60}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{23}\sqrt{\frac{4}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{43}\sqrt{\frac{3}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (3.45d)$$

$$F_{0,0}^1 = -g_{01}\sqrt{\frac{2}{15}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{21}\sqrt{\frac{4}{15}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{23}\sqrt{\frac{9}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{43}\sqrt{\frac{12}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \quad (3.45e)$$

其中的 r 的各次幂都显式地给出来了，表示对应于不同的分波。

3.3.6 $\psi \rightarrow K^* \bar{K}^*$

这个衰变道的宇称满足 $\eta_J \eta_s \eta_\sigma = -1$ ，那么如果宇称守恒和角动量守恒，末态只能是P-wave 和F-wave，所以，只有四个分波振幅；同样可以推断出只

有四个独立的helicity振幅，这里只是给出其计算结果：

$$\begin{aligned}
 F_{1,1}^1 &= g_{10}\sqrt{\frac{1}{3}}r^1 - g_{12}\sqrt{\frac{1}{15}}r^1 + g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3 \\
 F_{1,0}^1 &= -g_{11}\sqrt{\frac{1}{4}}r^1\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\gamma_\sigma \\
 F_{0,1}^1 &= g_{11}\sqrt{\frac{1}{4}}r^1\gamma_s - g_{12}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_s - g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\gamma_s \\
 F_{0,0}^1 &= -g_{10}\sqrt{\frac{1}{3}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{4}{15}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{2}{5}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

3.4 两种理论之间的联系

其实，到现在，我们完全可以看出，协变张量公式中，我们采用初末态粒子的自旋波函数，和初态粒子的四动量来构造完整的振幅，其实角分布是包含在整个振幅当中，在张量求和计算时才会看到它们；然而，我们构造Helicity振幅的时候，根据Helicity振幅的转动不变性质，直接采用了特殊的坐标系，而且使用了母粒子的静止参考系，这时候，没有任何角度的贡献出现，因为它们在做Helicity展开时已经包含在D函数当中了。如果当我们在使用协变张量方法时，如果对自旋波函数做旋转操作，把它转到末态粒子动量方向上，或者说把波函数用量子轴为末态粒子飞行方向的波函数展开，此时，D函数自然的就被引进了，而波函数和动量在同一的量子轴的求和，也会变得很简单。下面我们就通过这样的方式举例来说明两种理论的联系并说明它们是等价的。

3.4.1 举例一： $\psi \rightarrow \pi^+\pi^-, K^+K^-$

从2.2.3.2中的2.139式出发，进一步根据 $\phi_i^*(m)$ 的旋转性质， $\phi_i^*(m') = U[R]\phi_i^*(m) = \sum_m D_{m'm}^1(\phi, \theta, 0)\phi_i^*(m)$ ， m' 是自旋在 $\vec{q}$ 方向的本征值。则有： $\phi_i^*(m) = \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0)\phi_i^*(m')$ 故有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(m) &\propto \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0)q^i\phi_i^*(m') \\
 &= \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0)q\delta_{m'0} \\
 &= qD_{m0}^{*1}(\phi, \theta, 0), \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

可以看到 $F_{00}^1 = g_{10}r$, 其中 g_{10} 是未知的复参数, 从中可以看出, 我们用 $\vec{q}$ 为量子轴的本征态把 ϕ^* 展开, 就很容易的把张量振幅和 Helicity 振幅联系起来了, 其中的等价性非常明显。

这时截面的计算非常简单, 即:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi} &\propto \sum_{m=\pm 1} |\mathcal{M}(m)|^2 = \sum_{m=\pm 1} q^2 |D_{m0}^{*1}(\phi, \theta, 0)|^2 \\ &= q^2 \times \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.4.2 举例二: $\psi \rightarrow \phi f_0(980)$

根据 2.2.3.2 中结果, 我们先讨论振幅 $\mathcal{M}_{01}(\lambda\nu)$, 因为 ϕ^* 是沿速流方向横向极化的, 而 ω 是自旋-1 的子粒子的自旋波函数, 有三个分量, 我们还是选择把 ϕ^* 在 $\vec{q}$ 展开, $\phi_i^*(m) = \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0) \phi_i^*(m')$, 则有,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{01}(\lambda) &= \phi_\mu^*(m) \omega^\mu \\ &= \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0) \phi_i^*(m') \omega^\mu \\ &= \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0) [\lambda^2 + \gamma_s(1 - \lambda^2)] \delta_{m', \lambda} \\ &= [\lambda^2 + \gamma_s(1 - \lambda^2)] D_{m\lambda}^{*1}(\phi, \theta, 0). \end{aligned} \quad (3.49)$$

同样振幅 $\mathcal{M}_{21}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{21}(\lambda) &= [\tilde{r} \cdot \omega \tilde{r} \cdot \phi^*(m)] - \frac{1}{3}(\tilde{r} \cdot \tilde{r})[\tilde{\omega} \cdot \phi^*(m)] \\ &= r\gamma_s \delta_{\lambda 0} [r \cdot \phi^*(m)] - \frac{1}{3}r^2 [\tilde{\omega} \cdot \phi^*(m)] \\ &= r\gamma_s \delta_{\lambda 0} \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0) r \delta_{m', 0} - \frac{1}{3}r^2 [\lambda^2 + \gamma_s(1 - \lambda^2)] D_{m\lambda}^{*1}(\phi, \theta, 0) \\ &= r^2 \gamma_s \delta_{\lambda 0} D_{m0}^{*1}(\phi, \theta, 0) - \frac{1}{3}r^2 [\lambda^2 + \gamma_s(1 - \lambda^2)] D_{m\lambda}^{*1}(\phi, \theta, 0). \end{aligned} \quad (3.50)$$

这时, 我们可以把张量振幅和 Helicity 振幅进行比较, 根据关系式 3.2, 有

$$\begin{aligned} F_{10}^1 &= \sqrt{\frac{1}{3}} G_{01} + \sqrt{\frac{1}{6}} G_{21} \\ F_{00}^1 &= \sqrt{\frac{1}{3}} G_{01} - \sqrt{\frac{2}{3}} G_{21} \end{aligned} \quad (3.51)$$

去掉 D 函数，我们把前面两个振幅的解析式代入得到(其中一些常数被吸收到了参数 g 当中)：

$$\begin{aligned} F_{10}^1 &= g'_{01} - \frac{1}{3}g'_{21}r^2 \\ F_{00}^1 &= \left(g'_{01} + \frac{2}{3}g'_{21}r^2\right)\gamma_s \end{aligned}$$

如果定义 g' ： $g_{01} = \sqrt{3}g'_{01}$ 和 $g_{21} = -\sqrt{\frac{2}{3}}g'_{21}$ ，结果就和3.39完全相同，也就是协变张量和Helicity方法对这个过程的描述完全等价。如果定义 G ： $G_{01} = \sqrt{3}g'_{01}$ 和 $G_{21} = -\sqrt{\sqrt{23}}g'_{21}r^2$ ，这样在非相对论极限($\gamma_s \rightarrow 1$)下，就回到了式3.51的结果。

3.4.3 举例三： $\psi \rightarrow K^{*0} \bar{K}^{*0}$

从2.2.3.2中关于这个过程的结果出发。对第一个振幅，因为 $(\omega \cdot \epsilon)$ 是旋转不变的，故可以直接使用3.7d；进一步根据 $\phi^{*i}(m)$ 的旋转性质， $\phi^{*i}(m') = \sum_m D_{m'm}^1(\phi, \theta, 0)\phi^{*i}(m)$ ， m' 是自旋在 $\vec{q}$ 方向的本征值。则有： $\phi^{*i}(m) = \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0)\phi^{*i}(m')$ ，故而，

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{10}(\lambda\nu) &= (\tilde{\omega} \cdot \epsilon)(\phi^*(m) \cdot \tilde{r}) \\ &= (-1)^\lambda[\lambda^2 + \gamma_s\gamma_\sigma(1 - \lambda^2)]\delta_{\lambda,\nu}\phi^{*i}(m)r_i \\ &= (-1)^\lambda[\lambda^2 + \gamma_s\gamma_\sigma(1 - \lambda^2)]\delta_{\lambda,\nu}\sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0)\phi^{*i}(m')r_i \\ &= (-1)^\lambda[\lambda^2 + \gamma_s\gamma_\sigma(1 - \lambda^2)]\delta_{\lambda,\nu}\sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0)r\delta_{m'0} \\ &= (-1)^\lambda[\lambda^2 + \gamma_s\gamma_\sigma(1 - \lambda^2)]\delta_{\lambda,\nu}rD_{m0}^{*1}(\phi, \theta, 0) \quad m = \pm 1, \quad (3.52) \end{aligned}$$

表达式中出现 r 也就是动量的一次幂意味着这是 $l = 1$ 的P-wave的贡献。

对于第二个振幅，因为 $(\tilde{r} \cdot \omega)$ 和 $(\tilde{r} \cdot \epsilon)$ 是旋转不变的我们就用它们在动量 $\vec{r}$ 方向上的结果来做计算，即3.7b和3.7c；同样再对 $\phi^{*i}(m)$ 用沿着 $\vec{r}$ 方向的本

征态展开，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{11}(\lambda\nu) &= (\tilde{r} \cdot \omega)[\tilde{\epsilon} \cdot \phi^*(m)] - (\tilde{r} \cdot \epsilon)[\tilde{\omega} \cdot \phi^*(m)] \\
&= r\gamma_s\delta_{\lambda 0} \sum_{m'} [\nu^2 + \gamma_s(1 - \nu^2)] \delta_{-\nu m'} D_{mm'}^{1*}(\phi, \theta, 0) \\
&\quad - r\gamma_\sigma\delta_{\nu 0} \sum_{m'} [\lambda^2 + \gamma_\sigma(1 - \lambda^2)] \delta_{\lambda m'} D_{mm'}^{1*}(\phi, \theta, 0) \\
&= r\gamma_s\delta_{\lambda 0} [\nu^2 + \gamma_s(1 - \nu^2)] D_{m-\nu}^{1*}(\phi, \theta, 0) \\
&\quad - r\gamma_\sigma\delta_{\nu 0} [\lambda^2 + \gamma_\sigma(1 - \lambda^2)] D_{m\lambda}^{1*}(\phi, \theta, 0)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

第三个不变振幅：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{12}(\lambda\nu) &= \phi_\mu^* \chi^{(2)\mu\nu} \tilde{t}_\nu^{(1)} \\
&= (\tilde{r} \cdot \omega)[\tilde{\epsilon} \cdot \phi^*(m)] + (\tilde{r} \cdot \epsilon)[\tilde{\omega} \cdot \phi^*(m)] - \frac{2}{3}(\tilde{\omega} \cdot \epsilon)[\tilde{r} \cdot \phi^*(m)] \\
&= r\gamma_s\delta_{\lambda 0} [\nu^2 + \gamma_s(1 - \nu^2)] D_{m-\nu}^{1*}(\phi, \theta, 0) \\
&\quad + r\gamma_\sigma\delta_{\nu 0} [\lambda^2 + \gamma_\sigma(1 - \lambda^2)] D_{m\lambda}^{1*}(\phi, \theta, 0) \\
&\quad - \frac{2}{3}r(-1)^\lambda [\lambda^2 + \gamma_s\gamma_\sigma(1 - \lambda^2)] \delta_{\lambda, \nu} D_{m0}^{*1}(\phi, \theta, 0)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

第四不变振幅：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{32}(\lambda\nu) &= \phi^{*\lambda} \tilde{t}_{\mu\nu\lambda}^{(3)} \chi^{(2)\mu\nu} \\
&= (\tilde{r} \cdot \omega)(\tilde{r} \cdot \epsilon)(\tilde{r} \cdot \phi^*) \\
&\quad - \frac{1}{5} [\tilde{r} \cdot \tilde{r}] [(\tilde{\omega} \cdot \epsilon)(\tilde{r} \cdot \phi^*) + (\tilde{r} \cdot \epsilon)(\tilde{\omega} \cdot \phi^*) + (\tilde{r} \cdot \omega)(\tilde{\epsilon} \cdot \phi^*)] \\
&= r^3\gamma_s\gamma_\sigma\delta_{\lambda 0}\delta_{\nu 0} D_{m0}^{1*}(\phi, \theta, 0) \\
&\quad - \frac{1}{5}r^3(-1)^\lambda [\lambda^2 + \gamma_s\gamma_\sigma(1 - \lambda^2)] \delta_{\lambda, \nu} D_{m0}^{*1}(\phi, \theta, 0) \\
&\quad - \frac{1}{5}r^3\gamma_\sigma\delta_{\nu 0} [\lambda^2 + \gamma_\sigma(1 - \lambda^2)] D_{m\lambda}^{1*}(\phi, \theta, 0) \\
&\quad - \frac{1}{5}r^3\gamma_s\delta_{\lambda 0} [\nu^2 + \gamma_s(1 - \nu^2)] D_{m-\nu}^{1*}(\phi, \theta, 0)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

根据关系式3.2，有：

$$\begin{aligned}
 F_{1,1}^1 &= +G_{10}\sqrt{\frac{1}{3}} - G_{12}\sqrt{\frac{1}{15}} + G_{32}\sqrt{\frac{1}{10}} \\
 F_{1,0}^1 &= -G_{11}\frac{1}{2} - G_{12}\sqrt{\frac{3}{20}} - G_{32}\sqrt{\frac{1}{10}} \\
 F_{0,1}^1 &= +G_{11}\frac{1}{2} - G_{12}\sqrt{\frac{3}{20}} - G_{32}\sqrt{\frac{1}{10}} \\
 F_{0,0}^1 &= -G_{10}\sqrt{\frac{1}{3}} - G_{12}\sqrt{\frac{4}{15}} + G_{32}\sqrt{\frac{2}{5}}, \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

去掉 D 函数，我们把前面的四个振幅的解析式代入得到(其中一些常数被吸收到了参数 g 当中)：

$$\begin{aligned}
 F_{11}^1 &= -g'_{10}r + \frac{2}{3}g'_{12}r + \frac{1}{5}g'_{32}r^3 \\
 F_{10}^1 &= -g'_{11}r\gamma_\sigma + g'_{12}r\gamma_\sigma - \frac{1}{5}g'_{32}r^3\gamma_\sigma\gamma_\sigma \\
 F_{01}^1 &= g'_{11}r\gamma_s + g'_{12}r\gamma_s - \frac{1}{5}g'_{32}r^3\gamma_s\gamma_s \\
 F_{00}^1 &= g'_{10}r\gamma_s\gamma_\sigma + \frac{4}{3}g'_{12}r\gamma_s\gamma_\sigma + \frac{2}{5}g'_{32}r^3\gamma_s\gamma_\sigma.
 \end{aligned}$$

如果定义 g' : $g_{10} = -\sqrt{3}g'_{10}$, $g_{11} = 2g'_{11}$, $g_{12} = -\sqrt{\frac{20}{3}}g'_{12}$ 和 $g_{32} = -\sqrt{\frac{5}{2}}g'_{32}$, 结果就和3.46完全相同，也就是协变张量和Helicity方法对这个过程的描述完全等价。如果定义 G : $G_{10} = -\sqrt{3}g'_{10}r$, $G_{11} = 2'_{11}r$, $G_{12} = -\sqrt{\frac{20}{3}}g'_{12}r$ 和 $G_{32} = -\sqrt{\frac{5}{2}}g'_{32}r^3$, 这样在非相对论极限($\gamma_s \rightarrow 1$)和($\gamma_\sigma \rightarrow 1$) 下，就回到了式3.56的结果。

结论

可以继续讨论更多的例子，只是对于高自旋的粒子，讨论会变得很复杂。尽管如此，这里通过对三个例子的仔细讨论，我们就可以清楚地看到：协变张量方法构造出的不变振幅，通过恰当地变换和重新定义未知常数，可以得到和Helicity 理论完全相同地结果，也可以和非相对论极限下的 $L-S$ 耦合的形式一一对应起来。现在我们可以得到这样的结论：对于初末态都是有质量的粒子的情况下，协变张量方法和Helicity方法得到的结果完全等价。

第四章 对辐射衰变的处理:两种理论的等价性之二

前面我们讨论了用Helicity理论和协变张量理论来对衰变过程的角分布进行描述，而且通过两种理论的介绍，我们可以看出两种理论是等价的。但是，前面讨论的时候只涉及到普通的有质量的介子末态，下面我们来讨论另一种情况：辐射衰变。

辐射衰变，也就是末态含有光子的衰变过程，广义的说是末态含有无质量粒子的衰变模式。在描述这样的衰变过程的角分布时，和普通有质量粒子的情况不同。原因是，光子是没有静止质量的，它的自旋和轨道角动量原则上是没法单独定义的，那么我们在做分波展开时，必须考虑到这个特点。在使用Helicity振幅做展开时比较简单，因为光子的Helicity不为零，这是，我们只要在求和时，让含有光子的Helicity振幅的光子指标不取零即可；但是对于协变张量方法，还有在用协变张量的方法来构造Helicity振幅时，问题就没有这么简单了。解决问题的方法是采用合适的规范条件，来去掉多余的非物理的自由度。这章我们就来讨论这种处理方法，从处理方法的讨论中，我们会发现，对于辐射衰变的描述，协变张量方法和Helicity方法也是等价的。

4.1 协变张量方法

和有质量粒子的形式类似，按照下面介绍的方式来构造不变振幅，假设有如下过程：

$$\psi \rightarrow \gamma + X, \quad (4.1)$$

其中 ψ 是 e^+e^- 对撞产生的粲偶素矢量介子，末态第一个是光子，第二个 X 是普通的有质量介子。假设最简单的情况 X 是 0^+ 或者 2^+ 的普通有质量介子，用 $\psi_\mu^*(m_1)$ 和 $e_\nu(m_2)$ 分别表示 ψ 和光子的极化矢量，则这个过程的不变振幅可以构造出如下：

$$A = \psi_\mu^*(m_1) e_\nu(m_2) \sum_i g_i U_i^{\mu\nu} = \psi_\mu^*(m_1) e_\nu(m_2) A^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

其中 U_i 表示振幅的不同独立分量， $A^{\mu\nu} = \sum_i g_i U_i^{\mu\nu}$ 。因为光子质量为零，且服从规范不变性，所以这时的独立分波振幅的数目会比普通的矢量介子情形的

少。又由于这时 $L - S$ 耦合方案失效，所以不能根据 $L - S$ 耦合的概念来构造不同的分波振幅，而只能列举各种独立的构造方式，而采用独立Helicity振幅的数目来确定所构造的独立振幅的数目是否正确，这种方法对于检查振幅数目及其独立性是足够的。

4.1.1 截面

计算类似过程4.1的截面要用到 ψ 极化矢量的求和关系2.141和光子的极化矢量的求和关系（具体推导过程见下节），

$$\sum_m e_\mu^*(m) e_\nu(m) = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu K_\nu + K_\mu q_\nu}{q \cdot K} - \frac{K \cdot K}{(q \cdot K)^2} q_\mu q_\nu \equiv -g_{\mu\nu}^{\perp\perp}, \quad (4.3)$$

其中 q 是光子的动量，而 $K = p_\psi - q$ 是 ψ 和光子的四动量的差。这样截面为：

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \sum_{m_1=1}^2 \sum_{m_2=1}^2 \psi_{\mu'}^*(m_1) e_{\nu'}^*(m_2) A^{*\mu'\nu'} \psi_\mu(m_1) e_\nu(m_2) A^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m_1=1}^2 \psi_{\mu'}^*(m_1) \psi_\mu(m_1) g_{\nu\nu'}^{\perp\perp} A^{\mu\nu} A^{*\mu'\nu'} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^2 A^{\mu\nu} g_{\nu\nu'}^{\perp\perp} A^{*\mu\nu'} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ij} g_i g_j^* \sum_{\mu=1}^2 U_i^{\mu\nu} g_{\nu\nu'}^{\perp\perp} U_j^{*\mu\nu'} \\ &\equiv \sum_{ij} P_{ij} \times F_{ij}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{ij} &= g_i g_j^* \\ F_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^2 U_i^{\mu\nu} g_{\nu\nu'}^{\perp\perp} U_j^{*\mu\nu'}, \end{aligned}$$

可以看到，我们在计算截面时，用到了初态粒子的极化矢量求和关系和光子的求和关系，这对于计算截面非常重要，而对辐射衰变的处理的关键就在光子的极化矢量的求和关系的处理上，具体的处理方式包含了如何包含进质量为零的条件和所采用的规范。

下节，我们专门讨论矢量粒子的极化矢量求和问题，包括有质量的和无质量的情况。

4.1.2 极化：矢量粒子 $\rightarrow$ 光子

这里我们来专门讨论矢量粒子包括有质量和无质量的粒子的极化矢量求和性质。

假设矢量粒子是有质量的比如 ψ 、 ρ 和 ϕ 等。记其四动量和极化矢量为 p^μ 和 $\epsilon^\mu(p, m)$ ，其中 m 是磁量子数。极化矢量一般满足：

$$\epsilon^{*\mu}(p, m)\epsilon^\mu(p, m') = -\delta_{mm'} ,$$

出现负号是因为极化矢量是类空的。因为Lorentz协变性，对极化求和有，

$$\sum_m \epsilon_\mu^*(p, m)\epsilon_\nu(p, m) \equiv \eta_{\mu\nu}(p) ,$$

$\eta_{\mu\nu}(p)$ 应该具有如下明显协变的形式：

$$\eta_{\mu\nu}(p) = Ag_{\mu\nu} + Bp_\mu p_\nu . \quad (4.5)$$

现在我们来确定其中的 A 和 B 。因为极化矢量 ϵ 满足所谓**三维横向极化条件**： $p^\mu \epsilon_\mu(p; m) = 0$ ，所以 p^μ 和 $\epsilon(p; m)$ 总共四个线性独立且正交的矢量构成一个完备集，也就是说，任何一个四矢量可以用它们线性组合表示：

$$a^\mu = a_p p^\mu + \sum_m a_m \epsilon^\mu(p; m)$$

现在我们容易看出，

$$\begin{aligned} a^\mu \eta_{\mu\nu}(p) &= \sum_m \left[a_p p^\mu \epsilon_\mu^*(p; m) + \sum_{m'} a_{m'} \epsilon^{*\mu}(p; m) \epsilon_\mu(p; m') \right] \epsilon_\nu(p; m) \\ &= \sum_m \left[a_p \times 0 + \sum_{m'} a_{m'} (-\delta_{mm'}) \right] \epsilon_\nu(p; m) \\ &= - \sum_m a_m \epsilon_\nu(p; m) . \end{aligned}$$

这个结果不依赖于 ϵ 的具体形式的选择，并且表明 $-\eta_{\mu\nu}(p)$ 可以去掉任何给定矢量中正比于 p^μ 的部分。因此 $\eta_{\mu\nu}(p)$ 只能依赖于 p^μ ，也就是说 $a_\nu^\perp(p) = -a^\mu \eta_{\mu\nu}(p)$ 。因为 $\epsilon_\mu(p; m)$ 是四矢量，所以极化矢量求和 $\eta_{\mu\nu}(p)$ 的变换行为和二阶张量一样。任何用 p^μ 构造出的对称的二阶张量都具有一般形式：

$$\eta_{\mu\nu}(p) = A(p^2)g_{\mu\nu} + B(p^2)p_\mu p_\nu, \quad (4.6)$$

没有其他可能，因为可能 Lorentz 协变量只有 $g_{\mu\nu}$ ， p^μ 和 p^2 。又因为 $p^2 = M^2$ 是常数，因此 A 和 B 也只能是常数。用 p^μ 和 $\eta_{\mu\nu}(p)$ 相乘，有：

$$\begin{aligned} p^\mu \eta_{\mu\nu} &= \sum_m p \cdot \epsilon_\mu^*(p; m) \epsilon_\nu(p; m) = 0 \\ \rightarrow p^\mu [A g_{\mu\nu} + B p_\mu p_\nu] &= (A + B p^2) p_\nu = 0 \\ \rightarrow B &= -\frac{A}{M^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

因为极化求和的形式满足 $A(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{M^2})$ 。和 $g_{\mu\nu}$ 收缩有：

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} &= \eta^\mu{}_\nu = \sum_m \epsilon^{*\mu}(p; m) \epsilon_\mu(p; m) = \sum_m (-\delta_{mm}) = -3 \\ \rightarrow \eta^\mu{}_\nu &= A g^\mu{}_\nu + B p^2 = A \left(g^\mu{}_\nu - \frac{p^2}{M^2} \right) = A(4 - 1) = 3A \\ \rightarrow A &= -1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

所以，最终结果于是是：

$$\sum_m \epsilon^{*\mu}(p; m) \epsilon_\mu(p; m) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \right).$$

这正是 2.141 式。

如果矢量粒子是无质量的，比如光子或者胶子，则极化矢量不仅满足三维横向极化条件，还满足规范不变性，因此实光子和实胶子只有两个自由度。因此处理会有所不同。最简单的选择是（ k 是光子或者胶子动量） ϵ_1 、 ϵ_2 满足如下定义：

$$\begin{aligned} (\epsilon_1)^2 &= (\epsilon_2)^2, \quad (\epsilon_1)^0 = (\epsilon_2)^0 = 0 \\ \epsilon_{1,2} \cdot k &= 0, \quad \text{和} \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0, \end{aligned}$$

于是对极化求和结果是:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon^{\mu} \epsilon^{*\nu} = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \mu = 0 \text{ 或者 } \nu = 0 \\ \sum_{\epsilon=\epsilon_1, \epsilon_2} \epsilon^{\mu} \epsilon^{*\nu} & \text{其他情形} \end{cases}. \quad (4.9)$$

值得指出的是, 上面的求和只对两个分量求和, 所以结果就和有质量的矢量介子有差别了。但是, 上面的形式没有明显的Lorentz协变性。更好的是选择其他的形式, 下面的是一种比较一般的协变形式:

$$\sum^{\mu\nu} = \sum_{\epsilon} \epsilon^{\mu} \epsilon^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{n^{\mu} k^{\nu} + n^{\nu} k^{\mu}}{n \cdot k} - \frac{n^2 k^{\mu} k^{\nu}}{(n \cdot k)^2}, \quad (4.10)$$

这种形式具有这样的性质:

$$k_{\mu} \sum^{\mu\nu} = \frac{n^{\nu} k^2}{n \cdot k} - \frac{n^2 k^2 k^{\nu}}{(n \cdot k)^2} = 0,$$

因为 $k^{\mu} \epsilon_{\mu}(m) = 0$, 所以等于零的结果是自然的, 而不管粒子是否有质量, 这是规范不变的体现。但是, 对于实光子第二个等号成立是明显的, 因为 $k^2 = 0$ 。进一步, 它还满足:

$$n_{\mu} \sum^{\mu\nu} = -n^{\nu} + \frac{n^2 k^{\nu}}{n \cdot k} + n^{\nu} - \frac{n^2 k^{\nu}}{n \cdot k} = 0, \quad (4.11)$$

式4.11意味着所采用的规范条件(A^{μ} 是光子在空间表象中的波函数):

$$n_{\mu} A^{\mu} = 0. \quad (4.12)$$

从式4.12根据所选的规范可以确定 n^{μ} 的形式, 同时也确定了 $\sum^{\mu\nu}$ 的形式。例如:

- Lorentz 规范: $n^{\mu} = k^{\mu}$ 。

$$\begin{aligned} \sum^{\mu\nu} &= \sum_{\epsilon} \epsilon^{\mu} \epsilon^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{2k^{\mu} k^{\nu}}{k^2} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{k^2} \\ &= -\left[g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{k^2} \right], \end{aligned}$$

- 轴规范: $n^2 = 0$ 。

$$\sum^{\mu\nu} = \sum_{\epsilon} \epsilon^{\mu} \epsilon^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{n^{\mu} k^{\nu} + n^{\nu} k^{\mu}}{n \cdot k},$$

- 库仑规范: $n = p$ (p 是物理问题中的一个特定的动量)。

在实际应用中4.10式允许我们灵活的选取 n^μ , 选取的恰当的话, 会带来很大的方便。比如, 在我们这个具体问题中, 我们选取库仑规范: $n^\mu = p^\mu$, p^μ 是 ψ 的四动量, 这样 $\sum^{\mu\nu}$ 满足如下性质:

$$\begin{aligned} p^\mu \sum^{\mu\nu} &= 0 \\ k^\mu \sum^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

实际中用的是 $n^\mu = p^\mu - k^\mu$, 这就是式4.3。

4.2 Helicity 耦合振幅振幅

现在我们讨论在Helicity理论中如何处理辐射衰变问题。首先我们先把光子在Helicity表象中的表示特点给以描述: 光子的自旋为1, 其波函数用极化四矢量来表示, 且时间分量为零; 同时光子的质量为零, 因此其Helicity只能为 $\nu = \pm 1$, 而不存在Helicity为零的光子态; 记其四动量为 k , 极化矢量为 ϵ , 母粒子的动量和光子的四动量差 $q = p - k$ 。

在Helicity情形下, 如果不对Helicity耦合振幅做进一步的约化, 则对辐射衰变的处理非常简单, 只要令含光子Helicity指标是零的振幅为零就行。但是, 如果要对Helicity振幅做约化, 问题会变得稍稍复杂一些, 这里我们主要讨论在构造张量形式的Helicity耦合振幅时必须考虑的问题。一种简单的处理辐射衰变的方法是令 $\epsilon(0)$ 为零, 并让 $\epsilon(\pm)$ 和光子的动量正交, 这样正好满足库仑规范, 即:

$$k \cdot \epsilon(\pm) = 0 \quad \text{且} \quad \epsilon(0) = 0.$$

理论上处理电磁场问题需要选取规范, 常用的规范前面介绍过, 有Lorentz规范, 库仑规范等。采用Lorentz规范理论中还会有非物理的自由度, 仍然需要引入不定度规, 以此来消除多余的非物理自由度; 而库仑规范则从一开始就通过规范条件把理论中 $\epsilon(0)$ 这个自由度消除掉, 最终两种规范都得到相同的结果。而在Helicity理论的处理当中, 比较常用的是一种折中的做法。

电磁场具有 U(1) 规范对称性, 即, 理论在如下的规范变换下保持不变:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu + \partial\alpha(x), \quad (4.13)$$

其中 $A_\mu(x)$ 为坐标表象中的电磁场波函数。在动量表象中, 上式写为:

$$\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + \alpha k_\mu, \quad (4.14)$$

其中, α 为一与动量无关的常数。从上式可以看出, 当把理论中的 ϵ_μ 换为 $\epsilon_\mu + \alpha k_\mu$ 时, 振幅应该保持不变, 这说明 αk_μ 的引入对计算结果没有影响: 即当把振幅中的 ϵ_μ 换为 k_μ 时, 结果应该为零。使理论满足规范不变性的最简便的做法就是在一开始就给光子选定一个等效极化四矢, 当此极化四矢替代通常的极化四矢进行计算时, 规范不变性自动的得到满足。为此, 可以定义两个四矢量:

$$\epsilon_\alpha^-(m) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} q^\beta k^\gamma \epsilon^\delta(m), \quad (4.15a)$$

$$\epsilon_\alpha^+(m) = \epsilon_\alpha(m) - \frac{q \cdot \epsilon(m)}{q \cdot k} k_\alpha, \quad (4.15b)$$

