群论

欧阳帅[1]

2021.09.17

[1]ShuaiOuyang@mail.sdu.edu.cn

目录

1 群的基本概念与性质 **5**

1.1 群的概念 5

1.2 子群和陪集 7

1.3 类与不变子群 7

1.4 同构与同态 10

1.5 变换群 12

1.6 直积与半直积 14

2 群表示理论 **17**

2.1 群表示 17

2.2 等价表示、不可约表示、酉表示 18

2.3 群代数与正则表示 21

2.4 有限群表示理论 22

2.5 特征标理论 26

2.6 新表示的构成 28

3 群论与量子力学 **33**

3.1 哈密顿算符群与相关定理 33

3.2 投影算符与久期行列式的对角化 34

4 置换群 **39**

4.1 n 阶置换群 39

4.2 杨盘及其引理 42

5 李群与李代数 49

5.1 李群 49

5.2 无穷小生成元和无穷小算符 51

5.2.1 无穷小生成元 51

5.2.2 无穷小算符 52

5.3 $SU(2)$ 群的不可约表示 54

5.4 $SU(2)$ 群和 $SO(3)$ 群的同态映射 55

5.5 角动量及其耦合 57

5.6 经典 Lie 群的张量表示 58

5.7 Lie 代数 61

5.8 根向量与 Dynkin 图 63

5.8.1 Dynkin 图 64

Chapter 1

群的基本概念与性质

1.1 群的概念

定义 1.1.1 Group：

设 G 是一个集合，在 G 中定义了一个二元群乘法，并且群中的元素都要满足一下的要求：

1) Associativity: $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$

2) Identity: 对于 $\forall g \in G$ 都有 $eg = ge = g$

3) Inverse: 对于 $\forall g \in G$ 都有逆元素记作 g^{-1}

4) Closure: 对于 $\forall g, f \in G$，都有 $h \in G$ 使得 $gf = h$

定理 1.1.1：单位元素有且只有一个

证：假设存在两个单位元素 e_1, e_2，那么会有

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 \tag{1.1}$$

这与假设矛盾，所以单位元素是唯一的。

定理 1.1.2：元素的逆也是唯一的

证：假设元素 g 有两个逆 h_1, h_2，那么会有

$$h_1 = h_1 e = h_1 g h_2 = e h_2 = h_2 \tag{1.2}$$

这个同样与假设矛盾，所以元素的逆也是唯一的。

定义 1.1.2 Abelian Group：

如果群元素满足如下的关系就叫做 Abelian group

$$gf = fg \qquad f, g \in G \tag{1.3}$$

定义 1.1.3 Order of group：

我们把群元素的个数定义为群的阶。

定义 1.1.4 Permutation Group：

置换群表示的是元素的调换，具体的例子可以想象正三角形的旋转，把置换关系用矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

对于转置群的乘法我们做一个演示：

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

n 阶置换群的群元个数为 $n!$。最后我们引入一个简记来表示置换群：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (21) \tag{1.6}$$

定理 1.1.3 重排定理：对于 $\forall g \in G$，有 $gG = Gg = G$

证： $gG \subset G$

$$g, g_i \in G \Rightarrow gg_i \in G \Rightarrow gG \subset G$$

$G \subset gG$

$$g \in gG \Rightarrow g^{-1} \in gG \Rightarrow g_i = g^{-1}(gg_i) \in gG \Rightarrow G \subset gG$$

综上所述可以得出 $gG = G$，同样的方法可以得到 $Gg = G$，于是此定理得证。

1.2 子群和陪集

定义 1.2.1 Subgroup:

设 $H \subset G$ 并且 H 满足群的性质，那么 H 就叫做 G 的一个子群。于是我们在证明是子群的时候只需要证明 Closure 和 Inverse 即可。

一般来说 $\{e\}$ 一定是子群，这种子群叫做平庸子群，基本没什么用处；我们更关系的是非平庸子群，也叫做固有子群

例子 1.2.1 Cyclic subgroups:我们从有限群中挑出一系列数组 $\{a, a^1, a^2, \cdot, a^n\}$ 并且要求这列数组形成一个群，这样的群就叫做循环子群。由于子群是有封闭性的，所以 $a^n = e$ 的指数 n 就是群元的阶。

定义 1.2.2 陪集:

设 H 是 G 的子群，由固定 $g \in G$ 生成的 gH, Hg 为子群 H 的左陪集和右陪集。

定理 1.2.1 陪集定理: 子群 H 的两个左（右）陪集要么完全相同，要么没有交集。

证：设子群 H 的两个左陪集为 uH, vH，其中 $u, v \in G$；假设两个左陪集存在一个公共元素，即

$$\begin{aligned} uh_\alpha = vh_\beta &\Rightarrow v^{-1}u = h_\beta h_\alpha^{-1} \in H \\ &\Rightarrow v^{-1}uH = H \Rightarrow uH = vH \end{aligned}$$

这显然与假设矛盾，所以两个左陪集就不存在公共元素；相应的，一旦两左陪集由公共元素就意味着两个左陪集完全相等。

定理 1.2.2 Lagrange 定理: 有限子群的阶一定是群阶的因子

证：假设我们有一个有限群 G，它有 m 个元素，那么它的阶是 m；再假设 H 是其中的一个子群，阶为 n，那么它可以看成本身的陪集，即 $eH = H$，之后我们再构建多个完全没有交集的陪集 $u_1H, u_2H, \cdots$，这些陪集的阶也同样是 n。于是有限群 G 就被划分的干干净净，于是意味着 $m/n \in Z$

1.3 类与不变子群

定义 1.3.1 共轭:

如果群 G 中存在一个元素 g 使得 $f, h \in G$, $gfg^{-1} = h$ 的话就称 f, h 共轭，记作 $f \sim h$。

我们利用这一定义可以找到共轭的一些性质：
1) 对称性：$g_i = fg_jf^{-1} \Rightarrow g_j = f^{-1}g_if$
2) 传递性：$g_1 = fg_2f^{-1}, g_2 = hg_3h^{-1} \Rightarrow g_1 = fhg_3f^{-1}h^{-1}$
通过传递性，我们就可以自然而然地引出类的概念。

定义 1.3.2 类：

群中所有相互共轭的元素组成的集合。

如果我们知道类中的一个元素 f，那么我们对它做 gfg^{-1} 的操作，当 g 取遍所有元素之后，这一类中的所有元素我们就都知道了。然后我们看几个例子，首先单元元素就自成一类，$geg^{-1} = e$; 然后 Abelian group 中的元素也自成一类 $gfg^{-1} = gg^{-1}f = f$；如果群元素的阶是 m，即 $f^m = e$，那么它的类元素也是 m 阶。

于是我们就有了两种分割群的方法：陪集和类。这两种分类方法有不同之处：一个是将群划分成若干等分，每一部分中的元素个数都是相同的；另一个则不是，每一类中元素并不相等。

定理 1.3.1：有限群的每个类中元素的个数都是群阶的因子

证：Step 1：先证明所有与 g 互易的元素 h 形成一个子群 H_g

$$H_g = \{h_i | h_ig = gh_i\} \tag{1.7}$$

首先证明封闭性：
对于 $\forall h_i, h_j \in H_g$ 都有

$$h_ih_jg = h_igh_j = gh_ih_j \in H_g \tag{1.8}$$

然后证元素的逆也在群中, 取 $\forall h_i \in H_g$ 有

$$h_ig = gh_i \Rightarrow g = h_i^{-1}gh_i \Rightarrow h_i^{-1}g = gh_i^{-1} \tag{1.9}$$

Step 2: 我们根据 Lagrange 定理将群 G 分解成若干子群 $\{H_g, g_iH_g, \cdots\}$，其中 g_i 都是与 g 是同一类元素。那么根据前面说的只要将整个群扫一遍即可求得 g 类的全部元素，下面我们将证明每一个陪集都会贡献出一个 g 类元素，并且不同陪集贡献的 g 类元素都不相同。
首先是对于任意一个陪集 g_iH_g 都会有

$$g_ih_\alpha gh_\alpha^{-1}g_i^{-1} = g_ih_\alpha h_\alpha^{-1}gg_i^{-1} = g_igg_i^{-1} \tag{1.10}$$

然后我们用反证法证明不同陪集给出不同的 g 元素:

假设有两个陪集给出相同的元素 $g_i g g_i^{-1} = g_j g g_j^{-1}$，那么会有

$$\begin{aligned} g_j^{-1} g_i g = g g_j^{-1} g_i \in H_g \\ \Rightarrow g_j^{-1} g_i H_g = H_g \Rightarrow g_i H_g = g_j H_g \end{aligned} \tag{1.11}$$

这显然与陪集定理相矛盾，所以两个不同陪集将会给出不同 g 类元素。
Step 3: 我们假设群 G 的阶为 m，H_g 的阶为 n，那么会有 m/n 个陪集，而每一个陪集将会给出一个 g 类元素，那么 g 类元素总共就是有 m/n 个，这显然就是群阶的因子，至此此定理得证。

定义 1.3.3 共轭子群：

假设群 H 是群 G 的子群，那么共轭子群的元素要满足：

$$H' = \{ghg^{-1} | h \in H, g \in G\} \tag{1.12}$$

定义 1.3.4 不变子群：

设群 H 是群 G 的子群，如果 H 中所有元素的同类元素都属于 H，则称 H 为 G 的不变子群。

定理 1.3.2： 设 H 是 G 的不变子群，对于任意固定 $g \in G$，当 h_i 取遍所有 H 时，gh_ig^{-1} 有且仅有一次给出 H 中的所有元素
证：Step 1: 对于 $\forall h_i \in H$，都有

$$h_i = g(g^{-1}h_i g)g^{-1} = h_i \tag{1.13}$$

Step 2：如果能够给出两次，会有

$$gh_ig^{-1} = gh_jg^{-1} \Rightarrow h_i = h_j \tag{1.14}$$

这显然是矛盾的，所以有且只能给出一次；所有元素用重排定理来保证。

定理 1.3.3： 不变子群的左右陪集是相同的。
证：略

定理 1.3.4： 不变子群两个（非子群的）不同陪集中元素的乘积，必为第三个陪集中的元素。
证：取两个陪集 g_iH, g_jH。
I) 如果 $g_i = g_j = g_0$，定理显然成立
II) 如果 $g_i = g_0, g_j \neq g_0$ 的话，那么两个陪集相乘会有

$$g_jHg_0H = g_jH^2 = g_jH \tag{1.15}$$

III) 如果 $g_i, g_j \neq g_0$ 的话，我们利用反证法证明这一情况：首先看两个陪集的乘积

$$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_i g_j g_j^{-1} h_\alpha g_j h_\beta = g_k h'_\alpha h_\beta \tag{1.16}$$

其中我们插入了一对元素，凑出了 h_α 的共轭元素，我们把这个陪集记作 $g_k H$。如果我们让 $g_k H = g_i H$，那么我们能够导出：

$$\begin{aligned} g_k H = g_i H &\Rightarrow g_i g_j h'_\alpha h_\beta = g_i h_\gamma \\ &\Rightarrow g_j = h_\gamma h_\beta^{-1} h_\alpha'^{-1} \in H \Rightarrow g_j H = H \end{aligned} \tag{1.17}$$

这显然是矛盾的，所以此情况下只能有 $g_i H, g_j H \neq g_k H$，最后此定理得证。于是利用此定理我们就可以提出商群的概念。

定义 1.3.5 商群：

用不变子群 H 及其陪集将群 G 进行划分，$G = \{g_0 H, g_1 H, \cdots\}$，然后把每一个陪集看作一个新的元素，两个陪集中元素的乘积得到另一个陪集中的元素，在定义新的元素的乘法：$g_i h_\alpha g_j h_\beta = g_k h_\gamma$，于是这样的群就叫做商群，记作 G/H。

1.4 同构与同态

定义 1.4.1 同构：

如果有一个一一对应的满映射 $\phi : G \to F$，并且保持群乘法不变，即 $\phi(g_i g_j) = \phi(g_i)\phi(g_j)$，那么就说 G 和 F 同构，记作 $G \cong F$，映射 ϕ 为同构映射。

定义 1.4.2 同态：

如果有一个满映射 $\phi : G \to F$，并且保持群乘法不变，就说两个群同态，记作 $G \sim F$

定义 1.4.3 同态核：

设 $G \sim F$，那么 G 中所有与 F 的单位元素对应的所有元素就叫做同态核。

定理 1.4.1 同态核定理：设 $G \sim F$，则有：

1) 同态核 H 是 G 的不变子群;

2) 商群 $G/H \cong F$

证：Step 1：证明同态核 H 是子群。

首先证明封闭性，$\forall h_\alpha, h_\beta \in H$，会有

$$\phi(h_\alpha h_\beta) = \phi(h_\alpha)\phi(h_\beta) = f_0 \Rightarrow h_\alpha h_\beta \in H \tag{1.18}$$

然后利用反证法证明逆，假设 $h_\alpha^{-1} \notin H$，那么会有

$$\phi(h_\alpha h_\alpha^{-1}) = f_0 = \phi(h_\alpha)\phi(h_\alpha^{-1}) = f_0 f_i = f_i \tag{1.19}$$

这显然是矛盾的，所以 $h_\alpha^{-1} \in H$，于是同态核是一个子群。
Step 2：证明同态核是不变子群。
对于 $\forall g \in G$ 都有，

$$\phi(gh_\alpha g^{-1}) = \phi(g)\phi(h_\alpha)\phi(g^{-1}) = \phi(gg^{-1}) = f_0 \Rightarrow gh_\alpha g^{-1} \in H \tag{1.20}$$

于是同态核就是不变子群。
Step 3:$G/H \cong F$
首先我们用 H 及其陪集将 G 进行划分，然后每一陪集对应 F 中的一个元素，这个是显然的；然后我们接下来用反证法证明不同陪集将会对应不同的元素：取两个不同的陪集 g_iH, g_jH，假设它们对应相同的元素相同，即 $f_i = f_j$，会有

$$\begin{aligned} &\phi(g_i^{-1}g_jh_\alpha) = \phi(g_i^{-1})\phi(g_j) = f_i^{-1}f_j = f_0 \\ &\Rightarrow g_i^{-1}g_jh_\alpha \in H \Rightarrow g_i^{-1}g_jH = H \Rightarrow g_jH = g_iH \end{aligned} \tag{1.21}$$

这显然是矛盾的，所以不同陪集会对应不同的元素，于是 G/H 与 F 之间是一一满映射，所以 $G/H \cong F$，此定理得证。

定义 1.4.4 自同构群：

把群 G 的自同构映射放在一起，并且要求 $\nu_1 \circ \nu_2(g) = \nu_1(\nu_2(g))$，这样形成的群就叫做群 G 的自同构群，记作 $A(G)$。

定义 1.4.5 内自同构映射：

在群 G 中取一个元素 u，用它对于 $\forall g \in G$ 都做一个 ugu^{-1} 的操作，会有 $u(g_ig_j)u^{-1} = ug_iu^{-1}ug_ju^{-1}$，映射满足群乘法，所以这种操作会是一个自同构映射，叫做内自同构映射。内自同构映射构成的群就叫做内自同构群，记作 $I(G)$。