当把4.15a和4.15b中的 $\epsilon(m)$ 换为 k 时, $\epsilon^\pm(m)$ 均恒等于零。因此用 $\epsilon^\pm(m)$ 代替 $\epsilon(m)$ 进行计算时, 理论从一开始就自动满足规范不变性的要求。然后选取库仑规范, 使 $\epsilon^\pm(m)$ 满足:

$$k \cdot \epsilon^\pm(m) = 0,$$

也就是说 $\epsilon^\pm(m)$ 不能有纵向分量。而实际上, 我们发现只有磁量子数 $m = 0$ 时才有纵向分量, 因此库仑规范要求 $m = \pm 1$, 这正好就是如下要求: 光子只有 $\nu = \pm 1$ 的Helicity态, 而没有 $\nu = 0$ 的Helicity态。因此只要把振幅中的 $\epsilon(\pm)$ 换为 $\epsilon^\pm(\pm)$, 并且令 $\epsilon_\alpha(0)$ 为零, 这样得到的振幅既满足规范不变性的要求, 又满足库仑规范条件的要求。

因此, 在计算辐射衰变的Helicity振幅的时候, 可以采用如下方法来处理: 首先写出粒子为有质量粒子的Helicity振幅, 然后做替换:

$$\epsilon(\pm) \rightarrow \epsilon^\pm(\pm), \quad (4.16)$$

并令 $\epsilon_\alpha(0)$ 为零, 具体计算当中采用 $\epsilon^\pm(+)$ 还是 $\epsilon^\pm(-)$ 还要看具体宇称守恒的要求。

已知 k^α , q^α 是四矢量, 而 ϵ^α 是赝矢, 因此在空间反射变换下, ϵ_α^- 是矢量, 而 ϵ_α^+ 是赝矢:

$$\epsilon_\alpha^-(\pm) \rightarrow +\epsilon_\alpha^-(\pm), \quad (4.17a)$$

$$\epsilon_\alpha^+(\pm) \rightarrow -\epsilon_\alpha^+(\pm). \quad (4.17b)$$

因此, $\epsilon_\alpha^+(\pm)$ 与 $\epsilon_\alpha(\pm)$ 的空间反射性质相同, 均是矢量。

在母粒子 J 的静止系中, $\epsilon_\alpha(\pm)$ 由3.6 定义, 而

$$k^\alpha = \{k; 0, 0, 0, k\}, \quad q^\alpha = \{q; 0, 0, 0, q\}, \quad (4.18)$$

故 J 的静止系中, 有

$$q \cdot \epsilon(\pm) = 0, \quad (4.19)$$

所以

$$\epsilon_\alpha^+(\pm) = \epsilon_\alpha(\pm). \quad (4.20)$$

而 $\epsilon_\alpha^-(\pm)$ 在 J 的静止系中是:

$$\epsilon_\alpha^-(\pm) = \pm i q W \epsilon_\alpha(\pm). \quad (4.21)$$

其中, q 为动量 q^α 的 z -分量。因子 $\pm i q W$ 等价于给问题中加入了 $l = 1$ 的轨道角动量。以后的实际应用中我们会发现, 只要通过令 $\epsilon(0)$ 为零就得到了辐射衰变的Helicity耦合振幅。这是因为质量 $m \neq 0$ 时的Helicity耦合振幅在构造过程中已经考虑了出于宇称对称性是否该引入 $\epsilon_\alpha^-(\pm)$, 而在 J 的静止系中 $\epsilon_\alpha^+(\pm)$ 和 $\epsilon_\alpha(m)$ 其实是相等的。

从自旋波函数和轨道角动量波函数, 以及初末态粒子的四动量出发构造Helicity振幅。第一步要根据对称关系先确定出独立的Helicity振幅的个数, 然后用波函数和粒子的四动量来构造符合满足相应宇称性质的Lorentz标量, 一般能构造出来的标量个数和独立的Helicity振幅的数目相同, 有时数目会不一致, 但是允许不同的标量之间相差一个能量的依赖的因子时, 数目仍会减少到一致。这样只要把这些标量用复参数做一个线性组合, 就得到了Helicity耦合振幅的表达式。

关于这些讨论的应用在下面的例子中, 我们会详细介绍, 同时也可以看出Helicity方法和协变张量方法的联系。

4.3 举例

对于这个过程我们采用通译的记号, P, k, q 分别表示 ψ', γ 和 χ_{cJ} 四动量。 r 表示两个 π 四动量差; ϕ^μ 和 ϵ^ν 分别表示 ψ' 和 γ 的极化矢量, 而 $t_{\mu\nu}^{(J)}$ 表示两个 π 的轨道角动量波函数, 也是 χ_{cJ} 的自旋波函数; (θ', ϕ') 和 (θ, ϕ) 分别表示 γ 和 π^+ 在各自母粒子质心中的极角和方位角。

4.3.1 $\psi' \rightarrow \gamma\chi_{c0} \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$

先用Helicity方法来确定这个过程的角度分布。这个过程第一级衰变 $\psi' \rightarrow \gamma\chi_{c0}$ ，因为光子的Helicity不能为零和宇称守恒的要求，只有一个独立的Helicity振幅 $F_+^1 = F_-^1$ ，而且 $\chi_{c0} \rightarrow \pi^+\pi^-$ 也只有一个独立的振幅 F_{00}^0 。则完整的衰变振幅可以写为：

$$\mathcal{A}(m) = F_\lambda^1 D_{m,\lambda}^{1*}(\phi'\theta', 0) BW_{\chi_c} F_{00}^0 D_{0,0}^{0*}(\phi\theta 0), \quad (4.22)$$

其中 $F_{00}^0 D_{0,0}^{0*}$ 是常数，而 $F_\pm^1$ 可以进一步约化，即：

$$\begin{aligned} F_\lambda^1 &= g_1 \phi^{*\mu}(\delta) \epsilon_\mu(\lambda) + g_2 \phi^{*\mu}(\delta) \tilde{t}_{\mu\nu}^{(2)} \epsilon^\nu(\lambda) \\ &= g_1 \lambda^2 + g_2 \times 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

结果等于 1，和 m 的正负无关，也和 λ 正负无关，这个结果和我们的预期一致，因为独立的振幅只有一个，第二项是零是规范条件的必然，因为 $\tilde{t}^{(2)}$ 中含有光子四动量因子。故振幅的化简形式为：

$$\mathcal{A}(m) = D_{m,\lambda}^{1*}(\phi'\theta', 0) BW_{\chi_c} \quad \lambda = \pm 1, \quad (4.24)$$

略掉能量依赖的部分，我们可以求出角分布，而且这个角分布是唯一确定的，因为只有一个独立的Helicity 振幅，

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Phi} &= \sum_{m\lambda} |\mathcal{A}(m)|^2 \\ &\propto \sum_{m\lambda} |D_{m,\lambda}^{1*}(\phi'\theta', 0)|^2 \\ &= 1 + \cos^2 \theta'. \end{aligned} \quad (4.25)$$

如果采用协变张量方法，因为 $P_\mu \epsilon^\mu = k_\mu \epsilon^\mu = 0$ ，同样也只有唯一一种振幅非零的构造方式，于是和Helicity 方法一样，只有一个不变振幅，其实采用现有的极化矢量和四动量等，也只能构造出一个Lorentz 不变的振幅，

$$\mathcal{A}(m) = \phi^{*\mu}(m) \epsilon_\mu(\lambda) BW_{\chi_{c0}}. \quad (4.26)$$

接着可以用4.3式进一步求得截面的表达式，但是，这个表达式中无法看出明显的角分布形式。为了把结果和Helicity的结果联系起来进行比较，我们

把 $\phi^{*\mu}(m)$ 用光子运动方向上的本征态展开: $\phi_\mu^*(m) = \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0) \phi^{*\mu}(m')$, 则振幅可以写成 (略掉了能量依赖的部分):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(m) &= \sum_{m'} D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0) \phi^{*\mu}(m') \epsilon_\mu(\lambda) \\ &= D_{mm'}^{*1}(\phi, \theta, 0) \lambda^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

这个结果和Helicity方法得到的完全相同。

这是一个最简单的例子, 因为只有一个独立的不变振幅, 两种理论对角分布的描述没有任何差异, 完全等价。但是如果独立振幅的数目增多, 问题就会变得复杂, 等价性将会不是很明显, 想证明的话, 必须经过一些比较复杂的计算, 比如下面的例子。

4.3.2 $\psi' \rightarrow \gamma \chi_{c2} \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$

还是先用Helicity方法来描述这个过程的角度分布。这个过程第一级衰变 $\psi' \rightarrow \gamma \chi_{c2}$, 因为光子的Helicity不能为零、宇称守恒的要求还有角动量守恒的约束, 故只有三个独立的Helicity振幅 $F_{12}^1 = F_{-1-2}^1$, $F_{11}^1 = F_{-1-1}^1$ 和 $F_{10}^1 = F_{-10}^1$, 光子的Helicity不能为零导致了 $F_{01}^1 = F_{0-1}^1 = 0$ 和 $F_{00}^1 = 0$ 。而 $\chi_{c2} \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 只有一个独立的振幅 F_{00}^1 。则完整的衰变振幅可以写为:

$$\mathcal{A}(m) = F_{\lambda\sigma}^1 D_{m,\lambda-\sigma}^{1*}(\phi' \theta', 0) BW_{\chi_c} F_{00}^2 D_{\sigma,0}^{2*}(\phi \theta 0), \quad (4.28)$$

对于第一级衰变 $F_{\lambda\sigma}^1$, 如果其中的 γ 是普通有质量的矢量介子, 则我们可以采

用3.44式的结果，只要当 $\lambda = 0$ 时令 $\epsilon = 0$ 即可。如下：

$$F_{1,2}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0 + g_{21}\sqrt{\frac{1}{10}}r^2 + g_{22}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 + g_{23}\sqrt{\frac{2}{105}}r^2 + g_{43}\sqrt{\frac{1}{70}}r^4 \quad (4.29a)$$

$$F_{1,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s - g_{21}\sqrt{\frac{1}{5}}r^2\gamma_s + g_{23}\sqrt{\frac{3}{35}}r^2\gamma_s - g_{43}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_s \quad (4.29b)$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{21}\sqrt{\frac{1}{60}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{23}\sqrt{\frac{4}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{43}\sqrt{\frac{3}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (4.29c)$$

但是，三个独立的Helicity振幅这时却引入了五个待定参数 g 。这说明采用前面的方法来构造Helicity 振幅引入了多余的参数，这五个参数只有三个是独立的（想证明它们的相关性并不简单），虽然这样做保留尽可能多的可能性。

如果要消除多余的参数，就不能和前面的一样采用 $L - S$ 耦合的概念的构造不变量然后线性组合成Helicity振幅，必须采用别的方案，这样就会得到完全独立的振幅，而且数目就是独立的Helicity振幅的个数，但是却失去了物理意义直观的优点，并且丢掉了各个振幅之间可能的能量依赖的因子。不同的文献中的主张并不相同，后面我们还会提到。

如果采用协变张量方法，同样有 $P_\mu \epsilon^\mu = k_\mu \epsilon^\mu = 0$ ，那么在构造不变振幅时，所有包含这些项的结果都是零。所以，这时我们放弃 $L - S$ 构造方案物理意义直观的好处，完全来用这些四动量和波函数来构造独立的且符合相应守恒性质的不变振幅，他们的数目应该正好是三个：

$$\mathcal{A}_1 = \phi^{*\mu}(m)\epsilon^\nu(\lambda)\tilde{t}_{\mu\nu}^{(2)}BW_{\chi_{c2}} \quad (4.30a)$$

$$\mathcal{A}_2 = \phi^{*\mu}(m)\epsilon_\mu(\lambda)P^\alpha P^\beta \tilde{t}_{\alpha\beta}^{(2)}B_2(\chi_2)BW_{\chi_{c2}} \quad (4.30b)$$

$$\mathcal{A}_3 = \phi^{*\mu}(m)\epsilon^\nu(\lambda)q_\mu \tilde{t}_\alpha^{(2)\nu}P^\alpha B_2(\chi_2)BW_{\chi_{c2}} \quad (4.30c)$$

对于比较复杂的情况，由于只能依靠对称性和独立性等原则来检验构造的振幅，缺乏物理直观性，所以这种构造方法很容出错，需要足够的经验，即使

这样，一般还是需要采用数值的方法来给出最后的角分布，根据角分布来检查所构造的振幅的正确性。下面我们来通过一个例子仔细的说明这种情况下，我们所面临的问题和我们该如何来选择。

4.3.3 $\psi' \rightarrow \gamma\chi_{c1}$

这个例子我们选取了一个相对比较简单情况，而且不考虑 χ_{c1} 的衰变，把它当作末态粒子处理。因为这个粒子相关文献讨论的比较仔细，这里我们把它拿来作为比较两种方法的一个典型例子。

首先考虑Helicity方法，因为 $\eta_\psi\eta_\gamma\eta_\chi = +1$ ，而光子的Helicity不能为零，再结合角动量守恒，我们可以知道独立Helicity的振幅只有两个： $F_{++}^1 = -F_{--}^1$ 和 $F_{10}^1 = -F_{-10}^1$ 。完整的振幅可以表为：

$$\mathcal{A}(m) = F_{\lambda\sigma}^1 D_{m,\lambda-\sigma}^{1*}(\phi'\theta', 0), \quad (4.31)$$

关于Helicity振幅的约化，完全可以参考3.3.3的做法，只是那里的矢量介子现在换成了光子。和上个粒子一样，这里仍然是待定参数多于独立Helicity振幅的个数。

$$F_{1,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0 - g_{21}\sqrt{\frac{1}{3}}r^2 \quad (4.32a)$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0\gamma_\sigma + g_{21}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\gamma_\sigma \quad (4.32b)$$

如果采用协变张量方法，和上面的例子一样，有 $P_\mu\epsilon^\mu = k_\mu\epsilon^\mu = 0$ ，所以，应该构造出两个独立的不变量。但是实际构造的过程中，我们发现有三个振幅：

$$\mathcal{A}_1 = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\phi^{*\mu}(m)\epsilon^\nu(\lambda)P^\alpha\omega^\beta(\sigma) \quad (4.33a)$$

$$\mathcal{A}_2 = [\phi^{*\mu}(m)k_\mu]\epsilon_{\nu\delta\alpha\beta}\epsilon^\nu(\lambda)P^\alpha k^\beta\omega^\delta(\sigma) \quad (4.33b)$$

$$\mathcal{A}_3 = [\omega^\nu(\sigma)k_\nu]\epsilon_{\mu\delta\alpha\beta}\phi^{*\mu}(m)\epsilon^\delta(\lambda)P^\alpha k^\beta \quad (4.33c)$$

这里的结果不唯一，因为我们知道独立的振幅有两个，但是却可以构造出三个看似独立的不变量。文献[8]中证明了这三个不变量并不独立，它们可以通过含有能量依赖的系数耦合得到零。关于这种情况，在具体的分波分析中，

有两种意见：第一种（Chung）建议把所有的不变量都放到拟合程序当中，让实验数据来判断它们是否合理；另一种是(B.S. Zou) [12] 认为拟合中太多的自由度会带来不确定性，而且不同振幅之间的干涉不易控制，所以他建议采用其中某几个独立的振幅，而忽略一些能量依赖因子。

4.4 讨论和小结

辐射衰变在粲偶素物理中具有特殊地位，因为这里被认为是胶球最可能产生的环境之一，因此辐射衰变的分波分析就具有非常重要的意义。

作为分波分析两种常用的角分布描述方法，Heleicty 方法处理辐射衰变无疑具有非常大的优势，但是这种优势仅仅局限于当我们对Heleicty 振幅不做进一步约化的时候，如果需要约化Heleicty振幅，那么两种方法对于辐射衰变的处理将面临类似的情况，但是，由于末态含有质量为零的光子，所以需要采用适当的规范条件，而且 $L - S$ 耦合的概念在这里失效，所以两种方法处理起来都不完美，需要作出一定的取舍和选择。但是，这些不足并不是由于两种方法有什么差别，它们在构造不变量的处理方式上是一致的，只要选取相同的规范条件，那么结果就完全等价。两种方法尽管有着各种假设或者不尽理想的方面，但是这是因为问题本身的特殊性，它们在描述辐射衰变的角分布时，其实是等价的。

结合前一章的讨论，我们可以得出结论：无论在那种情况下，不管是否是辐射衰变，Heleicty 方法在需要对Heleicty 振幅进行约化时，它和协变张量方法是完全等价的。这个结论正是本书想说明的问题之一。

下章我们将会采用数值方法来证明两种方法的等价性，它具有形象和直观的优点。

第五章 用数值方法证明两种理论的等价性

如今才是十三夜，月色已如玉。

未是秋光奇艳，看十五十六。

—— 杨万里·《好事近》

两种理论的等价性，通过前面的介绍和举例讨论，已经很明显了。在这里，我们再采用数值计算的方法来对两者进行比较。具体做法是先用两种理论推导得到某个衰变模式的完整角分布，然后在对相空间中的计算其微分截面，直接比较微分截面的数值，如果两种理论一致，那么在计算机的舍入误差范围内，二者应该是相符的；而且进一步可以做出每个角变量的分布图，从其中可以更直观的看到它们的等价性。

5.1 例子一： $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

首先我们先选择了 $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ 过程，这个过程前面已经有过计算，但是数值方法需要具体的表达式，知道每个变量的具体细节，因此，我们这里再次计算其角分布，同时会介绍势垒因子，共振态的表示等，最后再把这些具体的表达式放到程序当中来做计算。

因为这个过程非常简单只有一个分波振幅，在两种理论框架下，仅有的一个耦合常数在比较时可以约掉，这也是我们选择这个过程的原因。这样我们就能严格比较理论计算出来的角分布，以及对振幅的能量依赖部分处理的差别，这些正是我们所关心的。这里我们来看这个过程的对称性的约束：

- 两级的衰变都是两体衰变： $1^- \rightarrow 1^- 0^-$ 和 $1^- \rightarrow 0^- 0^-$ ；
- 因为宇称守恒要求 $\eta_a \eta_b \eta_c (-1)^L = 1$ ，而两级衰变都满足 $\eta_a \eta_b \eta_c = -1$ ，因此它们的轨道角动量 L 都只能取奇数；
- 角动量守恒要求 $L = 0, 1, 2$ ，因此我们推断出 $L = 1$ ，只有一个分波；

- 从Helicity的角度出发, 我们知道Helicity振幅在宇称守恒是应该满足关系式 $F_{\lambda\nu}^J = \eta_a \eta_b \eta_c (-1)^{J-\sigma-s} F_{-\lambda-\nu}^J$, 因此对第一级衰变有: $F_{10}^1 = -F_{-10}^1$, $F_{00}^1 = -F_{00}^1 = 0$, 故只有一个Helicity振幅, 这和只有一个分波振幅的预期相一致; 而第二级也只有一个Helicity 振幅 F_{00}^1 。

5.1.1 采用Helicity 振幅展开

根据上面的讨论, 第一级衰变有: $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0$ 有 $F_{\lambda\nu}^1 = -F_{-\lambda-\nu}^1$, 即只有一个独立的Helicity振幅: $F_{\pm}^1$; 而第二级衰变 $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 的衰变也只有一个独立的Helicity 振幅 F^1 。我们可以直接写出完整的衰变振幅为:

$$\mathcal{A}(M) = F_{\lambda 0}^1 D_{M\lambda}^{1*}(\theta\phi, 0) BW_{\rho 0} F^1 D_{\lambda 0}^{1*}(\theta'\phi', 0), \quad (5.1)$$

其中振幅是 Helicity 振幅和 D 函数的乘积, 中间用 Breit-Winger 传播子相连。而 Helicity 振幅可以进一步采用前面的张量方法来约化, 对于这两个过程, 约化比较简单, 我们这里直接给出结果:

$$F_{\pm}^1 = \pm g M_{\psi} r_{\rho\pi} = g M_{\psi} B_1(r_{\rho\pi}), \quad (5.2)$$

$$F^1 = g r_{\pi\pi} = g B_1(r_{\pi\pi}), \quad (5.3)$$

这里我们采用通用的做法, 直接把相对动量 r 用相应阶数的势垒因子代替, 我们这里只会用到的是一阶的势垒因子, 表达式为:

$$B_1(r) = \sqrt{\frac{2(\frac{r}{r_0})^2}{(\frac{r}{r_0})^2 + 1}}, \quad (r_0 = 0.1973 \text{ GeV})$$

r_0 正是强相互作用力程典型值 1fm 所对应的动量大小。

在求模方前对中间态的 Helicity 求和, 模方后对末态求和, 对初态求平均, 可以得到微分截面表达式:

$$\frac{d\sigma}{d\Phi} = \sum_M \left| \sum_{\lambda} \mathcal{A}(M) \right|^2$$

振幅的完整表达式(其中略掉常数耦合系数 g):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M) &= C_1 [D_{M1}^{1*}(\theta\phi) D_{10}^{1*}(\theta'\phi') - D_{M-1}^{1*}(\theta\phi) D_{-10}^{1*}(\theta'\phi')] \\ C_1 &= M_{\psi} B_1(r_{\rho^0 \pi^0}) B_1(r_{\pi^+ \pi^-}) BW_{\rho^0} \end{aligned} \quad (5.4)$$

不考虑能量依赖, $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0$ 道的完整角分布表达式为

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Phi}\right)_H &\propto |\mathcal{C}_1|^2 \sum_M \left| D_{M1}^{1*}(\theta\phi) D_{10}^{1*}(\theta'\phi') - D_{M-1}^{1*}(\theta\phi) D_{-10}^{1*}(\theta'\phi') \right|^2 \\ &\propto \frac{1}{2} [(1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta' + \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos 2\phi'] \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.1.2 采用协变张量

从前面的分析我们已经知道两级衰变中 L 都只能取 1, 也就是只有 P 波的贡献。根据这个特点我们写出振幅如下

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(m) &= \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \psi_\mu^*(m) p_\psi^\sigma \tilde{T}_{\rho 3}^{(1)\nu} \tilde{t}_{12}^{(1)\lambda} B W_{\rho^0} \\ &= \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \psi_\mu^*(m) p_1^\nu p_2^\lambda p_3^\sigma B_1(r_{\rho\pi}) B W_{\rho^0} B_1(r_{\pi\pi}) \\ &= \frac{\mathcal{C}_2}{M_\psi} \psi_\mu^*(m) U^\mu, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} U^\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p_1^\nu p_2^\lambda p_3^\sigma = M_\psi \epsilon_{\mu\nu\lambda 0} p_1^\nu p_2^\lambda \\ \mathcal{C}_2 &= M_\psi B_1(r_{\rho\pi}) B W_{\rho^0} B_1(r_{\pi\pi}). \end{aligned}$$

同样经过对末态求和, 初态求平均, 微分截面为:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Phi} &\propto \sum_{m=\pm 1} \mathcal{A}(m) \mathcal{A}^*(m) \\ &\propto \frac{|\mathcal{C}_2|^2}{M_\psi^2} \sum_m \psi_\mu(m) U_\rho^\mu \psi_{\mu'}^*(m) U_\rho^{\star\mu'}, \end{aligned}$$

我们知道由正负电子对撞产生的 ψ 只有两个极化方向, 因此有如下关系式:

$$\sum_m \psi_\mu(m) \psi_{\mu'}^*(m) = \delta_{\mu\mu'} (\delta_{1\mu} + \delta_{2\mu}).$$

带入截面表达式, 化简后有:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Phi} &\propto \frac{|\mathcal{C}_2|^2}{M_\psi^2} \sum_{\mu=1}^2 U_\rho^\mu U_\rho^{\star\mu} \\ &= |\mathcal{C}_2|^2 \epsilon_{ijk} p_1^j p_2^k \epsilon^{imn} p_{1m} p_{2n} \\ &= |\mathcal{C}_2|^2 (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)_{xy}^2. \end{aligned}$$

从这个表达式中，我们无法看到明显的角分布，它和能量依赖部分式混在一起的。这是这个方法的缺点之一，不够明显和形象，但是这也是它的优点，因为末态粒子的四动量不用做任何变换，直接出现在振幅和角分布的表达式当中，这会对具体的计算带来很大的方便，大量的节约了CPU 时间，因为在Helicity 方法中，我们从末态粒子的四动量出发，要做若干次旋转变换和Lorentz 变换，相当的耗费CPU 时间，对于多级级联衰变，更是如此。

5.1.2.1 关于势垒因子的一点说明

这里必须对势垒因子的使用做一点说明，因为在两种情况下势垒因子的形式有所差异。在Helicity 形式中，势垒因子是无量纲的，以完整的形式出现；而在协变张量的形式中，势垒因子的分子部分已经隐含在协变振幅当中了，所以势垒因子只剩下分母和Helicity 中的相对应，于是分母是有量纲的。具体形式如下：

$$B_1(r) = \sqrt{\frac{2}{r^2 + r_0^2}}, \quad (\text{Tensor}) \quad (5.6)$$

$$B_1(r) = \sqrt{\frac{2(\frac{r}{r_0})^2}{(\frac{r}{r_0})^2 + 1}}. \quad (\text{Helicity}) \quad (5.7)$$

它们采用相同的归一化(Tensor 形式的必须把分子部分也考虑进来)，即在 $\frac{r}{r_0}$ 等于 1 时，势垒因子也等于 1。

5.2 例子二： $\psi \rightarrow \gamma\eta_c \rightarrow \gamma\rho^0\rho^0 \rightarrow \gamma 2(\pi^+\pi^-)$

我们再来考虑一个辐射衰变的例子。也是一个所有级联过程都只有一个分波的衰变道： $\psi \rightarrow \gamma\eta_c \rightarrow \gamma\rho^0\rho^0 \rightarrow \gamma 2(\pi^+\pi^-)$ 过程，在粒子物理历史上有一个著名的过程与之类似，即 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow 2(e^+e^-)$ ，现在我们来把两个过程加以分析比较，并计算这个过程的完整角分布。这两个过程有如下特征：

- 三级衰变都满足 $\eta_a\eta_b\eta_c = -1$ ，再结合角动量守恒条件，三级衰变的轨道角动量都有 $L = 1$ （但是， $\psi \rightarrow \gamma\eta_c$ 过程含有光子，轨道角动量的概念不再适用）。

- 第一级衰变 $\psi \rightarrow \gamma\eta_c$ 过程是 VP 模式, 所以第一级衰变的Helicity振幅 $F_{00}^0 = 0$ 。
- 第二级衰变 $\eta_c \rightarrow \rho^0\rho^0$ 和 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, 因为初态粒子自旋为零, 则末态粒子 (ρ , 光子) 在其质心系中的角分布是均匀分布。因为过程是 $0^- \rightarrow 1^-1^-$ 且 $L=1$, 很容易得到 $F_{-1-1}^0 = -F_{11}^0$, 而 $F_{1-1}^0 = F_{-11}^0 = F_{00}^0 = 0$, 故只有一个独立的Helicity振幅, ρ^0 和光子一样, 也没有纵向极化 (这里是因为宇称守恒和角动量守恒的原因, 光子是由于规范原理的要求)。
- 虽然末态角分布是平庸的, 但是在 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 过程中, 两个光子的极化平面互相垂直, 也就是极化平面夹角满足 $\sin^2\phi$ 分布。与之类似, $\eta_c \rightarrow \rho^0\rho^0$ 中, ρ 的极化平面也满足同样的分布, 这个分布和初态粒子的宇称有关。
(见 D.H.Perkins, *Introduction to High Energy Physics* [第4版] P68~69)
- 最后一级 $\rho \rightarrow \pi\pi$ ($1^- \rightarrow 0^-0^-$), 根据角动量守恒, 可以推断出只有一个分波, 也只有一个Helicity振幅 F_{00}^1 。

根据上面的讨论, 下面我们来具体计算其振幅的具体表达式和完整的角分布。首先在Helicity展开中讨论。

5.2.1 采用Helicity 展开

这是一个三级、四次衰变的复杂过程, 它的每一级都可以用Helicity展开, 然后, 每级 (每个衰变) 之间用传播子连接起来, 就得到了完整的振幅表达式。具体表达式如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M) &= F_{\lambda 0}^1 D_{M\lambda}^{1*}(\theta_2\phi_2, 0) BW_{\eta_c} F_{s\sigma}^0 F_{00}^1 BW_{\rho_{56}} D_{s0}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) F_{00}^1 BW_{\rho_{78}} D_{-\sigma 0}^{1*}(\theta_7\phi_7, 0) \\ &= \mathcal{C}_1 D_{M\lambda}^{1*}(\theta_2\phi_2, 0) D_{s0}^{1*}(\theta_5\phi_5, 0) D_{-\sigma 0}^{1*}(\theta_7\phi_7, 0)\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{C}_1$ 是所有包含能量依赖的因子总和, 且略掉一个总的耦合常数。

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= F_{\lambda 0}^1 BW_{\eta_c} F_{s\sigma}^0 F_{00}^1 BW_{\rho_{56}} F_{00}^1 BW_{\rho_{78}} \\ &= B_1(r_{\gamma\eta_c}) B_1(r_{\rho\rho}) B_1(r_{\pi^5\pi^6}) B_1(r_{\pi^7\pi^8}) BW_{\eta_c} BW_{\rho_{56}} BW_{\rho_{78}}\end{aligned}$$

进一步, 把振幅模方并对末态求和, 对初态求平均, 就可以得到联合角分布, 可以看到, 这里的结果和前面的讨论完全一致。

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Phi} &= \sum_{M\lambda} \left| \sum_{s\sigma} \mathcal{A}(M) \right|^2 \\
&= |\mathcal{C}_1|^2 \sum_{M\lambda} \left| d_{M\lambda}^1(\theta_2) D_{10}^{1*}(\theta_5 \phi_5, 0) D_{10}^{1*}(\theta_7 \phi_7, 0) - d_{M\lambda}^1(\theta_2) D_{10}^{1*}(\theta_5 \phi_5, 0) D_{10}^{1*}(\theta_7 \phi_7, 0) \right|^2 \\
&\propto \sum_{M\lambda} \left| d_{M\lambda}^1(\theta_2) \sin \theta_5 \sin \theta_7 \sin(\phi_5 + \phi_7) \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} [(1 + \cos^2 \theta_2) \sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_7 \sin^2(\phi_5 + \phi_7)] \quad (5.8)
\end{aligned}$$

5.2.2 采用协变张量方法

根据文献[12]中的讨论, 振幅可以表达为:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(m_1, m_2) &= \phi_\mu(m_1) \epsilon_\nu^*(m_2) U_{\mu\nu}, \\
U_{\mu\nu} &= \mathcal{C}_2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_\psi^\alpha q^\beta \epsilon_{\gamma\delta\lambda\sigma} p_5^\gamma p_6^\delta p_7^\lambda p_8^\sigma, \\
\mathcal{C}_2 &= B_1(\gamma\eta_c) B_1(\rho\rho) B_1(\pi_5\pi_6) B_1(\pi_7\pi_8) BW(\eta_c) BW(\rho_{56}) BW(\rho_{78}),
\end{aligned}$$

而 $\phi(m_1)$ 满足和上面例子一样的求和关系, 对于 ϵ_{m_2} , 我们采用恰当的规范去掉多余的非物理自由度, 即如下关系:

$$-g_{\mu\nu}^{\perp\perp} = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu K_\nu + K_\mu q_\nu}{q \cdot K} - \frac{K \cdot K}{(q \cdot K)^2} q_\mu q_\nu \quad (5.9)$$

这样可以得到总角分布为:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Phi} &= -\frac{1}{2} \sum_{u=1}^2 U^{\mu\nu} g_{\nu\nu'}^{\perp\perp} U^{*\mu\nu'} \\
&\propto \sum_{u=1}^2 [\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha^\psi q_\beta^\psi \epsilon^{\gamma\delta\lambda\sigma} p_\gamma^5 p_\delta^6 p_\lambda^7 p_\sigma^8] g_{\nu\nu'}^{\perp\perp} [\epsilon^{\mu\nu'\alpha'\beta'} p_{\alpha'}^\psi q_{\beta'}^\psi \epsilon^{\gamma'\delta'\lambda'\sigma'} p_{\gamma'}^5 p_{\delta'}^6 p_{\lambda'}^7 p_{\sigma'}^8] \quad (5.10)
\end{aligned}$$

必须说明的是, 其中两种计算方法采用的势垒因子形式有所不同, 这个和前面的例子的约定是一样的。

5.3 数值比较

我们采用数值计算的方法来对每个例子的不同理论算出的角分布进行比较。具体的方法如下。先根据相空间做抽样，得到一组末态粒子的四动量；再利用产生出的每一组四动量计算每个事例的截面；这时可以直接把这些数值进行比较，原则上，这些截面的数值只相差一个唯一的归一化因子，所以两种理论计算出的截面的比值应该是唯一的；同时，我们可以把这个截面作为出发点，对相空间做二次抽样，在产生足够多的事例的情况下，可以得到每个具体角分布，包括单个的角分布和联合角分布，这时，就可以直接对这些分布图进行比较，可以比较直观的看出其中是否一致。下面我们就按照这两种方式来比较，先比较界面的比值是否唯一，再看角分布是否一致。

5.3.1 $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

第一个例子，我们采用相空间产生子，产生了 $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ 过程的相空间事例，这时Breit-Wigner分布已经包含在内了，但是不包含势垒因子和角分布。

5.3.1.0.1 截面 我们先把每个事例的截面计算出来（去掉Breit-Wigner），看看两种理论描述的计算结果，并求它们的比值，下面是打印出的数值信息：Helicity计算的截面、张量方法计算的截面和它们的比值。它们在计算精度内完全一致。

Helicity: 0.070130	L-S: 0.070130	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.353986	L-S: 0.353986	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.795525	L-S: 0.795525	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.410571	L-S: 0.410571	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.004812	L-S: 0.004812	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.704383	L-S: 0.704383	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.480020	L-S: 0.480020	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.710924	L-S: 0.710924	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.260103	L-S: 0.260103	Ratio: 1.000000

Helicity: 0.815119	L-S: 0.815119	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.080978	L-S: 0.080978	Ratio: 0.999999
Helicity: 0.820139	L-S: 0.820139	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.406128	L-S: 0.406128	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.870989	L-S: 0.870989	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.858621	L-S: 0.858621	Ratio: 1.000000

5.3.1.0.2 角分布 然后做足够多的统计抽样，在相空间分布的基础上，得到进一步含有我们前面构造的截面的完整分布的样本。这时我们来看各个角分布，先是 ρ 在 ψ 参考系中的极角的角分布，它是一个 $(1 + \cos^2 \theta)$ 分布；第二个是其方位角的角分布，它是平庸的；第三和第四是 π^+ 在 ρ 的参考系中的极角和方位角的角分布。可以看到，两种计算结果（直方图是Helicity，误差棒是Tensor）完全一致。这时，我们就完全验证了，对于 $\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ 过程，两种理论计算出的角分布和截面完全等价。

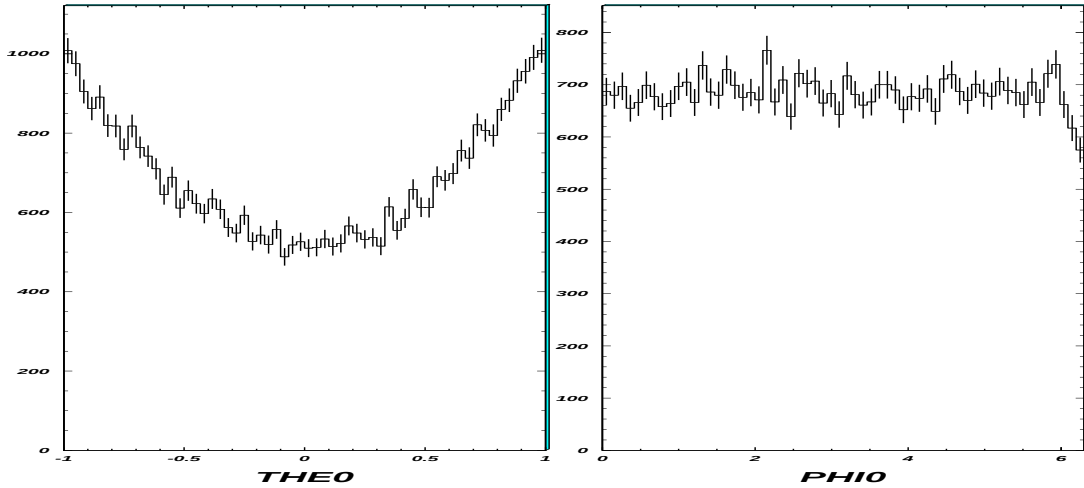


图 5.1: ρ 在 J/ψ 参考系中的 θ 、 ϕ 分布: $[(1 + \cos^2 \theta)$ 、1

5.3.2 $\psi \rightarrow \gamma \eta_c \rightarrow \gamma \rho^0 \rho^0 \rightarrow \gamma 2(\pi^+ \pi^-)$

第二个例子，我们采用相空间产生子，产生了 $\psi \rightarrow \gamma \eta_c \rightarrow \gamma \rho^0 \rho^0 \rightarrow \gamma 2(\pi^+ \pi^-)$ 过程的相空间事例，这时Breit-wigner分布已经包含在内了，但是也

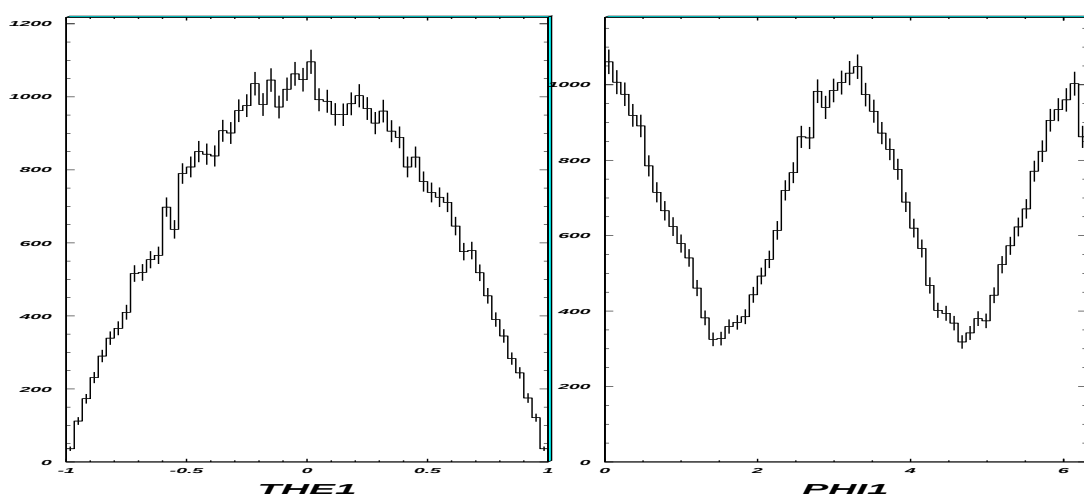


图 5.2: π^+ 在 ρ^0 静止系中的 θ 、 ϕ 分布 $[(\sin^2 \theta)$ 、 $(2 + \cos 2\phi')$]

不包含势垒因子和角分布。

5.3.2.0.3 截面 我们先把每个事例的截面计算出来（去掉Breit-Wigner），看看两种理论描述的计算结果，并求它们的比值，下面是打印出的数值信息：Helicity 计算的截面、张量方法计算的截面和它们的比值。它们在计算精度内完全一致（此时，这个道的衰变级数比较多，所以计算比较多，相应的舍入误差也会大一些，事实上我们也看到它的精度稍稍变差了一些，但是，仍然能够精确的说明两种理论的结果是一致的）。

Helicity: 0.706897	L-S: 0.706895	Ratio: 1.000002
Helicity: 0.023429	L-S: 0.023429	Ratio: 1.000001
Helicity: 0.320131	L-S: 0.320131	Ratio: 1.000002
Helicity: 0.032101	L-S: 0.032101	Ratio: 1.000001
Helicity: 0.283059	L-S: 0.283057	Ratio: 1.000005
Helicity: 0.154563	L-S: 0.154563	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.033133	L-S: 0.033133	Ratio: 1.000001
Helicity: 0.015787	L-S: 0.015787	Ratio: 1.000001
Helicity: 0.022249	L-S: 0.022249	Ratio: 1.000001

Helicity: 0.017373	L-S: 0.017373	Ratio: 1.000002
Helicity: 0.000034	L-S: 0.000034	Ratio: 1.000013
Helicity: 0.053734	L-S: 0.053734	Ratio: 1.000002
Helicity: 0.108506	L-S: 0.108506	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.028954	L-S: 0.028954	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.158179	L-S: 0.158179	Ratio: 1.000002
Helicity: 0.762752	L-S: 0.762752	Ratio: 1.000000
Helicity: 0.011012	L-S: 0.011012	Ratio: 1.000000

5.3.2.0.4 角分布 进一步做足够多的统计抽样，在相空间分布的基础上，得到进一步含有我们前面构造的截面的完整分布的样本。这时我们来看各个角分布，先是 η_c 在 ψ 参考系中的极角的角分布，它也是一个 $(1 + \cos^2 \theta)$ 分布；第二个是其方位角的角分布，它也是平庸的；第三和第四是 ρ 在 η_c 的参考系中的极角和方位角的角分布，它们都是平庸的；接着是 π^+ 在 ρ 的参考系中的极角和方位角的分布，一个是 $\sin^2 \theta$ 分布，另一个是平庸的；最后是，两个 ρ 的衰变平面的夹角，而且是用两种方法计算得到的，第一种是两个 π^+ 在各自母粒子系中的方位角之和，另一种是直接求两个平面的法线并求其夹角，两种结果完全一致，这个分布是 $\sin^2 \Delta\phi$ 分布，说明 η_c 的字称是负的。

值得进一步提一下的是，两个 ρ 的衰变平面的夹角的分布是 $\sin^2 \Delta\phi$ 还是 $\cos^2 \Delta\phi$ 体现了母粒子的字称，所以， 0^+ 和 0^- 的共振态的自旋的确定可以采用这种方法。实际上，当初 π^0 的字称就是采用这样的方法来确定的。至于这个夹角的计算有一个简单的变通方法，那就是两个 π^+ 在各自母粒子参考系的方位角的和，因为在母粒子质心中，两个 ρ 是背对背的，而两个 π^+ 的方位角恰好能代表这个平面的方向，而且由于采用了不同的坐标系，两个方位角刚好差一个负号，因此，两者的差就变成了和。

从所有这些角分布可以看到，两种计算结果（直方图是Helicity，误差棒是Tensor）完全一致。这时，我们就完全验证了，对于 $\psi \rightarrow \gamma\eta_c \rightarrow \gamma\rho^0\rho^0 \rightarrow \gamma 2(\pi^+\pi^-)$ 这个过程，即使含有辐射衰变，两种理论计算出的角分布和截面完全等价，它们都对辐射衰变作出正确的处理而得到一致的结果。

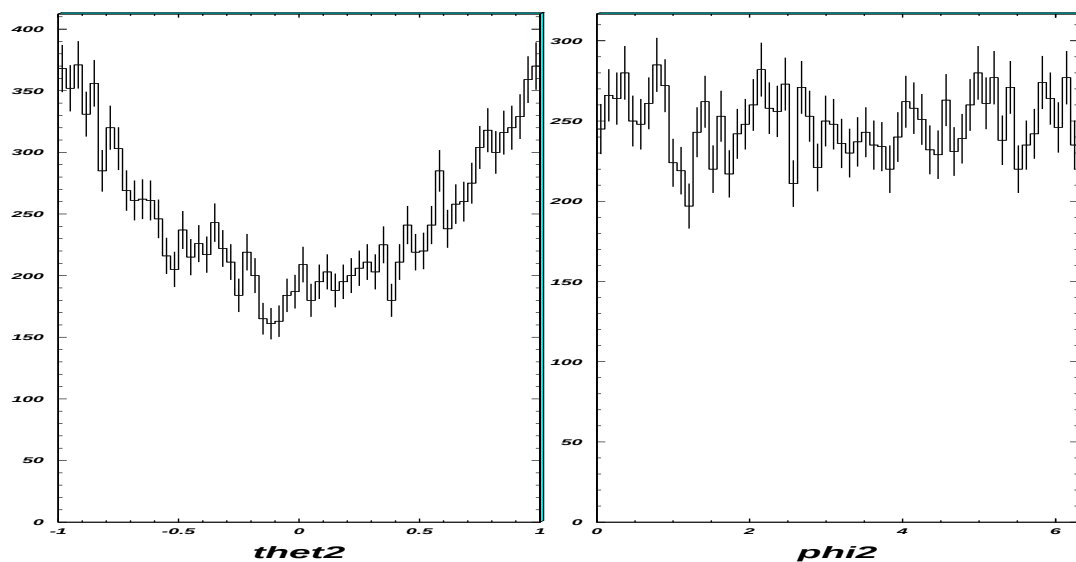


图 5.3: η_c 在 ψ 参考系中的 θ 、 ϕ 分布 $[(1 + \cos^2 \theta), 1]$

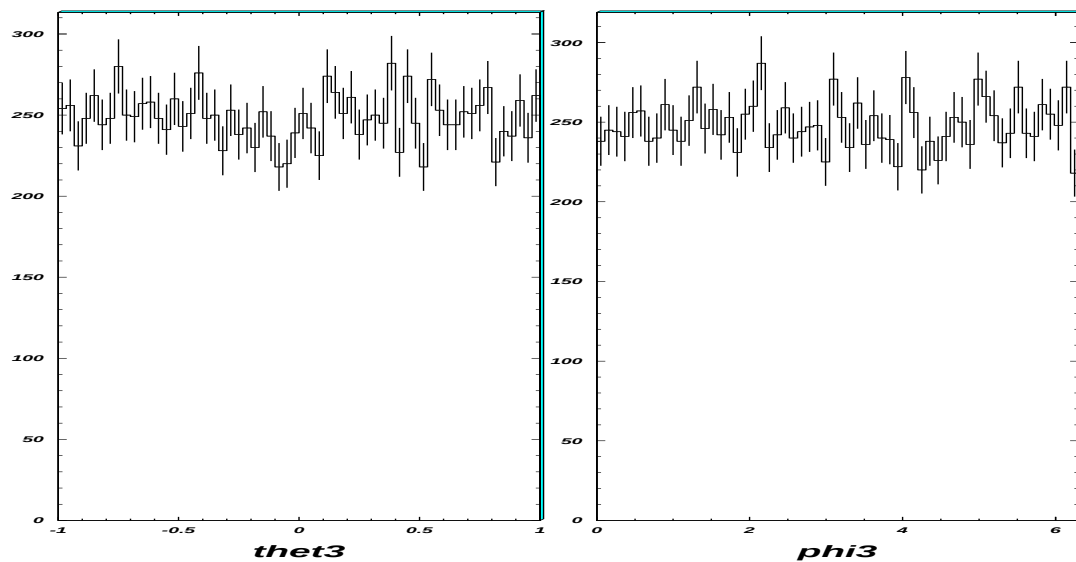


图 5.4: ρ^0 在 η_c 静止系中的 θ 、 ϕ 分布(1,1)

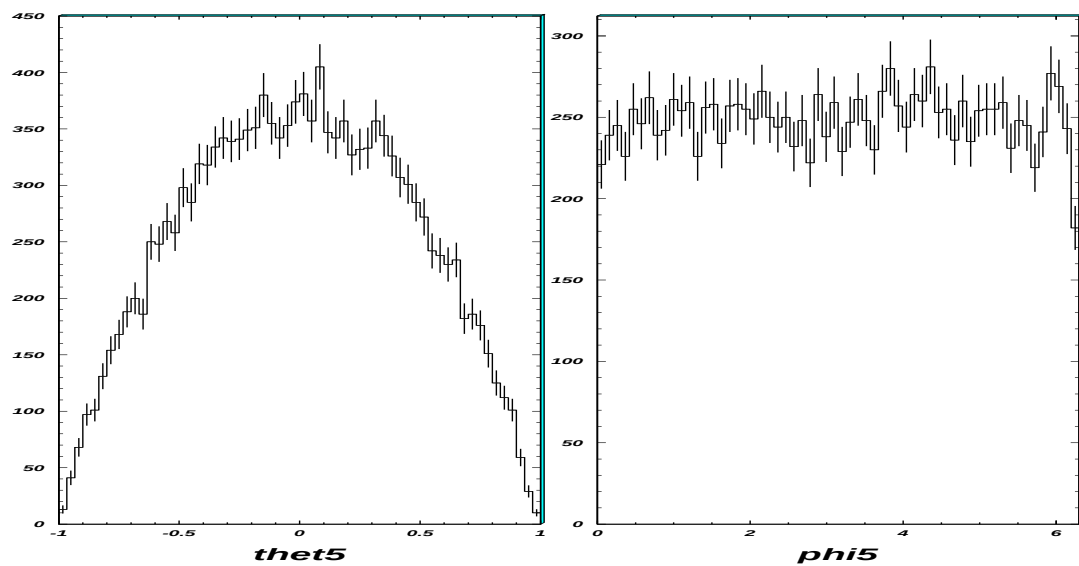


图 5.5: π^+ 在 ρ^0 静止系中的 θ 、 ϕ 分布 $[(\sin^2 \theta), 1]$

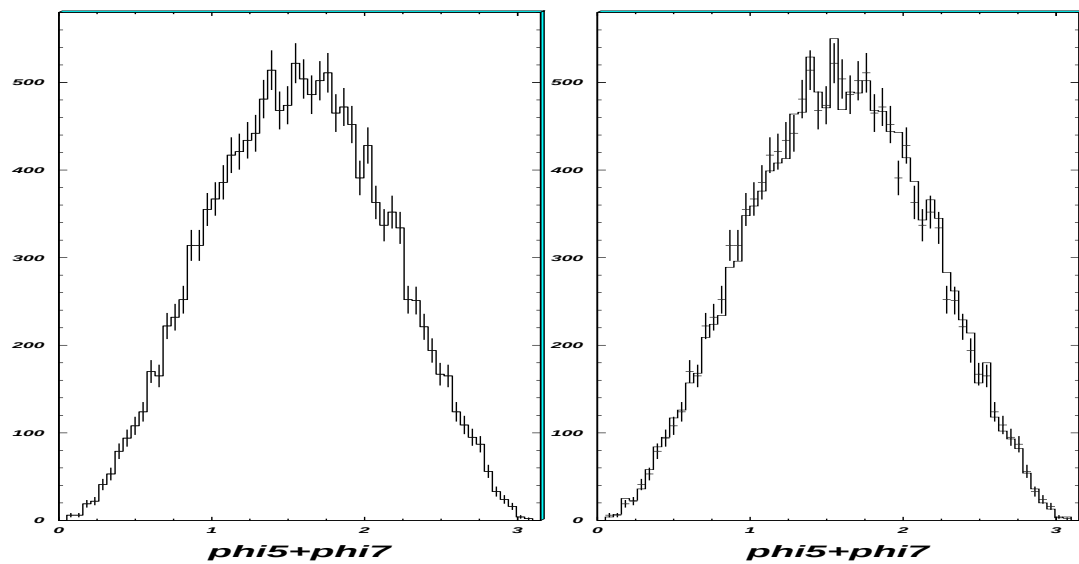


图 5.6: 两个 ρ^0 的极化平面夹角分布 $(\sin^2 \Delta\phi)$

5.4 小结

为了比较两种角分布描述理论的等价性，这里采用两个具体的例子，通过 Monte Carlo 抽样的方法，比较了每个事例的微分截面，发现它们的结果在计算机的误差范围内是完全一致的；同时把各个分布图一一做比较，可以形象的看出二者之间的一致性。

两个例子一个是普通介子的衰变过程，一个是含有光子（质量为零）的辐射衰变，为简单和保持严格性，两个例子都选取了只有一个分波的级联衰变过程；并且比较当中，对振幅的能量依赖部分采用了通用的势垒因子形式和一般的 Breit-Wigner 参数化公式。结果的严格一致，表明两种理论对于角分布的描述是完全等价的，至少对单个分波是一致的。原则上，这种比较属于归纳法，必须考虑所有可能的情况，而多个分波或者多个独立的 Helicity 振幅的情况下，数值比较会相对的复杂，因为必须考虑多个分波之间的耦合参数的振幅和相角，这些都是未知的。但是对于只有一个分波振幅和 Helicity 振幅的过程，它们之间有确定的变换关系，它们的耦合系数的相角可以忽略，大小也可以忽略，这时的比较是严格的。因此我们可以得出这样的结论：在仅仅考虑只有一个分波的情况下，采用一致的归一化方式，协变张量方法和 Helicity 方法对于角分布的描述是等价的；这种比较可以推广到多个分波的情形，只是形式会复杂的多。结合前面两章的讨论，我们可以得出结论：协变张量和 Helicity 两种理论对于角分布的描述是完全等价的。

第六章 Dalitz-Plot 分析和动力学参数化

庭院深深深几许？

杨柳堆烟，帘幕无重数。

—— 欧阳修·《蝶恋花》

当分波振幅中的角度部分分离出来，而且表达确定下来后，剩下的部分往往是由动力学决定的，大多数情况下，只能用某种模型来近似，或者采用各种唯象的参数化形式。比如有中间共振态出现时，采用 Breit-Wigner 传播子来描述，但是这只是在窄共振近似下才能很好的工作，一旦出现宽共振，比如 σ 粒子这样的，就必须选择其他的参数化方式。这章，我们就来讨论和动力学相关的一些常用的模型和参数化方式，但是，我们将会先介绍另一种比较常用的分析共振态自旋、宇称的工具，即 Dalitz-Plot 分析。

无论是分波分析还是 Dalitz-Plot 分析，往往由于它们在分析过程中采用了不同的理论公式，不同的中间共振态假设，导致不同的实验结果互相比较时的困难，所以，研究清楚一些不同的理论的相互联系，对于理解和比较不同实验的分析结果非常有益。关于角分布的理论，前面几章，我们已经作了细致的讨论。动力学上的一些一般的处理方式的联系和差异在本章将会做一些讨论。

6.1 Dalitz-Plot 分析

Dalitz-Plot 分析最早被用来确定轻介子的自旋和宇称。最近，Dalitz-Plot 分析被作为一种强有力的分析工具广泛应用到 D 物理和 B 物理的分析当中来。

粲介子的动力学性质在过去的十年中曾被广泛地研究，近期地粲介子多体衰变研究包含很多物理内容比如：Doubly-Cabibo 压制衰变、寻找 CP 破坏、T 破坏、 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合、轻介子的性质、 $\pi\pi$ 、 $K\pi$ 和 KK 的 S-wave 态的性质和四体末态的动力学等。同样粲偶素的三体衰变比如 3π 、 $KK\pi$ 末态等的 Dalitz-Plot 分析对于精确测量 ρ 和 K^* 及其激发态的共振参数、研究不同激发态的贡献等具有非常重要的意义。但是，这会比 D 和 B 介子的 Dalitz-Plot 分

析复杂一些，因为粲偶素的自旋不为零，从下面的分析可以看出，实际上这时已经是分波分析了。

另外分波分析方法也被广泛的应用到粲偶素的衰变动力学当中，如果同时采用 Dalitz-Plot 分析方法到这个领域，粲偶素有比较大的相空间，而且 BESIII 和 CLEO 将会采集非常大的数据样本，这样就会把对于 $\pi\pi$ 、 $K\pi$ 和 KK 的 S-wave 态的性质研究提高到一个非常高的精度，如果把这些作为 B 的 Dalitz-Plot 分析的输入和参考，可以降低它的系统误差。

6.1.1 运动学变量的数目

Dalitz-Plot 分析作为一种比较好的分析工具，好处在于，它只利用最少数目的运动学变量，却包含了最多的物理信息。我们知道实验上，三体末态的测量包含了12个运动学变量，但是如果假设初态和末态粒子自旋都为零的话，来自各个方面的限制，比如能动量守恒和粒子的质壳关系，能够使独立变量的数目大大减少，最后相空间只有两个独立的运动学变量（如表6.1所示），一般都选择为 m_{12}^2 和 m_{23}^2 ，分别为末态三个粒子中两两组合的不变质量平方中的两个。

表 6.1: Dalitz-Plot 分析中的独立变量数目。

末态3个四矢量	12
四动量守恒限制	-4
三个质壳条件	-3
空间各向同性（无自旋假设）	-3
总和	2

因此，只有初末态粒子都没有自旋的情况下，分析才是真正的 Dalitz-Plot 分析，因为此时 Dalitz-Plot 上将给出一个事例完整的信息，拟合公式里出现的独立变量个数等于二。如果初态或者末态任意一个粒子有自旋，则空间各向同性的假设将不再满足。具体来说，比如初末态包含一个矢量粒子的时候，相空间独立变量的数目会增加到4个；如果末态包含一对费米子/反费米子时，相空间独立变量的数目会增加到5个（具体的数目将会和矩阵元的具体细节有关）。这时，拟合公式中的独立变量个数多于两个，这种分析其实已经是分波

分析了，但是，无论如何，Dalitz-Plot 上只有两个独立变量的信息，当拟合结果投影到 Dalitz-Plot 上时，其他的运动学变量，其实是被积分掉了。可见，Dalitz-Plot 分析和分波分析的界限并不明显，Dalitz-Plot 分析只是特殊情形下的一种分波分析。

所以 Dalitz-Plot 分析对于 D ， B 的三体衰变到赝标介子的分析非常有用，因为这里用到了最小独立变量数目，而没有损失信息；但是如果分析比如 $D \rightarrow \phi\pi\pi$ 这样的衰变道，如果使用 Dalitz-Plot 分析，只用到两个独立变量，所以实验信息是有损失的，这种情况下，采用分波分析方法一般会更好一些，因为它不会损失任何来自实验的信息。

6.1.2 公式

如果假设初态和末态粒子自旋都为零，对于衰变典型的衰变过程 $R \rightarrow a + b + c$ ，衰变率的一般形式为：

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^2 32\sqrt{s^3}} |\mathcal{M}|^2 dm_{ab}^2 dm_{bc}^2, \quad (6.1)$$

其中 m_{ab}^2 和 m_{bc}^2 的散点图被称为 Dalitz-Plot。如果 $|\mathcal{M}|^2$ 是常数，则在运动学允许的区域，事例将会“均匀”分布，只和相空间的体积元成正比。而图上任何 $|\mathcal{M}|^2$ 的变化都意味着动力学的效应，这正是我们所关心的。

我们来考虑过程： $R \rightarrow r + c \rightarrow a + b + c$ 的振幅，其中 R 是 B ，或者 D 介子，而 a 、 b 、 c 是赝标介子， $\mathcal{M}_r$ 表示通过中间共振态 r 的衰变，这个过程的振幅可表示为：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r(J, L, l, m_{ab}, m_{bc}) &= \sum_{\lambda} \langle ab | r_{\lambda} \rangle T_r \langle cr_{\lambda} | R_J \rangle \\ &= Z(J, L, l, \vec{p}, \vec{q}) B_L^R(p) B_l^r(q) T_r(m_{ab}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中的求和是对中间态 r 的 Helicity 进行的， a 和 b 是 r 的子粒子， c 是所谓的旁观者； J 是 R 的总角动量， L 是 R 和 c 之间的轨道角动量， l 是 a 和 b 之间的轨道角动量（它和 r 的自旋相等）； $\vec{p}(p)$ 和 $\vec{q}(q)$ 分别是 c 和 a 在各自母粒子质心系中的三动量（模）； Z 描述末态粒子的角分布； B_L^R 和 B_l^r 分别是 rc 和 ab 产生势垒因子； T_r 是描述 r 共振态的动力学函数。值得说明的是，第二步的形式没有求和，因为如果初末态粒子都是没有自旋的赝标介子，则中间两级衰变都

只有一个分波，不要求和。实际上，往往是由于 Z , B_L 和 T_r 的不同参数化方式，还有选择不同的共振态 r 组合系列导致了不同实验结果比较的复杂化。

通常，共振态用 Breit-Wigner 函数来描述，最近也有很多分析采用带有 P-vector 近似的 K-matrix 公式来描述 $\pi\pi$ S 波。

$D \rightarrow abc$ 过程中的非共振 (non-resonant) 部分 (也叫直接接触项: contact-term) 的贡献被参数化为一个模和相角在 Dalitz-Plot 上保持不变的复常数。但是在相应的 B 衰变过程中，由于相空间大了很多，它的非共振部分的贡献的描述需要更复杂的参数化，这里不再做进一步地讨论。

6.1.3 角分布的描述

对于过程 $R \rightarrow r + c \rightarrow a + b + c$ 的角分布 Z ，协变张量方法和 Helicity 方法给出等价的描述，其中假设 a 、 b 、 c 自旋为零，且初态没有极化。我们记在 R 的静止系中， r 的极角和方位角为 θ_0, ϕ_0 ，而在 r 的静止系中， a 极角和方位角为 θ, ϕ ，其中 z -轴选为 c 的飞行方向，这些变量是被 Helicity 方法采用的，而协变张量方法中角变量不会显式的出现，如果要验证其角分布的正确性，需要进一步做数学形式的变换，同样记初态粒子的极化矢量为 $\phi(m)$ (当初态粒子自旋为 1 时)， $\tilde{T}^{(L)}$ 和 $\tilde{t}^{(l)}$ 分别是第一级和第二级的轨道角动量的波函数，记中间共振态的 Helicity 为 λ 。

下面我们把常用的过程做一简单介绍，过程我们把记为 $J \rightarrow L + l$ ，因为末态粒子没有自旋所以 l 就是中间态的自旋大小，而初态粒子如果也没有自旋的话，有 $L = l$ 。可以看出，下面只有前三种情况才最多只有两个独立的运动学变量： m_{ab}^2 和 θ ，这时才是真正的 Dalitz-Plot 分析。