定理 1.4.2； $I(G)$ 是 $A(G)$ 的不变子群。
证：Step 1：证明 $I(G)$ 是一个子群。

I) 封闭性：取两个自同构映射 f, h，相应的映射为 fgf^{-1}, hgh^{-1}。他们的乘积为

$$fhgh^{-1}f^{-1} = fhg(fh)^{-1} \tag{1.22}$$

两者乘积依旧还是个自同构映射。
II) 逆：假设 f 是一个自同构映射，那么它与逆自同构映射的乘积为：

$$f^{-1}\left(fgf^{-1}\right)f = g \tag{1.23}$$

两者的乘积是一个恒定映射，所以逆也在这个群中。所以自同构映射是一个子群。
Step 2：证明 $I(G)$ 是一个不变子群。
先取一个自同构映射 $\nu(g_\alpha) = g_\beta$，再取一个内自同构映射 $\mu(g) = ugu^{-1}$，于是看一下映射的乘积：

$$\nu\circ\mu\circ\nu^{-1}(g_\beta) = \nu\circ\mu(g_\alpha) = \nu(ug_\alpha u^{-1}) = \nu(u)g_\beta\nu(u^{-1}) = u'g_\beta u'^{-1} = \mu'(g_\beta) \tag{1.24}$$

由于 u 是固定元素，所以 $\nu(u)$ 也一定是固定元素，于是 $\nu\circ\mu\circ\nu^{-1}$ 既是 μ 的共轭，也是一个内自同构映射，所以 $I(G)$ 群是一个不变子群，至此此定理得证。

1.5 变换群

定义 1.5.1 变换 or 置换：

设 X 是一个非空集合，映射 $f: X \to X$ 是一个一一满映射，那么就称 f 是 X 上的变换 or 置换。

定义 1.5.2 完全对称群与变换群：

我们定义置换的乘法，取两个变换 f, g，它们的乘积为 $f\circ g(X) = f(g(X))$，置换操作构成一个群，这种群就叫做完全对称群，记作 S_X；如果 X 是有限群，有 n 个元素，那么就叫做 n 阶置换群，记作 S_n；如果我们把群元当作变换对象时，那么记作 S_G。

定理 1.5.1 Cayley 定理： G 同构于 S_G 的一个子群
证：这个定理的证明非常简单，我们就用重排定理，任取 $\forall g \in G$，于是就会有 $gG = G$，这显然是 $G \to G$ 的映射，然后我们把 G 中所有元素都当成一种变换，组成 S_G 的一个子群，就很显然 $G \cong S_G$，至此此定理得证。

定义 1.5.2 等价性与轨道：

设 G 是 X 的变换群，若对 $x, y \in X$，$\exists g \in G$，使得 $g(x) = y$，则称 x 与 y 等价，记作 $x \sim y$；所有与 x 等价的元素组成的集合就叫做 x 的 G 轨道。

定义 1.5.3 不变子集：

设 G 是 X 上的变换群，若有 X 上的一个子集 Y，对应 G 中的任意元素都有 $gY = Y$，就称 Y 为群 G 在 X 上的不变子集。

从这个定义可以知道：1)X 中的 G 轨道都是不变的，轨道的并集会是一个不变子集；2)X 中的任意子集 Y 都可以在 G 中找到一个子群 H，使 Y 是 H 上不变的，因为至少存在恒等变换。

定义 1.5.4 迷向子群：

设 G 是 X 上的变换群，$x \in X$，$G^x = \{h|h \in G, hx = x\}$ 是 G 的子群，称 G^x 是 G 对 x 的迷向子群。换句话说 G^x 中的任意一个元素对 x 做变换得到的结果都是相同的。

定理 1.5.2： 设 G^x 是 G 对 x 的迷向子群，则含 x 的 G 轨道上的点与 G^x 的左陪集一一对应。

证：Step 1：每一个左陪集对应一个点。

对于 x 的 G 轨道上的任意一点 y 都会有，$gy = x, g \in G$，如果 $y \neq x$ 的话可以有 $g \notin G^x$，于是我们就可以生成一个左陪集 gG^x。这个陪集里面的元素作用到 x 上会有 $gh_\alpha y = gy = x$，所以每一个陪集会给出轨道中的一个点。

Step 2：不同陪集会给出不同的点。

我们还是用反证法来证明，假设有两个陪集 g_iG^x, g_jG^x，给出了相同的点，会有

$$\begin{aligned} g_ih_\alpha y = g_jh_\beta y = x \Rightarrow g_j^{-1}g_ih_\alpha y = h_\beta y = x \\ \Rightarrow g_j^{-1}g_ih_\alpha \in G^x \Rightarrow g_j^{-1}g_i \in G^x \Rightarrow g_iG^x = g_jG^x \end{aligned} \tag{1.25}$$

这个很明显是与陪集定理相矛盾的，所以不同陪集会给出不同的点，至此此定理得证。

1.6 直积与半直积

定义 1.6.1 直积群：

假设我们有两个群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$，我们定义一种有序对 $g_{\alpha\beta} = (g_{1\alpha}g_{2\beta})$，并且定义一种新的乘法：$g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = (g_{1\alpha}g_{1\alpha'}g_{2\beta}g_{2\beta'})$，那么这种集合就构成一个群叫做直积群，记作 $G_1 \otimes G_2$

定义 1.6.2 直积因子：

假设我们有一个群 G，有两个子群 G_1, G_2。如果 $\forall g_{\alpha\beta} \in G$ 都可以唯一地表示为 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}, g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$，并且 $g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$，则 $G = G_1 \otimes G_2$，其中 G_1, G_2 就叫做 G 的直积因子。

对于前两个定义，我们需要值得关注的是第二个。因为如果两个群 G_1, G_2 的元素之间没有乘法，那么这种直积群就单纯的是一种操作，没有任何实际意义；但如果一个群中的两个子群 G_1, G_2 的元素之间有乘法，且互易，这种情况的直积群是有实际意义的，具体是什么我还不清楚。

定理 1.6.1： 假设我们有一个直积群 $G = G_1 \otimes G_2$，那么我们会有：
I)$G_1 \cap G_2 = e$
II)G_1, G_2 都是 G 的不变子群；
证：
I) 我们采用反证法，假设两个子群有两个公共元素 $\{e, a\}$，那么我就可以有两个有序对 $(e, a), (a, e)$，这两种有序对有相同的乘法结果，但它不是唯一的，这个与直积因子的定义相违背，所以两个子群只能有一个公共元素。
II)$\forall g_{1\alpha} \in G_1$，我们做一个共轭操作：

$$(g_{1\alpha'} g_{2\beta}) g_{1\alpha} (g_{1\alpha'} g_{2\beta})^{-1} = g_{1\alpha} g_{1\alpha'} g_{2\beta} g_{2\beta}^{-1} g_{1\alpha'}^{-1} = g_{1\alpha'} g_{1\alpha} (g_{1\alpha'}^{-1}) \in G_1 \quad (1.26)$$

其中我们只要求 G_1, G_2 之间的元素互逆，并没有要求子群自身元素互逆；就这样 G_1 就是 G 的不变子群，同理 G_2 也是，至此此定理得证。

定义 1.6.3 半直积：

假设我们有两个子群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$，如果 G_1 中的自同构映射群 $A(G_1)$ 与 G_2 同态。那么我们就定义一种新的有序对 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle$，并且定义一种新的乘法：$g_{\alpha\beta} g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha} \nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'}) g_{2\beta} g_{2\beta'} \rangle$，其中 $\nu_{g_{2\beta'}} \in G_1$ 是 $g_{2\beta'}$ 的同态映射。这样的集合会形成一个群，我们叫做半直积群，记作 $G_1 \otimes_s G_2$。

接下来我们会证明半直积群它是一个群：
在证明之前我们做一些讨论，$g_{2\alpha} \in G_2$ 所对应的自同构映射记作 $\nu_{g_{2\alpha}}$，同构映射会有：元素乘积的映射应该等于映射的乘积，即

$$\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha} g_{1\alpha'}) = \nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha}) \nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'}) \quad (1.27)$$

其次如果我们对同一个元素 $g_{1\alpha} \in G_1$，连续做两次变换会有

$$\nu_{g_{2\beta}}(\nu_{g_{2\beta'}}(g_{1\alpha})) = \nu_{g_{2\beta} g_{2\beta'}}(g_{1\alpha}) \quad (1.28)$$

这是因为由于 $G_2 \sim A(G_1)$，会有乘积的映射等于映射的乘积，即 $\nu_{g_{2\beta} g_{2\beta'}} = \nu_{g_{2\beta}} \nu_{g_{2\beta'}}$。于是我们就可以来证明半直积会是一个群：

I) 结合律：

$$
\begin{aligned}
&\left(\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\langle g_{1\alpha'}g_{2\beta'}\rangle\right)\langle g_{1\alpha''}g_{2\beta''}\rangle \\
&=\langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})g_{2\beta}g_{2\beta'}\rangle\langle g_{1\alpha''}g_{2\beta''}\rangle=\langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})\nu_{g_{2\beta}g_{2\beta'}}(g_{1\alpha''})g_{2\beta}g_{2\beta'}g_{2\beta''}\rangle \\
&=\langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})\nu_{g_{2\beta}}(\nu_{g_{2\beta'}}(g_{1\alpha''}))g_{2\beta}g_{2\beta'}g_{2\beta''}\rangle \\
&\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\left(\langle g_{1\alpha'}g_{2\beta'}\rangle\langle g_{1\alpha''}g_{2\beta''}\rangle\right) \\
&=\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\left(\langle g_{1\alpha'}\nu_{g_{2\beta'}}(g_{1\alpha''})g_{2\beta'}g_{2\beta''}\rangle\right)=\langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'}\nu_{g_{2\beta'}}(g_{1\alpha''}))g_{2\beta}g_{2\beta'}g_{2\beta''}\rangle \\
&=\langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})\nu_{g_{2\beta}}(\nu_{g_{2\beta'}}(g_{1\alpha''}))g_{2\beta}g_{2\beta'}g_{2\beta''}\rangle
\end{aligned}
$$

很显然，结合律是满足的，虽然证明过程有点繁琐。
II) 封闭性：由于 G_1, G_2 都是群，所以封闭性就自然而然地满足。
III) 单位元素：我们只需要证明 $\langle g_{10}g_{20}\rangle$ 是单位元素就可以了

$$
\begin{aligned}
\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\langle g_{10}g_{20}\rangle&=\langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{10})g_{2\beta}g_{20}\rangle=\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle \\
\langle g_{10}g_{20}\rangle\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle&=\langle g_{10}\nu_{g_{20}}(g_{1\alpha})g_{20}g_{2\beta}\rangle=\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle
\end{aligned}
$$

其中单位元素对应的映射为恒等映射的性质。
IV) 逆元：

$$
\langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\langle g_{1\alpha'}g_{2\beta}^{-1}\rangle=\langle g_{1\alpha}\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})g_{20}\rangle=\langle g_{10}g_{20}\rangle
$$

很显然我们要求 $\nu_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})=g_{1\alpha}^{-1}$，我们只需要简单的做个 $\nu_{g_{2\beta}^{-1}}$ 映射即可，会得到 $g_{1\alpha'}=\nu_{g_{2\beta}^{-1}}(g_{1\alpha}^{-1})$，于是逆元为 $\langle\nu_{g_{2\beta}^{-1}}(g_{1\alpha}^{-1})g_{2\beta}^{-1}\rangle$。至此，我们证明的群的四个性质，所以半直积满足群的定义。

Chapter 2

群表示理论

2.1 群表示

定义 2.1.1 线性变换群：

定义两个线性变换的乘法，则 n 维复线性空间 V 上的全部非奇异线性变换在此乘法下构成一个群，称为 n 维复一般线性群 $GL(V,C)$，其子群 $L(V,C)$ 称作 V 上的线性变换群。

至于为什么要非奇异，这是因为如果有奇异群，既有的元素没有逆元素，这就没有办法构成一个群。

定义 2.1.2 群表示：

如果存在一个同态映射 $A: G \to L(V,C)$,并且满足 $A(g_i g_j) = A(g_i)A(g_j)$，那么就称 A 是群 G 的一个线性表示。

很显然互逆的元素对应的变换也是互逆的。如果说同态映射满是满射的话，就叫做**忠实表示**。原则上来说，一个群有无穷多个表示，后面可以用相似、等价这些概念将它们联系起来，这正要关心的是那些特殊的，称之为不等价不可约表示。

我们常见的线性空间是矢量空间，基矢都是一些矢量，无论是群元 g 直接作用到基矢，还是 $A(g)$ 作用到基矢这些都比较容易理解，但还有很多线性空间是以函数 $\varphi(\mathbf{r})$ 作为基矢，对于这种情况该如何处理是值得讨论的。一般来说我们抽象群的群元 g 是作用到 $\mathbf{r}$ 上的，而 $A(g)$ 是要作用到 $\varphi(\mathbf{r})$ 上，假设 $\mathbf{r}' = g\mathbf{r}$，并且通过下面的方式来给出 $A(g)\varphi(\mathbf{r})$ 的形式：

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(g^{-1}\mathbf{r}') \Rightarrow \varphi'(\mathbf{r}) = A(g)\varphi = \varphi(g^{-1}\mathbf{r}) \tag{2.1}$$

因为我们同时对 $\mathbf{r}, \varphi$ 做了变换，所以变换前后两者相等，具体可以想象一下整个函数随着 xy 平面旋转的例子：xy 平面旋转，函数也跟着旋转，所以整个函数值并不发生改变。

2.2 等价表示、不可约表示、酉表示

定义 2.2.1 等价表示：

假设群 g 中的每一个元素都有一个非奇异变换 $A(g)$，设 P 是 V 上的一个非奇异变换，并且 $\det(P) \neq 0$，且 $PA(g_1g_2)P^{-1} = PA(g_1)P^{-1}PA(g_2)P^{-1}$，那么 $P^{-1}A(g)P$ 也给出了群 G 的一个表示，那么这个新表示就叫做旧表示的等价表示。

那么就会有一个很自然而然的问题，就是群 G 的表示和它的等价表示在矩阵方面有什么联系，接下来我们来讨论这个问题：
假设我们有两组基矢，它们之间的关系为

$$(e_1', e_2', \cdots) = (e_1, e_2, \cdots)P; \tag{2.2}$$

然后对于同一个函数 $\mathbf{x}$，它的线性变换 $\mathbf{y} = A(g)\mathbf{x}$ 我们用两组基矢展开

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= (e_1, e_2, \cdots)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \cdots)[A(g)]_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \end{pmatrix} \\
&= (e_1', e_2', \cdots)\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdots \end{pmatrix} = (e_1', e_2', \cdots)[A(g)]_{B'} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \end{pmatrix}, \\
&= (e_1, e_2, \cdots)P[A(g)]_{B'}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $[A(g)]_B$ 表示的是线性变换的系数矩阵，B, B' 表示的两组不同的基矢，于是一个表示和它的等价表示的关系为

$$[A(g)]_B = P[A(g)]_{B'}P^{-1}. \tag{2.4}$$

定义 2.2.2 可约表示：

设 A 是群 G 在表示空间 V 上的一个表示，如果 V 存在一个不变的真子空间 W，则称 A 是可约表示，矩阵群的形式都要为

$$[A(g_\alpha)] = \begin{pmatrix} C_\alpha & N_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