6.1.3.1 $0 \rightarrow 0 + 0$

这时，因为初末态粒子和中间共振态都是没有自旋的，所以角分布函数 Z 是平庸的，无论对于协变张量方法还是 Helicity 方法都有相同的结果：

$$Z \propto 1. \quad (6.3)$$

有很多这类过程，比如： $D \rightarrow \sigma\pi^0, f_0\pi^0, \dots \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 。

6.1.3.2 $0 \rightarrow 1 + 1$

这类过程有： $D \rightarrow \rho^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, $\phi \pi^0 \rightarrow K^+ K^- \pi^0$ 。这类过程，因为角动量守恒，所以 λ 只能取零，两级都只有一个分波，所以不用对自旋指标求和。

有两点必须说明，第一因为势垒因子 B_L 不包含相对论修正因子，所以在 Z 表达式当中必须含有相对论修正因子，这在协变张量方法中是自动包含的，而在Helicity方法中，其实是手动的把Helicity 振幅中的能量依赖分为两部分（在前面的分波分析公式的讨论中，相对论修正因子是含在Helicity协变振幅当中的，从约化过程中可以明显的看出），一部分放到势垒因子当中，而另一部分则是相对论修正因子；第二点是，因为协变张量方法中的 Z 表达式中已经包含了一定的能量依赖，所以它和Helicity方法的势垒因子的形式不同（见表6.3），没有其分子部分。

采用Helicity方法，其中 $f_\lambda(\gamma)$ （ γ 和下面的席面的定义相同）定义方式和式3.23相同，则有：

$$\begin{aligned} Z &= D_{0\lambda}^0(0, \theta_0 \phi_0) f_\lambda(\gamma) D_{\lambda 0}^{*1}(0 \theta \phi) \\ &= \gamma d_{00}^1(\theta) \quad \lambda = 0 \\ &= \gamma \cos \theta, \end{aligned} \tag{6.4}$$

采用协变张量方法，有：

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{T}_\mu^{(1)}(p_a + p_b + p_c) \tilde{t}^{\mu(1)}(p_a + p_b) \\ &= \left[(p_a + p_b - p_c)_\mu - \frac{(p_a + p_b + p_c)_\mu (m_{ab}^2 - m_c^2)}{m_R^2} \right] \\ &\quad \left[(p_a - p_b)^\mu - \frac{(p_a + p_b)^\mu (m_a^2 - m_b^2)}{m_{ab}^2} \right] \\ &= (p_a + p_b - p_c)_i (p_a - p_b)^i \\ &= -2p_{ci} (p_a - p_b)^i \end{aligned}$$

计算中用到了 R 静止系和 $m_a = m_b$ 的条件。在我们考虑的问题当中，选择 $\vec{p}_c$ 作为 z -轴，记 $\gamma = \frac{E_r}{m_r}$, $\beta = \frac{p_r}{E_r}$ ，因为 a 和 b 的质量相等，所以在 r 静止系中

有 $E_a^* = E_b^* = E^*$ ，点积只剩下第三分量，故有：

$$\begin{aligned}
 Z &= -2p(p_a - p_b)^3 \\
 &= -2p[(\gamma\beta E^* - \gamma q_3) - (\gamma\beta E^* + \gamma q_3)] \\
 &= 4p\gamma(q \cos \theta) \\
 &= 4pq\gamma \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

从中可以看出，除了 $4pq$ 因子（ p 和 q 将会分别包含在各自所属的势垒因子中，在Helicity 方法的结果中势垒因子是另外考虑的）外，两种理论给出角分布的等价描述。

6.1.3.3 $0 \rightarrow 2 + 2$

这类过程有： $D \rightarrow f_2\pi^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 。这类过程，因为角动量守恒，所以 λ 只能取零，两级都只有一个分波，所以也不用求和。同样也需要注意相对论修正因子，同时注意势垒因子的差别，我们做下面的计算。

采用Helicity方法，其中 $f_\lambda(\gamma)$ 定义方式和式3.25相同，注意 $\lambda = 0$ ，只有一种取值，因此没有求和过程。角分布为：

$$\begin{aligned}
 Z &= D_{0\lambda}^0(0, \theta_0\phi_0)f_\lambda(\gamma)D_{\lambda 0}^{*2}(0\theta\phi) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{1}{3}\right)d_{00}^2(\theta) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right),
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

采用协变张量方法，注意到推导中用到了母离子静止和 a 和 b 的质量相等

的条件，结果有：

$$\begin{aligned}
Z &= \tilde{T}_{\mu\nu}^{(2)}(p_a + p_b + p_c) \tilde{t}^{\mu\nu(2)}(p_a + p_b) \\
&= \left[(p_a + p_b - p_c)_i (p_a + p_b - p_c)_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (p_a + p_b - p_c)^2 \right] \\
&\quad \left[(p_a - p_b)^i (p_a - p_b)^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} (p_a - p_b)^2 \right] \\
&= [(p_a + p_b - p_c) \cdot (p_a - p_b)]^2 + \frac{1}{3} (p_a + p_b - p_c)^2 (p_a - p_b)^2 \\
&\quad - \frac{1}{3} (p_a + p_b - p_c)^2 (p_a - p_b)^2 - \frac{1}{3} (p_a + p_b - p_c)^2 (p_a - p_b)^2 \\
&= [(p_a + p_b - p_c) \cdot (p_a - p_b)]^2 - \frac{1}{3} (p_a + p_b - p_c)^2 (p_a - p_b)^2 \\
&= 16p^2 q^2 \gamma^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{3} 16p^2 q^2 (\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta) \\
&= \frac{64}{3} \times p^2 q^2 \left[\left(\frac{2}{3} \gamma^2 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{3 \cos^2 \theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \right], \tag{6.7}
\end{aligned}$$

其中相对论因子稍稍有所差别，如果考虑到取非相对论极限，则有 $(\frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{1}{3}) = 1$ ，所以最后的结果在非相对论极限情况下可以变成：

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{64}{3} \times p^2 q^2 \left[\left(\frac{2}{3} \gamma^2 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{3 \cos^2 \theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{64}{3} \times p^2 q^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right), \tag{6.8}
\end{aligned}$$

这时和使用 Helicity 方法得到的结果在非相对论极限下是一致的。

6.1.3.4 $1 \rightarrow 1 + 1$

这类过程有： $\psi \rightarrow \rho\pi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ ，以及 $\psi \rightarrow K^*K \rightarrow KK\pi$ 等。因为此时初态粒子的自旋为1，所以一般情况下单纯的 Dalitz-Plot 分析是不够的，而且前面讨论了这个过程分波分析公式，这里不再详细推导。只是讨论一下，如果初态的极化不同时，物理上的角分布会有哪些不同的特征，以及在分析中应该如何来处理。

在第二章中我们用两种方法给出了这个过程的振幅形式，如果采用 Helicity 方法，可以显式地看到各级的具体角分布，这里我们仍采用 Helicity 方法来做讨论。已知振幅中的角度部分可以表达成：

$$\mathcal{A}(M) \propto D_{M1}^{1*}(\phi\theta 0) D_{10}^{1*}(\phi'\theta' 0) - D_{M-1}^{1*}(\phi\theta 0) D_{-10}^{1*}(\phi'\theta' 0), \tag{6.9}$$

因为初态的 ψ 一般是从正负电子对撞产生的，只有横向极化分量，也就是 $M = \pm 1$ ，这时角分布为：

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Phi} &\propto \sum_{M=\pm 1} |D_{M1}^{1*}(\phi\theta 0)D_{10}^{1*}(\phi'\theta' 0) - D_{M-1}^{1*}(\phi\theta 0)D_{-10}^{1*}(\phi'\theta' 0)|^2 \\ &= \frac{1}{2}[(1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta' + \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos 2\phi']. \end{aligned} \quad (6.10)$$

如果 ψ 是完全无极化的，比如由是某个过程的衰变末态，则角分布就会发生变化，需要把 $M = 0$ 的振幅分量加进来，

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Phi} &\propto \sum_{M=0,\pm 1} |D_{M1}^{1*}(\theta\phi)D_{10}^{1*}(\theta'\phi') - D_{M-1}^{1*}(\theta\phi)D_{-10}^{1*}(\theta'\phi')|^2 \\ &= \sin^2 \theta'. \end{aligned} \quad (6.11)$$

可以看到当初态的极化不同时，末态的角分布也有所不同的。在初态横向极化的情况下，第一级的衰变极角有非平庸的角分布，而无极化的情况下，第一步的极角的角分布是均匀的，这正是初态无极化的体现，而第二级的极角角分布依然不变，而方位角的角分布也变得平庸，也就是说，如果初态的 ψ 完全无极化，角分布会变得简单的多，这时只有两个有效的运动学变量，对于这样的情形，进行 Dalitz-Plot 分析就足够了，而对 ψ 有极化的情况则分波分析则是必须的，因为此时必须考虑第一级的角分布。

6.1.3.4.1 小结 从上面的例子可以看到，协变张量方法和 Helicity 方法给出角分布的等价描述。然而，Helicity 的使用范围更广一些，因为它处理辐射衰变非常方便，并且很自然的满足协变性。下面的表6.2给出了常见的一些角分布的形式，其中考虑了相对论修正因子，而略掉了 Helicity 振幅的其他部分。

6.1.4 势垒因子 B_L

前面我们已经提到，在 Helicity 和协变张量方法中出现的势垒因子的形式有一点差异，这里，我们把几种形式的最低的几阶都给出来，方便比较和查阅。其中 Helicity 方法采用的势垒因子是第一列，而协变张量方法采用的也是第一列中的形式，而是分子中只有归一化常数。

其中 $z = [qd]^2$ ， $z_0 = [q_0 d]^2$ ， d 是相互作用的典型力程。

表 6.2: 当 $J = 0, 1, 2$, 初态无极化时的角分布, 其中 $\xi^2 = \gamma^2 - 1$, $\gamma = \frac{E_r}{m_r}$ 。

$J \rightarrow L + l$	角分布
$0 \rightarrow 0 + 0$	uniform
$0 \rightarrow 1 + 1$	$(1 + \xi^2) \cos^2 \theta$
$0 \rightarrow 2 + 2$	$(\xi^2 + \frac{3}{2})^2 (\cos^2 \theta - 1/3)^2$
$1 \rightarrow 0 + 1$	uniform
$1 \rightarrow 1 + 0$	$1 + \xi^2 \cos^2 \theta$
$1 \rightarrow 1 + 1$	$\sin^2 \theta$
$1 \rightarrow 1 + 2$	$1 + (3 + 4\xi^2) \cos^2 \theta$
$1 \rightarrow 2 + 1$	$(1 + \xi^2)[1 + 3 \cos^2 \theta + 9\xi^2(\cos^2 \theta - 1/3)^2]$
$1 \rightarrow 2 + 2$	$(1 + \xi^2) \cos^2 \theta \sin^2 \theta$
$2 \rightarrow 0 + 2$	uniform
$2 \rightarrow 1 + 1$	$3 + (1 + 4\xi^2) \cos^2 \theta$
$2 \rightarrow 1 + 2$	$\sin^2 \theta$
$2 \rightarrow 2 + 0$	$1 + \frac{\xi^2}{3} + \xi^2 \cos^2 \theta + \xi^4 (\cos^2 \theta - 1/3)^2$
$2 \rightarrow 2 + 1$	$1 + \frac{\xi^2}{9} + (\frac{\xi^2}{3} - 1) \cos^2 \theta - \xi^2 (\cos^2 \theta - 1/3)^2$
$2 \rightarrow 2 + 2$	$1 + \frac{\xi^2}{9} + (\frac{\xi^2}{3} - 1) \cos^2 \theta + \frac{(16\xi^4 + 21\xi^2 + 9)(\cos^2 \theta - 1/3)^2}{3}$

表 6.3: 不同形式的势垒因子 B_L 。

L	$B_L(q)$	$B'_L(q, q_0)$
0	1	1
1	$\sqrt{\frac{2z}{1+z}}$	$\sqrt{\frac{1+z_0}{1+z}}$
2	$\sqrt{\frac{13z^2}{(z-3)^2+9z}}$	$\sqrt{\frac{(z_0-3)^2+9z_0}{(z-3)^2+9z}}$
3	$\sqrt{\frac{277z^3}{z^3+6z^2+45z+225}}$	$\sqrt{\frac{z_0^3+6z_0^2+45z_0+225}{z^3+6z^2+45z+225}}$
4	$\sqrt{\frac{12746z^4}{z^4+10z^3+135z^2+1575z+11025}}$	$\sqrt{\frac{z_0^4+10z_0^3+135z_0^2+1575z_0+11025}{z^4+10z^3+135z^2+1575z+11025}}$

6.1.5 动力学函数 T_r 和 Breit-Wigner 公式

动力学函数 T_r 是从 S 矩阵得来的。一般来说，表示末态 f 耦合到初态 i 的振幅一般表为： $S_{fi} = \langle f|S|i \rangle$ ，其中散射算符 S 是么正的，满足 $SS^\dagger = S^\dagger S = I$ 。则转变算符（transition operator）定义为除去初末相同（ $f = i$ ）的概率外的部分：

$$S = I + 2iT = I + 2i\{\rho\}^{1/2}\hat{T}\{\rho\}^{1/2}, \quad (6.12)$$

其中 I 是恒等算符， $\hat{T}$ 是 Lorentz 不变的转变算符， ρ 对角的相空间矩阵，其中 $\rho_{ii} = 2q_i/m$ ， q_i 是 r 的第 i 个衰变道末态粒子 a 在 r 质心系中的动量。对单道过程和 S 波情形： $S = e^{2i\delta}$ 满足么正性，则，

$$\hat{T} = \frac{1}{\rho} e^{i\delta} \sin \delta. \quad (6.13)$$

一般动力学函数经常用三种形式来描述。Breit-Wigner 公式是最简单的一种——它是 T 矩阵的极点的一阶 Taylor 展开。K 矩阵方法是更一般形式，它可以描述 T 矩阵的多个极点和耦合道的情形。Flatté 分布则被用来描述近阈共振态，与之等价是：一个极点、两个耦合道的 K 矩阵。

一般描述一个衰变到两个无自旋粒子末态 a 和 b 的 Breit-Wigner 公式的形式是：

$$T_r(m_{ab}) = \frac{1}{m_r^2 - m_{ab}^2 - im_r \Gamma_{ab}(q)}, \quad (6.14)$$

其中的“质量依赖的”宽度 Γ 是：

$$\Gamma = \Gamma_r \left(\frac{q}{q_r} \right)^{2L+1} \left(\frac{m_r}{m_{ab}} \right) B'_L(q, q_0)^2, \quad (6.15)$$

其中的 $B'_L(q, q_0)$ 是表6.3中的势垒因子。Breit-Wigner 公式能比较好的描述一个共振态的前提是：这个共振态远离其他共振态（孤立的）而没有叠加，远离阈，共振宽度远小于质量（窄共振假设）。对于比较宽的共振态比如 ρ 、 $\rho(1450)$ 和 σ 粒子等，有更复杂的参数化形式。

当有若干个动力学函数被参数化为多个 Breit-Wigner 相干叠加的时候，有可能会破坏么正性。避免这种情况的一种选择是采用 K 矩阵的方法。

而把阈附近形状近似为一个共振态会使 Breit-Wigner 变形。这种情形一般用 Flatté 公式来描述。

实际上，大多数情况下的分析中采用的是所谓的 Isobar 模型，这个模型是有局限性的。Isobar 包含了下面的假设：

- s -道的反应；
- 任何两体组合都包含末态相互作用；
- 末态相互作用是主要的；
- 所有振幅可以相干叠加。

而它的局限性来自于两种效应不能忽略：

- t -道交换的贡献；
- 再散射（Rescattering）效应。

实际上，分波分析和很多 Dalitz-Plot 分析都采用了 Isobar 模型，而对它的局限性考虑不足，尤其是不满足么正性的要求。而下一节介绍的 K-Matrix 正是一种可能的选择。

6.2 么正性和 K-Matrix

前面提到当有若干个动力学函数被参数化为多个 Breit-Wigner 相干叠加的时候，有可能会破坏么正性。而么正性是一种非常强的假设，它是几率守恒的必然要求。而解决这种问题的一种选择是所谓的 K 矩阵的方法，这里我们就来简单地介绍一下 K 矩阵方法的内容。

6.2.1 K-Matrix

首先从两体散射过程中的相对论么正性要求出发对散射的转换算符有如下的关系式：

$$T_{jk} - T_{jk}^\dagger = 2iT_{jp}^\dagger \rho_{pq} T_{qk} , \quad (6.16)$$

其中，对一般包含有 N_{ch} 个强耦合道的情况来说，则转换算符是 $N_{ch} \times N_{ch}$ 的矩阵，我们来用不同的拉丁字母表示不同的初末态； ρ 是一个对角矩阵，代表不同末态的密度： $\rho_{ij} = \delta_{ij}\rho_j$ 。在由两个稳定粒子组成末态时， ρ_j 由下式给出：

$$\rho_j(m^2) = \sqrt{\left[1 - \frac{(m_{ja} + m_{jb})^2}{m^2}\right]\left[1 - \frac{(m_{ja} - m_{jb})^2}{m^2}\right]}, \quad (6.17)$$

其中， m_{ja} 和 m_{jb} 是第 j 道中的介子质量 m 是散射过程中的不变质量。如果末态含有共振态，也有类似的结果。同时必须要求 ρ 在物理阈下的解析连续性，因为考虑到振幅解析性质，这是必须的。

我们通过下式来定义 K-Matrix，

$$\hat{K}^{-1} = (\hat{T}^{-1} + i\rho), \quad (6.18)$$

则 T 矩阵可以表示成：

$$\hat{T} = \left(I - I\hat{K}\rho\right)^{-1} \hat{K}, \quad (6.19)$$

这样定义的 K-Matrix 满足厄米性等性质，因之也就自然保证了 T-Matrix 的么正性。K-Matrix 的基本性质列举如下：

- 厄米性，这点保证了 T-Matrix 的么正性。

$$K = K^\dagger, \quad (6.20)$$

- 因为时间反演对称，K-Matrix 是对称的。
- 和 T-Matrix 相互对易，即

$$[K, T] = 0. \quad (6.21)$$

K-Matrix 一般表示为对散射中可能出现的相关共振极点求和，为了描述可能的强子道的交换力，于是通常会加上一个常数或者一个随质心能量缓变的光滑函数（也就是所谓的非共振本底项 —— non-resonant background term）。下面是 K-Matrix 的一般形式：

$$\hat{K}_{ij} = \left(\sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha i}^*(m) g_{\alpha j}(m)}{(m_{\alpha}^2 - m^2) \sqrt{\rho_i \rho_j}} + \psi_{ij} \mathcal{B} \right) \mathcal{Z}, \quad (6.22)$$

其中 m_α 和 $g_{\alpha i}$ 分别是 K-Matrix 中第 α 个极点的质量和分宽度, $\psi_{ij}\mathcal{B}$ 描述非共振本底项, 而 $\mathcal{Z}$ 则是描述 $\pi\pi$ 或者 $K\pi$ S-波散射振幅 Alder zero 的不变质量的函数。只要选择 $\psi^\dagger = \psi$, 就可以保证 K-Matrix 的厄米性以及 T-Matrix 的么正性; 如果时间反演守恒, 则 $g_{\alpha i}$ 和 ψ 就是实的, 于是可以证明 K-Matrix 是对称的。

$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{Z}$ 的显式表达式如下:

$$\mathcal{B} = \frac{1 + s_0}{m^2 + s_0} \quad \mathcal{Z} = \frac{2m^2 - m_\pi^2}{2m^2}, \quad (6.23)$$

其中 s_0 是自由参数, 而 m_π 是 π 介子的质量。

在单道、单个极点且忽略非共振等过程贡献的特殊情况下, 我们可以得到:

$$K = \frac{g_i(m)g_j(m)}{m_0^2 - m^2}, \quad (6.24)$$

相应的 T-Matrix 为:

$$T = K(1 - iK)^{-1} = \frac{g_i(m)g_j(m)}{m_0^2 - m^2 - ig_i(m)g_j(m)}, \quad (6.25)$$

结果正是相对论情况下的 Breit-Wigner 公式。如果是另一种特殊情况: 单道、两个极点, 我们有:

$$K = \frac{g_{\alpha i}(m)g_{\alpha j}(m)}{m_\alpha^2 - m^2} + \frac{g_{\beta k}(m)g_{\beta l}(m)}{m_\beta^2 - m^2}, \quad (6.26)$$

在这种情况下, 如果两个极点相距比较远, 也就是: $|m_\alpha - m_\beta| \gg \Gamma_\alpha(m)$ or $\Gamma_\beta(m)$, 则 T-Matrix 可以近似的表达成两个 Breit-Wigner 的和, $T(K_\alpha + K_\beta) = T(K_\alpha) + T(K_\beta)$, 即

$$T \simeq \frac{g_{\alpha i}(m)g_{\alpha j}(m)}{m_\alpha^2 - m^2 - ig_{\alpha i}(m)g_{\alpha j}(m)} + \frac{g_{\beta k}(m)g_{\beta l}(m)}{m_\beta^2 - m^2 - ig_{\beta k}(m)g_{\beta l}(m)}, \quad (6.27)$$

但是, 如果两个极点相距太近的话, 式6.27将不再适用, 因为此时的 T-Matrix 会严重破坏么正性条件。

6.2.2 应用到产生过程

K-Matrix 一般是被用来描述散射过程中的S-道的共振态的产生的，但是，也可以推广使用到产生过程中来描述其中的共振态，比如粲介子的衰变过程。这种推广是基于 Isobar 模型的，即假设被 K-Matrix 描述的两体系统和其余末态没有相互作用。这个假设的有效性是随着不同的道而变化的，对于比如散射实验 $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ ，辐射衰变 $J/\psi \rightarrow \gamma \pi \pi$ ，以及半轻衰变比如 $D \rightarrow K \pi l \nu$ ，这个假设能够被很好的满足；但是对于 $D \rightarrow \pi \pi \pi$ 和 $p \bar{p} \rightarrow \pi \pi \pi$ ，有效性却非常有限。

在末态相互作用的假设框架下，表示这种“产生”过程的转变算符 F 必须满足如下形式的么正关系：

$$F_j - F_j^* = 2i F_p^* \rho_{pq} T_{qj} , \quad (6.28)$$

如上所描述的产生振幅 F 是含有 N_{ch} 分量的矢量，对比6.16和6.28，我们可以得到：

$$F_j = \sum_{q=1}^{N_{ch}} \alpha_q T_{qj} , \quad (6.29)$$

额外的约束要求 α_q 必须是实的。6.29 表达的产生和散射振幅之间的基本联系是在同一框架下分析散射和产生数据的全部基础。

把6.16代入6.29，并且定义

$$P = \alpha K , \quad (6.30)$$

于是我们得到产生过程的情况下，两体 Lorentz 不变振幅 $\hat{F}$ ：

$$\hat{F}_i = \left(I - i \hat{K} \rho \right)^{-1} \hat{P} . \quad (6.31)$$

把6.22代入到6.30将引出如下定义的产生和本底参数：

$$\beta_\alpha = \sum_{q=1}^{N_{ch}} \alpha_q g_{\alpha q} \quad \phi_k = \sum_{q=1}^{N_{ch}} \alpha_q \psi_{qk} , \quad (6.32)$$

这样就给出相应的 P-vector 表达式（这时从 K-Matrix 忽略 $\mathcal{Z}$ 函数）：

$$P_k = \left(\sum_{\alpha=1}^{N_P} \frac{\beta_\alpha g_{\alpha k}}{m_\alpha^2 - m^2} + \phi_k \mathcal{B} \right) . \quad (6.33)$$

考虑到 P-vector 的表达式只有在 Isobar 模型的假设下严格成立，它要求只能一次同时考虑两体的相互作用。但是这个假设在很多情况下并没有理论基础，此时，应该把系数 α_q 当作复数处理，并且需要放开6.32中的约束，于是产生参数 β_α 和本底项系数 ϕ_k 都会成为复的，而且是独立的参数。

6.2.3 宽共振和 Breit-Wigner 公式

在分析当中经常会遇到非常宽的共振态，比如 ρ , $\rho(1450)$, σ , κ 等，它们中有的宽度非常大，已经和质量基本相当，而且还是非常靠近阈的，这就更加不满足 Isobar 的要求，那么如果还用平常的 Breit-Wigner 公式对它们来进行参数化，肯定是难以让人满意的。所以对于一些宽共振的参数化，实验和理论都有不同的尝试。这里我们来做一些简单的回顾。

6.2.3.0.2 ρ 家族共振态的参数化 最简单的选择当然是相对论形式的 Breit-Wigner 公式6.25，有时其中分母中的虚部中的质量会被换为 $\sqrt{s}$ ，即：

$$BW(s) = \frac{1}{s - m_\rho^2 + i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s)}, \quad (6.34)$$

其中 $\Gamma_\rho(s)$ 是含能量依赖的共振态宽度。实验上往往有不同的方式对 $\Gamma_\rho(s)$ 进行参数化。比如KLOE用来分析 $\phi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 和SDN用来分析 $\tau \rightarrow 2\pi, 4\pi$ 的 Kühn-Santamaria 数化：

$$\Gamma_a(s) = \Gamma_a(m_a^2) \left(\frac{m_a^2}{s} \right) \left(\frac{p(s)}{p(m_a^2)} \right)^{2n+1}. \quad (6.35)$$

而另一种参数化形式，即 Hipple-Quigg (HQ)形式，它被SDN组用在分析 $\rho, \omega \rightarrow \gamma\pi^0\pi^0$ 中，

$$\Gamma_a(s) = \Gamma_a(m_a^2) \left(\frac{m_a^2}{s} \right) \left(\frac{p(s)}{p(m_a^2)} \right)^{2n+1} \frac{B_n^2(p(s))}{B_n^2(p(m_a^2))}. \quad (6.36)$$

还有一种形式更为复杂的 Breit-Wigner 参数化，叫做 Gounaris-Sakurai (GS) 形式，曾被ALEPH, CMD和BES等合作组采用过，具体形似如下：

$$BW(a \rightarrow bc) = \frac{m_a^2 + dm_a\Gamma_a(m_a^2)}{s_{bc} - m_a^2 - H(s_{bc}) + i\sqrt{s_{bc}}\Gamma_a(s_{bc})}, \quad (6.37)$$

其中的 $\Gamma(s)$ 和KS参数化中的一样，其他部分定义如下：

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \Gamma_a(m_a^2) \frac{m_a^2}{p(m_a^2)^3} \left\{ p(s)^2 [h(s) - h(m_a^2)] - (s - m_a^2) p(m_a^2)^2 \frac{dh(s)}{ds} \Big|_{s=m_a^2} \right\}, \\
 \text{with } h(s) &= \frac{2}{\pi} \frac{p(s)}{\sqrt{s}} \ln \frac{\sqrt{s} + 2p(s)}{2m_{\pi\pm}}, \\
 \frac{dh(s)}{ds} \Big|_{s=m_a^2} &= h(m_a^2) \left[\frac{1}{2p(m_a^2)^2} - \frac{1}{2m_a^2} \right] + \frac{1}{2\pi m_a^2}, \\
 d &= \frac{3m_{\pi\pm}^2}{\pi p(m_a^2)^2} \ln \frac{m_a + 2p(m_a^2)}{2m_{\pi\pm}} + \frac{m_a}{2\pi p(m_a^2)} - \frac{m_a m_{\pi\pm}^2}{\pi p(m_a^2)^3}.
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

用这几种 Breit-Wigner 参数化来描述 $\rho(770)$ 这样的共振态，各自出于不同的物理上的考虑，效果也有所不同。总的来说，GS参数化的描述会好一些，但是，我们可以看到，关于动力学部分的描述，目前都局限于各种唯象的模型，最终由实验数据来鉴别其中的优劣。

6.2.3.0.3 σ 和 κ 参数化 最近粒子物理中关于 σ 和 κ 实验和理论的研究是一个热点，而关于这两个粒子存在的讨论也非常多。由于它们的质量和宽度大小相当，而且就在阈附近，是非常特殊的一种共振态，对于它们的参数化也是一个非常典型的问题，这里列举出常用的几种参数化，并做一点讨论，以此来说明关于宽共振的描述的特殊性。

σ 粒子出现在 $\pi\pi$ 的 s -wave 当中，是同位旋标量的介子，由于它的宽度非常大，而且又是在 $\pi\pi$ 的产生阈附近，所以在实际分析当中经常除了采用普通的常数宽度的 Breit-Wigner 公式外，还有其他的努力。其实他们实际上都是对宽度的能量依赖做某些考虑，比如一般 Breit-Wigner 公式都写成如下形式：

$$BW = \frac{1}{s - m^2 + im\Gamma(s)}, \tag{6.39}$$

但是，宽度会做不同的考虑，

- 当把宽度处理成常数时，就是常见的那种 Breit-Wigner 公式的形式：

$$\Gamma(s) = \Gamma; \tag{6.40}$$

- 最常见的一种考虑宽度能量依赖的形式是考虑到宽度和末态粒子的动量成正比，这个曾在E791的分析中使用 [17]。

$$\Gamma(s) = \rho\Gamma = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}}\Gamma ; \quad (6.41)$$

- 但是E791的这种参数化形式，有一个问题，就是在 $\pi\pi$ 阈下的能量实轴上有一个多余的虚态 [19]，而在郑汉青等人的工作当中，考虑到剔除掉这个虚态的贡献后给出了一种参数化形式，我们称之为P.K.U. Ansatz，如下：

$$\Gamma(s) = \rho \frac{s}{m^2} \Gamma = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \frac{s}{m^2} \Gamma . \quad (6.42)$$

- 关于 σ 粒子的另一种形式比较复杂的参数化由邹冰松等人给出，其中考虑了所谓的Adler zero 约束 [20]，形式如下：

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= g_1 \frac{\rho_{\pi\pi}(s)}{\rho_{\pi\pi}(M^2)} + g_2 \frac{\rho_{4\pi}(s)}{\rho_{4\pi}(M^2)}, \\ g_1 &= f(s) \frac{s - m_\pi^2/2}{M^2 - m_\pi^2/2} \exp[-(s - M^2)/a], \end{aligned} \quad (6.43)$$

这里关于 $\rho_{\pi\pi}$, $\rho_{4\pi}$ 和 $f(s)$ 与文献 [18] 中的一致。

另一种出现的阈值附近，和 σ 类似的宽共振是出现在 $K\pi$ s-wave中的叫做 κ 的介子，它的很多性质和 σ 非常相似，只是同位旋是 $\frac{1}{2}$ 。在BES的分析中 [21]，也考虑了几种它的Breit-Wigner 参数化形式，但是，这些参数化的考虑基本和 σ 的情况类似，宽共振、近阈和剔除多余的虚态，只是它的末态粒子质量不同，带来一些运动学上的差异而已。这里不再赘述。

6.3 一点讨论和小结

作为粒子物理中两种常用的分析工具，Dalitz-Plot 分析和分波分析，其本质是一样的，Dalitz-Plot 其实是分波分析的一类特例。它们的角分布部分不管采用哪种方法来描述，都是从严格的对称性理论出发的，所以结果也是严格的。然而，在动力学的参数化描述方面，它们采用了类似的方法，也面临类似的问题需要解决。