其中真子空间指的是空间不能为 V 本身或者只包含零向量，不变指的是对于 $\forall y \in W, \forall g \in G$ 都有 $A(g_\alpha)y \in W$。

定义 2.2.3 直和：

对于群 G 的表示空间 V，如果 W, W' 都是它的子空间，如果对于 $\forall x \in V$ 都能找到 $y \in W, z \in w'$ 使得 x 可以被唯一的分解为 $x = y + z$，那么就称作 V 是 W, W' 的直和，记作 $V = W \oplus W'$。

定义 2.2.4 完全可约：

如果可以把 G 的表示空间 V 分解为两个不变子空间的直和，那么就称 V 是完全可约的。它的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix}$$

相应的表示 A 也可以写成直和的形式 $A = C \oplus B$。我们可以一直做下去，直到把可约表示分解为一系列的不可约表示，于是最终可以写作 $A = \sum_p m_p A^p$，其中 p 是第 p 个不可约表示，m_p 是重复度，指出现的次数。

在以后的学习当中只考虑完全可约的东西，然后我们可以得到它的逆命题：如果群 G 表示空间不存在真子空间，则称 A 是 G 的不可约表示。接下来我们会证明有限群的一个定理

定理 2.2.1：对于有限群，表示可约则一定完全可约

证：设可约表示的形式为

$$A(g_\alpha) = \begin{pmatrix} G_1(g_\alpha) & R(g_\alpha) \\ 0 & G_2(g_\alpha) \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

然后我们需要寻找一个矩阵 P 使得，它能够对角化

$$A(g_\alpha) = \begin{pmatrix} G_1(g_\alpha) & 0 \\ 0 & G_2(g_\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

简单起见我们可以假设 P 的形式为

$$P = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

其中 C 就是我们需要寻找的矩阵。$A(g)$ 的可约和完全可约表示是通过相似联系起来的于是，我们就要寻找 C 满足的方程

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} G_1(g_\alpha) & R(g_\alpha) \\ 0 & G_2(g_\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1(g_\alpha) & 0 \\ 0 & G_2(g_\alpha) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} G_1(g_\alpha) & G_1(g_\alpha)C + R(g_\alpha)G_2(g_\alpha) \\ 0 & G_2(g_\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(g_\alpha) & CG_2(g_\alpha) \\ 0 & G_2(g_\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

于是我们就找到了 C 满足的方程

$$G_1(g_\alpha)C + R(g_\alpha) = CG_2(g_\alpha) \tag{2.10}$$

在求解这个方程之前我们要先利用 A 来推导出下面这个公式，从而可以进一步求解 C

$$\begin{aligned}
A(g_\alpha)A(g_\beta) &= \begin{pmatrix} G_1(g_\alpha) & R(g_\alpha) \\ 0 & G_2(g_\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_1(g_\beta) & R(g_\beta) \\ 0 & G_2(g_\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} G_1(g_\alpha g_\beta) & G_1(g_\alpha)R(g_\beta) + R(g_\alpha)G_2(g_\beta) \\ 0 & G_2(g_\alpha g_\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} G_1(g_\alpha g_\beta) & R(g_\alpha g_\beta) \\ 0 & G_2(g_\alpha g_\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

于是就会得到如下的关系式

$$R(g_\alpha g_\beta) = G_1(g_\alpha)R(g_\beta) + R(g_\alpha)G_2(g_\beta) \tag{2.12}$$

在 (2.10) 右乘一个 $G_2(g_\alpha^{-1})$

$$C = G_1(g_\alpha)CG_2(g_\alpha^{-1}) + R(g_\alpha)G_2(g_\alpha^{-1}) \tag{2.13}$$

然后我们猜测解的形式为

$$C = \frac{1}{n_G}\sum_{g\in G} R(g)G_2(g^{-1}) \tag{2.14}$$

其中 n_G 为群元的个数，把这个解带入到方程当中会有

$$\begin{aligned}
G_1(g_\alpha)CG_2(g_\alpha^{-1}) &= \frac{1}{n_G}\sum_{g\in G} G_1(g_\alpha)R(g)G_2(g^{-1})G_2(g_\alpha^{-1}) \\
&= \frac{1}{n_G}\sum_{g\in G}\left[R(g_\alpha g) - R(g_\alpha)G_2(g)\right]G_2((g_\alpha g)^{-1}) \\
&= \frac{1}{n_G}\sum_{g\in G}\left[R(g_\alpha g)G_2((g_\alpha g)^{-1})\right] - \frac{1}{n_G}\sum_{g\in G} R(g_\alpha)G_2(g_\alpha^{-1}) \\
&= C - R(g_\alpha)G_2(g_\alpha^{-1})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

这个就是 (2.13)，所以猜测的解是正确的。综上所述，我们可以找到一个包含 C 构成一个矩阵 P 使得，可约表示变成完全可约表示，于是此定理得证。

定义 2.2.5 酉表示：

由酉变换群或酉矩阵群进行的表示是酉表示。它有 $A(g_\alpha)^\dagger = A(g_\alpha)^{-1} = A(g_\alpha^{-1})$ 的特点。

定理 2.2.2： 酉表示可约则完全可约

证：假设酉表示定义的内积空间可以写成两个子空间的直和 $V = W \oplus W'$，其中 W 是不变真子空间，W' 是正交补空间，接下来只需要证它也是不变子空间即可。取 $\forall y \in W, \forall z \in W'$ 都会有

$$(y,z) = 0 \Rightarrow (A(g)z, y) = (z, A(g)^\dagger y) = (z, A(g^{-1})y) = (z, y') = 0$$

这就说明 $A(g)z \in W'$ 进而说明 W' 是不变的，所以酉表示也是完全可约的，此定理得证。

2.3 群代数与正则表示

定义 2.3.1 群空间：

取复数域 C 和一个群 G，然后定义群元的加法与数乘，那么就构成了线性空间，这就叫群空间，记作 V_G。

定义 2.3.2 群代数：

在群空间的基础上，取 $\forall \mathbf{x} = \sum_\alpha x_\alpha g_\alpha, \forall \mathbf{y} = \sum_\beta y_\beta g_\beta$，两者的乘积为 $(\mathbf{xy})_\gamma = \sum_\alpha x_\alpha y_{\alpha^{-1}\gamma} g_\gamma$，其中 $g_\gamma = g_\alpha g_\beta$。至于为什么 y 分量写的这么奇怪是因为要保证 $g_\gamma = g_\alpha g_{\alpha^{-1}} g_\gamma$ 的存在。

定义 2.3.3 左、右正则表示：

既然我们有了群代数，那么考虑群 G 的一个线性变换群 $\{L(g)\}$，它作用到群代数上会有 $L(g_i)x = \sum x_j g_i g_j$，这种同态映射关系构成一种表示，称之为左正则表示；右正则表示与之相似，$R(g_i)x = \sum x_j g_j g_i^{-1}$。同时它们还是同构映射，也是群表示的忠实表示。左右正则表示统称做正则表示。

2.4 有限群表示理论

定理 2.4.1 Shur 引理 I：

设群 G 在有限维向量空间 V_A 与 V_B 有不可约表示 A, B，如果 $\forall g \in G$，有线性变换 $M : V_A \to V_B$，且满足 $B(g_\alpha)M = MA(g_\alpha)$，则：

1) 当表示 A 与表示 B 不等价时，$M = 0$；

2）当 $M \neq 0$ 时，A, B 等价。

证：我们利用反证法来证明，假设 A 与 B 不等价时，$M \neq 0$。

首先我们找 V_A 中的一个子空间 N，里面的元素 x 都满足 $Mx = 0$。然后对于 $\forall g \in G$ 都会有

$$MA(g)x = BMx = B0 = 0 \Rightarrow A(g)x \in N,$$

于是 N 是 V_A 的不变子空间，但是因为 V_A 是不可约的，所以只有两种结果：$N = V_A, \varnothing$。

I) 当 $N = V_A$ 时，由于 x 是 V_A 中的任意一个向量，都会有 $Mx = 0$ 那么就意味着 $M = 0$ 这与假设矛盾，所以此情况不成立。

II) 当 $N = \varnothing$ 时，$\forall x_1, x_2 \in V_A$，它们都会对应 V_B 中的两个不同的元素；如果对应相同会有

$$M(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in N,$$

这与 $N = \varnothing$ 相矛盾。所以 M 必须为零。

然后我们证明第二点。假设 $R = \{y \in V_b | y = Mx, x \in V_A\}$，对于 $\forall g \in G$ 都会有

$$B(g)y = B(g)Mx = MA(g)x = Mx' = y' \in R,$$

这就说明 R 是 V_B 的不变子空间，同样也就会有 $R = V_B, \varnothing$。其中成立的情况只有 $R = V_B$ 于是 M 就会是一个满映射，就会有逆的存在，于是 A 与 B 等价。至此此引理得证。

定理 2.4.2 Shur 引理 II：

设 A 是群 G 在有限维复空间 V 上的不可约表示，若 V 上的线性变换 M 满足 $\forall g \in G, MA(g) = A(g)M$，则 $M = \lambda E$，其中 λ 为数域上的数，E 为单位变换。简单来说，与不可约表示任意一个矩阵互易的矩阵必为常数矩阵。

证：因为 M 是一个变换矩阵，所以它一定会有 $My = \lambda_0 y$，我们在 V 中找这么一个集合 $R = \{y|My = \lambda_0 y\}$。然后 $\forall g \in G$ 都会有

$$MA(g)y = A(g)My = A\lambda_0 y = \lambda_0 A(g)y \in R.$$

可以看到 R 是 G 的不变子空间，所以 $R = V, \varnothing$，很显然第二种情况是不可能的，所以 $R = V$。既然 $Mx = \lambda x$ 恒成立，那么只能是 M 是一个常数矩阵，于是此引理得证。

定理 2.4.3： 有限群在内积空间的每一个表示都有等价的酉表示。

证：设 A 是一个表示，那么会有 $A(g_i)A(g_j) = A(g_i g_j)$，我们的目的是要找到一个相似变换，使得 $(X^{-1}AXx|X^{-1}AXy) = (x, y)$。由于酉表示是保内积的，所以我们先定义一个新的内积：

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{n}\sum_i \left(A(g_i)x|A(g_i)y\right),$$

假设我有两组正交归一的基矢 f, e，两者是通过一个非奇异线性变换联系起来的 $f = eX$，那么两组基矢下的系数是 $x' = X^{-1}x$。下一步就是来寻找两种内积之间的联系：

$$\langle x|y\rangle = x'^* y' = x^*(x^{-1})^\dagger x^{-1} y \Rightarrow \langle Xx|Xy\rangle = (x|y).$$

可以证明 A 在新内积下也是酉表示

$$\langle A(g_i)x|A(g_i)y\rangle = \frac{1}{n}\sum_i (A_{g_i g_j}x|A_{g_i g_j}y) = \langle x|y\rangle.$$

找到两种内积的联系之后，我们就可以证明 $X^{-1}AX$ 是个酉表示：

$$(X^{-1}AXx|X^{-1}AXy) = \langle AXx|AXx\rangle = \langle Xx|Xy\rangle = (x|y).$$

可以看到 $X^{-1}AX$ 是酉表示，于是此定理得证。

定理 2.4.4 正交性定理：

设群 G 有不等价不可约酉表示 A^i，其维数为 S_i。这些不等价不可约酉表示矩阵元可以作为群函数，在群函数的内积空间内有：

$$(A^p_{ab}|A^r_{a'b'}) = \frac{1}{S_p}\delta_{pr}\delta_{aa'}\delta_{bb'} \Leftrightarrow \sum_i A^{p*}_{ab}(g_i)A^r_{a'b'}(g_i) = \frac{n}{S_p}\delta_{pr}\delta_{aa'}\delta_{bb'}.$$

证：

Step 1: 行正交性

取 S_p 的两个矩阵，然后按照下面的方式构建

$$C = \frac{1}{n}\sum_i A^p(g_i)DA^p(g_i^{-1}),$$

然后证明 C 只能是 $\lambda(D)E$ 的形式

$$A^p(g_j)C = \frac{1}{n}\sum_i A^p(g_jg_i)DA^p(g_i^{-1}g_j^{-1}g_j) = CA(p_j),$$

利用 Shur 引理 2，可以得出 $C = \lambda(D)E$。由于没有对 D 有任何要求，所以可以取 $D_{aa'} = \delta_{aa'}$，对应的 C 为

$$C_{aa'} = \frac{1}{n}\sum_i A^p_{ab}(g_i)\delta_{bc}A^{p*}_{ca'}(g_i) = \lambda(D)\delta_{aa'},$$

其中我们用到了下面的性质

$$A^p_{ab}(g_i^{-1}) = A^{p\dagger}_{ab}(g_i) = A^{p*}_{ba}(g_i).$$

Step 2：列正交性

这一步会证明 $\lambda(D)$ 就蕴含着列正交性，首先令 $a = a'$，然后对 a 求和，会有

$$\sum_a C_{aa} = \lambda(D)S_p = \frac{1}{n}\sum_{ia} A^p_{ab}(g_i)A^p_{ca}(g_i^{-1}) = \frac{1}{n}\sum_i A^p_{cb}(g_0) = \delta_{cb}$$
$$\Rightarrow \lambda(D) = \frac{\delta_{bc}}{S_p}.$$

Step 3: 维度正交性

取两个不等价不可约表示 A^r, A^p，它们的维度是 S_r, S_p，然后构造一个和 Step 1 中很相似的矩阵

$$C' = \frac{1}{n}\sum_i A^r(g_i) D A^p(g_i^{-1}), \tag{2.16}$$

然后为了要利用 Shur 引理 1，于是右乘一个不可约表示

$$CA^p(g_j) = \frac{1}{n}\sum_i A^p(g_j)A^p(g_j^{-1})A^r(g_i)DA^p(g_i^{-1})A^p(g_j) = A^p(g_j)C, \tag{2.17}$$

由于 A^r, A^p 都是不可约表示，所以 $C \equiv 0$。和 Step 2 的方法相似，我们也做求和处理，D 也取相同的矩阵，会有

$$\sum_i C_{aa'} = \frac{1}{n}\sum_i A^r_{ab}(g_i)\delta_{bc}(A^{*p}_{ca'}(g_i^{-1})) = 0, \tag{2.18}$$

当 $r = p$ 时就会回到前面的情况，所以综上考虑会有

$$(A^p_{ab}|A^r_{a'b'}) = \frac{1}{S_p}\delta_{pr}\delta_{aa'}\delta_{bb'}. \tag{2.19}$$

至此此定理得证。

定理 2.4.5 完备性定理：

设 A^p 是有限群 G 的所有不等价不可约表示的集合，当 A^p_{ab} 走遍所有 p, a, b 时，群函数空间是完备的。

证：我们任取表示矩阵的第 a 行，由于正交性定理，这一行的群函数都是正交的，所以可以构成一个子空间。然后我们选取其中的第 b 列元素 $\sum_i A^p_{ab}(g_i)g_i$，对它做个右乘，做个线性变换

$$\begin{aligned} &R(g_j)\sum_i A^p_{ab}(g_i)g_i \\ &= \sum_i A^p_{ab}(g_i)g_j^{-1} = \sum_k A^p_{ab}(g_k g_j)g_k = \sum_{kc} A^p_{ac}(g_k)A^p_{cb}(g_j)g_k = \sum_c A^p_{cb}(g_j)\sum_k A^p_{ac}(g_k)g_k, \end{aligned} \tag{2.20}$$