第七章 关于拟合的讨论

但闻拙速，未睹工久也。

——《孙子·作战第二》

工欲善其事，必先利其器。

——《论语·魏灵公》

分波分析是针对大统计量的数据样本一种非常重要的实验手段，可以尽可能多地从实验数据抽取其中的信息。当不变振幅的构造方案确定下来时：即角分布的描述和动力学的参数化方式确定下来时，于是我们的物理问题，最终转化成数学问题，就是根据角分布的相关理论和一些动力学模型得到截面，并考虑到实验的效率（探测分辨）构造一个有效的目标函数；然后对这个目标函数进行数学计算：求极值（一般是最小值），最终得到我们关心的有物理意义的参数（质量宽度，振幅间的相位差和比例）的大小和误差，以及其他我们关心的物理量（分之比等）。而这种问题的目标函数一般会很复杂，而且由于数据样本的大统计量，计算量也会非常大，所以，应用计算机和相应的求最小化的数学工具就是我们的必然选择。

7.1 常见最小化方法简介

最小化问题是一个专门的应用数学分支。根据目标函数的性质一般分为对离散函数的最小化和连续函数的最小化，当然处理这两种问题的方法也截然不同。一般来说分波分析的目标函数是一个形式复杂的连续函数。而对这类问题最小化的主要算法分为两类：直接使用目标函数的函数值的直接法；另一类是涉及到对目标函数求导（一阶导乃至二阶导）的解析方法。两类方法各有优缺点：直接法通用性强，稳定性好，但收敛速度慢；解析方法虽然一般收敛比较快，但是由于要求导数，所以计算量和存储量都比较大，而且对复杂函数及没有解析表达式的目标函数使用比较困难，导致稳定性不够好。实际情况中，最小化过程中一般都有局域最小的问题，这是一个没有从根本上严格解决的问题，因此，没有哪种最小化方法能够对任何最小化问题都普遍有效，往往一个

成功的最小化方案是采用一种策略综合使用多种最小化算法达到最佳效果。关于最小化方法的讨论可参阅[22, 24, 25], 前二者有比较概括的讨论, 通过阅读学习我们能很快对优化算法建立起初步了解; 而后者则是专门讨论各种最优化方法的著作, 学习将会花比较多的时间和精力。

这里值得一提的是, 高能物理领域使用比较广泛的专门做函数最小化的软件包MINUIT (Function Minimization and Error Analysis, 函数最小化和误差分析), 作者是CERN的 F. James。这个软件包经过了长期 (早于1970年就开始使用) 的和广泛的使用和检验, 不断完善 (已经有了C++版本的接口), 是目前高能物理领域比较通用的一个软件包, 它采用了比较成熟的算法, 经过大量测试证明性能可靠并且是功能比较强的一个最小化工具。

下面我们对最小化方法做一点简单介绍。

7.1.1 问题的定义

最优化问题的一般定义为:

$$\begin{aligned} \min f(\vec{\alpha}), \\ \text{s.t. } \vec{\alpha} \in X. \end{aligned} \quad (7.1)$$

其中, $\vec{\alpha} \in R^n$ 是决策变量, $\vec{\alpha}$ 是待优化的参数, $f(\vec{\alpha})$ 是目标函数, $X \subset R^n$ 问题的约束集或者可行域。特别的, 如果约束集 $X = R^n$, 则最优化问题(7.1)称为无约束最优化问题。

最优化方法通常采用迭代方法求它的最优解, 其基本思想是: 给定一个初始点 $\vec{\alpha}_0 \in R^n$, 按照某一迭代规则产生一个点列 $\{\vec{\alpha}_k\}$, 使得当 $\{\vec{\alpha}_k\}$ 是有穷点列时, 其最后一个点是最优化模型问题的最优解; 使得当 $\{\vec{\alpha}_k\}$ 是无穷点列时, 它有极限点, 其极限点是最优化模型问题的最优解。一个好的算法应该具有的典型特征为: 迭代点 $\vec{\alpha}_k$ 能稳定地接近局部极小点 $\vec{\alpha}^*$ 的邻域然后迅速收敛于 $\vec{\alpha}^*$ 。当给定的某种收敛准则满足时, 迭代即终止。

最优化方法的基本结构为:

给定初始点 $\vec{\alpha}_0$,

(a) 确定搜索方向 $\vec{d}_k$, 即依照一定规则, 构造 f 在 $\vec{\alpha}_k$ 点处的下降方向作为搜索方向。

(b) 确定步长因子 α_k , 使目标函数值有某种程度的下降。

(c) 令 $\vec{\alpha}_{k+1} = \vec{\alpha}_k + \alpha_k \vec{d}_k$, 若 $\vec{\alpha}_{k+1}$ 满足某种终止条件, 则停止迭代, 得到近似最优解。否则, 重复以上步骤。

7.1.2 直接方法

只使用目标函数的函数值的最小化方法称为直接方法。实际问题中的目标函数有时非常复杂, 有时甚至没有明显的解析表达式, 只有函数值与变量的对应关系, 因而求导很难, 或者根本不可能, 有时虽然可用数值方法求出一阶、二阶导数, 但是大大的增加了计算量。在这种情况下, 直接方法比较适宜。直接方法的优点是对目标函数的解析性质没有太多要求, 因而适用面比较广, 算法稳健性比较好, 不容易失败; 反过来正因为它不利用函数的导数等信息来判断函数的变化趋势, 所以收敛较慢, 计算量往往按变量维数 n 的方次增加, 导致它在高维问题应用上的困难。

多维问题的直接方法主要有: 格点搜索法(随机搜索法)、坐标轮换法、Rosenbrock法和单纯形法(Simplex)等。其中格点搜索法顾名思义, 是把问题的可行域分成格点, 逐个计算比较, 因而效率比较低, 使用Monte Carlo技巧根据某些分布(均匀分布或者正态分布)随机选择搜索点会有所改善, 但仍然很难让人接受。坐标轮换法是在一点上保持其他变量不变, 只改变一个, 轮流操作, 然后把 n 个结果比较后确定搜索方向, 这是一种古老的搜索方法, 对于多维问题, 计算次数仍然比较大。Rosenbrock法是把上面方法加以改进, 在每次迭代当中都构造出一组互相正交的向量作为新的坐标方向, 比坐标轮换法改善很多, 但是对高维问题收敛速度依然太慢。单纯形法(Simplex)是20世纪60年代提出的一种优化方法, 它是在问题的可行域上定义单纯形, 而问题的最优解只能出现在单纯形的顶点上, 然后不断比较单纯形顶点上的目标函数值, 同时对单纯形做反射、延伸、收缩和缩边迭代运算, 单纯形法的优点是不必计算目标函数的梯度, 也不必按照给定的方向进行一维搜索, 每次迭代只需计算一到两次函数值。一般来说单纯形方法是比较有效的一种直接方法, MINUIT 中就有Simplex 这种直接方法, 可供用户选择使用。

7.1.3 解析方法

利用目标函数一阶和二阶导数的方法称为解析方法。因为函数的导数描述函数的变化规律, 所以利用导数的信息可以加速向极小点收敛的速度; 而且,

拟合参数误差的估计需要用到目标函数的导数，所以能给出拟合参数合理可信的误差，是解析方法的另一个优点。但是在实际问题中，计算导数往往对目标函数的解析性有较高的要求，如果导数计算不了，此方法就会失败。而且计算导数一般使用差分法，需要大量计算函数值，因此也会有比较大的计算量。

主要的比较常见的解析方法有最速下降法、牛顿法、共轭梯度法和变尺度法。大多数从二次函数模型导出的解析方法在实际上常常是有效的，主要原因是一般函数在极小点附近常可用二次函数很好地进行近似。

最速下降法又叫梯度法，因为负梯度是函数下降最快的方向，所以就直觉地选择 $x_{k+1} = x_k - \alpha \Delta f(\vec{x}_k)$ ，它的优点是迭代过程简单，从远离极小点的地方出发也能收敛；缺点是收敛比较慢。牛顿法不但考虑了梯度，而且考虑了二阶导数，即考虑了梯度变化的趋势，因此比最速下降法收敛快，但是它要计算二阶导，所以计算量比较大，而且要求二阶导数矩阵(HESSE矩阵)必须正定，还有一个缺点是对非二次函数效果不好。作为这两种方法的改进提出的共轭梯度法和变尺度法，其实二者都是共轭方向法，克服了最速下降法收敛慢，牛顿法计算量大的不足。其中变尺度法是在一般情况下优于共轭梯度法，它兼有牛顿法和共轭梯度法二者的优点，是最小化问题中比较通用的方法。

7.1.4 其它优化算法

近年来，数值优化方法方面有很多进展，出现了很多的新的优化方法，一般称为现代优化方法，并且这些方法一般基于一些其他学科模型，比如模拟退火，神经网络，遗传算法等等。鉴于分波分析的目标函数比较复杂，而且如果进一步的改进物理上的考虑（后面会讨论到这个问题），目标函数会变得更复杂。因此，尝试采用新的思路，显得非常必要，原因是采用传统的优化方法，在面临更复杂的情况时，计算量和计算机机时的消耗是无法忍受的。因此，在分波分析中引入合适的新算法，也许是应付问题复杂化的一种比较好的选择。

7.1.5 局域极小问题

最小化过程存在一个普遍的问题，那就是局部极小。在使用这些方法时，我们通常假定目标函数在待求极小值点只含一个极小点的函数。如果在可行域上有多个极小，各种最小化方法一般都无能为力，只能找到一个极小。而我

们面对的问题大多数情况下是：在可行域上找一个极小，它是物理上需要的极小，但不是全局极小。这时，就需要额外的工作：采用多组初值得到不同极小加以比较；或者采用整个可行域内的随机搜索；或者把已知参数的近似值先加以固定，对其它参数做最小化等。而MINUIT为这些提供了便利，它在运行时可以方便的固定和放开参数，提供了随机搜索的算法。MINUIT 软件包同时提供了几种选择的最小化方法，而且给了用户针对不同问题选择使用的自由，当用户使用恰当的命令时，MINUIT 还会自动在一种方法失败时转换别的最小化方法，加强了算法的稳健性。当然，MINUIT 的另一个优点是给出了拟合结果比较完善的误差分析功能。

必须指出的是，从数学的严格性出发，关于局域最小问题并没有一种完美的方法来解决。各种实用的技巧只是使我们以更大的可能性接近问题的真正最小解。

7.2 目标函数的一种构造方式

下面我们介绍在BES物理分析当中非常常用的一种分波分析目标函数的构造方式，并讨论它在拟合中的优缺点。

在分波分析过程中经常采用最大似然法拟合^[22]来拟合待定参数。依照习惯最大化问题一般化归为等价的最小化问题。为此，我们首先要构造目标函数 S ，然后对其作最小化。

在数据分析当中，我们的目标是寻找一套能使 S 达到最小值的参数： α 。对于不同共振态 X 不同的自旋、宇称等物理假设，末态具有不同的角分布。我们用不同的假设去拟合数据，好的拟合具有更小的目标函数值 S 。我们就用这样的方法来确定共振态 X 的自旋、宇称，以及质量和宽度。

为了使用最大似然法，我们必须构造其目标函数。在这里，让我们用 $\mathbf{x}$ 代表由实验测量得到的独立的物理量——末态粒子的四动量。我们定义 $\omega(\mathbf{x}, \alpha)$ 为产生这种组合 $\mathbf{x}$ 的几率密度。探测效率 $\epsilon(\mathbf{x})$ 代表探测器测量到特定组合 $\mathbf{x}$ 的效率。注意到 $\omega(\mathbf{x}, \alpha)\epsilon(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{x}$ 的积分不一定是归一的，所以必须引入归一化因子的约束。在此我们现定义观察到一个组合 $\mathbf{x}$ 的几率密度为：

$$P(\mathbf{x} : \alpha) = \frac{\int d\mathbf{x}' \omega(\mathbf{x}, \alpha) \epsilon(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\int \int d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \alpha) \epsilon(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}, \quad (7.2)$$

其中 $\omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ 为微分截面, $G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ 探测器的分辨函数, $\int \int d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})$ 是总观测截面, 它是未归一化的微分截面在整个相空间的连续积分。如果我们忽略探测器的分辨, 即假设探测器的分辨是 δ 函数, 则上式可以简化成

$$P(\mathbf{x} : \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})}{\int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})}, \quad (7.3)$$

这时, 必须提醒注意的是积分变量 $\mathbf{x}$ 应该是物理真实的变量, 而非探测器测量的结果, 因为测量结果是包含有实验分辨的。

从第1到第 N 个事例具有组合 $\mathbf{x}_1$ 到 $\mathbf{x}_n$ 的联合几率密度可写为

$$P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n : \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^N P(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \frac{\omega(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x}_i)}{\int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})}. \quad (7.4)$$

式(7.4)分子中的探测效率函数在取自然对数后可以分离出来

$$\ln P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N : \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^N \ln \left[\frac{\omega(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha})}{\int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})} \right] + \sum_{i=1}^N \ln \epsilon(\mathbf{x}_i). \quad (7.5)$$

上式第二项对一组特定观测值为一常数, 在对似然函数求极大值时不起作用, 故可以不予考虑。所以忽略掉第二项, 即令

$$\ln P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N : \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^N \ln \left[\frac{\omega(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha})}{\int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})} \right]. \quad (7.6)$$

再令似然函数 $\mathcal{L} = P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N : \boldsymbol{\alpha})$, 总截面 $\sigma = \int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})$, 则

$$\ln \mathcal{L} = \ln P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N : \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\omega(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha})}{\sigma} \right). \quad (7.7)$$

为了数学拟合的方便我们使用似然函数的负对数作为处理的对象(我们将其称之为目标函数):

$$S = -\ln \mathcal{L}. \quad (7.8)$$

这样, 分波振幅中的待拟合的对象如参数大小和相位, 以及共振态的质量、宽度等参数将在拟合目标函数 S 并使之达到最小时得到。当然, 似然函数的绝对值是没有意义的, 所有拟合得到的信息将从不同假设对应的目标函数的相对值中得到。

7.2.1 Monte Carlo 积分

现在, 我们讨论如何计算总截面 $\int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x})$ 。由于我们无法得到 $\epsilon(\mathbf{x})$ 的解析形式, 而且 $\omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ 的形式也非常复杂, 所以对其进行解析地积分是不可能的。对于这样形式复杂或者没有解析形式的积分, 我们采用 Monte Carlo 积分方法 [23] 来计算。实际上我们采用的是 Monte Carlo 积分方法中的一种: 期望值估计法, 任何一个积分都可以表示成某个随机变量的数学期望。一般来说, 假设所求积分为:

$$I = \int_{V_s} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (7.9)$$

其中, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示 S 维空间中的点, V_s 表示积分空间。令 $f(\mathbf{x})$ 为 V_s 上任一随机变量 $\vec{\xi}$ 的概率密度函数

$$\int_{V_s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \quad (7.10)$$

那么积分 I 可表示为随机变量 $h(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}$ 的数学期望:

$$I = \int_{V_s} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{V_s} \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E \left[\frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} \right] = E[h(\mathbf{x})], \quad (7.11)$$

这样我们从随机变量 $\vec{\xi}$ 抽取容量为 n 的随机子样 $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n$ (即服从分布 $f(\mathbf{x})$ 的随机数), 我们有

$$I = E[h(\vec{\xi})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \equiv I_n, \quad (7.12)$$

如此以来我们就求出了积分 I 。式 (7.12) 的期望和方差可以表为,

$$\begin{aligned} E(I_n) &= E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \right] = E(h) = I \\ V(I_n) &= V \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(h_i) = \frac{1}{n} V_h \end{aligned} \quad (7.13)$$

容易看到, 积分的误差大小取决于的随机子样的大小, 而且和所选分布 $f(\mathbf{x})$ 也有关。所选随机子样越大, 误差就越小; $f(\mathbf{x})$ 和待积分函数的形状越相近, 误差越小 (也就是重要抽样法的原理)。经验和编程计算告诉我们,

Monte Carlo 积分的误差，当 Monte Carlo 积分采用的事例样本大于100,000时，大多数的 Monte Carlo 积分的误差 $\frac{\sqrt{V(I_n)}}{I_n}$ 就基本小于0.1%，而这个精度已经足够了。

在实际操作时，我们并不是用事例的探测效率来计算总截面 σ 的，而是用探测器决定的 Monte Carlo 相空间来进行计算的，即使用 Monte Carlo 相空间产生的事例通过事例挑选程序的事例作为计算 σ 的求和空间。也就是说，本来 Monte Carlo 积分使用的分布 $f(\mathbf{x})$ 是相空间分布，但是现在使用的是相空间分布和 $\epsilon(\mathbf{x})$ 的乘积这样的分布。所以有：

$$\sigma = \int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} \omega(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}), \quad (7.14)$$

其中 N_{mc} 是通过选择程序后的相空间 Monte Carlo 事例数，这样，探测效率就包含在求和空间当中。最终的 σ 表达式为：

$$\sigma = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} \frac{d\sigma}{d\Phi}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}). \quad (7.15)$$

这里，我们再次说明，其中的 $\mathbf{x}_i$ 是真实的物理量，而不是包含有实验分辨的测量量。

7.2.2 拟合参数的不同处理

在拟合当中有两类参数，即共振态的共振参数 $M, \Gamma (\boldsymbol{\alpha}_0)$ 以及不同分波振幅的约化耦合复常数（含振幅和相位 $(\boldsymbol{\alpha}_1)$ ）。它们的地位不同，目前的处理方式也不同。因为对耦合常数的大小和相角，我们几乎没有多少先验的知识，所以选择把它们作为自由的拟合参数来让数据来决定；而对共振参数，一般情况下大多数拟合的共振态我们至少都知道它们大概的质量、宽度的值，是比较确定的，因此，在拟合过程中我们把它们当作固定参数，如需调整，则手动的改变它们的值。这种做法会给拟合带来很大的好处。下面我们来仔细讨论。

这时我们需要先把前面定义的目标函数的形式做一简单变形。一般来说微分截面的表达式 $\omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ 可以表达成两部分的乘积（这里为了以后的表达简单，

我们用 σ_i 来表达某个事例的微分截面),

$$\begin{aligned}
 \sigma_i &= \omega_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \left| \sum_n g_n A_n^i(\boldsymbol{\alpha}_0) \right|^2 \\
 &= \sum_{mn} g_m^* g_n A_m^{i*}(\boldsymbol{\alpha}_0) A_n^i(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
 &= \sum_{mn} F_{mn} U_{mn}^i(\boldsymbol{\alpha}_0)
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

其中, g 是复的耦合常数, 一般可以表为 $g = h e^{i\phi}$, $h = |g|$, $A(\boldsymbol{\alpha}_0)$ 是不变振幅, 其中包含对共振态的质量和宽度的依赖; 而 $F_{mn} = g_m^* g_n = h_m h_n e^{-i\phi_m} e^{i\phi_n}$, $U_{mn}(\boldsymbol{\alpha}_0) = A_m^{i*}(\boldsymbol{\alpha}_0) A_n^i(\boldsymbol{\alpha}_0)$ 。进一步, 总观测截面可以表达成:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{1}{N_{mc}} \sum_i \sum_{mn} F_{mn} U_{mn}^i(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
 &= \sum_{mn} F_{mn} \left\{ \frac{1}{N_{mc}} \sum_i U_{mn}^i(\boldsymbol{\alpha}_0) \right\} \\
 &= \sum_{mn} F_{mn} \bar{U}_{mn}(\boldsymbol{\alpha}_0)
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

其中利用了质量和宽度等参数在拟合当中是不变的假设, 所以对 U 的求和与平均可以单独的先进行, 得到 $\bar{U}$, 这样, 本来计算量很大的 Monte Carlo 积分过程就变成了一个简单的矩阵乘积, 计算量大大的减小了, 当然, 代价是必须在一次拟合过程中保持共振参数的值不变。

我们可以利用以上结果把前面构造的目标函数重新表达出来,

$$\begin{aligned}
 S &= -\log L = -\sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\sigma_i}{\sigma} \right) \\
 &= -\sum_{i=1}^N \ln \sigma_i + N \ln \sigma \\
 &= -\sum_{i=1}^N \ln \left\{ \sum_{mn} F_{mn} U_{mn}^i(\boldsymbol{\alpha}_0) \right\} + N \ln \left\{ \sum_{mn} F_{mn} \bar{U}_{mn}(\boldsymbol{\alpha}_0) \right\}. \tag{7.18}
 \end{aligned}$$

到这里, 我们可以清楚的看到把拟合参数分成两类给实际的计算机处理带来了非常大的好处。也就是是, Monte Carlo 积分的计算变的非常简单, 只需计算一次 $\bar{U}$, 因为所用的积分样本一般都在100,000事例以上, 而这样处理以

后每次只计算一次矩阵乘积并求和，计算量就非常小了，每次的观测截面计算时间几乎可以忽略不计。同时，目标函数的这种表达形式还有进一步的方便，我们将在下一节讨论。

7.2.3 求最小过程中的线性化近似

在解析方法求极小的过程中，会对目标函数求一阶偏导，并要求导函数方程组的解为零，此时的解一般就是我们想要的最小解。即要求

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_j} = - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_j} / \sigma_i \right] + N \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_j} \right] / \sigma = 0. \quad (7.19)$$

大多数情况下，解析方法还会用到所谓HESSIAN矩阵，即目标函数的二阶偏导数的矩阵，并且要求这个矩阵是正定的（Positive Definite）。根据上式，二阶偏导的表达式如下：

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \sum_i \left[\frac{\frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k}}{\sigma_i^2} \right] + N \left[\frac{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} - \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_k}}{\sigma^2} \right]. \quad (7.20)$$

其中，我们可以看到其中分别包含有 $\sigma_{(i)}$ 的一阶和二阶偏导。实际上计算机上用程序计算二阶偏导的运算量是非常大的，变通的方法是采用已经计算出的一阶偏导的结果（存在内存当中）来计算二阶偏导，这时必须采用一定的假设或者近似，比如假设上面的二阶偏导表达式中的每一项中的 $\sigma_{(i)}$ 的二阶导数近似为零，也就是所谓线性化近似。这样就可以把7.20式化简如下

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \sum_i \left[\frac{\frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_k}}{\sigma_i^2} \right] - N \left[\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_k}}{\sigma^2} \right]. \quad (7.21)$$

这样，就可以直接采用一阶偏导的计算结果来计算二阶偏导。但是，并不是所有的函数都能满足这个条件，目前我们所关心的就是7.18是否满足这个假设。现在我们具体来看 $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k}$ 和 $\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k}$ 的行为。因为原则上每个耦合参数都是复数，所以求导的变量数目其实是振幅的二倍，为了在表达式中区别对复参数的模求导和对相角求导，我们用两个脚标来标识 λ ，即 $\lambda_{\alpha j}$ 或者 $\lambda_{\beta k}$ ，其中 α, β 表示它们属于那个复耦合参数，而 j, k 表示是模还是相角（即 $j, k \in \{r, \phi\}$ ）。这样

总观测截面 σ 的二阶偏导为 (σ_i 的二阶偏导的形式与之完全一样):

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \lambda_{\alpha j} \partial \lambda_{\beta k}} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{\alpha j} \partial \lambda_{\beta k}} \left[\sum_{mn} h_m h_n e^{-i\phi_m} e^{i\phi_n} \bar{U}_{mn} \right]$$

$$= \begin{cases} 2\text{Re} [e^{-i\phi_\alpha} e^{i\phi_\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}] & \alpha \neq \beta \text{ 且 } j = k = r \\ 2\bar{U}_{\alpha\alpha} & \alpha = \beta \text{ 且 } j = k = r \\ 2h_\alpha h_\beta \text{Re} [e^{-i\phi_\alpha} e^{i\phi_\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}] & \alpha \neq \beta \text{ 且 } j = k = \phi \\ -2h_\alpha h_\beta \text{Re} [e^{-i\phi_\alpha} e^{i\phi_\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}] & \alpha = \beta \text{ 且 } j = k = \phi \\ 2ih_\beta \text{Re} [e^{-i\phi_\alpha} e^{i\phi_\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}] & \alpha \neq \beta \text{ 且 } j = r, k = \phi \\ 2ih_\alpha \text{Re} [e^{-i\phi_\alpha} e^{i\phi_\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}] & \alpha \neq \beta \text{ 且 } j = \phi, k = r \\ 2i \sum_{n \neq \alpha} h_n \text{Re} [e^{i(\phi_\alpha - \phi_n)} \bar{U}_{n\alpha}] & \alpha = \beta \text{ 且 } j = r, k = \phi \\ 2i \sum_{n \neq \alpha} h_n \text{Re} [e^{i(\phi_\alpha - \phi_n)} \bar{U}_{n\alpha}] & \alpha = \beta \text{ 且 } j = \phi, k = r \end{cases} \quad (7.22)$$

从中可以看到各种情况的讨论, 没有一种情况是严格为零的。这样, 普通的解析方法对这种形式的目标函数因为含有一个不恰当的假设, 它们的工作效率和性能就会下降, 甚至导致结果不可靠。

如果采用目前的各种常规的最小化算法, 比较好的一种选择是: 把各种算法有机的结合起来, 采用一定的策略, 扬长避短, 联合使用多种最小化方法, 把一种最小化过程的结果当作第二种算法的输入 (比如在MINUIT里可以先用直接方法SIMPLEX, 在接着用解析方法MIGRAD)。这样能从某种程度弥补单独一种算法的不足。

7.3 更多可能

关于分波分析方法, 尽管已经有很长历史了, 但是它还是在不断的发展当中。比如关于角分布理论, 如何描述一个 (宽) 共振态等的动力学问题, 采用何种优化方法比较有效的问题, 如何考虑实验分辨, 还有如何定量的考量和比较拟合的质量好坏等, 这些问题被不断的提出来, 不断的改进, 但是, 目前由于各种限制, 有些还没有考虑, 有些有待改进。我们相信分波分析作为一种研究强子谱的有利工具还有很大的发展空间, 以后不断有新的进展。这里我们简单讨论一点改进的方向和可能。

7.3.1 考虑探测器的分辨

一般来说, 实验的探测器都有一定的分辨, 原则上, 实验分辨的效应在做

分波分析时是应该考虑的，也就是说在构造目标函数，用恰当的方式把实验分辨放进目标函数当中，比如式7.2中所示。但是，这样做是有难度的，因为首先分辨函数的形式一般是未知的，甚至是没有解析表达式的，即使知道了分辨函数的具体形式，而且形式足够简单（比如是个简单的高斯函数），这种情况下对于多个运动学变量，而且样本很大的情况几乎是不可行的，根据数据分析的一般情况来说，在只有较少的运动学变量，而且实验分辨是一个比较简单而且有显式表达式的函数时，考虑分辨是可行的，就像粒子物理实验中拟合不变质量谱时考虑实验分辨一样，所以比较可能是的在比较简单 Dalitz-Plot 分析当中先考虑探测器的分辨；其次，即使通过硬件研究或者基于大量数据对探测器的深入理解，我们已知了分辨函数的具体形式，而且还不是过于复杂，根据式7.2定义的目标函数做计算，这样仍然是有困难的，原因是考虑分辨等于多了一重积分，计算量超出了现有的计算机的运算能力，而且使拟合过程复杂化同样也只在样本比较小，而且运动学变量不多的情况下才具有可行性。

总的来说，考虑实验分辨在目前还是一个比较难以实现的目标。比较现实的做法是假设实验分辨是缓变函数，或者假设分辨是 δ 函数，积分积掉后变成式7.3式。但是，我们必须清楚自己此时所作的假设，在假设不满足的时候，拟合的结果可能会有比较大的偏差，比如得到的质量、宽度的结果，它们是含有实验分辨的。

7.3.2 拟合优度检验

目前采用的比较多的是最大似然法拟合，那么只有目标函数相对性大小才具有具体的意义，用它的绝对值是无法评价拟合的质量优劣的。那么如何来定量的考量拟合的质量就需要单独的考虑，这就是拟合优度检验。拟合优度检验对于结果具有非常重要的意义，其实它应该是结果的一部分，给出分析结果的可靠程度的定量信息，如果分波分析中发现新的共振态，拟合优度检验应该也能给出新粒子的统计显著性。

如果拟合方法就是 χ^2 方法，则它的目标函数本身就是一个很好的拟合优度的标志量，这个在统计上是有比较严格的理论基础的。尽管当前分波分析大部分还是采用最大似然法来做为拟合方法，但是随着统计量的增大，对相空间分BIN 逐渐成为可能，那么采用 χ^2 方法进行拟合也是一种选择。至于如何构造 χ^2 形式的目标函数， K_{e4} 给出了一个经典的例子。

即使目前的多数情况采用最大似然法拟合，我们也可以设法构造合适的量来考量拟合优度，比如采用所谓皮尔逊检验的思路，构造等效的 χ^2 量。一种做法是：选择独立（或者近似独立的）运动学变量，对相空间的进行分BIN，并且保证每个BIN 有足够的统计量，假设有 N 个BIN，第 i 个BIN 的事例数为 $n_i^{mc,dt}$ ，则定义 χ^2 为：

$$\chi^2(N - N_p - 1) = \sum_i^N \frac{(n_i^{dt} - n_i^{mc})^2}{n_i^{dt}} \quad (7.23)$$

其中的 N_p 是拟合当中的自由参数的个数，然后可以计算出这个 χ^2 的自由度，根据这些就能对拟合优度作出判断。在事例数比较少的时候，可以考虑舍弃一些不重要的运动学变量，或者把BIN 分得比较大，比如对于 $J/\psi \rightarrow 3\pi$ 过程，可以直接在mbox Dalitz-Plot上直接分BIN，进行拟合优度检验。

7.3.3 宽共振的参数化和多个共振的干涉

这个问题在上一章中有比较多的讨论，宽共振一般需要特殊的参数化，多个相距比较近的共振态干涉时，就需要引入 K-Matrix 等方法，来保持理论的么正性。

关于宽共振的参数化，目前的实验分析中已经有比较多的考虑了，但是关于么正性的问题，只有在 Dalitz-Plot 分析开始考虑，因为这样会对公式的形式改变比较大，导致计算量增加。

7.3.4 引入新的优化算法

目前分波分析中采用的优化算法一般都是比较传统的算法，比如CERNlib中的FUMILI 和MINUIT，其中的具体算法都是在20世纪70年代以前发展起来的，经过反实践检验性能比较稳定，效果也比较好的成熟算法，软件包也经过长时间的使用和测试，比较可靠。但是，根据前面的讨论，我们知道，这些软件包主要都采用了解析方法，都依赖于函数的解析性质，即一阶导数和二阶导数的性质，而为了节约CPU，它们都采用了线性化近似，所以，实际上是不够理想的。

近年来，优化算法领域也有不少的新发展，出现了一些新的方法，一般叫做现代优化算法，比如模拟退火算法，遗传算法还有神经网络算法，随机优化

等。可以考虑引入这些算法到分波分析中来，改进算法的速度和全局最小的性质，相信这会是分波分析的一个发展方向，甚至将来会出现专门针对分波分析集成了某几种比较有效最小化算法的软件包。

7.4 小结和展望

本章介绍了拟合中一些问题：优化方法的选择，目标函数的构造，共振和干涉的考虑，实验分辨的考虑，以及拟合优度的检验等问题，最后还简单的讨论了引入现代的优化算法的可能。总的来说，分波分析关于角分布的描述是严格的，此外的其它问题有很多是需要改进的，因为理论上的严谨是我们的目标和理想。分波分析方法是一种非常有用的工具，尤其是在强子谱和新强子的研究当中，尽管分波分析已经有了很多非常重要的分析结果，但是分波分析的整个过程仍然有很大的改进空间，它还是一种正在发展的方法，而且它设计运动学，动力学，数学方法和计算机技巧等多方面的知识，需要我们进一步的学习和研究，不断的完善这个分析工具，并不断的给出漂亮的分析结果。

附录 A 自旋角动量本征态

A.1 单粒子角动量本征态

基本粒子的自旋的本质目前还不清楚，它也没有经典对应，对于自旋的描述，主要是与轨道角动量类比而来。静止系中质量非零的单粒子态可以记做 $|jm\rangle$ ，其中 j 是自旋 m 是自旋第三分量。态 $|jm\rangle$ 是正则基矢，用它们可以把角动量算符可以用标准的方式来表示。构造角动量算符的表示方法是我们非常熟悉非相对论量子力学里标准方法。这里我们只是简单的列出一些性质供书中使用。因为角动量算符是转动算符的无穷小生成元，所以粒子的自旋也就刻画了静止粒子如何在空间旋转时如何变换的(*By definition, the spin of particle characterizes how the particle at rest behaves under spatial rotation*)。

记角动量的三个分量分别为： J_x ， J_y 和 J_z (或 J_1 ， J_2 和 J_3)。它们是Hermitian算符，满足下面的交换的关系：

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (\text{A.1})$$

经常用到角动量算符的如下形式和性质：

$$\begin{aligned} J^2|jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle \\ J_z|jm\rangle &= m|jm\rangle \\ J_{\pm}|jm\rangle &= \sqrt{(j\mp 1)(j\pm m+1)}|jm\pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

其中 $|jm\rangle$ 是角动量算符 J^2 和 J_3 的共同本征态，它们满足如下的正交和归一化性质，并形成完备集，

$$\begin{aligned} \langle j'm'|jm\rangle &= \delta_{j'j}\delta_{m'm}, \\ \sum_{jm} |jm\rangle\langle jm| &= I. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

下面讨论角动量本征态的旋转性质。这里必须提到的是角动量算符是在粒子的静止系中定义的，角动量本征态的旋转性质也同样是在这个参考系中来讨

论的。假设对角动量态施以旋转操作 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ ，其中的 α, β, γ 是欧拉角，旋转操作构成 $SU(2)$ 群，它的表示是 D 函数矩阵，

$$U[R(\alpha, \beta, \gamma)]|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\text{A.4})$$

D 函数按照下式定义，在附录B专门讨论 D 函数和旋转。

$$\begin{aligned} D_{m'm}^j(R) &= D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \langle jm'|U[R(\alpha, \beta, \gamma)]|jm\rangle \\ &= e^{-im'\alpha} d_{m'm}^j(\beta) e^{-im\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.2 角动量的耦合

在研究粒子衰变末态的角分布时，经常会用到两个或者多个角动量耦合的概念，比如经常把两体衰变末态的自旋耦合起来，然后再和轨道角动量耦合起来，根据初末态角动量守恒就会对耦合结果作出一些限定，得到一些系统的定性结果。所以这里简单的介绍一下角动量耦合的过程，并同时给出耦合过程中用到的CG的一些应用和基本性质。

A.2.1 无耦合表象和耦合表象

考虑有两个角动量算符： $\hat{J}_1$ 和 $\hat{J}_2$ ，现在讨论它们耦合成 $\hat{J}$ 的过程。假设它们的量子数分别为： j_1 、 j_2 和 j ， z -分量为 m_1 、 m_2 和 m 。

则根据矢量耦合的性质和量子力学的原理，角动量的耦合必须满足：

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2| \quad (\text{A.6a})$$

$$m_1 + m_2 = m \quad (\text{A.6b})$$

我们取 $\hat{J}_1$ 和 $\hat{J}_2$ 本征态矢分别为： $|j_1 m_1\rangle$ 和 $|j_2 m_2\rangle$ ，根据A.2，我们有：

$$J_1^2 |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle, \quad (\text{A.7a})$$

$$J_{1z} |j_1 m_1\rangle = m_1 |j_1 m_1\rangle, \quad (\text{A.7b})$$

$$J_2^2 |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1) |j_2 m_2\rangle, \quad (\text{A.7c})$$

$$J_{2z} |j_2 m_2\rangle = m_2 |j_2 m_2\rangle. \quad (\text{A.7d})$$

由两个本征态矢的直积 $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1; j_2, m_2\rangle$ 为基矢构成的表象，成为无耦合表象。能足够这么做的原因是： $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{1z}$ 和 $\hat{J}_{2z}$ 是两两对易的，才能构成完备基矢。而同样我们可以证明 $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_1$ 和 $\hat{J}_2$ 也是两两对易，它们的本征态矢 $|j_1 j_2; jm\rangle$ 也可以构成一个完备基，这样的表象，我们称之为耦合表象。

A.2.2 用无耦合表象展开耦合表象：C-G系数

下面，我们来用无耦合表象基矢 $|j_1 m_1; j_2, m_2\rangle$ 展开耦合表象的基矢 $|j_1 j_2; jm\rangle$ ，来找出两个表象的联系。

由于 $|j_1 m_1\rangle$ 和 $|j_2 m_2\rangle$ 的完备性A.3，所以：

$$\sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2| = 1, \quad (\text{A.8})$$

因而，可以将 $|j_1 j_2; jm\rangle$ 展开成：

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle, \quad (\text{A.9})$$

式中，展开系数 $\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle$ 称之为矢量耦合系数(一般写成 $\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | jm\rangle$ ，也被叫做Clebsch-Gordon系数或者C-G系数)。如果系数已知，那么就可以方便的用无耦合表象的基矢来展开耦合表象的基矢。

A.2.3 C-G系数的一些性质

C-G系数在粒子物理中广泛使用，关于它的计算比较复杂，我们这里不会涉及，实际上，通过查表和采用程序计算等方法，可以非常方便的得到想要的C-G系数。但是，C-G系数有一些非常重要的性质我们需要知道，我们这里只是简单介绍一下。

- 三角性质：

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2| \quad (\text{A.10})$$

- 非零的条件：

$$m = m_1 + m_2, \quad (\text{A.11})$$

这个条件涉及到选择规则。

- 正交关系:

$$\sum_{m_2} \langle j_1, m - m_2, j_2, m_2 | j' m \rangle \langle j_1, m - m_2, j_2, m_2 | j m \rangle = \delta_{jj'} \quad (\text{A.12})$$

A.2.4 一点应用和讨论

角动量的耦合在分波分析中非常有用，因为即使当我们碰到最简单的两体衰变时，也会面临 $S - S$ 耦合和 $L - S$ 耦合的问题，通过耦合过程我们会明确地得到独立分波振幅的数目。

举例说明，比如两体衰变过程 $J \rightarrow s + \sigma$ 并且宇称满足 $\eta_J \eta_s \eta_\sigma = \pm 1$ 。具体来说比如 $J/\psi \rightarrow \phi f_0$ ，因为 $J = s = 1$ ，而 $\sigma = 0$ ，所以 $S - S$ 耦合的结果只有一种就是1，根据角动量守恒和宇称必然有 $L = 0, 2$ 。所以很容易的判断出分波振幅 M_{LS} 只有 M_{01} 和 M_{21} 两个。

又比如 $J/\psi \rightarrow \phi f_2$ ， $J = s = 1$ ，而 $\sigma = 2$ 所以 $S - S$ 耦合的结果有1, 2, 3三种情况，而根据角动量守恒和宇称必然有 $L = 0, 2, 4$ ，所以总的分波振幅通过 $L - S$ 耦合可以得到有五个： M_{01} 、 M_{21} 、 M_{22} 、 M_{23} 和 M_{43} 。

附录 B 转动矩阵，常用D函数及其性质

在角分布理论当中，转动矩阵（D函数）具有重要地位，它是转动算符的表示，是我们在转动操作中直接面对的对象，同时也是角分布函数的基本单元，也就是说，角分布是用D函数计算出来的，表达出来的，那么我们熟悉D函数的性质，熟悉它的形状对于了解角分布非常有用，所以，我们这里给出了D函数比较仔细的介绍，并且给出一些D函数的函数图像，这些函数图像是对相关指标求和后的结果，所以可以直接和实验数据分布进行对比。

B.1 转动矩阵

转动算符的矩阵表示又叫转动矩阵。由于转动算符构成群，所以转动矩阵也就是旋转群的表示矩阵。我们可以计算转动算符 R 相对球谐函数的矩阵元，从而写出转动矩阵。

由于

$$[J^2, J_\alpha] = 0, \quad \alpha = x, y, z,$$

因而

$$[J^2, R_{\hat{n}}(\alpha)] = 0,$$

$$J^2 R_{\hat{n}}(\alpha) |jm\rangle = R_{\hat{n}}(\alpha) J^2 |jm\rangle = j(j+1) R_{\hat{n}}(\alpha) |jm\rangle,$$

它说明 $R_{\hat{n}}(\alpha) |jm\rangle$ 也是 J^2 的本征值为 $j(j+1)$ 的本征态。也就是说 $R_{\hat{n}}(\alpha)$ 对 $|jm\rangle$ 的作用不改变其中的量子数 j ，但是 J_z 不一定与 $R_{\hat{n}}(\alpha)$ 对易，因为 $R_{\hat{n}}(\alpha) |jm\rangle$ 不一定是 J_z 的本征态，但是它可以展开成不同 n 的 $|jn\rangle$ 的线性叠加，即

$$J^2 R_{\hat{n}}(\alpha) |jm\rangle = \sum_{n=-j}^j D_{n,m}^j(\alpha) |jn\rangle$$

因而

$$\langle jm' | R_{\hat{n}}(\alpha) | jm \rangle = \sum_{n=-j}^j D_{n,m}^j(\alpha) \delta_{m'n} = D_{m',m}^j(\alpha)$$

或

$$\langle jn | R_{\hat{n}}(\alpha) | jm \rangle = D_{n,m}^j(\alpha). \quad (\text{B.1})$$

两个转动算符的乘积给出第三个转动算符,

$$R_{\hat{n}}(\gamma) = R_{\hat{n}}(\alpha)R_{\hat{n}}(\beta),$$

取矩阵元, 有

$$\langle jn|R_{\hat{n}}(\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^j \langle jn|R_{\hat{n}}(\alpha)|jm'\rangle \langle jm'|R_{\hat{n}}(\beta)|jn\rangle,$$

即

$$D_{n,m}^j(\gamma) = \sum_{m'=-j}^j D_{n,m'}^j(\alpha)D_{m',m}^j(\beta). \quad (\text{B.2})$$

对于每一个转动 α , 都有一个矩阵 $D^j(\alpha)$ 与之对应, 这些矩阵应该是 $(2j+1)$ 维的。

对于三维空间中的有限转动, 可以用三欧拉角 α, β, γ 来描述, 如图所示, 对应于空间的任意转动都可以表示为先绕 z -轴转动 α 角, 在绕新的 y' -轴转动 β 角, 再绕新 z' -轴转动 γ 角, 对应于这些转动的算符是

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_{z'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_{y'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} \quad (\text{B.3})$$

其中, $J_{y'}$ 和 $J_{z'}$ 是角动量 J 沿 y' -轴和 z' -轴的投影。但是我们希望的是直接用空间固定坐标系的 x, y, z -轴方向的角动量 J_x, J_y, J_z 来表示这些转动算符, 为此要通过一个么正变换来求 $J_{y'}$ 和 $J_{z'}$ 。由于 $J_{y'}$ 和 $J_{z'}$ 相差一个变换 $e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z}$, 因而

$$\begin{aligned} J_{y'} &= e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} J_y e^{\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_{y'}} &= e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} \end{aligned}$$

同理, 也有

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_{z'}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_{y'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z} e^{\frac{i}{\hbar}\beta J_{y'}}$$

把这两式代入B.3得,

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_{y'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z} e^{\frac{i}{\hbar}\beta J_{y'}} e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

最后一步是因为 $e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}$ 和 $e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z}$ 是对易的。根据B.2

$$\begin{aligned} D_{n,m}^j(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle jn | e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z} | jm \rangle \\ &= e^{-in\alpha} \langle jn | e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} | jm \rangle e^{-im\gamma} \\ &= e^{-in\alpha} d_{n,m}^j(\beta) e^{-im\gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

其中

$$d_{n,m}^j(\beta) = \langle jn | e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} | jm \rangle \quad (\text{B.6})$$

这将会是我们最常用到的D函数的形式。关于它们的具体形式如何得到，这里不再赘述，下面来讨论D函数和d函数的一些性质。

B.2 d函数和D函数的性质

B.2.1 d函数的性质

- 根据B.6得

$$d_{n,m}^j(0) = \delta_{nm}, \quad (\text{B.7})$$

这体现了当 $\beta = 0$ 时是恒等变换的事实。

- 由于 J_y 是虚数矩阵，则 iJ_y 是实矩阵，得：

$$d^*(\beta) = d(\beta), \quad d^{-1}(\beta) = d^+(\beta) = \tilde{d}^*(\beta) = \tilde{d}(\beta), \quad (\text{B.8})$$

所以

$$d_{n,m}^j(-\beta) = d_{m,n}^j(\beta). \quad (\text{B.9})$$

•

$$d_{n,m}^j(-\beta) = (-1)^{n-m} d_{n,m}^j(\beta). \quad (\text{B.10})$$

•

$$d_{n,m}^j(\beta) = d_{m,n}^j(-\beta) = (-1)^{n-m} d_{m,n}^j(\beta). \quad (\text{B.11})$$

•

$$d_{-n,-m}^j(\beta) = d_{m,n}^j(\beta) . \quad (\text{B.12})$$

•

$$d_{-n,-m}^j(\beta) = (-1)^{n-m} d_{n,m}^j(\beta) . \quad (\text{B.13})$$

•

$$d_{n,m}^j(\pi) = (-1)^{j+m} \delta_{n-m} . \quad (\text{B.14})$$

•

$$d_{n,m}^j(-\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{n-m} . \quad (\text{B.15})$$

•

$$\begin{aligned} d_{n,m}^j(\pi + \beta) &= \sum_{m'} d_{n,m'}^j(\beta) d_{m',m}^j(\pi) \\ &= \sum_{m'} d_{n,m'}^j(\beta) (-1)^{j+m} \delta_{m'-m} \\ &= (-1)^{j-m} d_{n,-m}^j(\beta) . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

•

$$d_{n,m}^j(\pi - \beta) = (-1)^{j+m} d_{n,-m}^j(\beta) . \quad (\text{B.17})$$

B.2.2 D函数的性质

B.2.2.1 正交性

因为 $R^+(\alpha)R(\alpha) = R(\alpha)R^+(\alpha) = 1$ ，所以：

$$\begin{aligned} \langle jn | R^+(\alpha) R(\alpha) | jm \rangle &= \langle jn | jm \rangle = \delta_{nm} \\ &= \sum_{m'} \langle jn | R^+(\alpha) | jm' \rangle \langle jm' | R(\alpha) | jm \rangle \\ &= \sum_{m'} D_{nm'}^{j*}(\alpha) D_{m'm}^j(\alpha) \end{aligned}$$

因此有

$$\sum_m D_{nm}^j(R) D_{n'm}^{j*}(R) = \delta_{nn'} , \quad (\text{B.18})$$

$$\sum_m D_{mn}^j(R) D_{mn'}^{j*}(R) = \delta_{nn'} . \quad (\text{B.19})$$

B.2.2.2 逆阵

因为 $R^+(\alpha) = R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha)$, 可得 $[D^j(\alpha)]^+ = D^j(-\alpha)$, 因此

$$D_{mn}^{j*}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{nm}^j(-\alpha, -\beta, -\gamma) , \quad (\text{B.20})$$

再根据B.12, 有

$$D_{mn}^{j*}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-n} D_{-m-n}^j(\alpha, \beta, \gamma) . \quad (\text{B.21})$$

B.2.2.3 D函数和球谐函数

$$\begin{aligned} D_{m0}^{l*}(\phi, \theta, 0) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_m^l(\theta, \phi) \\ &\text{或者} \\ D_{m0}^l(\phi, \theta, 0) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_m^{l*}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

证明如下:

用旋转算符把态矢从 z -轴方向转到 (θ, ϕ) 方向, 即

$$R(\phi, \theta, 0)|\theta=0, \phi=0\rangle = |\theta\phi\rangle ,$$

上式乘以 $\langle lm|$ 并在右端插入封闭性关系 $\sum_n |ln\rangle \langle ln|$, 得

$$\langle jm|\theta\phi\rangle = \sum_n \langle jm|R(\phi, \theta, 0)|ln\rangle \langle ln||\theta=0, \phi=0\rangle ,$$

即

$$Y_m^{l*}(\theta, \phi) = \sum_n D_{mn}^l(\phi, \theta, 0) Y_n^{l*}(\theta=0, \phi=0) ,$$

而，我们知道 $Y_n^{l*}(\theta = 0, \phi = 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{n0}$ ，因此：

$$Y_m^{l*}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^l(\phi, \theta, 0) .$$

另外，球谐函数有一个非常有趣的性质，反应了系统的球对称性，

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_m^{l*}(\theta, \phi) Y_m^l(\theta, \phi) = 1 .$$

B.2.2.4 D函数积分公式

$$\int dR D_{nm}^{j*}(R) D_{n'm'}^{j'}(R) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad dR = d\alpha d\cos\beta d\gamma \quad (\text{B.23})$$

B.2.2.5 D函数耦合公式

$$D_{m'm}^j(R_1 R_2) = \sum_k D_{m'k}^j(R_1) D_{km}^j(R_2) \quad (\text{B.24})$$

$$D_{\mu_1 m_1}^{j_1} D_{\mu_2 m_2}^{j_2} = \sum_{j_3 \mu_3 m_3} (j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | j_3 m_3) (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3) D_{\mu_3 m_3}^{j_3} \quad (\text{B.25})$$

$$D_{\mu_1 m_1}^{j_1} D_{\mu_3 m_3}^{j_3*} = \sum_{j_2 \mu_2 m_2} \left(\frac{2j_2+1}{2j_3+1} \right) (j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | j_3 m_3) (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3) D_{\mu_2 m_2}^{j_2*} \quad (\text{B.26})$$

B.3 常用d函数

$$d^1(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$d^2(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{(1+\cos\theta)^2}{4} & \frac{(1+\cos\theta)\sin\theta}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta & \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{2} & \frac{(1-\cos\theta)^2}{4} \\ -\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta}{2} & \frac{(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\sin\theta & \frac{(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)}{2} & \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\sin\theta & \frac{3\cos^2\theta}{2} - \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\sin\theta & \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \\ -\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{2} & \frac{(1-\cos\theta)(2\cos\theta+1)}{2} & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\sin\theta & \frac{(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)}{2} & \frac{(1+\cos\theta)\sin\theta}{2} \\ \frac{(1-\cos\theta)^2}{4} & -\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta & -\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta}{2} & \frac{(1+\cos\theta)^2}{4} \end{pmatrix}$$

B.4 常见角分布

这里我们给出常用自旋的 d -函数全部角分布, 这里对对称的自旋分量进行了求和, 这里的

$$[d_{mn}^J]^2 = \sum \{[d_{mn}^J(\theta)]^2 + [d_{nm}^J(\theta)]^2\} \quad (\text{B.27})$$

其中的求和表示对 (m, n) 对所有确定的 (m, n) , 对所有组合求和, 比如对 $(1, -1)$, $(-1, 1)$,

$(1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 或者对 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 求和。这种情况正符合求角分布时对末态求和并对初态求平均的一般做法。下面举例说明:

- 比如 $[d_{11}^1]^2$ 就是 $\psi \rightarrow \gamma P, VP(1^-0^-), 3^-0^-, 5^-0^-, \dots$ 的末态角分布的情形, 这时只有一个分波, 初态 ψ 的磁量子数只能为 ± 1 , 而末态的helicity的零分量被禁戒掉。所以末态分布是 $(1 + \cos^2\theta)$ 的形式。 $\psi \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-$ 等轻子也是这种情况, 因为QED的耦合方式也禁戒了helicity的零分量。
- $[d_{10}^1]^2$ 或者 $[d_{01}^1]^2$ 就是 $V \rightarrow PP$ 的情形, 也只有一个分波, 初态 ψ 的磁量子数只能为 ± 1 , 末态粒子没有自旋, 所以helicity也为零。所以末态分布是 $\sin^2\theta$ 的形式。
- $[d_{10}^J]^2$ 或者 $[d_{01}^J]^2$, $J = 1, 3, 5, \dots$, 是 $\psi \rightarrow JP$, $J = \rho, \omega, \phi$ 等粒子及其激发态, 再衰变到 PP 模式事的角分布, 因为只有一个分波, 因此是简单的一个角分布, 其形状见图B.1, B.3和B.5。
- 其他如果衰变末态虽然不止一个helicity分量, 但是如果是某一个helicity分量为, 比如 $\psi \rightarrow \gamma f_2(1270) \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$, 我们从数据中知道这一含

有 $f_2(1270)$ 的过程 $D_{00}^2(\theta)$ 占很大比分，所以它的末态角分布具有图B.2中的 $[d_{00}^2]^2$ 所示呈 W 形状分布。

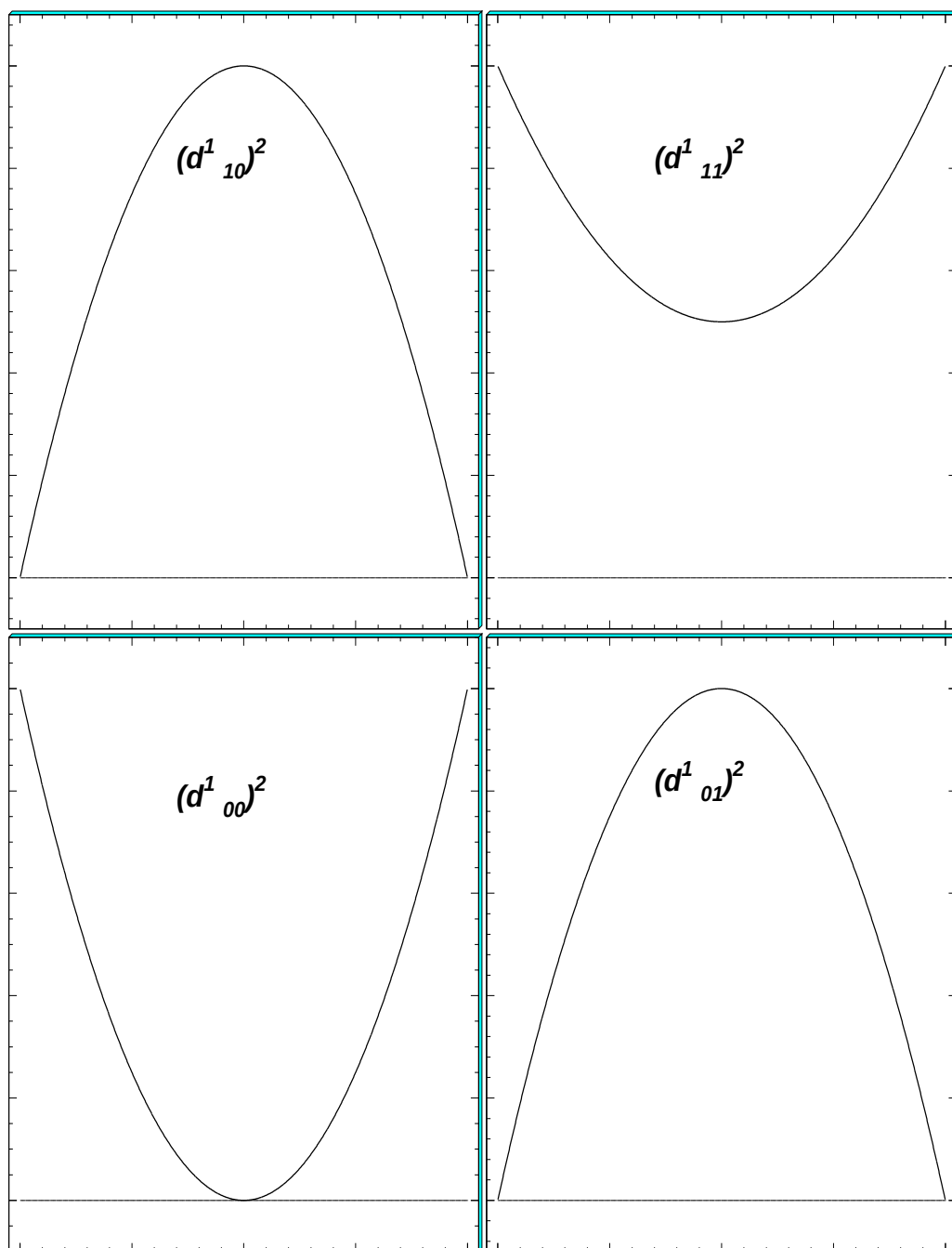


图 B.1: 自旋-1粒子的d函数图，其中 $[d^1_{mn}(\theta)]^2$ 表示对绝对值为 $(\pm m, \pm n)$ 的情形全部求和并平均。

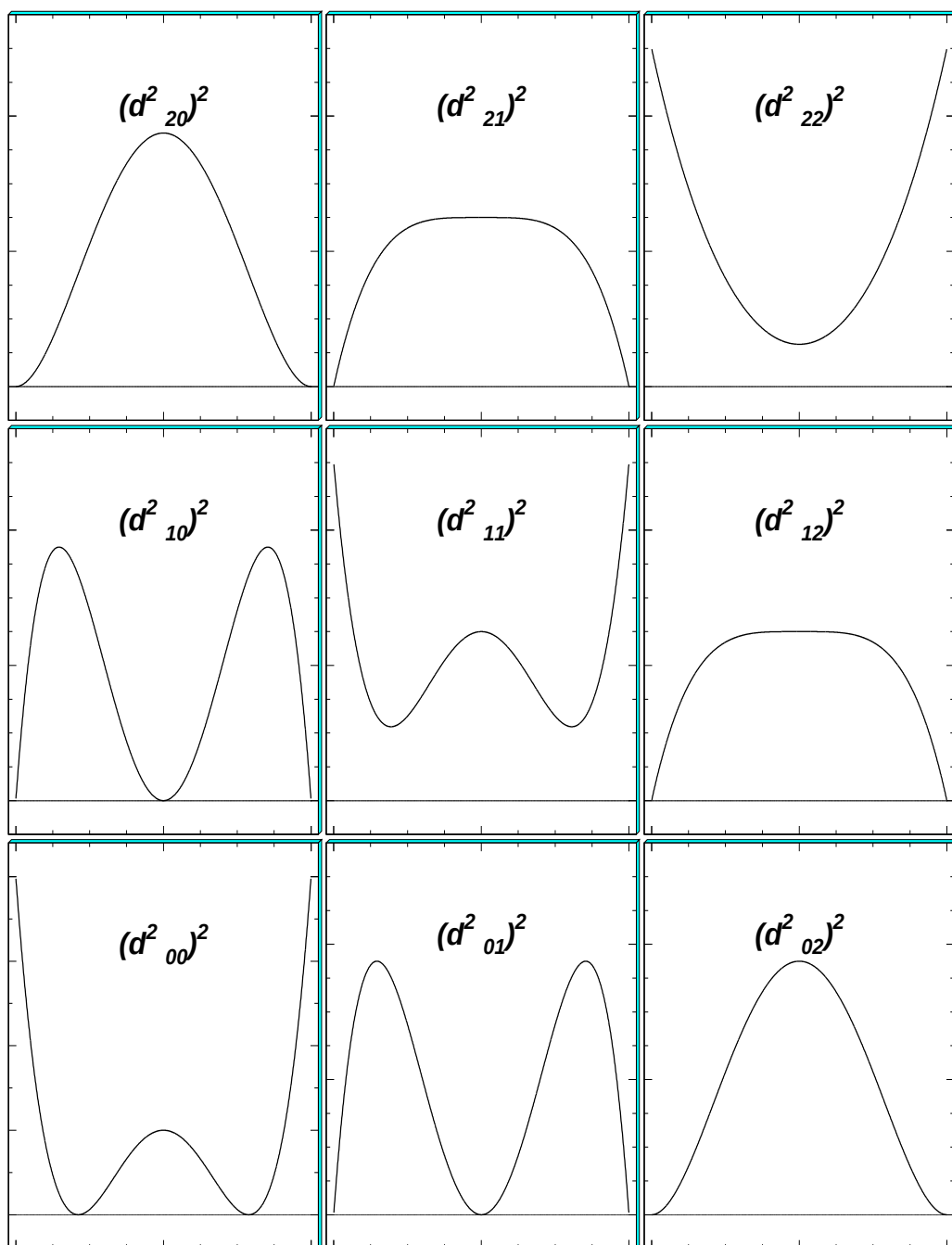


图 B.2: 自旋-2粒子的d函数图, 其中 $[d^2_{mn}(\theta)]^2$ 表示对绝对值为 $(\pm m, \pm n)$ 的情形全部求和并平均。