这个线性变换说明，变换后的矢量可以用第 a 行的元素线性展开，所以这个矢量还是在这个子空间内，所以构成一个右正则表示的不变子空间。假设我们有 q 个不等价不可约酉表示，利用它们的正交性就可以构成一个线性空间记作 V，然后我们要证明 $V = R$。为了证明这一点，我们要利用 R_G 的正交补空间 $V^\perp$。既然 V 是不变子空间，那么 $V\perp$ 也一定是不变子空间，

接下来我们利用反证法来证明 $V = R_G$，取 $V^\perp$ 中的一组基矢 X，然后算一下其中一个基矢的右正则表示

$$R(g_j)\sum_i X_\alpha(g_i)g_i = \sum_k X_\alpha(g_k g_j)g_k = \sum_\beta A^r_{\beta\alpha}(g_j)\sum_k X_\beta(g_k)g_k,$$

最后一步是因为 A^r 是 R_G 的不可约不等价表示，那么它的子空间也要满足 A^r 的变换规律。之后关注 g_0，并且右乘上个 g_j 然后对 g_j 求和，就会发现矛盾之处：

$$\sum_j\left(\sum_\beta A^r_{\beta\alpha}(g_j)X_\beta(g_0)\right)g_j = \sum_\beta X_\beta(g_0)\sum_j A^r_{\beta\alpha}(g_j)g_j = \sum_j X_\alpha(g_j)g_j,$$

这个等式说明，$V^\perp$ 的向量可以由 V 中的向量线性表出，这就说明两者是有交集的，所以 $R_G \neq V \oplus V^\perp$，所以只能有 $V = R_G$，于是此定理得证。所以 R_G 就可以写成一些列不等价不可约表示的直和，即 $R_G = \sum \oplus S_p A^p$，其中 S_p 是重复度。

定理 2.4.6 Burnside 定理：群函数空间的维数之和等于群的阶数

证：群 G 的维数为 n，群函数空间也肯定是 n，正交群函数 $\sqrt{S_p}A^p_{ab}(g_i)g_i$ 构成的空间是完备的，所以它的的维度是 $S_1^2 + S_2^2 + \cdots = n$。

2.5 特征标理论

定义 2.5.1 特征标：

设 A 是群 G 的一个表示，那么这个表示的特征标为

$$\chi(g_\alpha) = TrA(g_\alpha). \tag{2.21}$$

由此定义可以直到相似变换的特征标是相同的；同一类的元素的特征标是相同的；所以特征标它既是群函数又是类的函数。

定理 2.5.1 特征标第一正交定理：有限群不可约表示的特征标满足

$$(\chi^p|\chi^r) = \frac{1}{n}\sum_i \chi^{*p}(g_i)\chi^r(g_i) = \delta_{pr}. \tag{2.22}$$

证：利用正交性原理即可证明

$$(\chi^p|\chi^r) = \frac{1}{n}\sum_{iab} A^{p*}_{aa}(g_i)A^r_{bb}(g_i) = \sum_{iab}\frac{1}{n}A^{p*}_{aa}(g_i)A^r_{bb}(g_i) = \sum_{ab}\frac{1}{S_p}\delta_{pr}\delta_{ab} = \delta_{pr}.$$

至此此定理得证。

在特征标的定义中提到，特征标还是类的函数，于是特征标的内积还可以写成：

$$(\chi^p|\chi^r) = \frac{1}{n}\sum_i n_i \chi^{p*}(K_i)\chi^r(K_i), \tag{2.23}$$

其中 K_i 为类，n_i 为类元素的个数。由第一正交定理可以知道以下三点：

I) 不可约表示自身的内积为 1，因为有 δ 的存在；

II) 一个可约表示中某个不可约表示的重复度可以由内积给出：$(\chi^{A^p}|\chi^B) = m_p$；

III) 可约表示的特征标内积总是大于一：$(\chi^B|\chi^B) = \sum m_p^2 > 1$.

定理 2.5.2：有限群的所有不等价不可约表示的特征标在函数空间是完备的

证：特征标 f 的展开式为

$$f(g_i) = \sum_{pab} a^p_{ab} A^p_{ab}(g_i),$$

其中 a 为展开系数，然后再把这个特征标用同类元素给展开：

$$\begin{aligned}
&f(g_i)\\
&= \frac{1}{n}\sum_j f(g_j^{-1}g_ig_j) = \frac{1}{n}\sum_{jpab} a^p_{ab}A^p_{ab}(g_j^{-1}g_ig_j) = \sum_{pabcd} a^p_{ab}A^p_{cd}(g_i)\sum_j \frac{1}{n}A^p_{ac}(g_j^{-1})A^p_{db}(g_j)\\
&= \sum_{pabcd} a^p_{ab}A^p_{cd}(g_i)\sum_j \frac{1}{n}A^{p*}_{ca}(g_j^{-1})A^p_{db}(g_j) = \sum_{pabcd} a^p_{ab}A^p_{cd}(g_i)\frac{1}{S_p}\delta_{cd}\delta_{ab}\\
&= \sum_{pac}\frac{1}{S_p}a^p_{aa}A^p_{cc}(g_i) = \sum_p a^p\chi^p(g_i),
\end{aligned}$$

这就说明任何一个类函数都可以用有限群的不等价不可约表示的特征标展开，这就意味着类函数空间的维数等于不等价不可约表示的个数，至此此定理得证。

定理 2.5.3 特征标第二正交定理：

$$\frac{1}{n}\sum_p n_i\chi^{p*}(K_i)\chi^p(k_j) = \delta_{ij}, \tag{2.24}$$

其中 K 为类，也就是说不同的类的特征标正交。

证：构建一个 $q\times q$ 的矩阵 F，矩阵元为

$$F_{ri} = \sqrt{\frac{n_b}{n}}\chi^r(K_i),$$

然后利用第一正交定理

$$
\begin{aligned}
\delta_{pr} &= \frac{1}{n}\sum_i n_i \chi^{p*}(K_i)\chi^r(K_i) \\
&= \sum_i \sqrt{\frac{n_i}{n}}\chi^{p*}(K_i)\sqrt{\frac{n_i}{n}}\chi^r(K_i) \\
&= \sum_i F_{ri}F^\dagger_{ip} = (FF^\dagger)_{rp} \\
\Rightarrow & FF^\dagger = E \\
\Rightarrow & \delta_{ab} = (FF^\dagger)_{ab} = \sum_i F^\dagger_{ar}F_{rb} = \frac{1}{n}\sum_i n_i \chi^{r*}(K_a)\chi^r(K_b),
\end{aligned}
$$

至此此定理得证。

于是我们就可以利用上面的定理来绘制特征标表，具体形式如下：

	$n_1\{K_1\}$	$n_2\{K_2\}$	$\cdots$	$n_q\{K_q\}$
A^1	$\chi^1(K_1)$	$\chi^1(K_2)$	$\cdots$	$\chi^1(K_q)$
A^2	$\chi^2(K_1)$	$\chi^2(K_2)$	$\cdots$	$\chi^2(K_q)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A^q	$\chi^q(K_1)$	$\chi^q(K_2)$	$\cdots$	$\chi^q(K_q)$

图 2.1: 特征标表示意图

其中 A 为表示，n 为类中元素的个数，K 为类。

2.6 新表示的构成

定义 2.6.1 矩阵的直积：

假设我们由两个方阵 A, B，它们的阶数分别为 m, n，那么它们两个的直积为

$$
A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \tag{2.25}
$$

换成矩阵元的形式

$$(A \otimes B)_{abcd} = A_{ac} B_{bd}. \tag{2.26}$$

除此之外直积还有以下四个性质：

I) $E \otimes E = E$;

II) 对角阵直积依旧是对角阵;

III) 酉矩阵直积依旧是酉矩阵;

IV) $(A^1 \otimes B^1)(A^2 \otimes B^2) = (A^1 A^2 \otimes B^1 B^2)$.

定义 2.6.2 群表示的直积：

取群 G 的两个表示 A, B，然后做直积 $C = A \otimes B$，利用直积的性质可以证明直积矩阵保持乘法不变，即 $C(g_\alpha g_\beta) = C(g_\alpha)C(g_\beta)$。相应的直积的特征标为 $\chi^c(g) = \chi^A(g)\chi^B(g)$。很显然，如果两个表示相似，那么特征标一定相同；反过来，如果特征标相同，那么这一组数一定相同。

定义 2.6.3 直积群的表示：

设 $G = G_1 \otimes G_2$，G_1, G_2 分别由表示 A, B，然后 $C(g_{1\alpha} g_{2\beta}) = A(g_{1\alpha}) \otimes B(g_{2\beta})$ 构成群 G 的表示，并且还满足乘法规则不变，就叫做 G_1, G_2 直积群的表示。两个不可约表示的直和也是不可约的。

一般来说，如果我们遇到的群过于复杂，那么把这个群分解成不可与表示实属不容易。所以就想由小推大：如果我们知道群 G 中的一个子群 H，和它的表示 B 以及表示空间 W，那么我们就是要用这三个已知条件来得到群 G 的表示，这种表示就叫做诱导表示，记作 ${}_H U_G^B, {}_H U^B, U^B$，三种记法都可以。那么怎么做？首先要捋通思路：

I) 定义一个线性空间，使得线性变换可以作用到这个线性空间上的向量

把诱导空间记作 U，其表示空间记作 V，它是一个函数空间。接下来就要让这个空间和 H, B, W 有联系，我们定义 V 中的向量 $f : G \to W$，并且规定有如下的变换性质

$$f(hg) := B(h)f(g) \quad h \in H. \tag{2.27}$$

II) 定义线性变换

我们把 V 的线性变换记作 $U(g)$，并且要求它作用到 f 上要满足

$$[U(g)f](g'') = f(g''g) \Rightarrow [U(g)f](hg'') = f(hg''g) = B(h)f(g''g). \tag{2.28}$$

III) 看看这些线性变换能不能构成一个群，能不能与 G 同态

在这里我们只证明结合律：

$$[U(g'')U(g')f](g) = [U(g'')f](g'g) = f(g''g'g) = [U(g''g')f](g),$$

于是 U 构成一个群，同时还保持乘法规则，那么它就可以是 G 的一个表示。

既然弄明白了，整个思路，那么接下来就是如何求出诱导表示的具体形式，还是分三步：

I) 确定函数空间的维度

因为 $V : G \to W$，所以这个函数空间就是 $n \times d$ 维的，然后再考虑到同一类元素的函数值 f 是相同的，假设群中有 l 类，那么这个空间维度就可以进一步缩小到 $l \times d$ 维。

II) 确定基矢

既然函数空间是 $l \times d$ 维的，那么我们就需要 $l \times d$ 个基矢。既然 $V : G \to W$，那么我先用子群和陪集将群分解 $G = \{H, Hg_i\}$，这样 G 中的任意元素都可以由 hg_i 表出，那么群函数是可以将 $g_i \to W$ 的，所以基矢就可以按照如下的方式定义：

$$e_{rj}(g_k) = \delta_{jk}\vec{e}_r, \tag{2.29}$$

其中 r, j 的上限分别为 d, l，$\vec{e}_r$ 是 W 空间中的 g_i。

III) 确定诱导表示的表示矩阵

既然诱导表示是一种线性变换，那么它作用到群函数 e_{rj} 上也应该有对应的形式，按照 $U(g)$ 的映射规则为：

$$U(g)e_{rj}(g_k) = e_{rj}(g_k g) = B(h)e_{rj}(g_i), \tag{2.30}$$

前面我们说过群 G 中的任意一元素都可以用 hg_i 表出，那么下一步就是确定 h, g_i。在这里采用一个讨巧的方法，前面是用 $g_1, c \ldots, g_l$ 将群分解的，那么就把 g_i, g_k 放在里面，那么根据 e_{rj} 的性质，就会有 $e_{rj}(g_i) = e_{rj+t}(g_k)$，其中 t 是 g_i, g_k 的间隔。那么诱导表示可以进一步写为

$$U(g)e_{rj}(g_k) = B(h)e_{rj+t}(g_k), \tag{2.31}$$

$e_{rj}(g_k)$ 的线性变换，可以由 $e_{rj+t}(g_k)$ 线性表示，它们都是由同一个群元 g_k 生成的，那么剩下的就只需要确定 $B(h)$ 的形式了。利用 δ 的性质，我们可以知道

$$\dot{B}(g_k g g_i^{-1}) = \begin{cases} j = i, j + t = k \quad g_k g = hg_i \Rightarrow B(h) = B(g_k g g_i^{-1}) \\ Otherwise \quad 0 \end{cases},$$

那么利用 δ 的性质，诱导表示的矩阵表示可以写成：

$$U(g)=\begin{pmatrix}\dot{B}(g_1gg_1^{-1}) & \dot{B}(g_1gg_2^{-1}) & \cdots & \dot{B}(g_1gg_l^{-1})\\ \dot{B}(g_2gg_1^{-1}) & \dot{B}(g_2gg_2^{-1}) & \cdots & \dot{B}(g_2gg_l^{-1})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dot{B}(g_lgg_1^{-1}) & \dot{B}(g_lgg_2^{-1}) & \cdots & \dot{B}(g_lgg_l^{-1})\end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

这样无论 $e_{rj}(g_k)$ 是怎样的，都可以从这个矩阵表示中找到对应的方程。诱导表示的特征标为

$$\chi^U(g)=\sum_j^l Tr\dot{B}(g_jgg_j^{-1})=\frac{1}{m}\sum_{t\in G}\dot{B}(tgt^{-1}), \tag{2.33}$$

其中我们把对类的求和，拓展到了对整个元素利用的还是 δ 函数，其中 m 是子群 H 的阶数，之所以这么写是因为 $t\in H, tgt^{-1}=h_k\in H$。

刚刚说的是如何用子群给出诱导表示，现在将其反过来，如果知道一个表示还有一个子群，那么就可以构建一个群 G 的表示到子群 H 的一个缩小，记作 $A|_H$。这种缩小表示可能是可约的，也有可能是不可约的。

定理 2.6.1 Frobenius 定理： 诱导表示 U_B 的重复度 = 群缩小 $A|_H$ 的重复度

证：

$$\begin{aligned}(\chi^A|\chi^U)&=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{A*}(g)\chi^U(g)=\frac{1}{nm}\sum_{t\in G,g\in G}\chi^{A*}(g)Tr\dot{B}(tgt^{-1})\\&=\frac{1}{nm}\sum_{t\in G,s\in G}\chi^{A*}(t^{-1}gt)Tr\dot{B}(s)\\&=\frac{1}{m}\sum_{s\in H}\chi^{A*}(s)\chi^B(s)=(\chi|\chi^B)=(\chi^B|\chi),\end{aligned}$$

其中 χ 为缩小群的特征标，至此此定理得证。

Chapter 3

群论与量子力学

3.1 哈密顿算符群与相关定理

定理 3.1.1：保持哈密顿量不变的坐标空间的变化 g，它所对应的函数变换算符 P_g 必与哈密顿量对易。
证：首先我们先定义什么是哈密顿量不变。如果 $g \in G$ 使得

$$H(x) = H(gx), \tag{3.1}$$

那么 g 所对应的变换算符 P_g 实际上也是一个表示，它满足乘法规则，所以会有：

$$\begin{aligned} H(x)\varphi(x) &= P_g P_{g^{-1}}(H(x)\varphi(x)) = P_g H(gx)\varphi(gx) \\ &= P_g H(x) P_{g_{-1}}\varphi(x) \\ \Rightarrow [P_g, H] &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

于是此定理得证。

定义 3.1.1 哈密顿算符的群：
保持哈密顿量不变的变换 g 构成的群，记为：

$$G_H = \{g | H(gx) = H(x), g \in G\}. \tag{3.3}$$

定义 3.1.2 哈密顿算符群：
G_H 中群元对应的函数变化算符形成的群，记为：

$$P_{G_H} = \{P_g | g \in G_H\}. \tag{3.4}$$

定理 3.1.2： 哈密顿量算符 H 的具有相同本征能量的本征函数构成哈密顿算符群表示的基函数。
证：假设我们有个 n 重简并态，本征函数为 ψ，构成一个线性空间 W^H。利用本征方程可以有，$\forall P_g \in P_{G_H}$ 都会有

$$HP\psi_i = PH\psi_i = EP\psi_i = \sum_j a_j \psi_j, \tag{3.5}$$

这说明 $P\psi_i$ 也是哈密顿量的本征函数，也可以在线性空间中给出，所以此定理得证。这个定理说的是同一能级的本征函数构成的线性空间能够承载这个哈密顿算符群表示，这个表示可约也可以不可约。可约的表示可以化简成一系列不可约表示的直和，每一个不可约表示对应的本征态必定属于同一能级。

定理 3.1.3： 承载哈密顿算符群不可约表示的本征函数必属于同一能级。
证：我们采用反证法来证明这个定理，假设有 l 个本征函数，前 $l-1$ 个本征态的能级为 E，最后一个本征态的能级为 E'，然后它们承载一个不可约表示。取 $\forall P_g \in P_{G_H}$，会有

$$PH\varphi_l = HP\varphi_l = H\sum_i \alpha_{il}\varphi_i = E'P\varphi_l = E'\sum_i \alpha_{il}\varphi_i, \tag{3.6}$$

因为前 $l-1$ 个本征函数的能级为 E'，所以此等式要是想成立的话，就只有 $\alpha_{1l} = \alpha_{2l} = \cdots = \alpha_{l-1,l} = 0, \alpha_l l = 1$，很显然这是一个可约表示，这就与假设矛盾，于是此定理得证。

3.2 投影算符与久期行列式的对角化

这一小节主要是利用对称化的基函数来花间薛定谔方程的久期行列式。如何对称化基函数，会用到投影算符

定义 3.2.1 投影算符：

线性空间 V 上的线性算符 P，如果满足 $P^2 = P$，则称其为 V 上的一个投影算符，值域为 $R_P = PV = \{z \in V | z = Px, x \in V\}$，核为 $N_P = \{z \in V | Pz = 0\}$。

定理 3.2.1:

若线性空间 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$, 则 V 上存在投影算符 $P_1, P_2, \cdots, P_k$, 满足:

I) $P_i^2 = P_i$;

II)$P_i P_j = 0$;

III) $P_1 + P_2 + \cdots + P_k = E$;

IV) $P_i V = W_i$.

反之，如果线性空间 V 上存在算符 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 满足上面四个条件，则 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_K$。具体的证明可以参考三维欧氏空间 $V = xoy \oplus z$, 两个算符分别是将向量 $\vec{r}$ 投影到 z 轴和 xoy 平面，这两个算符是满足上面四个条件的。

定理 3.2.2:

设群 G 的不可约酉表示 $A^\alpha, \alpha = 1, \cdots, q$，维数为 s_α。P_G 为群 G 对应的算符群，即 $P_G = \{P_g | g \in G\}$。定义算符 $P_{kj}^\alpha = \frac{S_\alpha}{n} \sum_g A_{kj}^{\alpha *}(g) P_g$，则这些算符满足下列的关系:

$$P_{kj}^\alpha P_{il}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} P_{kl}^\alpha \tag{3.7}$$

且 P_{ii} 为投影算符。证:

$$\begin{aligned}
P_{kj}^\alpha P_{il}^\beta &= \frac{S_\alpha S_\beta}{n^2} \sum_{g,g'} A_{kj}^{\alpha *}(g) P_g A_{il}^{\beta *}(g') P_{g'} = \frac{S_\alpha S_\beta}{n^2} \sum_{g,g'} A_{kj}^{\alpha *}(g) A_{li}^{\beta}(g'^{-1}) P_{gg'} \\
&\overset{g''=gg'}{=} \frac{S_\alpha S_\beta}{n^2} \sum_{g,g''} A_{kj}^{\alpha *}(g) A_{li}^{\beta}(g''^{-1} g) P_{g''} \\
&= \frac{S_\alpha S_\beta}{n^2} \sum_{g,g'',m} A_{kj}^{\alpha *}(g) A_{lm}^{\beta}(g''^{-1}) A_{mi}^{\beta}(g) A_{mi}^{\beta}(g) P_{g''} \\
&= \frac{S_\beta}{n} \sum_{g',m} \delta_{\alpha\beta} \delta_{km} \delta_{ji} A_{lm}^{\beta}(g''^{-1}) P_{g''} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ji} P_{kl}^\beta,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

此定理得证。

定理 3.2.3:

$$\sum_{\alpha,k,l} \frac{S_\beta}{n} A_{kl}^{\alpha *}(g') A_{kl}^{\alpha}(g) = \delta g' g \tag{3.9}$$

证：我们从特征标的正交性定理出发,

$$\sum_g \frac{s_\beta}{n} A_{kl}^{\alpha *}(g) A_{k'l'}^{\beta}(g) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{kk'} \delta_{ll'}, \tag{3.10}$$

然后我们定义一个新的矩阵

$$F_{ij}^{*} := \sqrt{\frac{s_\alpha}{n}} A_{kl}^{\alpha *}(g_j) = (F^{\dagger})_{ji}, \tag{3.11}$$

然后正交性定理可以重新表述为

$$\sum_j F_{ij} F_{ji'}^{\dagger} = \delta_{ii'} = \delta_{gg'} = \sum_{\alpha,k,l} \frac{s_\alpha}{n} A_{kl}^{\alpha *}(g) A_{kl}^{\alpha}(g'), \tag{3.12}$$

于是此定理得证。

定理 3.2.4:

$$\sum_{i\alpha} P_{ii}^{\alpha} = P_e. \tag{3.13}$$

证：P_{kl}^{α} 的定义式为

$$P_{kl}^{\alpha} = \frac{s_\alpha}{n} \sum_g A_{kl}^{\alpha *}(g) P_g, \tag{3.14}$$

左乘 $A_{kl}^{\alpha}(g')$ 并利用定理 3.2.3，

$$\sum_{\alpha,k,l} A_{kl}^{\alpha}(g') P_{kl}^{\alpha} = \frac{s_\alpha}{n} \sum_{g\alpha kl} A_{kl}^{\alpha *}(g') A_{kl}^{\alpha}(g) P_g = \sum_g \delta_{gg'} P_g = P_{g'}', \tag{3.15}$$

令 $g' = e$，于是就会有

$$\sum_{\alpha kl} A_{kl}^{\alpha}(e) P_{kl}^{\alpha} = \sum_{\alpha kl} \delta_{kl} P_{kl}^{\alpha} = \sum_{\alpha k} P_{kk}^{\alpha} = P_e, \tag{3.16}$$

于是，此定理得证。

定理 3.2.5 有限群不可约酉表示基函数定理 I:

设 P_G 是群 G 的函数作用算符群，它可以定义算符 P_{ij}^{α}，对于一组基函数 φ_i^{α} 可以构成群 G 的第 α 个不可约酉表示基函数的充要条件是：

$$P_{ij}^{\alpha} \varphi_j^{\alpha} = \varphi_i^{\alpha}. \tag{3.17}$$

证：

I) 必要性：

对于 P_g^{α}，它作用到基函数上会有：

$$P_g \varphi_k^{\alpha} = \sum_l A_{lk}^{\alpha}(g) \varphi_l^{\alpha}, \tag{3.18}$$

左乘 $A_{ij}^{\alpha*}(g)$ 并求和，就可以利用正交定理：

$$\sum_g A_{ij}^{\alpha*}(g)P_g\varphi_k^\alpha = \sum_{gl} A_{ij}^{\alpha*}(g)A_{lk}^\alpha(g)\varphi_l^\alpha = \frac{n}{s_\alpha}\sum_l \delta_{il}\delta_{jk}\varphi_l^\alpha = \frac{n}{s_\alpha}\delta_{jk}\varphi_i^\alpha, \tag{3.19}$$

于是很自然地就有

$$P_{ij}^\alpha\varphi_j^\alpha = \frac{s_\alpha}{n}\sum_g A_{ij}^{\alpha*}(g)P_g\varphi_j^\alpha = \delta_{jj}\varphi_i^\alpha = \varphi_i^\alpha. \tag{3.20}$$

II) 充分性：

我们已知：

$$P_{ij}^\alpha\varphi_j^\alpha = \varphi_i^\alpha, \tag{3.21}$$

然后我们任取一个算符，会有

$$\begin{aligned} P_g\varphi_i^\alpha = P_gP_{ij}^\alpha\varphi_j^\alpha &= \frac{s_\alpha}{n}P_g\sum_g A_{ij}^{\alpha*}(g')P_{g'}\varphi_j^\alpha = \frac{s_\alpha}{n}\sum_{g''} A_{ij}^{\alpha*}(g^{-1}g'')P_{g''}\varphi_j^\alpha \\ &= \frac{s_\alpha}{n}\sum_{g'',k} A_{ik}^{\alpha*}(g^{-1})A_{kj}^{\alpha*}(g'')P_{g''}\varphi_j^\alpha = \sum_k A_{ki}^\alpha(g)P_{kj}^\alpha\varphi_j^\alpha \\ &= \sum_k A_{kl}^\alpha(g)\varphi_k^\alpha, \end{aligned} \tag{3.22}$$

于是，此定理得证。

定理 3.2.6 有限群不等价、不可约酉表示的基函数定理 II：

有限群不等价、不可约酉表示的基函数 φ_i^α 会满足如下的正交关系：

$$(\varphi_i^\alpha|\varphi_j^\beta) = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}f^\alpha. \tag{3.23}$$

证：假设我们有一个群 G，它的第 α，β 的不等价、不可约酉表示的基函数为 $\varphi^\alpha, \varphi^\beta$，它对应的算符群为 P_G，所以会有以下的关系

$$\begin{aligned} &(\varphi_i^\alpha|\varphi_j^\beta) = (P_g\varphi_i^\alpha|P_g\varphi_j^\beta) = \sum_{kl} A_{ki}^{\alpha*}(g)A_{lj}^\beta(g)(\varphi_k^\alpha|\varphi_l^\beta) \\ &\Rightarrow \sum_g(\varphi_i^\alpha|\varphi_j^\beta) = n(\varphi_i^\alpha|\varphi_j^\beta) = \sum_{kl}\frac{n}{s_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{kl}\delta_{ij}(\varphi_k^\alpha|\varphi_l^\beta) \\ &\Rightarrow (\varphi_i^\alpha|\varphi_j^\beta) = \frac{1}{s_\alpha}\sum_k \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}(\varphi_k^\alpha|\varphi_k^\beta), \end{aligned} \tag{3.24}$$

于是我们就可以定义一个函数

$$f^\alpha = \frac{1}{s_\alpha}\sum_k(\varphi_k^\alpha|\varphi_k^\beta), \tag{3.25}$$

于是，此定理得证。

定理 3.2.7：

假设 φ^α 是第 α 个不等价不可约表示的基函数，那么 $H\varphi^\alpha$ 也是这第 α 个不等价不可约表示的基函数，而且次序不发生改变。

证：对于第 α 个不等价不可约表示的基函数，如果 P_g 作用到上面会有

$$P_g\varphi_i^\alpha = \sum_l A_{ki}^\alpha(g)\varphi_k^\alpha, \tag{3.26}$$

然后我们利用 P_g 与 H 对易会有如下的关系：

$$P_gH\varphi_i^\alpha = HP_g\varphi_i^\alpha = H\sum_l A_{ki}^\alpha(g)\varphi_k^\alpha = \sum_l A_{ki}^\alpha(g)H\varphi_k^\alpha, \tag{3.27}$$

很显然，φ^α 与 $H\varphi^\alpha$ 是同一组表示，而且顺序并没有发生改变。我们之前都是利用的是 P_{ij}^α 这种矩阵来找到对称化的基函数，但是我们可以用特征标来操作，这种方法更加通用，所以在这一节的最后来简单说一下操作的过程：

Step 1：

构造特征标投影算符

$$P^\alpha = \frac{s_\alpha}{n}\sum_g \chi^{\alpha *}P_g = \sum_i P_{ii}^\alpha, \tag{3.28}$$

第二步自行验证。

Step 2：

对于任意一个向量 ψ，都可以分解为群的不等价不可约表示的基来线性给出

$$\psi = \sum_{i\beta l} a_{il}^\beta\varphi_{il}^\beta, \tag{3.29}$$

其中 i 为重复度，β 为不可约表示的序号，l 为基的序号。当我们把特征标算符作用到这个向量上，我们可以得到第 α 不等价不可约表示的部分，

$$P^\alpha\psi = P^\alpha\sum_{i\beta l} a_{il}^\beta\varphi_{il}^\beta = \sum_{i\beta lj} a_{il}^\beta P_{jj}^\alpha\varphi_{il}^\beta = \sum_{i\beta lj} a_{il}^\beta\delta_{\alpha\beta}\delta_{jl}\varphi_{il}^\beta = \sum_{il} a_{il}^\alpha\varphi_{il}^\alpha, \tag{3.30}$$

其中我们利用了投影算符 P_{jj}^α 的意义，它可以将矢量投影到第 α 个不等价、不可约酉表示的第 j 个分量上。所以 P^α 可以把第 α 个不等价、不可约 9 酉表示空间部分给提取出来。

Step 3：

Chapter 4

置换群

4.1 n 阶置换群

定义 4.1.1 轮换：

形如这样的置换 $\begin{pmatrix} e_1, e_2, \cdots, e_m \\ e_2, e_3, \cdots, e_1 \end{pmatrix}$，就叫做轮换，记作 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$，其中 m 为轮换的阶。

轮换有下面几个有用的性质，对于我们研究置换群的结构有很大的帮助：

1. 轮换内的数字做轮换，仍然还是同一个轮换，即：

$$(e_1, e_2, \cdots, e_m) = (e_2, e_3, \cdots, e_m, e_1). \tag{4.1}$$

2. 两个轮换没有公共元素，则就叫做独立轮换，它们满足乘法交换律，即：

$$(e_1, e_2, \cdots, e_m)(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)(e_1, e_2, \cdots, e_m). \tag{4.2}$$

3. 任意一个置换群都可以分解成相互独立的轮换的乘积.