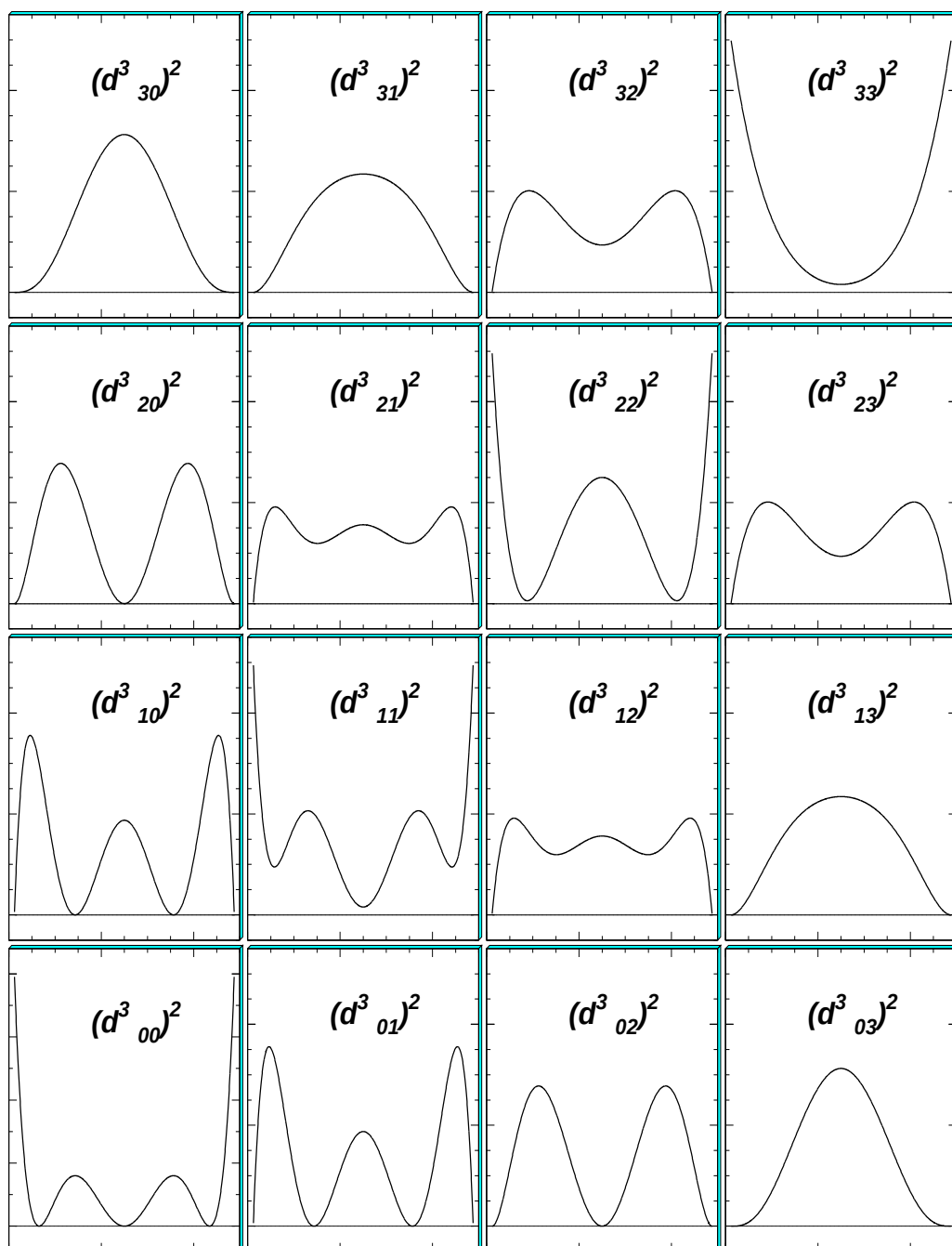


图 B.3: 自旋-3粒子的d函数图，其中 $[d^3_{mn}(\theta)]^2$ 表示对绝对值为 $(\pm m, \pm n)$ 的情形全部求和并平均。

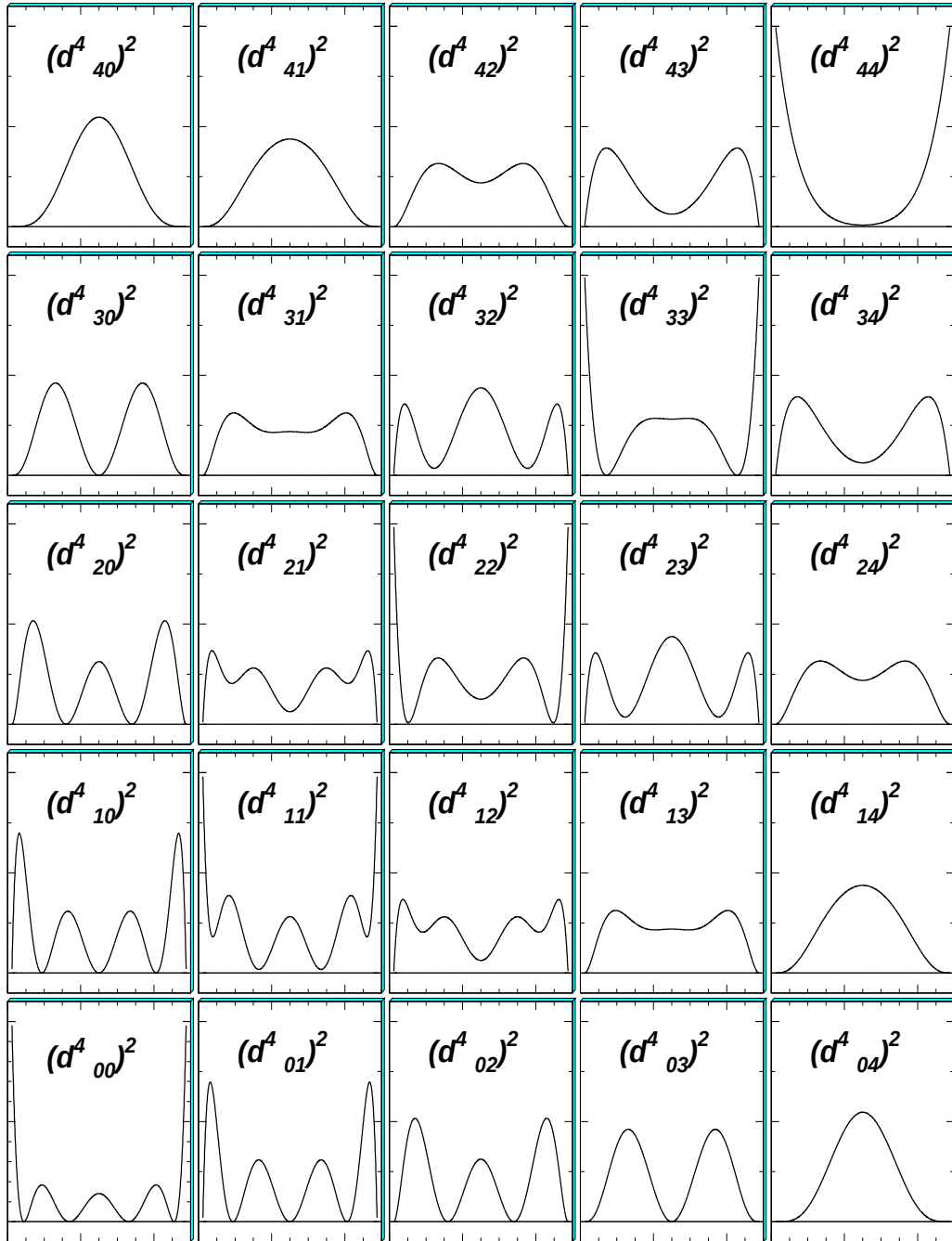


图 B.4: 自旋-4粒子的d函数图, 其中 $[d^4_{mn}(\theta)]^2$ 表示对绝对值为 $(\pm m, \pm n)$ 的情形全部求和并平均。

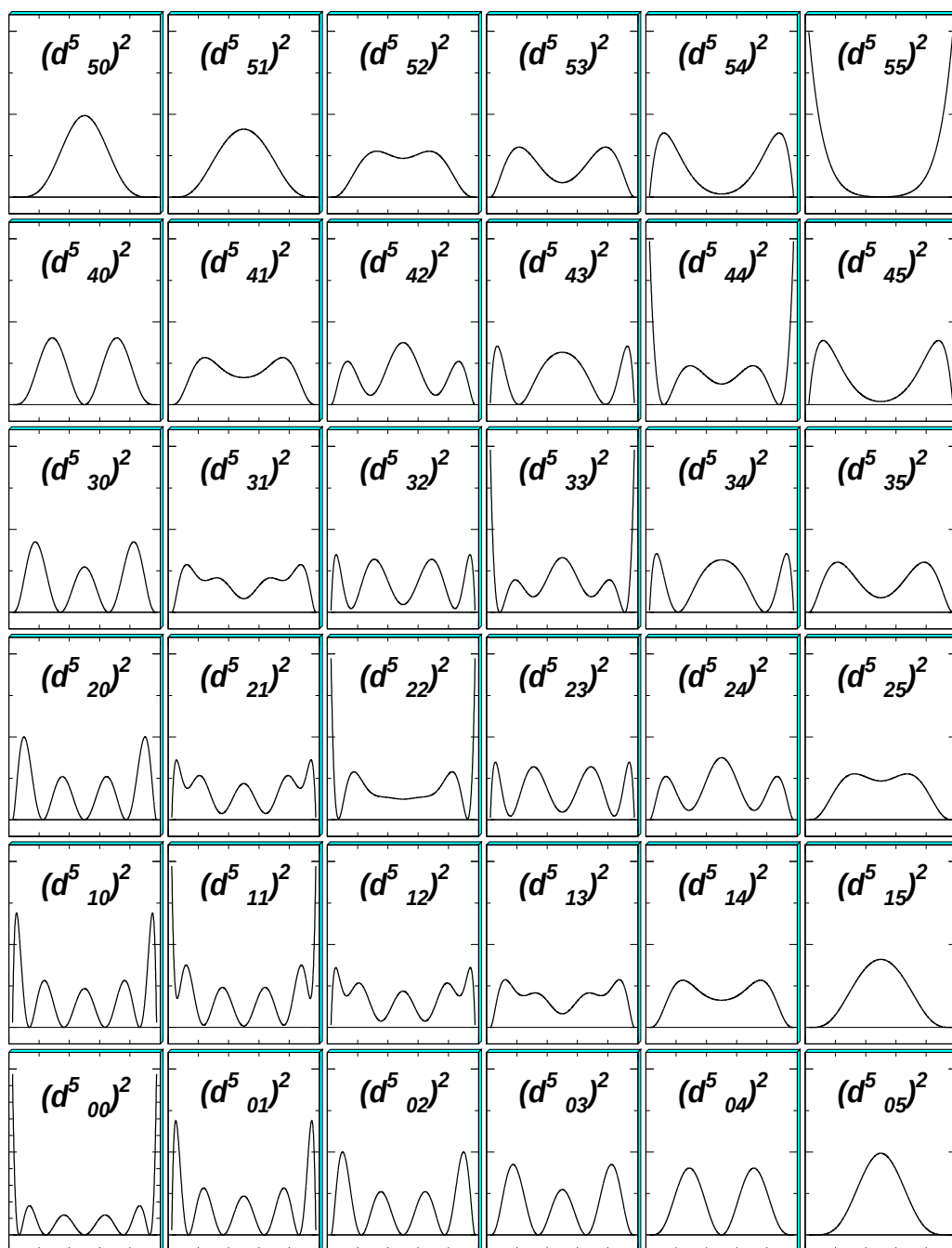


图 B.5: 自旋-5粒子的d函数图，其中 $[d^5_{mn}(\theta)]^2$ 表示对绝对值为 $(\pm m, \pm n)$ 的情形全部求和并平均。

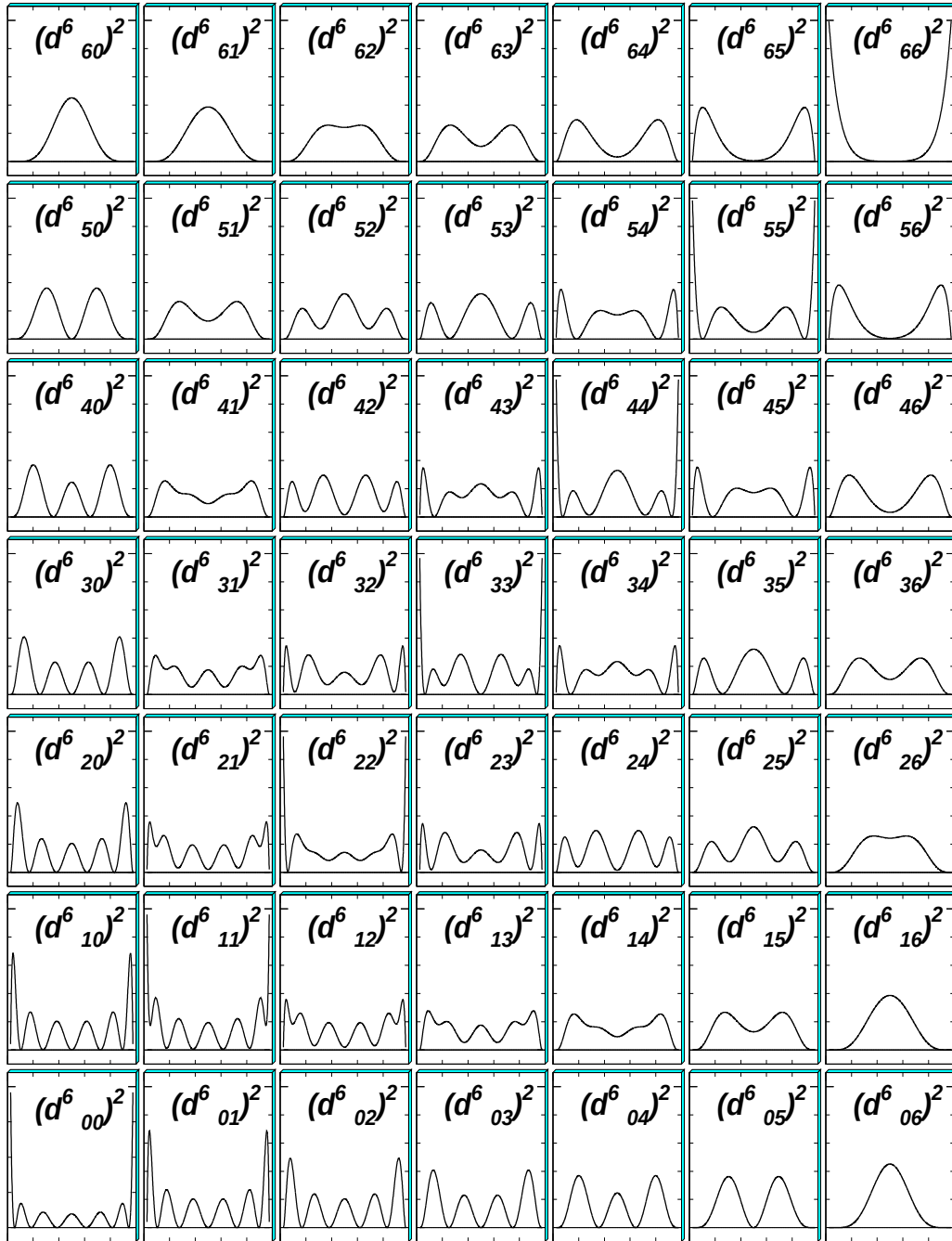


图 B.6: 自旋-6粒子的d函数图, 其中 $[d_{mn}^6(\theta)]^2$ 表示对绝对值为 $(\pm m, \pm n)$ 的情形全部求和并平均。

附录 C 部分Helicity耦合振幅的约化结果

这里的结果是采用Chung的公式 [9]，并且通过编程计算，得到的关于Helicity振幅的约化的结果，包括了粒子的两体衰变的从自旋 0 到自旋 3 的所有宇称组合情形的结果。结果是程序直接输出的L^AT_EX结果，只有稍许调整，所以有点机械化。

C.1 母粒子自旋为零的情形

C.1.0.5.1 $0^- \rightarrow 0^- + 0^+$

$$F_{0,0}^0 = +g_{00}\sqrt{\frac{1}{1}}r^0 \quad (\text{C.1a})$$

C.1.0.5.2 $0^- \rightarrow 0^- + 1^-$

$$F_{0,0}^0 = -g_{11}\sqrt{\frac{1}{1}}r^1\gamma_\sigma \quad (\text{C.2a})$$

C.1.0.5.3 $0^- \rightarrow 0^- + 2^+$

$$F_{0,0}^0 = +g_{22}\sqrt{\frac{1}{1}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.3a})$$

C.1.0.5.4 $0^- \rightarrow 1^- + 0^-$

$$F_{0,0}^0 = -g_{11}\sqrt{\frac{1}{1}}r^1\gamma_s \quad (\text{C.4a})$$

C.1.0.5.5 $0^- \rightarrow 1^- + 1^-$

$$F_{1,1}^0 = -g_{11}\sqrt{\frac{1}{2}}r^1 \quad (\text{C.5a})$$

C.1.0.5.6 $0^- \rightarrow 1^- + 1^+$

$$F_{1,1}^0 = +g_{00}\sqrt{\frac{1}{3}}r^0 + g_{22}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 \quad (\text{C.6a})$$

$$F_{0,0}^0 = -g_{00}\sqrt{\frac{1}{3}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{2}{3}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.6b})$$

C.1.0.5.7 $0^- \rightarrow 1^- + 2^-$

$$F_{1,1}^0 = -g_{11}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1\gamma_\sigma - g_{33}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\gamma_\sigma \quad (\text{C.7a})$$

$$F_{0,0}^0 = +g_{11}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1\gamma_s(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}) - g_{33}\sqrt{\frac{3}{5}}r^3\gamma_s(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}) \quad (\text{C.7b})$$

C.1.0.5.8 $0^- \rightarrow 1^- + 2^+$

$$F_{1,1}^0 = +g_{22}\sqrt{\frac{1}{2}}r^2\gamma_\sigma \quad (\text{C.8a})$$

C.1.0.5.9 $0^- \rightarrow 2^- + 0^+$

$$F_{0,0}^0 = +g_{22}\sqrt{\frac{1}{1}}r^2(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}) \quad (\text{C.9a})$$

C.1.0.5.10 $0^- \rightarrow 2^- + 1^-$

$$F_{1,1}^0 = -g_{11}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1\gamma_s - g_{33}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\gamma_s \quad (\text{C.10a})$$

$$F_{0,0}^0 = +g_{11}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3})\gamma_\sigma - g_{33}\sqrt{\frac{3}{5}}r^3(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3})\gamma_\sigma \quad (\text{C.10b})$$

C.1.0.5.11 $0^- \rightarrow 2^- + 1^+$

$$F_{1,1}^0 = +g_{22}\sqrt{\frac{1}{2}}r^2\gamma_s \quad (\text{C.11a})$$

C.1.0.5.12 $0^- \rightarrow 2^- + 2^-$

$$F_{2,2}^0 = -g_{11}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1 - g_{33}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3 \quad (\text{C.12a})$$

$$F_{1,1}^0 = +g_{11}\sqrt{\frac{1}{10}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{33}\sqrt{\frac{2}{5}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.12b})$$

C.1.0.5.13 $0^- \rightarrow 2^- + 2^+$

$$F_{2,2}^0 = +g_{00}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0 + g_{22}\sqrt{\frac{2}{7}}r^2 + g_{44}\sqrt{\frac{1}{70}}r^4 \quad (\text{C.13a})$$

$$F_{1,1}^0 = -g_{00}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{1}{14}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{44}\sqrt{\frac{8}{35}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.13b})$$

$$F_{0,0}^0 = +g_{00}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{22}\sqrt{\frac{2}{7}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{44}\sqrt{\frac{18}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.13c})$$

C.2 母粒子自旋为 1 的情形**C.2.0.5.14** $1^- \rightarrow 0^- + 0^-$

$$F_{0,0}^1 = +g_{10}\sqrt{\frac{1}{1}}r^1 \quad (\text{C.14a})$$

C.2.0.5.15 $1^- \rightarrow 0^- + 1^-$

$$F_{0,1}^1 = +g_{11}\sqrt{\frac{1}{2}}r^1 \quad (\text{C.15a})$$

C.2.0.5.16 $1^- \rightarrow 0^- + 1^+$

$$F_{0,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{3}}r^0 + g_{21}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 \quad (\text{C.16a})$$

$$F_{0,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{3}}r^0\gamma_\sigma - g_{21}\sqrt{\frac{2}{3}}r^2\gamma_\sigma \quad (\text{C.16b})$$

C.2.0.5.17 $1^- \rightarrow 0^- + 2^-$

$$F_{0,1}^1 = -g_{12}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\gamma_\sigma \quad (\text{C.17a})$$

$$F_{0,0}^1 = -g_{12}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{32}\sqrt{\frac{3}{5}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.17b})$$

C.2.0.5.18 $1^- \rightarrow 0^- + 2^+$

$$F_{0,1}^1 = -g_{22}\sqrt{\frac{1}{2}}r^2\gamma_\sigma \quad (\text{C.18a})$$

C.2.0.5.19 $1^- \rightarrow 1^- + 0^-$

$$F_{1,0}^1 = -g_{11}\sqrt{\frac{1}{2}}r^1 \quad (\text{C.19a})$$

C.2.0.5.20 $1^- \rightarrow 1^- + 0^+$

$$F_{1,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{3}}r^0 + g_{21}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 \quad (\text{C.20a})$$

$$F_{0,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{3}}r^0\gamma_s - g_{21}\sqrt{\frac{2}{3}}r^2\gamma_s \quad (\text{C.20b})$$

C.2.0.5.21 $1^- \rightarrow 1^- + 1^-$

$$F_{1,1}^1 = +g_{10}\sqrt{\frac{1}{3}}r^1 - g_{12}\sqrt{\frac{1}{15}}r^1 + g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3 \quad (\text{C.21a})$$

$$F_{1,0}^1 = -g_{11}\sqrt{\frac{1}{4}}r^1\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\gamma_\sigma \quad (\text{C.21b})$$

$$F_{0,1}^1 = +g_{11}\sqrt{\frac{1}{4}}r^1\gamma_s - g_{12}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_s - g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\gamma_s \quad (\text{C.21c})$$

$$F_{0,0}^1 = -g_{10}\sqrt{\frac{1}{3}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{4}{15}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{2}{5}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.21d})$$

C.2.0.5.22 $1^- \rightarrow 1^- + 1^+$

$$F_{1,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0 - g_{21}\sqrt{\frac{1}{3}}r^2 \quad (\text{C.22a})$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0\gamma_\sigma + g_{21}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\gamma_\sigma \quad (\text{C.22b})$$

$$F_{0,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{6}}r^0\gamma_s + g_{21}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_s - g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\gamma_s \quad (\text{C.22c})$$

C.2.0.5.23 $1^- \rightarrow 1^- + 2^-$

$$F_{1,2}^1 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1 - g_{12}\sqrt{\frac{1}{10}}r^1 - g_{32}\sqrt{\frac{1}{15}}r^3 + g_{33}\sqrt{\frac{1}{30}}r^3 \quad (\text{C.23a})$$

$$F_{1,1}^1 = -g_{12}\sqrt{\frac{1}{5}}r^1\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{3}{10}}r^3\gamma_\sigma \quad (\text{C.23b})$$

$$\begin{aligned} F_{1,0}^1 = & -g_{11}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{12}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ & - g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{33}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.23c})$$

$$F_{0,1}^1 = -g_{11}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{1}{30}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{4}{15}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.23d})$$

C.2.0.5.24 $1^- \rightarrow 1^- + 2^+$

$$F_{1,2}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0 + g_{21}\sqrt{\frac{1}{10}}r^2 - g_{22}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 + g_{23}\sqrt{\frac{2}{105}}r^2 + g_{43}\sqrt{\frac{1}{70}}r^4 \quad (\text{C.24a})$$

$$F_{1,1}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_\sigma - g_{21}\sqrt{\frac{1}{5}}r^2\gamma_\sigma + g_{23}\sqrt{\frac{3}{35}}r^2\gamma_\sigma - g_{43}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_\sigma \quad (\text{C.24b})$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{21}\sqrt{\frac{1}{60}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{23}\sqrt{\frac{4}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{43}\sqrt{\frac{3}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.24c})$$

$$F_{0,1}^1 = -g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma - g_{21}\sqrt{\frac{1}{20}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma \\ + g_{23}\sqrt{\frac{16}{105}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{43}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.24d})$$

$$F_{0,0}^1 = -g_{01}\sqrt{\frac{2}{15}}r^0\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{21}\sqrt{\frac{4}{15}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{23}\sqrt{\frac{9}{35}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{43}\sqrt{\frac{12}{35}}r^4\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.24e})$$

C.2.0.5.25 $1^- \rightarrow 2^- + 0^-$

$$F_{1,0}^1 = -g_{12}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1\gamma_s - g_{32}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\gamma_s \quad (\text{C.25a})$$

$$F_{0,0}^1 = -g_{12}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{32}\sqrt{\frac{3}{5}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.25b})$$

C.2.0.5.26 $1^- \rightarrow 2^- + 0^+$

$$F_{1,0}^1 = +g_{22}\sqrt{\frac{1}{2}}r^2\gamma_s \quad (\text{C.26a})$$

C.2.0.5.27 $1^- \rightarrow 2^- + 1^-$

$$F_{2,1}^1 = -g_{11}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1 - g_{12}\sqrt{\frac{1}{10}}r^1 - g_{32}\sqrt{\frac{1}{15}}r^3 - g_{33}\sqrt{\frac{1}{30}}r^3 \quad (\text{C.27a})$$

$$F_{1,1}^1 = -g_{12}\sqrt{\frac{1}{5}}r^1\gamma_s + g_{32}\sqrt{\frac{3}{10}}r^3\gamma_s \quad (\text{C.27b})$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{1}{30}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma - g_{33}\sqrt{\frac{4}{15}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.27c})$$

$$F_{0,1}^1 = +g_{11}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{12}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{33}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.27d})$$

C.2.0.5.28 $1^- \rightarrow 2^- + 1^+$

$$\begin{aligned}
F_{2,1}^1 = & +g_{01}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0 + g_{21}\sqrt{\frac{1}{10}}r^2 + g_{22}\sqrt{\frac{1}{6}}r^2 \\
& +g_{23}\sqrt{\frac{2}{105}}r^2 + g_{43}\sqrt{\frac{1}{70}}r^4
\end{aligned}
\tag{C.28a}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,1}^1 = & +g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s - g_{21}\sqrt{\frac{1}{5}}r^2\gamma_s \\
& +g_{23}\sqrt{\frac{3}{35}}r^2\gamma_s - g_{43}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_s
\end{aligned}
\tag{C.28b}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,0}^1 = & -g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma - g_{21}\sqrt{\frac{1}{20}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{1}{12}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma \\
& +g_{23}\sqrt{\frac{16}{105}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{43}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma
\end{aligned}
\tag{C.28c}$$

$$\begin{aligned}
F_{0,1}^1 = & +g_{01}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{21}\sqrt{\frac{1}{60}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{22}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \\
& +g_{23}\sqrt{\frac{4}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{43}\sqrt{\frac{3}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
\tag{C.28d}$$

$$\begin{aligned}
F_{0,0}^1 = & -g_{01}\sqrt{\frac{2}{15}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{21}\sqrt{\frac{4}{15}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \\
& +g_{23}\sqrt{\frac{9}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{43}\sqrt{\frac{12}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma
\end{aligned}
\tag{C.28e}$$

C.2.0.5.29 $1^- \rightarrow 2^- + 2^-$

$$F_{2,2}^1 = +g_{10}\sqrt{\frac{1}{5}}r^1 - g_{12}\sqrt{\frac{4}{35}}r^1 + g_{32}\sqrt{\frac{6}{35}}r^3 - g_{34}\sqrt{\frac{2}{315}}r^3 + g_{54}\sqrt{\frac{1}{126}}r^5 \quad (\text{C.29a})$$

$$F_{2,1}^1 = -g_{11}\sqrt{\frac{1}{10}}r^1\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{9}{70}}r^1\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{3}{35}}r^3\gamma_\sigma - g_{33}\sqrt{\frac{3}{20}}r^3\gamma_\sigma - g_{34}\sqrt{\frac{5}{252}}r^3\gamma_\sigma - g_{54}\sqrt{\frac{1}{63}}r^5\gamma_\sigma \quad (\text{C.29b})$$

$$F_{1,2}^1 = +g_{11}\sqrt{\frac{1}{10}}r^1\gamma_s - g_{12}\sqrt{\frac{9}{70}}r^1\gamma_s - g_{32}\sqrt{\frac{3}{35}}r^3\gamma_s + g_{33}\sqrt{\frac{3}{20}}r^3\gamma_s - g_{34}\sqrt{\frac{5}{252}}r^3\gamma_s - g_{54}\sqrt{\frac{1}{63}}r^5\gamma_s \quad (\text{C.29c})$$

$$F_{1,1}^1 = -g_{10}\sqrt{\frac{1}{5}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{1}{35}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{3}{70}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma - g_{34}\sqrt{\frac{32}{315}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma + g_{54}\sqrt{\frac{8}{63}}r^5\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.29d})$$

$$F_{1,0}^1 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{12}\sqrt{\frac{3}{140}}r^1\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{32}\sqrt{\frac{1}{70}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{33}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{34}\sqrt{\frac{5}{42}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{54}\sqrt{\frac{2}{21}}r^5\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.29e})$$

$$F_{0,1}^1 = -g_{11}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{12}\sqrt{\frac{3}{140}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{1}{70}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{34}\sqrt{\frac{5}{42}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{54}\sqrt{\frac{2}{21}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \quad (\text{C.29f})$$

$$F_{0,0}^1 = +g_{10}\sqrt{\frac{1}{5}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{12}\sqrt{\frac{4}{35}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{32}\sqrt{\frac{6}{35}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{34}\sqrt{\frac{8}{35}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{54}\sqrt{\frac{2}{7}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.29g})$$

C.2.0.5.30 $1^- \rightarrow 2^- + 2^+$

$$F_{2,2}^1 = +g_{01}\sqrt{\frac{2}{15}}r^0 - g_{21}\sqrt{\frac{4}{15}}r^2 + g_{23}\sqrt{\frac{3}{70}}r^2 - g_{43}\sqrt{\frac{2}{35}}r^4 \quad (\text{C.30a})$$

$$\begin{aligned} F_{2,1}^1 = & +g_{01}\sqrt{\frac{1}{15}}r^0\gamma_\sigma + g_{21}\sqrt{\frac{1}{30}}r^2\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{3}{14}}r^2\gamma_\sigma \\ & + g_{23}\sqrt{\frac{3}{35}}r^2\gamma_\sigma + g_{43}\sqrt{\frac{9}{140}}r^4\gamma_\sigma + g_{44}\sqrt{\frac{1}{28}}r^4\gamma_\sigma \end{aligned} \quad (\text{C.30b})$$

$$\begin{aligned} F_{1,2}^1 = & +g_{01}\sqrt{\frac{1}{15}}r^0\gamma_s + g_{21}\sqrt{\frac{1}{30}}r^2\gamma_s - g_{22}\sqrt{\frac{3}{14}}r^2\gamma_s \\ & + g_{23}\sqrt{\frac{3}{35}}r^2\gamma_s + g_{43}\sqrt{\frac{9}{140}}r^4\gamma_s - g_{44}\sqrt{\frac{1}{28}}r^4\gamma_s \end{aligned} \quad (\text{C.30c})$$

$$F_{1,1}^1 = -g_{01}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma + g_{21}\sqrt{\frac{1}{15}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{23}\sqrt{\frac{6}{35}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma - g_{43}\sqrt{\frac{8}{35}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.30d})$$

$$\begin{aligned} F_{1,0}^1 = & -g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{21}\sqrt{\frac{1}{20}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ & - g_{22}\sqrt{\frac{1}{28}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{23}\sqrt{\frac{2}{35}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ & + g_{43}\sqrt{\frac{3}{70}}r^4\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{44}\sqrt{\frac{3}{14}}r^4\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.30e})$$

$$\begin{aligned} F_{0,1}^1 = & -g_{01}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{21}\sqrt{\frac{1}{20}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \\ & + g_{22}\sqrt{\frac{1}{28}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{23}\sqrt{\frac{2}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \\ & + g_{43}\sqrt{\frac{3}{70}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{44}\sqrt{\frac{3}{14}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \end{aligned} \quad (\text{C.30f})$$