4. 轮换的逆为：

$$(e_1, e_2, \cdots, e_m)^{-1} = (e_m, e_{m-1}, \cdots, e_1). \tag{4.3}$$

5. 二阶轮换群称作**对换**，任意一个 m 阶置换群都可以分解为 $m-1$ 个对换乘积，即：

$$(e_1, e_2, \cdots, e_m) = (e_1, e_m)(e_1, e_{m-1}) \cdots (e_1, e_3)(e_1, e_2). \tag{4.4}$$

6. 对于任意一个置换，我们都可以分解为相邻对换的乘积。我们利用的就是下面这个等式：

$$(e_1, e_k) = (e_2, e_k)(e_1, e_2)(e_2, e_k). \tag{4.5}$$

很容易这个等式：

$$(e_2, e_k)(e_1, e_2)(e_2, e_k) = \begin{pmatrix} e_1, e_2, e_k \\ e_1, e_k, e_2 \\ e_1, e_k, e_2 \\ e_2, e_k, e_1 \\ e_2, e_k, e_1 \\ e_k, e_2, e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, e_2, e_k \\ e_k, e_2, e_1 \end{pmatrix} = (e_1, e_k). \tag{4.6}$$

定理 4.1.1： 具有相同轮换结构的置换构成置换群 S_n 的一个类。

证：

Step 1：共轭置换具有相同的轮换结构。

首先从 S_n 中任取一个元素，

$$s = \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ c_1, c_2, \cdots, c_n \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

然后再从 S_n 中取一个元素

$$t = \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ d_1, d_2, \cdots, d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1, c_2, \cdots, c_n \\ f_1, f_2, \cdots, f_n \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

第二步是做了重排，方便进行乘积。然后看一下 tst^{-1} 的具体表达式是什么：

$$tst^{-1} = \begin{pmatrix} d_1, d_2, \cdots, d_n \\ 1, 2, \cdots, n \\ 1, 2, \cdots, n \\ c_1, c_2, \cdots, c_n \\ c_1, c_2, \cdots, c_n \\ f_1, f_2, \cdots, f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1, d_2, \cdots, d_n \\ f_1, f_2, \cdots, f_n \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

然后我们假设 s 可以有 k 个独立轮换因子，即 $s = s_1, s_2, \cdots, s_k$，然后我们中间插若干个单位元素

$$tst^{-1} = ts_1t^{-1}ts_2t^{-1}\cdots ts_kt^{-1}, \tag{4.10}$$

由刚刚的分析可以知道任意一个 ts_it^{-1} 都和 s_i 是同阶的置换群，所以轮换因子并不会改变，所以共轭操作并不会改变轮换结构。

Step 2：具有相同轮换因子的置换是共轭的，考虑两个置换：

$$\begin{aligned} s &= (a_1, a_2, \cdots, a_{n_1})(b_1, b_2, \cdots, b_{n_2})\cdots(c_1, c_2, \cdots, c_{n_l}), \\ r &= (d_1, d_2, \cdots, d_{n_1})(e_1, e_2, \cdots, e_{n_2})\cdots(f_1, f_2, \cdots, f_{n_l}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

我们只需要找到能够让这两个置换共轭的元素即可，令

$$t = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_{n_1} \\ d_1, d_2, \cdots, d_{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1, b_2, \cdots, b_{n_2} \\ e_1, e_2, \cdots, e_{n_2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_1, c_2, \cdots, c_{n_l} \\ f_1, f_2, \cdots, f_{n_l} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

简单计算一下，即可验证两者共轭

$$\begin{aligned} tst^{-1} &= \begin{pmatrix} d_1, d_2, \cdots, d_{n_1}, e_1, e_2, \cdots, e_{n_2}, f_1, f_2, \cdots, f_{n_l} \\ a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}, b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}, c_1, c_2, \cdots, c_{n_l} \\ a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}, b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}, c_1, c_2, \cdots, c_{n_l} \\ a_2, a_3, \cdots, a_1, b_2, b_3, \cdots, b_1, c_2, c_3, \cdots, c_1 \\ a_2, a_3, \cdots, a_1, b_2, b_3, \cdots, b_1, c_2, c_3, \cdots, c_1 \\ d_2, d_3, \cdots, d_1, e_2, e_3, \cdots, e_1, f_2, f_3, \cdots, f_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1, d_2, \cdots, d_{n_1}, e_1, e_2, \cdots, e_{n_2}, f_1, f_2, \cdots, f_{n_l} \\ d_2, d_3, \cdots, d_1, e_2, e_3, \cdots, e_1, f_2, f_3, \cdots, f_1 \end{pmatrix} \\ &= (d_1, d_2, \cdots, d_{n_1})(e_1, e_2, \cdots, e_{n_2})\cdots(f_1, f_2, \cdots, f_{n_l}) \\ &= r. \end{aligned} \tag{4.13}$$

至此，此定理得证。也就是说置换群的类与轮换结构一一对应，除此定理之外，我们再列举置换群的其他性质以方便后面内容的学习：

1. 刚刚我们说了置换群的类与轮换结构一一对应，所以我们总是可以把置换进行分解，每一类轮换的分解记为 $(\gamma) = (1^{\gamma_1}, 2^{\gamma_2}, \cdots, n^{\gamma_n})$，意味着它有 γ_1 个一阶轮换，有 γ_2 个二阶轮换等。同时它们还满足下面这一个等式：

$$1 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2 + \cdots + n \cdot \gamma_n = n \tag{4.14}$$

2. 类 (γ) 里的个数为：

$$\frac{n!}{(1^{\gamma_1}\gamma_1!)(2^{\gamma_2}\gamma_2!)\cdots(n^{\gamma_n}\gamma_n!)} \tag{4.15}$$

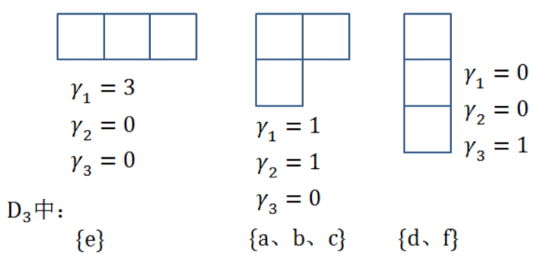
3. 定义杨图的标记方式为：$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$，其中：

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n,\\ \lambda_2&=\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_n,\\ &\cdots\\ \lambda_n&=\gamma_n,\end{aligned} \tag{4.16}$$

很显然有

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1\cdot\gamma_1+2\cdot\gamma_2+\cdots+n\cdot\gamma_n=n. \tag{4.17}$$

4. 于是我们就可以利用 λ 来画杨图，具体例子如下：



最后，如果两个杨图可以通过转置变换联系起来，就叫做共轭；一个杨图转置不变，就叫做自轭。

4.2 杨盘及其引理

定义 4.2.1 杨盘：

将数字 $1,2,\ldots,n$ 分别填到 S_n 的杨图中，就可以得到杨盘。简单来说就是填了数的杨图。

然后我们再简单说一下杨盘的性质：

1. 一个杨图可以至多得到 $n!$ 个杨盘;

2. 杨盘中的数字可以由行和列的位置确定，就跟矩阵一样;

3. 不同杨盘可以由一个置换联系起来;

4. 每一个杨盘都可以定义出行置换 $R(T)$ 与列置换 $C(T)$。$R(T)$ 是保持杨盘 T 的各行中的数字置换后还在同一行的所有置换 p 的集合 $\{p\}$；$L(T)$ 是保持杨盘 T 的各列中的数字置换后还在同一列的所有置换 q 的集合 $\{q\}$。如果杨盘对应的杨图为 $[\lambda]$，那么 $R(T)$ 的阶为：$\lambda_1!, \lambda_2!, \cdots, \lambda_n!$

5. 由行列置换 p, q 可以定义出两个算符 $P(T), Q(T)$:

$$P(T) = \sum_p p, \quad Q(T) = \sum_q \delta_q q, \tag{4.18}$$

   其中偶置换为 1，奇置换为 -1，这里的奇偶置换指的是置换分解的对换的个数。可以看到，每一个 p 或 q 都是把 p,q 的分量给投影出来，所以 P,Q 可以看作是置换群群元的线性组合。

6. 同一个杨图对应的所有杨盘都是同构的，这是因为不同杨盘只是换了个数而已。

最后用一个例子来说明一下什么是行列置换，杨图如下

T_a

1	2	5
3	4	
6		

T_b

1	4	6
5	2	
3		

行置换为：

$$R(T_a) = \begin{cases} e, (1,2), (1,5), (2,5), (1,2,5), (1,5,2); \\ e, (3,4); \\ e, \end{cases} \tag{4.19}$$

列置换为

$$C(T_a) = \begin{cases} e, (1,3), (1,6), (3,6), (1,3,6), (1,6,3); \\ e, (2,4); \\ e. \end{cases} \tag{4.20}$$

定义 4.2.2 杨算符：

杨算符是杨盘 T 的算符 $P(T), Q(T)$ 的乘积，为

$$E(T) = P(T)Q(T) = \sum_{pq} \delta_q pq \tag{4.21}$$

显然，杨算符把行、列的分量都给提取出来，所以它可以看作是群空间 R_{S_n} 的一个矢量 (个人理解)。每一个杨盘只有一个杨算符, 它的两个性质有：

1. 如果 $p, p' \in R(T), q, q' \in C(T)$，且 $pq = p'q'$ 那么一定会有 $p = p', q = q'$。证明这一点很简单，只需要利用到子群的性质：首先变换这个等式，$p'^{-1}p = q'q^{-1}$ 等式左边是 $R(T)$ 的元素，右边是 $C(T)$ 的元素，那么很显然两个子群的交集就只有恒等元，那就说明 $p'^{-1} = p^{-1}, q^{-1} = q'^{-1}$，于是此性质得证;

2. 由于杨算符是对所有行置换、列置换的求和，而且在求和的过程中 pq 不会重复出现，于是就不会出现相消的可能，于是 $E(T)$ 一定是一个非零向量。

定义 4.2.3 幂等元：

满足 $e^2 = e$ 的元素就叫做幂等元，满足 $e^2 = \lambda e$ 的元素叫做本质幂等元，即 $(\lambda^{-1}e)^2 = \lambda^{-1}e$。幂等元和之前说过的投影算符相似，实际上是有这么个定理的，但在此之前要先证一个引理。

定理 4.2.1：

对于群 G 表示空间 V，如果它可以用进行直和分解 $V = \sum_{\oplus} W_i$，那么 W_i 是不变子空间的充要条件是 $[A(g), P_i] = 0$。

证：

必要性：从 W_i 是不变子空间出发，有

$$A(g)P_i\vec{x}_i = A(g)\vec{x}_i = \vec{x}_i' \in W_i = P_iA(g)\vec{x}_i, \tag{4.22}$$

其中 $\vec{x}_i \in W_i, P_iV = \vec{x}_i, P_i\vec{x}_i = \vec{x}_i$，由于此等式恒成立，所以一定要有

$$[A(g), P_i] = 0. \tag{4.23}$$

充分性：从两者对易出发，

$$A(g)\vec{x}_i = A(g)P_i\vec{x}_i = P_iA(g)\vec{x}_i \in W_i, \tag{4.24}$$

这说明等式左边依旧在 W_i 中，这就说明它是一个不变子空间，于是此定理得证。

定理 4.2.2： 群代数 R_G 中有多少个幂等元，群空间中就有多少个左正则变换不变子空间，就有多少个投影算符。

证：

Step 1：若 $W_i = P_iR_G$ 为正则变换的不变子空间，则一定对应一个幂等元。

我们从不变子空间出发，利用投影算符得到不变子空间 $W_i = P_iR_G$, 然后我们在证明想要寻找的幂等元为 $\vec{e}_1 = P_ig_0$。子空间 W_i 对于左正则表示是不变的，所以会有 $L(g)P_i = P_iL(g)$，于是

$$\forall\vec{x} = \sum_j x_j\vec{g}_j \in R_G = \sum_j x_j\vec{g}_j\vec{g}_0, \tag{4.25}$$

我们把投影算符作用上去，有

$$P_i\vec{x} = \sum_j x_j(P_i\vec{g}_j)\vec{g}_0 = \sum_j x_j\vec{g}_j(P_i\vec{g}_0) = \vec{x}\vec{e}_1, \tag{4.26}$$

于是我们就利用投影算符找到了幂等元的表达式，然后我们在证明它就是幂等元。

$$P_i^2\vec{x} = P_i\vec{x} = \vec{x}\vec{e}_1 = P_i(\vec{x}\vec{e}_1) = \vec{x}\vec{e}_1^2, \tag{4.27}$$

很显然它满足幂等元的定义，所以我们就找到投影算符对应的幂等元。

Step 2：一个幂等元一定存在一个与之对应的 G 不变的 R_G 的子空间还有投影算符。

我们用如下等式来定义由幂等元生成的投影算符：

$$\vec{x}\vec{e}_1 = P_i\vec{x}, \tag{4.28}$$

证明它是投影算符是一件非常容易的事情，在这里就不展示了。剩下的就是证明它由不变子空间，对于 $\vec{g}_k \in S_n$，都会有

$$P_i(\vec{g}_j\vec{x}) = \vec{g}_j(\vec{x}\vec{e}_1) = \vec{g}_jP_i\vec{x}, \tag{4.29}$$

很显然 P_i 和 $\vec{g}_j$ 是对易的，所以利用定理 4.2.1 就可以证明它是不变子空间，于是此定理得证。幂等元是要与表示联系起来的，其中有不可约表示对

应的幂等元就叫做本原幂等元，这样我们就可以把杨算符、杨盘与不可约表示联系起来，这个就是杨盘定理干的事情。

定理 4.2.3 杨盘定理：

1. 杨盘 T 的杨算符 $E(T)$ 可以给出置换群群空间 R_{S_n} 中的一个本原幂等元 $\frac{E(T)}{\theta}$，其中 θ 是一个常数。换成人话就是一个杨盘给出置换群在群空间 R_{S_n} 中的一个不可约表示；

2. 源于同一个杨图的杨盘，它们给出的不可约相互等价；

3. 源于不同杨图的杨盘，它们给出的不可约表示不等价。

这个定理的证明过于复杂，所以就不加以证明。

定义 4.2.4 标准杨盘：

杨盘中，每行、每列的数字从左到右，从上到下都是逐渐增加的，这种杨盘就叫做标准盘。

定理 4.2.4：

杨图 $[\lambda]$ 对应的不可约表示的维度等于标准盘的个数。

既然不可约表示的维度和标准杨盘挂钩，一旦置换群足够大的时候，穷举法就显得非常的笨重，在这里我们介绍两种快速求不可与表示维数的公式：

- 直接计算

$$d_{[\lambda]}(S_n) = \frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\cdot r_n!}\prod_{i<j}^{n}(r_i - r_j), \tag{4.30}$$

其中

$$r_i = \lambda_i + n - i, \tag{4.31}$$

λ_i 是杨盘中第 i 行有几个格子，n 是杨图总共有多少行。

- 构形规则

$$d_{[\lambda]}(S_n) = \frac{n!}{\prod_{ij} h_{ij}}, \tag{4.32}$$

其中 h_{ij} 是钩形数，计算规则如下：从杨盘中的第 (i,j) 格开始，分别向右、向下做直线，这两条直线经过的方格数加上第 (i,j) 本身就是钩形数。

按照常理来说，我们弄清楚了置换群的不可约表示的维数下一步就是想方设法求它的特征标，求特征标有两种方法：

- Frobenius 公式 (不讲人话);
- 图形方法：
  1. 根据 $[\lambda]$ 画出相应的杨图；
  2. 每一个置换元素都可以分解成多个独立循环的乘积，所以每一个独立循环都用一个数字填充 (例如：4 个 1 循环用 1,2,3,4，1 个 2 循环用 5,5); 同时，填充的时候要遵循三个要求：1. 相同数字的分布要成阶梯状；2. 不同数字之间的分布，从内向外看是成相等或者递增的趋势 (也就是内圈是小数，外圈是大数)；3. 填充的每一步都要要求 $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$，也就是对填充格子有所要求；
  3. 填充完毕之后，相同数字占据偶数行就给出一个 -1，占据奇数行就给出一个 $+1$，± 1 做乘法；
  4. 特征标就是所有填充方式的代数和。

最后的最后，我们给出置换群元在杨基下的矩阵形式，首先我们先定义什么是杨基：

定义 4.2.5 杨基：

给杨盘指定一个函数 $\phi(1,2,\cdots,n)$，它的具体形式是什么不重要，我们只需要知道置换群元作用到这个函数上只会改变数字的位置，例如：$(1,3)\phi(1,2,3,4) = \phi(3,2,1,4)$，然后我们就可以用杨算符 $E(T)$ 来生成杨基：

$$\psi_i(1,2,3,\cdots,n) = E(T)\phi_i(1,2,3,\cdots,n). \tag{4.33}$$

当置换群的群元 g 作用到杨基上时，$g\psi$ 就可以通过我们刚刚说过的运算法则即可得到一个新的结果，这个新结果可以用 ψ 进行展开，所以就得到的置换群元 g 的表示形式。换句话说，我们在群代数空间上构建了一组基，然后利用向量乘法求得了群元的矩阵形式。

Chapter 5

李群与李代数

5.1 李群

定义 5.1.1 李群：

G 它既是流形，又是群，同时群乘映射 $G \times G \to G$ 和求逆映射 $G \to G$ 都是 C^∞ 的，那么它就叫做李群。

表 5.1: 各种群、性质及其李代数

群	维数	性质	李代数矩阵
$GL(m,\mathbb{R})$	m^2	$m \times m$ 任意实矩阵	$\mathbb{R}$
$GL(m,\mathbb{C})$	$2m^2$	$m \times m$ 任意复矩阵	$\mathbb{C}$
$SL(m)$	m^2-1	$\mathbb{R}, \det A = 1$	$\mathbb{R}$
$SL(m,\mathbb{C})$	$2m^2-2$	$\mathbb{C}, \det A = 1$	$\mathbb{R}, trA = 0$
$O(m)$	$\frac{m(m-1)}{2}$	$\mathbb{R}, A^TA = I$	$\mathbb{R}, A^T = -A$
$SO(m)$	$\frac{m(m-1)}{2}$	$\mathbb{R}, A^TA = I, \det A = 1$	$\mathbb{R}, A^T = -A$
$O(1,3)$	6	$\mathbb{R}, \eta = \Lambda^T\eta\Lambda$	$\mathbb{R}, A^T = -\eta A\eta$
$U(m)$	m^2	$\mathbb{U}, A^\dagger A = I$	$\mathbb{U}, A^\dagger = -A$
$SU(m)$	m^2-1	$\mathbb{U}, \det A = 1$	$\mathbb{U}, A^\dagger = -A, trA = 0$

- $SO(2)$ 群:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

- $SO(3)$ 群:

$$\begin{aligned} &R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ &= R_z(\alpha_3) R_y(\alpha_2) R_x(\alpha_1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

或者

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha). \tag{5.3}$$

- $SU(2)$ 群:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{5.4}$$

5.2 无穷小生成元和无穷小算符

5.2.1 无穷小生成元

我们在单位元附近将群元展开，

$$g(\alpha) = g(\mathbf{0}) + \alpha_i \mathbf{X}_i + \frac{1}{2}\alpha_i\alpha_j \mathbf{X}_{ij} + \cdots, \tag{5.5}$$

其中

$$\mathbf{X}_i \equiv \left.\frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha_i}\right|_\alpha = 0, \quad \mathbf{X}_{ij} \equiv \left.\frac{\partial^2 g(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right|_\alpha = 0. \tag{5.6}$$

它的逆为

$$g^{-1}(\alpha) = I - \alpha_i \mathbf{X}_i + \alpha_i\alpha_j \mathbf{X}_i \mathbf{X}_j - \frac{1}{2}\alpha_i\alpha_j \mathbf{X}_{ij} + \cdots. \tag{5.7}$$

利用两个等式我们可以有

$$\begin{aligned} g^{-1}(\beta)g^{-1}(\gamma)g(\beta)g(\gamma) &= I + \beta_i\gamma_j\left[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j\right] + \cdots \\ &= g(\alpha) = I + \alpha_i \mathbf{X}_i + \cdots, \end{aligned} \tag{5.8}$$

于是我们会有

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = c_{ij}^k \mathbf{X}_k, \quad \alpha_k = c_{ij}^k \beta_i \gamma_j, \tag{5.9}$$

其中 c_{ij}^k 叫做结构常数。利用这个方法我们就可以得到各种常见群的无穷小生成元：

- $SO(2)$

$$g(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \left.\begin{pmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & -\sin\phi \end{pmatrix}\right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

- $SO(3)$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

对易关系为

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{X}_k. \tag{5.12}$$

- $SU(2)$

$$\mathbf{X}_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

对易关系为

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{X}_k, \tag{5.14}$$

很明显 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的李代数是同构的。

- $SU(3)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\mathbf{X}_4 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_5 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_6 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\mathbf{X}_7 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_8 = \frac{i}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

对易关系为

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k, \quad \mathbf{X}_i = \frac{i}{2}\lambda_i. \tag{5.16}$$

5.2.2 无穷小算符

对于无穷小变换有

$$I + \varepsilon, \tag{5.17}$$

坐标系的变分为

$$\delta x^a = \varepsilon^a_b x^b = U_i(x)\alpha_i. \tag{5.18}$$

然后无穷小算符的定义为[1]

$$\mathbf{X} \equiv U_i(x)\partial_i, \tag{5.19}$$

不同算符之间满足

$$\left[\mathbf{X}^a, \mathbf{X}^b\right] = if^{ab}{}_c\mathbf{X}^c, \tag{5.20}$$

[1]这个定义的指标有问题，但是小问题。具体可以参考场论笔记的 Chaper3.

其中 c_{ij}^k 为常数。然后常见群的无穷小算符为

- $SU(2)$ 无穷小变换为
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$
于是坐标系的变分为
$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$
于是按照定义无穷小算符为
$$\mathbf{X} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 = i\mathbf{L}_3. \tag{5.23}$$

- $SO(3)$ 变换矩阵为
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$
相应的无穷小算符就是角动量算符。

- $SU(2)$ 群的无穷小变换为
$$\varepsilon = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$
相应的无穷小算符为自旋算符。

5.3 $SU(2)$ 群的不可约表示

$SU(2)$ 群的群元为

$$D(g) = g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

很显然它是不可约的。然后假设我们有一组函数基矢，取一个变换作用到其中一个函数上会有

$$\Gamma_{g^{-1}} f_m(x) = f_m(gx) = \sum_{m'=-l}^{l} D^{-1}(g)_{m'm} f_{m'}(x). \tag{5.27}$$

假如说函数族取如下的形式，可以满足此等式：

$$f_m^l(x_1, x_2) = \frac{x_1^{l+m} x_2^{l-m}}{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}}, \quad m = -l, -l+1, \cdots, l. \tag{5.28}$$

在此选择下不可约表示为

$$\begin{aligned} & D^l_{m'm}(g^{-1}) \\ &= \sum_{\mu=\max\{0,m-m'\}}^{\min\{l+m,l-m'\}} \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+m')!(l-m')!}}{(l+m-\mu)!(l-m'-\mu)!(m'-m+\mu)!\mu!} \\ &\qquad \times a^{l+m-\mu} \left(a^*\right)^{l-m'-\mu} b^\mu (-b^*)^{m'-m+\mu}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

此外此表示也是幺正的：

$$D^l D^{l\dagger} = I. \tag{5.30}$$

5.4 $SU(2)$ 群和 $SO(3)$ 群的同态映射

之前我们说过 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的李代数是同构的，所以这两个群之间应该是同态的，所以这一节就是来探讨这一个问题。首先，我们先看一下如何从 $SU(2)$ 群变换到 $SO(3)$ 群：任取一个群元

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad g \in SU(2). \tag{5.31}$$

然后我们定义一个变换：

$$\hat{r}' = \Gamma_g \hat{r} \equiv g r g^{-1}, \quad \hat{r} \equiv r \cdot \sigma. \tag{5.32}$$

这会是一个非常长的公式，在这里就不展开了，自己可以用 Mathematica 计算一下。然后这个式子可以写成三维转动的形式，即

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = R(g) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

这样 $SU(2)$ 群就和 $SO(3)$ 群有了联系，需要注意的是这是一个 $2-1$ 的映射，也就是说有两个 $SU(2)$ 群元对应同一个 $SO(3)$ 群元。最后我们给出这个旋转矩阵的形式，它会是非常复杂的矩阵：

$$R(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) & \frac{i}{2}(a^{*2} - a^2 + b^{*2} - b^2) & -(ab + a^* b^*) \\ \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}) & -i(ab - a^* b^*) \\ (ab^* + a^* b) & i(a^* b - a b^*) & (aa^* - bb^*). \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

然后我们再看两个比较特殊的形式：

$$R(e^{-i\gamma/2}, 0) = R_z(\gamma), \quad R\left(\cos\frac{\beta}{2}, -\sin\frac{\beta}{2}\right) = R_y(\beta). \tag{5.35}$$

于是利用这两个等式，我们就可以看到高量中两个常见的旋转矩阵：

$$g = g_1(\alpha) g_2(\beta) g_1(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)} \sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2}, \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

它所对应的 $SO(3)$ 群元为：

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma). \tag{5.37}$$

因为存在 $2-1$ 的映射关系，所以 $(I_2, -I_2)$ 都对应同一个单位元，利用群表示保持乘法关系不变的性质，我们可以推导出一个常见的结论：

$$\left[D^l(-I_2)\right]^2 = D^l\left[(-I_2)^2\right] = D^l(I_2) = I, \rightarrow D^l(-I_2) = \pm I. \tag{5.38}$$

于是我们把满足下面的条件

$$D^l(-I_2 g) = D^l(g), \tag{5.39}$$

叫做单值表示，当 l 是整数的时候，$R^l(\alpha,\beta,\gamma)$ 就是 $SO(3)$ 群的不可约表示，特征标为

$$\chi^l\left(e^{-i\alpha/2}, 0\right) = \sum_{m=-l}^{l} e^{-im\alpha} = \frac{\sin\left[(l+1/2)\alpha\right]}{\sin(\alpha/2)}, \tag{5.40}$$

我们为什么只计算绕 z 轴旋转的特征标，这是因为：绕任意一个轴，只要旋转相同的角度，它们都属于同一类。最后我们给出表示的具体表达式：

$$\begin{aligned}
D^l(a,b)_{m'm} &= \left[D^l(\alpha,\beta,\gamma)\right]_{m'm} = \left[D^l\left(e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}, e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\right]_{m'm} \\
&= \sum_{m=\max\{0,m-m'\}}^{\min\{l+m,l-m'\}} \frac{(-1)^\mu\sqrt{(l+m)!\,(l-m)!\,(l+m')!\,(l-m')!}}{(l+m-\mu)!\,(l-m'-\mu)!\,(m'-m+\mu)!\mu!} \\
&\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m-m'-2\mu}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2\mu} e^{-im\alpha+im'\gamma}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

5.5 角动量及其耦合

如果我们考虑无穷小变化的话，那么我们就可以把不可约表示做泰勒展开，保留到一阶项，相应的系数就是高量中所学到的磁量子数。但是这其中有许多数学细节我还没搞懂，所以只是形式上简单说一下。不过有一点需要说的是，如果两个角动量耦合，那角动量量子数的取值范围就变成了 $(|l_1-l_2|, l_1+l_2)$，这一点可以从特征标来体现这一点。首先角动量耦合意味着两个对应的表示做直积，即

$$D^{j_1}\otimes D^{j_2}=\sum_j c^j_{j_1j_2}D^j, \tag{5.42}$$

相应的特征标为

$$\begin{aligned}
&\chi^{j_1}\chi^{j_2}\\
&=\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}e^{-i(m_1+m_2)\alpha}\\
&=e^{i(j_1+j_2)\alpha}+e^{i(j_1+j_2-1)\alpha}+\cdots+e^{i(j_1-j_2)\alpha}+e^{i(-j_1+j_2)\alpha}+\cdots+e^{-i(j_1+j_2)\alpha}\\
&=\sum_{m=-(j_1+j_2)}^{j_1+j_2}e^{-im\alpha}+\cdots+\sum_{m=-|j_1-j_2|}^{|j_1-j_2|}e^{-im\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

最后我们给出 C-G 系数的相关内容，首先是正交性：

$$\sum_j \delta_{mm'}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j,m\rangle\langle j,m'|j_1,j_2;m_1',m_2'\rangle=\delta_{m_1'm_1}\delta_{m_2'm_2}. \tag{5.44}$$

一般计算公式为：

$$\langle j_1,j_2|m_1,m_2|j,m\rangle=\sqrt{\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!}}. \tag{5.45}$$

5.6 经典 Lie 群的张量表示

在前面的章节里我们看到，Lie 群可以是实数群也可以是复数群，同时 Lie 群也是一种矩阵群，所以它的表示就可以有四种，分别是：

$$D(g), \quad \left[D^{-1}(g)\right]^T, \quad D^*(g), \quad \left[D^{-1}(g)\right]^\dagger, \tag{5.46}$$

如果说 $D(g)$ 是 Lie 群的表示的话，那么另外三个就自动也是 Lie 群的表示。证明这一点只需要验证这三种表示保持群乘法即可，例如：

$$\left[D^{-1}(g_1)\right]^\dagger \left[D^{-1}(g_2)\right]^\dagger = \left[D^{-1}(g_2 g_1)\right]^\dagger. \tag{5.47}$$

如果令 $D(g) = g$ 的话，那么这四种表示都是不等价的不可约表示，利用这四种表示即可把 $GL(n,\mathbb{C})$ 的所有有限维表示给表示出来。需要注意的是 $D(g) = g$ 的矢量空间是 V，$[D^{-1}(g)]^T$ 的矢量空间是对偶空间 $\tilde{V}$，而另外两个表示不怎么重要所以就不说了。