C.3 母粒子自旋为 2 的情形

C.3.0.5.31 $2^- \rightarrow 0^- + 0^+$

$$F_{0,0}^2 = +g_{20}\sqrt{\frac{1}{1}}r^2 \quad (\text{C.31a})$$

C.3.0.5.32 $2^+ \rightarrow 0^- + 0^-$

$$F_{0,0}^2 = +g_{20}\sqrt{\frac{1}{1}}r^2 \quad (\text{C.32a})$$

C.3.0.5.33 $2^- \rightarrow 0^- + 1^-$

$$F_{0,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1 + g_{31}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3 \quad (\text{C.33a})$$

$$F_{0,0}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1\gamma_\sigma - g_{31}\sqrt{\frac{3}{5}}r^3\gamma_\sigma \quad (\text{C.33b})$$

C.3.0.5.34 $2^- \rightarrow 0^- + 1^+$

$$F_{0,1}^2 = +g_{21}\sqrt{\frac{1}{2}}r^2 \quad (\text{C.34a})$$

C.3.0.5.35 $2^- \rightarrow 0^- + 2^-$

$$F_{0,2}^2 = +g_{12}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1 + g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3 \quad (\text{C.35a})$$

$$F_{0,1}^2 = +g_{12}\sqrt{\frac{1}{10}}r^1\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{2}{5}}r^3\gamma_\sigma \quad (\text{C.35b})$$

C.3.0.5.36 $2^- \rightarrow 0^- + 2^+$

$$F_{0,2}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0 + g_{22}\sqrt{\frac{2}{7}}r^2 + g_{42}\sqrt{\frac{1}{70}}r^4 \quad (\text{C.36a})$$

$$F_{0,1}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{1}{14}}r^2\gamma_\sigma - g_{42}\sqrt{\frac{8}{35}}r^4\gamma_\sigma \quad (\text{C.36b})$$

$$F_{0,0}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{22}\sqrt{\frac{2}{7}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{42}\sqrt{\frac{18}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.36c})$$

C.3.0.5.37 $2^- \rightarrow 1^- + 0^-$

$$F_{1,0}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{10}}r^1 + g_{31}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3 \quad (\text{C.37a})$$

$$F_{0,0}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1\gamma_s - g_{31}\sqrt{\frac{3}{5}}r^3\gamma_s \quad (\text{C.37b})$$

C.3.0.5.38 $2^- \rightarrow 1^- + 0^+$

$$F_{1,0}^2 = -g_{21}\sqrt{\frac{1}{2}}r^2 \quad (\text{C.38a})$$

C.3.0.5.39 $2^- \rightarrow 1^- + 1^-$

$$F_{1,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{1}{5}}r^1 - g_{31}\sqrt{\frac{3}{10}}r^3 \quad (\text{C.39a})$$

$$F_{1,0}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_\sigma + g_{31}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\gamma_\sigma \quad (\text{C.39b})$$

$$F_{0,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{20}}r^1\gamma_s + g_{31}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3\gamma_s + g_{12}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\gamma_s - g_{32}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\gamma_s \quad (\text{C.39c})$$

C.3.0.5.40 $2^- \rightarrow 1^- + 1^+$

$$F_{1,1}^2 = +g_{20}\sqrt{\frac{1}{3}}r^2 + g_{02}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0 - g_{22}\sqrt{\frac{1}{21}}r^2 + g_{42}\sqrt{\frac{3}{35}}r^4 \quad (\text{C.40a})$$

$$F_{1,0}^2 = -g_{21}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\gamma_\sigma + g_{02}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{1}{28}}r^2\gamma_\sigma - g_{42}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_\sigma \quad (\text{C.40b})$$

$$F_{0,1}^2 = +g_{21}\sqrt{\frac{1}{4}}r^2\gamma_s + g_{02}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s - g_{22}\sqrt{\frac{1}{28}}r^2\gamma_s - g_{42}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\gamma_s \quad (\text{C.40c})$$

$$F_{0,0}^2 = -g_{20}\sqrt{\frac{1}{3}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{02}\sqrt{\frac{2}{15}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{4}{21}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{42}\sqrt{\frac{12}{35}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.40d})$$

C.3.0.5.41 $2^- \rightarrow 1^- + 2^-$

$$F_{1,2}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{9}{50}}r^1 + g_{31}\sqrt{\frac{3}{25}}r^3 + g_{12}\sqrt{\frac{1}{30}}r^1 - g_{32}\sqrt{\frac{2}{15}}r^3 \\ - g_{13}\sqrt{\frac{8}{525}}r^1 + g_{33}\sqrt{\frac{1}{450}}r^3 + g_{53}\sqrt{\frac{1}{63}}r^5 \quad (\text{C.41a})$$

$$F_{1,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{25}}r^1\gamma_\sigma - g_{31}\sqrt{\frac{9}{50}}r^3\gamma_\sigma - g_{13}\sqrt{\frac{9}{175}}r^1\gamma_\sigma \\ + g_{33}\sqrt{\frac{4}{75}}r^3\gamma_\sigma - g_{53}\sqrt{\frac{2}{21}}r^5\gamma_\sigma \quad (\text{C.41b})$$

$$F_{1,0}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{100}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{31}\sqrt{\frac{1}{50}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{12}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{32}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{13}\sqrt{\frac{16}{175}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{33}\sqrt{\frac{1}{75}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{53}\sqrt{\frac{2}{21}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.41c})$$

$$F_{0,2}^2 = +g_{12}\sqrt{\frac{4}{15}}r^1\gamma_s + g_{32}\sqrt{\frac{1}{15}}r^3\gamma_s - g_{13}\sqrt{\frac{1}{21}}r^1\gamma_s \\ - g_{33}\sqrt{\frac{1}{9}}r^3\gamma_s - g_{53}\sqrt{\frac{1}{126}}r^5\gamma_s \quad (\text{C.41d})$$

$$F_{0,1}^2 = -g_{11}\sqrt{\frac{9}{100}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{31}\sqrt{\frac{3}{50}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma + g_{12}\sqrt{\frac{1}{60}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma \\ - g_{32}\sqrt{\frac{1}{15}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma - g_{13}\sqrt{\frac{64}{525}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{4}{225}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma \\ + g_{53}\sqrt{\frac{8}{63}}r^5\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.41e})$$

$$F_{0,0}^2 = -g_{11}\sqrt{\frac{4}{25}}r^1\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{31}\sqrt{\frac{6}{25}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ - g_{13}\sqrt{\frac{27}{175}}r^1\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{33}\sqrt{\frac{4}{25}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ - g_{53}\sqrt{\frac{2}{7}}r^5\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.41f})$$

C.3.0.5.42 $2^+ \rightarrow 1^+ + 2^+$

$$F_{1,2}^2 = +g_{21}\sqrt{\frac{3}{10}}r^2 + g_{02}\sqrt{\frac{1}{15}}r^0 - g_{22}\sqrt{\frac{1}{42}}r^2 - g_{42}\sqrt{\frac{8}{105}}r^4 \\ - g_{23}\sqrt{\frac{1}{105}}r^2 + g_{43}\sqrt{\frac{1}{42}}r^4 \quad (\text{C.42a})$$

$$F_{1,1}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{1}{7}}r^2\gamma_\sigma + g_{42}\sqrt{\frac{9}{35}}r^4\gamma_\sigma \quad (\text{C.42b})$$

$$F_{1,0}^2 = -g_{21}\sqrt{\frac{1}{20}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{02}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ - g_{22}\sqrt{\frac{1}{28}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{42}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{23}\sqrt{\frac{2}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{43}\sqrt{\frac{1}{7}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.42c})$$

$$F_{0,2}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{2}{15}}r^0\gamma_s + g_{22}\sqrt{\frac{4}{21}}r^2\gamma_s + g_{42}\sqrt{\frac{1}{105}}r^4\gamma_s \\ - g_{23}\sqrt{\frac{5}{42}}r^2\gamma_s - g_{43}\sqrt{\frac{1}{21}}r^4\gamma_s \quad (\text{C.42d})$$

$$F_{0,1}^2 = -g_{21}\sqrt{\frac{3}{20}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{02}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{1}{84}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma \\ - g_{42}\sqrt{\frac{4}{105}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma - g_{23}\sqrt{\frac{8}{105}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{43}\sqrt{\frac{4}{21}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.42e})$$

C.3.0.5.43 $2^+ \rightarrow 2^+ + 0^-$

$$F_{2,0}^2 = -g_{12}\sqrt{\frac{2}{5}}r^1 - g_{32}\sqrt{\frac{1}{10}}r^3 \quad (\text{C.43a})$$

$$F_{1,0}^2 = -g_{12}\sqrt{\frac{1}{10}}r^1\gamma_s + g_{32}\sqrt{\frac{2}{5}}r^3\gamma_s \quad (\text{C.43b})$$

C.3.0.5.44 $2^+ \rightarrow 2^+ + 0^+$

$$F_{2,0}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0 + g_{22}\sqrt{\frac{2}{7}}r^2 + g_{42}\sqrt{\frac{1}{70}}r^4 \quad (\text{C.44a})$$

$$F_{1,0}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0\gamma_s - g_{22}\sqrt{\frac{1}{14}}r^2\gamma_s - g_{42}\sqrt{\frac{8}{35}}r^4\gamma_s \quad (\text{C.44b})$$

$$F_{0,0}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{1}{5}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{22}\sqrt{\frac{2}{7}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{42}\sqrt{\frac{18}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.44c})$$

C.3.0.5.45 $2^- \rightarrow 2^- + 1^-$

$$F_{2,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{9}{50}}r^1 + g_{31}\sqrt{\frac{3}{25}}r^3 - g_{12}\sqrt{\frac{1}{30}}r^1 + g_{32}\sqrt{\frac{2}{15}}r^3 \\ - g_{13}\sqrt{\frac{8}{525}}r^1 + g_{33}\sqrt{\frac{1}{450}}r^3 + g_{53}\sqrt{\frac{1}{63}}r^5 \quad (\text{C.45a})$$

$$F_{2,0}^2 = -g_{12}\sqrt{\frac{4}{15}}r^1\gamma_\sigma - g_{32}\sqrt{\frac{1}{15}}r^3\gamma_\sigma - g_{13}\sqrt{\frac{1}{21}}r^1\gamma_\sigma \\ - g_{33}\sqrt{\frac{1}{9}}r^3\gamma_\sigma - g_{53}\sqrt{\frac{1}{126}}r^5\gamma_\sigma \quad (\text{C.45b})$$

$$F_{1,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{25}}r^1\gamma_s - g_{31}\sqrt{\frac{9}{50}}r^3\gamma_s - g_{13}\sqrt{\frac{9}{175}}r^1\gamma_s \\ + g_{33}\sqrt{\frac{4}{75}}r^3\gamma_s - g_{53}\sqrt{\frac{2}{21}}r^5\gamma_s \quad (\text{C.45c})$$

$$F_{1,0}^2 = -g_{11}\sqrt{\frac{9}{100}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma - g_{31}\sqrt{\frac{3}{50}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{1}{60}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{1}{15}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma \\ - g_{13}\sqrt{\frac{64}{525}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{4}{225}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma + g_{53}\sqrt{\frac{8}{63}}r^5\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.45d})$$

$$F_{0,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{100}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{31}\sqrt{\frac{1}{50}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{12}\sqrt{\frac{1}{20}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \\ - g_{32}\sqrt{\frac{1}{5}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{13}\sqrt{\frac{16}{175}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{33}\sqrt{\frac{1}{75}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{53}\sqrt{\frac{2}{21}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.45e})$$

$$F_{0,0}^2 = -g_{11}\sqrt{\frac{4}{25}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{31}\sqrt{\frac{6}{25}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \\ - g_{13}\sqrt{\frac{27}{175}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{4}{25}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \\ - g_{53}\sqrt{\frac{2}{7}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \quad (\text{C.45f})$$

C.3.0.5.46 $2^+ \rightarrow 2^+ + 1^+$

$$\begin{aligned}
F_{2,1}^2 = & -g_{21}\sqrt{\frac{3}{10}}r^2 + g_{02}\sqrt{\frac{1}{15}}r^0 - g_{22}\sqrt{\frac{1}{42}}r^2 - g_{42}\sqrt{\frac{8}{105}}r^4 \\
& + g_{23}\sqrt{\frac{1}{105}}r^2 - g_{43}\sqrt{\frac{1}{42}}r^4
\end{aligned}
\tag{C.46a}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,0}^2 = & +g_{02}\sqrt{\frac{2}{15}}r^0\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{4}{21}}r^2\gamma_\sigma + g_{42}\sqrt{\frac{1}{105}}r^4\gamma_\sigma \\
& + g_{23}\sqrt{\frac{5}{42}}r^2\gamma_\sigma + g_{43}\sqrt{\frac{1}{21}}r^4\gamma_\sigma
\end{aligned}
\tag{C.46b}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,1}^2 = & +g_{02}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\gamma_s - g_{22}\sqrt{\frac{1}{7}}r^2\gamma_s + g_{42}\sqrt{\frac{9}{35}}r^4\gamma_s
\end{aligned}
\tag{C.46c}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,0}^2 = & +g_{21}\sqrt{\frac{3}{20}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{02}\sqrt{\frac{1}{30}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{1}{84}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma - g_{42}\sqrt{\frac{4}{105}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \\
& + g_{23}\sqrt{\frac{8}{105}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma - g_{43}\sqrt{\frac{4}{21}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma
\end{aligned}
\tag{C.46d}$$

$$\begin{aligned}
F_{0,1}^2 = & +g_{21}\sqrt{\frac{1}{20}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{02}\sqrt{\frac{1}{10}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{22}\sqrt{\frac{1}{28}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \\
& - g_{42}\sqrt{\frac{4}{35}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{23}\sqrt{\frac{2}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{43}\sqrt{\frac{1}{7}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
\tag{C.46e}$$

C.3.0.5.47 $2^- \rightarrow 2^- + 2^-$

$$F_{2,2}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{4}{25}}r^1 - g_{31}\sqrt{\frac{6}{25}}r^3 - g_{13}\sqrt{\frac{9}{350}}r^1 + g_{33}\sqrt{\frac{2}{75}}r^3 - g_{53}\sqrt{\frac{1}{21}}r^5 \quad (\text{C.47a})$$

$$F_{2,1}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{50}}r^1\gamma_\sigma + g_{31}\sqrt{\frac{1}{25}}r^3\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{3}{70}}r^1\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{6}{35}}r^3\gamma_\sigma - g_{13}\sqrt{\frac{12}{175}}r^1\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{1}{100}}r^3\gamma_\sigma + g_{53}\sqrt{\frac{1}{14}}r^5\gamma_\sigma - g_{34}\sqrt{\frac{1}{84}}r^3\gamma_\sigma + g_{54}\sqrt{\frac{1}{42}}r^5\gamma_\sigma \quad (\text{C.47b})$$

$$F_{2,0}^2 = -g_{12}\sqrt{\frac{4}{35}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{32}\sqrt{\frac{1}{35}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{13}\sqrt{\frac{1}{14}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{33}\sqrt{\frac{1}{6}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{53}\sqrt{\frac{1}{84}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{34}\sqrt{\frac{1}{14}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{54}\sqrt{\frac{1}{28}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.47c})$$

$$F_{1,2}^2 = +g_{11}\sqrt{\frac{3}{50}}r^1\gamma_s + g_{31}\sqrt{\frac{1}{25}}r^3\gamma_s + g_{12}\sqrt{\frac{3}{70}}r^1\gamma_s - g_{32}\sqrt{\frac{6}{35}}r^3\gamma_s - g_{13}\sqrt{\frac{12}{175}}r^1\gamma_s + g_{33}\sqrt{\frac{1}{100}}r^3\gamma_s + g_{53}\sqrt{\frac{1}{14}}r^5\gamma_s + g_{34}\sqrt{\frac{1}{84}}r^3\gamma_s - g_{54}\sqrt{\frac{1}{42}}r^5\gamma_s \quad (\text{C.47d})$$

$$F_{1,1}^2 = -g_{11}\sqrt{\frac{1}{25}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{31}\sqrt{\frac{3}{50}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma - g_{13}\sqrt{\frac{18}{175}}r^1\gamma_s\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{8}{75}}r^3\gamma_s\gamma_\sigma - g_{53}\sqrt{\frac{4}{21}}r^5\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.47e})$$

$$F_{1,0}^2 = -g_{11}\sqrt{\frac{9}{100}}r^1\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{31}\sqrt{\frac{3}{50}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{12}\sqrt{\frac{1}{140}}r^1\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{32}\sqrt{\frac{1}{35}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{13}\sqrt{\frac{8}{175}}r^1\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{33}\sqrt{\frac{1}{150}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{53}\sqrt{\frac{1}{21}}r^5\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{34}\sqrt{\frac{1}{14}}r^3\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{54}\sqrt{\frac{1}{7}}r^5\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.47f})$$

$$F_{0,2}^2 = +g_{12}\sqrt{\frac{4}{35}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{32}\sqrt{\frac{1}{35}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{13}\sqrt{\frac{1}{14}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{33}\sqrt{\frac{1}{6}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{53}\sqrt{\frac{1}{84}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{34}\sqrt{\frac{1}{14}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{54}\sqrt{\frac{1}{28}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.47g})$$

$$F_{0,1}^2 = -g_{11}\sqrt{\frac{9}{100}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{31}\sqrt{\frac{3}{50}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{12}\sqrt{\frac{1}{140}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{32}\sqrt{\frac{1}{35}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{13}\sqrt{\frac{8}{175}}r^1\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{33}\sqrt{\frac{1}{150}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{53}\sqrt{\frac{1}{21}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{34}\sqrt{\frac{1}{14}}r^3\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{54}\sqrt{\frac{1}{7}}r^5\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \quad (\text{C.47h})$$

C.3.0.5.48 $2^+ \rightarrow 2^+ + 2^+$

$$F_{2,2}^2 = +g_{20}\sqrt{\frac{1}{5}}r^2 + g_{02}\sqrt{\frac{2}{35}}r^0 - g_{22}\sqrt{\frac{4}{49}}r^2 + g_{42}\sqrt{\frac{36}{245}}r^4 \\ + g_{24}\sqrt{\frac{1}{245}}r^2 - g_{44}\sqrt{\frac{2}{539}}r^4 + g_{64}\sqrt{\frac{1}{154}}r^6 \quad (\text{C.48a})$$

$$F_{2,1}^2 = -g_{21}\sqrt{\frac{1}{10}}r^2\gamma_\sigma + g_{02}\sqrt{\frac{3}{35}}r^0\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{3}{98}}r^2\gamma_\sigma - g_{42}\sqrt{\frac{24}{245}}r^4\gamma_\sigma \\ + g_{23}\sqrt{\frac{3}{70}}r^2\gamma_\sigma - g_{43}\sqrt{\frac{3}{28}}r^4\gamma_\sigma + g_{24}\sqrt{\frac{5}{294}}r^2\gamma_\sigma - g_{44}\sqrt{\frac{3}{2156}}r^4\gamma_\sigma \\ - g_{64}\sqrt{\frac{4}{231}}r^6\gamma_\sigma \quad (\text{C.48b})$$

$$F_{2,0}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{2}{35}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{22}\sqrt{\frac{4}{49}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{42}\sqrt{\frac{1}{245}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{23}\sqrt{\frac{5}{28}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{43}\sqrt{\frac{1}{14}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{24}\sqrt{\frac{5}{196}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{44}\sqrt{\frac{81}{1078}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{64}\sqrt{\frac{1}{154}}r^6\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.48c})$$

$$F_{1,2}^2 = +g_{21}\sqrt{\frac{1}{10}}r^2\gamma_s + g_{02}\sqrt{\frac{3}{35}}r^0\gamma_s - g_{22}\sqrt{\frac{3}{98}}r^2\gamma_s - g_{42}\sqrt{\frac{24}{245}}r^4\gamma_s \\ - g_{23}\sqrt{\frac{3}{70}}r^2\gamma_s + g_{43}\sqrt{\frac{3}{28}}r^4\gamma_s + g_{24}\sqrt{\frac{5}{294}}r^2\gamma_s - g_{44}\sqrt{\frac{3}{2156}}r^4\gamma_s \\ - g_{64}\sqrt{\frac{4}{231}}r^6\gamma_s \quad (\text{C.48d})$$

$$F_{1,1}^2 = -g_{20}\sqrt{\frac{1}{5}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{02}\sqrt{\frac{1}{70}}r^0\gamma_s\gamma_\sigma - g_{22}\sqrt{\frac{1}{49}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma + g_{42}\sqrt{\frac{9}{245}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma \\ + g_{24}\sqrt{\frac{16}{245}}r^2\gamma_s\gamma_\sigma - g_{44}\sqrt{\frac{32}{539}}r^4\gamma_s\gamma_\sigma + g_{64}\sqrt{\frac{8}{77}}r^6\gamma_s\gamma_\sigma \quad (\text{C.48e})$$

$$F_{1,0}^2 = +g_{21}\sqrt{\frac{3}{20}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{02}\sqrt{\frac{1}{70}}r^0\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{22}\sqrt{\frac{1}{196}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{42}\sqrt{\frac{4}{245}}r^4\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{23}\sqrt{\frac{1}{35}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{43}\sqrt{\frac{1}{14}}r^4\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{24}\sqrt{\frac{5}{49}}r^2\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{44}\sqrt{\frac{9}{1078}}r^4\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{64}\sqrt{\frac{8}{77}}r^6\gamma_s\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.48f})$$

$$F_{0,2}^2 = +g_{02}\sqrt{\frac{2}{35}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{22}\sqrt{\frac{4}{49}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{42}\sqrt{\frac{1}{245}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \\ - g_{23}\sqrt{\frac{5}{28}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{43}\sqrt{\frac{1}{14}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{24}\sqrt{\frac{5}{196}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{44}\sqrt{\frac{81}{1078}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right) + g_{64}\sqrt{\frac{1}{154}}r^6\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$F_{0,1}^2 = -g_{21}\sqrt{\frac{3}{20}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{02}\sqrt{\frac{1}{70}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{22}\sqrt{\frac{1}{196}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \\ + g_{42}\sqrt{\frac{4}{245}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{23}\sqrt{\frac{1}{35}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma + g_{43}\sqrt{\frac{1}{14}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \\ + g_{24}\sqrt{\frac{5}{49}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{44}\sqrt{\frac{9}{1078}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma - g_{64}\sqrt{\frac{8}{77}}r^6\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\gamma_\sigma \quad (\text{C.48g})$$

$$F_{0,0}^2 = +g_{20}\sqrt{\frac{1}{5}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{02}\sqrt{\frac{2}{35}}r^0\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{22}\sqrt{\frac{4}{49}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{42}\sqrt{\frac{36}{245}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{24}\sqrt{\frac{36}{245}}r^2\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) - g_{44}\sqrt{\frac{72}{539}}r^4\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \\ + g_{64}\sqrt{\frac{18}{77}}r^6\left(\frac{2}{3}\gamma_s^2 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\gamma_\sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \quad (\text{C.48h})$$

附录 D 一些有用公式的汇集

D.1 一些有用的张量运算公式

D.1.1 四阶张量

希腊字母 $\mu, \nu, \delta, \dots$ 取值0, 1, 2, 3, 4。

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \quad (\text{D.2})$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) \quad (\text{D.3})$$

$$p^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu = (p_0, -p_1, -p_2, -p_3) \quad (\text{D.4})$$

$$p_1^\mu g_{\mu\nu} p_2^\nu = p_1^0 p_2^0 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \quad (\text{D.5})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} p^\mu p^\nu = 0 \quad (\text{D.6})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} g^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{D.7})$$

e_μ 是一个赭矢:

$$e_\mu = \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} p_1^\nu p_1^\delta p_1^\sigma \quad (\text{D.8})$$

D.1.2 三阶张量

英文字母 $i, j, k, \dots$ 等取值 1, 2, 3。

$$\epsilon_{ijk} p_1^i p_2^j p_3^k = (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 = (\vec{p}_3 \times \vec{p}_1) \cdot \vec{p}_2 = (\vec{p}_2 \times \vec{p}_3) \cdot \vec{p}_1 \quad (\text{D.9})$$

$$(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)_i = \epsilon_{ijk} p_1^j p_2^k \quad (\text{D.10})$$

$$\delta_{ij} \delta^{ij} = 3 \quad (\text{D.11})$$

D.2 Lorentz 不变量的构造

如果我们从一系列四矢量 $(p_1, p_2, \dots)$ 出发, 设想能构造出的全部的 Lorentz 不变量, 这个概念在构造不变振幅时非常有用。一般有三种形式的不变量, 我们列举如下:

- 根据定义, 标量积是一个不变量。

$$p_i \cdot p_j = E_i E_j - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j, \quad (\text{D.12})$$

例如, 经常用到的两个粒子的不变质量的平方:

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

或者动量转移的平方:

$$\begin{aligned} t_{12} &= (p_1 - p_2)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 - 2p_1 \cdot p_2, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

如果两个粒子的质量 m_1 和 m_2 不变, 则 s_{12} , t_{12} 和 $p_1 \cdot p_2$ 也是不变量, 它们将会同时达到极值。

- 类时矢量的能量分量的符号也是不变的，因为我们只会做正的（orthnchronous）Lorentz 变换。
- 如果有四个四矢量，则

$$\begin{aligned}\epsilon &\equiv \epsilon(p_i, p_j, p_k, p_l) \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma} p_i^\alpha p_j^\beta p_k^\delta p_l^\sigma, \end{aligned} \tag{D.15}$$

是一个不变量。 $\epsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}$ 是四阶完全反对称张量，这个不变量其实是以四个四动量为列或者为行的一个矩阵的行列式。关于其不变性的证明这里略去。

参考文献

- [1] Kenneth Simth, *The Calculation of Atomic Collision Process*, WILEY-INTERSCIENCE, A DIVISION OF JOHN WILLY& SONS, INC. NEW YORK · LONDON · SYDNEY · TORONTO
- [2] 倪光炯, 《高等量子力学》
- [3] M. Jacob and G.C. Wich, *Annals Phys.* **7**, 404(1959)
- [4] C. Zemach, *Phys. Rev. B***133**, 1201(1964)
- [5] C. Zemach, *Phys. Rev. B***140**, 97(1965)
- [6] V. Filippin, A. Frontana and A. Rotondi, *Phys. Rev. D***51** 2247(1995)
- [7] W. Ratita and J. Schwinger, *Phys. Rev.***106**,345(1941)
- [8] S.U. Chung, *Phys. Rev. D***48**, 1225(1993)
- [9] S.U. Chung, *Phys. Rev. D***57**, 431(1998)
- [10] S.U. Chung, *Spin Formulism*, CERN Yellow Report, No. CERN 71-8, Geneva, Switzerland(1971) (a updated version can be found at website: <http://suchung.home.cern.ch/suchung/>)
- [11] J.D. Richman, CALT-68-1148
- [12] B.S. Zou and D.V. Bugg, *Eur. Phys. J. A***16** 537(2003)
- [13] Elliot Leader it Spin In Particle Phyiscs, Cambridge Univ. Press, 2001
- [14] Hartmut M. Pilkuhn, *Relativistic Particle Physics*, Springer-Verlag, 1979
- [15]
- [16] Z.Y. Zhou *et al.*, *JHEP* **0502** (2005) 043.

- [17] E.M. Aitala *et al.*, Phys. Rev. Lett.**86** (2001)770.
- [18] M. Ablikim *et al.*, Phys. Lett. B**598** (2004) 149.
- [19] H.Q. Zheng *et al.*, Nucl. Phys. A**733** (2004) 235.
- [20] B.S. Zou and D.V. Bugg, Euro. Phys. J A**16** (2003) 537.
- [21] M. Ablikim *et al.*, Phys. Lett. B**633** (2006) 681
- [22] 朱永生 著, 实验物理中的概率和统计, 科学出版社, 1991年2月;
Siegmond Brandt, Data Analysis —— Statistical and Computational
Methods for Scientists and Engineers (English Version Translated By Glen
Covan, Third Edition), 1998
- [23] F. James, 1968, CERN 68-15。
- [24] 袁亚湘, 孙文瑜 著, 最优化理论与方法, 科学出版社, 1997
- [25] F. James, MINUIT —— Function Minimization and Error Analysis Reference Manual, CERN Program Library Long Writeup D506, 1994

感 谢

臣闻报德莫如尽言，... 伏惟陛下威烈振乎八荒，声教光乎六合，九州百郡，十居其七，平燕定蜀，有如拾芥。夫善作者不必善成，善始者不必善终，是以古先哲王，知功业之不易，战战兢兢，如临深谷。伏惟陛下追踪前圣，天下幸甚！

——王猛

我很喜欢这篇王猛给苻坚最后一份奏折，甚至觉得它比《出师表》还好，因为其中带有强烈而真挚的感恩之心。“报德莫如尽言”，这是我写这本小册子最大的动机之一。我的感恩之心是对生活学习了7年的高能所的感恩之心。1999年，我非常幸运能在高能所学习和生活，认识了很多老师和同学，和他们一起工作和学习除了使我迅速地从一个对粒子物理几乎一无所知地大学生毕业生，成为一个粒子物理实验工作者。因此，我非常感谢在在高能所度过的7年充实的学习生活，非常感谢和同学朋友一起度过的快乐时光，感谢能有这么好的机会和环境从事自己喜欢的工作。所以我把自己的学习经验总结成小册子，并且提出自己的一些小小的建议，希望能对 BESII 和 BESIII 的分波分析工作能有所裨益。

分波分析是粒子物理实验中一种强有力的分析工具，它能从实验数据当中得到尽可能多的物理信息，并且能解决常规分析方法无法解决的问题。虽然分波分析具有非常长的历史，同时它也是处于不断发展和完善当中的，尤其是近10多年来，采用分波分析在轻强子谱的研究当中取得很多很重要的成果，同时方法也不断的被改进且成熟和完善起来。但是完全掌握分波分析需要比较多的理论知识和其他知识，这些理论知识还有一些容易误解的地方，需要澄清；理论上，尤其是动力学的参数化，也有不尽完美的地方；在数据分析的技术问

题上，也有一些需要改进的地方，比如优化问题的局域最小问题，实验分辨的估计以及显著性的问题，都有很大的改进空间。鉴于BESIII的巨大的数据量，将会有大量的分波分析，所以，发展完善这种工具显得十分重要，因此，更多的人来学习，并熟练掌握分波分析方法也就显得非常有意义。希望这个小册子能对这个目标起到促进作用。

关于本书的写作，有些人我必须感谢，首先是我的导师朱永生研究员和副导师吴宁博士，是朱老师把我引入粒子物理实验的领域，第一次提到了学习分波分析的问题，而吴宁老师本人则是Helicity 理论具有代表性的专家之一，我从他那里学习了Helicity 理论。我还应该感谢苑长征研究员，在他的鼓励下，我才把分波分析的相关学习经验和材料整理出来；还有更多的人我需要表示感谢，他们是平荣刚博士、何康林博士、单连友博士、莫晓虎博士、马连良博士和廖红波博士，同他们的很多有益的讨论，对本书的内容有很多裨益；感谢 ψ' 组的所有成员，组内的良好气氛中对本书的写成有很大的促进作用。