上一章我们学习了置换群，那么在这一节我们就把 Lie 群的表示和置换群联系起来。首先，我们先分解一下一个 $(1,1)$ 型的张量，

$$T^a{}_b = \hat{T}^a{}_b + \delta^a{}_b \left(\frac{1}{n} tr\, T\right), \tag{5.48}$$

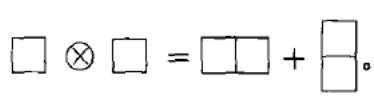
其中

$$\hat{T}^a{}_b \equiv T^a{}_b - \delta^a{}_b \left(\frac{1}{n} tr\, T\right). \tag{5.49}$$

显然，我们把这个张量拆分成了迹和无迹两部分，其中迹承载恒等变换，无迹部分承载 n^2-1 维的不可以表示。对于 $(2,0)$ 型的张量，我们也可以进行拆解，即

$$T^{ab} = T^{(ab)} + T^{[ab]}, \tag{5.50}$$

我们把它拆分成了对称和反对称两部分，它们对应表示的维数分别为 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 和 $\frac{1}{2}n(n-1)$。从这里我们就可以看到，Lie 群表示和置换群的联系了。$(2,0)$ 型张量对应 S_2 的杨图，即 需要注意的是，$GL(n,\mathbb{C})$ 是一个线性变化



群，那么张量的变化规律与之前学过的有一点点不同，即

$$T^a{}_b = g^a{}_c T^c{}_d \left(g^{-1}\right)^d{}_b. \tag{5.51}$$

最后我们给出几个常见群的一些性质：既然我们已经将张量和杨盘联系起

表 5.2: 几种群的性质和构建表示要用到的张量

群	性质	构建表示对应的张量
$U(n)$ 群	$(g^{-1})^\dagger = g, \quad (g^{-1})^T = g^*$	(i,j) 型张量
$SU(n)$ 群	不可约，可能等价	完全对称化张量
$SL(2,\mathbb{C})$ 群	$g \sim (g^{-1})^T, \quad g^* \sim (g^{-1})^\dagger$	$(i,0;k,0)$ 型张量，一行杨图
$GL(n,\mathbb{R})$ 群	$g^* = g$	无迹 (i,j) 型张量
$O(n)$ 群	无	无迹 $(i,0)$ 型张量

来了，那么我们就需要给出能够计算这些杨盘所对应的不可约表示的维数。在这里介绍两种计算 $SU(n)$ 群不可约表示维度的方法：

1. 假设杨盘每一行的长度为 f_i，那么我们把相邻行长度的差记为 $\lambda_i \equiv f_i - f_{i+1}$，最后一个长度为 $\lambda_{n-1} = f_{n-1}$。那么维度为

$$\begin{aligned} d = &(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_{n-1})\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}}{2}\right) \\ &\times\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda_1+\cdots\lambda_{n-1}}{n-1}\right). \end{aligned} \tag{5.52}$$

   这个方法很繁琐，所以只适用于简单的杨盘。

2. 第二种方法除了要就用上一章用到的钩形数之外，还需要一个数 D_i。假如说第 (i,j) 个格子，它会有一个这么样的数 $D_{ij} = j - i$。当数完所有格子的钩形数和 D 之后，$SU(n)$ 群的不可约表示维度为

$$d = \prod_i \left(\frac{n+D_i}{h_i}\right), \tag{5.53}$$

   其中 h_i 是钩形数。下面是个具体的例子

Young tableaux $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$, hook lengths $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$, distance to the first box $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline -1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$

ıension is

$$d = \binom{n}{3}\left(\frac{n+1}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right) = \frac{n\left(n^2-1\right)}{3}$$

搞定维度之后，就是直积。直积的步骤分下面三步：

1. 杨盘中的每一行都各用一个字母来标记，例如：

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a & a & \cdots & \cdots & a \\ \hline b & b & \cdots & b \\ \cline{1-4} c & \cdots & c \\ \cline{1-3} \cdots \\ \cline{1-1}\end{array}$$

2. 首先取第一个 a 往第二个杨盘上粘，要求粘完之后的杨图依旧是个杨盘（下一行不能比上一行多）；然后粘第二个 a，依旧保持是个杨盘。按照着用要求将第一个杨盘中的所有字母都粘完。

3. 当我们把所有可能的杨盘都构造出来之后，直积对应的表示就都出来了。

下面举个例子：

Example 2.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} = \mathbf{8} \times \mathbf{8}$$

Firs step:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & a \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & a \\ \cline{1-2}\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1} a \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Second step:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & a & a \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & a \\ \hline \ & a \\ \cline{1-2}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & a \\ \hline \ \\ \cline{1-1} a \\ \cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & a \\ \cline{1-2} a \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Third step:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & a & a \\ \hline \ & b \\ \cline{1-2}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & a & a \\ \hline \ \\ \cline{1-1} b \\ \cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & a \\ \hline \ & a & b \\ \cline{1-3}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & a \\ \hline \ & a \\ \cline{1-2} b \\ \cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & a \\ \hline \ & b \\ \cline{1-2} a \\ \cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & a \\ \cline{1-2} a & b \\ \cline{1-2}\end{array}$$

27 **10** **10*** **8** **8**

This gives the usual result

$$\mathbf{8} \times \mathbf{8} = \mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{10} + \mathbf{10}^* + \mathbf{27}$$

5.7 Lie 代数

定义 Lie 代数之前，需要定义 Lie 括号，$[,]: V \times V \to V$，并且满足下面两个性质：

- 反线性：

$$[A, B] = -[B, A]. \tag{5.54}$$

- 满足雅可比恒等式：

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \tag{5.55}$$

上面两个性质我们可以得出 Lie 结构常数满足的性质：

$$f^{ab}{}_{c} = -f^{ba}{}_{c}, \tag{5.56}$$

$$f^{ab}{}_{d} f^{dc}{}_{g} + f^{bc}{}_{d} f^{da}{}_{g} + f^{ca}{}_{d} f^{db}{}_{g} = 0. \tag{5.57}$$

在 Lie 群恒等元的切矢空间的基础上再要求这个空间有 Lie 括号的性质，那么这就叫 **Lie 代数**。例如最常见的 $SU(2)$ 的 Lie 代数为 $c_{ij}^{k} = -\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{123} = 1$。然后我们在介绍几个和 Lie 代数有关的定义，

定义 5.7.1 子代数：

假设 U 是 $\mathcal{L}$ 的一个子空间，当 $\forall x_1, x_2 \in U$ 时恒有，

$$[x_1, x_2] \in U,$$

就称 U 是 $\mathcal{L}$ 的子代数.

定义 5.7.2 不变子代数（理想）：

对于 $\forall x \in U, y \in \mathcal{L}$，都有

$$[x, y] \in U,$$

那么就叫做 U 是 $\mathcal{L}$ 的不变子代数。

定义 5.7.3 直和：

$\forall x_1 \in \mathcal{L}_1, x_2 \in \mathcal{L}_2$，都有

$$[x_1, x_2] = 0$$

那就称 $\mathcal{L}$ 为这两个 Lie 代数的直和，记作：

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2.$$

定义 5.7.4 单 Lie 代数，半单 Lie 代数：

除了 $\mathcal{L}$ 本身和 $\{0\}$ 之外没有平凡不变子代数就叫做单 Lie 代数；除了 $\{0\}$ 之外没有 Abel 不变子代数的叫做半单 Lie 代数。
如果 Lie 代数是单的那么它一定是半单的，这是显而易见的；但反过来就不一定了。对于但 Lie 代数我们总可以用不变子代数将其唯一分解，即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots . \tag{5.58}$$

定义 5.7.5 同态：

对于映射 $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$，会有如下的性质的话：

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)] = [x', y'], \tag{5.59}$$

就称两个 Lie 代数同态。我们给出 Lie 代数的一种表示：

$$\Gamma(g) \equiv \Gamma(e^x) \equiv e^{\Gamma(x)}. \tag{5.60}$$

这就是我们在 QFT 中经常见到的表示。其中 Γ 还满足一下两个性质：

1. $\Gamma(ag_1 + bg_2) = a\Gamma(g_1) + b\Gamma(g_2)$.
2. $\Gamma([g_1, g_2]) = [\Gamma(g_1), \Gamma(g_2)]$.

另一种重要的表示叫做**伴随表示**，它是由结构常数构建的，即

$$(T^a)^b{}_c \equiv -if^{ab}{}_c, \tag{5.61}$$

利用雅可比恒等式可以证明它确实是 Lie 代数的一种表示，即

$$\left[T^a, T^b\right] = if^{ab}{}_c T^c \tag{5.62}$$

定义 5.7.6 Killing 形式：

$$g^{ab} \equiv tr\, T^a T^b = -f^{ac}{}_d f^{bd}{}_c. \tag{5.63}$$

定理 7.1.1： Lie 代数是半单的 $\Leftrightarrow \det g_{ij} \neq 0$。

5.8 根向量与 Dynkin 图

假设我们有 n 个生成元 X^a，然后我们把相互对易的生成元 H^i 挑出来，组成一个集合。这个最大的集合中元素的个数叫做阶，假设是 l。剩下的 $n-l$ 个生成元我们记作 E。我们可以重新组合，使得 H^i 同时对角化，并且让 E 变成对角元都为零，所以会有 $H^iE\equiv 0$。

H^i 对角化之后，伴随矩阵也会相应对角化，记作：$(T^i)^a{}_b=-\beta^i(a)\delta^a{}_b$。这是一种非常奇怪的记法，但却能够说明对角元是不同的这么一个情况。对角化之后，我们就可以引出根向量了。首先看一个对易式，

$$\left[H^i,X^a\right]=if^{ia}{}_bX^b=-\left(T^i\right)^a{}_bX^b=\beta^i\delta^a{}_bX^b=\beta^iX^a. \tag{5.64}$$

啥意思？这有点像特征方程了，H^i 给出了一个数 β^i，如果我们跑遍所有的 H^i 那么姐可以得到一个完整的向量，即

$$\vec{\beta}=\left(\beta^1,\beta^2,\cdots,\beta^l\right). \tag{5.65}$$

这就是伴随根向量。既然一个 X^a 对应一个向量，那么我们不妨直接把 X^a 记作 E_β，这样我们一起讨论生成元和根向量了。需要注意的是，我们之前已经做了对角化，这就意味着新生成元就不再是厄米的了，但 H^i 依旧是厄米的。利用一系列简单的数学技巧我们可以求得：

$$E_{-\beta}=E_\beta^\dagger. \tag{5.66}$$

利用雅可比恒等式我们可以知道：

$$\left[H^i,[E_\alpha,E_\beta]\right]=(\alpha+\beta)^i\left[E_\alpha,E_\beta\right] \tag{5.67}$$

很显然这个对易式与 $E_{\alpha+\beta}$ 有联系，我们可以假设：

$$[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}. \tag{5.68}$$

还是经过一系列简单无聊的数学技巧我们可以知道：

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{\beta,\alpha}=-N_{-\beta,-\alpha}=-N^*_{-\beta,-\beta}. \tag{5.69}$$

最后一步利用的是 $N_{\alpha,\beta}$ 是一个实数的性质。

在求解这个系数之前，我们先处理比较简单的一种情况，$\beta=-\alpha$，很显然 $[E_\alpha,E_{-\alpha}]$ 跟所有 H^i 都对易，这就意味着这个对易式一定可以由 H^i 线性给出，即：

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=\alpha_iH^i. \tag{5.70}$$

右乘一个 H^j 然后求迹，利用迹的性质我们有

$$\alpha_i tr\, H^i H^j = a_i g^{ij} = a^j tr\, E_\alpha E_{-\alpha} = a^j tr\, E_\alpha E_\alpha^\dagger = a^j, \tag{5.71}$$

有了指标升降的定义之后就可以定义内积了，即：

$$\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) \equiv g_{ij}\alpha^i\beta^j = g^{ij}\alpha_i\beta_j. \tag{5.72}$$

说了这么多数学的东西，然后我们讲一点物理上的应用，在 $SU(2)$ 群中，它有三个生成元 J_1, J_2, J_3，当我们将 H^i 之后，它对应 J_3，剩下的两个对应 J_+, J_-。对应的根矢量就是角动量，其中 β 对应总角动量 l，α 对应 z 方向的角动量，即 m。所以说 $k\alpha+\beta$ 是有上下界的。我们也可以从群论的角度找出这个结论，但这里我不想细讲，只列出结果[2]：

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{\alpha,\alpha} = n, \tag{5.73}$$

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{\beta,\beta} = m, \tag{5.74}$$

$$\cos^2\theta_{\alpha,\beta} \equiv \frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} = \frac{mn}{4} \tag{5.75}$$

从 (5.75) 中我们可以看出它只能等于 $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$，也就意味着这两个矢量的夹角只能是特定的角度。我们可以证明这种情况只能有四个根[3] $= 0$

然后我们简单介绍一下正根与单根：

定义 5.8.1 正根与单根：

正根是第一个非零分量为正数的矢量；单根是和基矢类似，用它们可以线性组合出其他正根，到要求所有系数必须都是正数。

我们可以证明单根之间的角度会是钝角[4]。

5.8.1 Dynkin 图

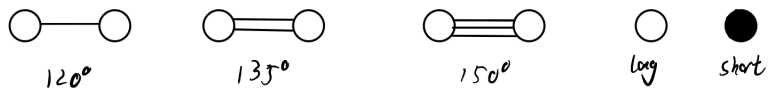
这一小节会简写，因为我也不知道 Dynkin 图在物理上会有什么应用，只是模糊的感觉它可以应用粒子的多重态上。具体是什么我打算寒假去细读，所以在这里只是非常简单的写一下。

Dynkin 图例为

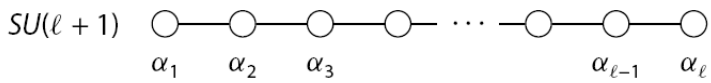
[2]详细内容看 A.Zee 的书 Part VI Section 3。

[3]利用反证法即可证明，可以导出 $(\vec{\beta}, \vec{\beta})$

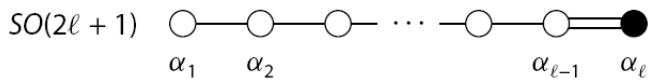
[4]需要用到 $2\frac{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{(\vec{\alpha},\vec{\alpha})} = q - p$，对应着 $\vec{\beta}+p\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}-q\vec{\alpha}$。既然 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 都是单根，那么 $\vec{\beta}-q\vec{\alpha}$ 就不是根，所以 $q=0$，$\cos\theta_{\alpha,\beta} < 0$，就表明是钝角了。



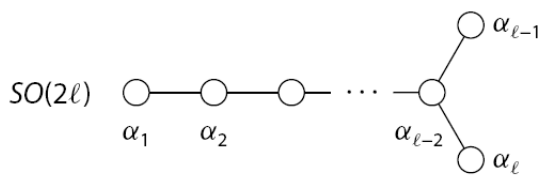
(a) 角度



(b) $SU(2l)$



(c) $SO(2l+1)$



(d) $SU(2O)$

最后我们给出三条构建 Dynkin 图的规则：

1. Dynkin 图中不能形成圈；
2. 两个点最多只能有三条连线;
3. Dynkin 图可以缩并，但要求缩并之后的 Dynkin 图依旧要是一个 Dynkin 图。