

χ_{cJ} decays into VV as a double slit experiment

A. Thor

日期：2024 年 12 月 18 日

目录

1	$\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{cJ} \rightarrow \gamma K^{0*} \bar{K}^{0*} \rightarrow \gamma K^+ K^- \pi^+ \pi^-$	1
2	$\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{cJ} \rightarrow \gamma\phi\phi \rightarrow \gamma 2(K^+ K^-)$	1
2.1	χ_{c0}	2
2.2	χ_{c1}	2
2.3	χ_{c2}	3
3	问题	3

1 $\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{cJ} \rightarrow \gamma K^{0*} \bar{K}^{0*} \rightarrow \gamma K^+ K^- \pi^+ \pi^-$

2 $\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{cJ} \rightarrow \gamma\phi\phi \rightarrow \gamma 2(K^+ K^-)$

我们再来考虑一个辐射衰变的例子: $\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{cJ} \rightarrow \gamma\phi\phi \rightarrow \gamma 2(K^+ K^-)$ 过程 (下面以 $J = 0$ 为例开始讨论)。不同之处, 这个例子中出现了全同例子。这个级联过程有如下特征:

- 前两级衰变, $\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{cJ}$ 和 $\chi_{c0} \rightarrow \phi\phi$, 都满足 $\eta_a\eta_b\eta_c = +1$, 再结合角动量守恒条件, 这两级衰变的轨道角动量只能为偶数 $L = 0, 2$ (但是, $\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{c0}$ 过程含有光子, 轨道角动量的概念不再适用)。
- 第一级衰变 $\psi(2S) \rightarrow \gamma\chi_{c0}$ 过程是辐射衰变, 所以 Helicity 振幅 $F_{00}^0 = 0$, 只剩下 $F_{10}^0 = F_{-10}^0$ 一个独立振幅。
- 第二级衰变 $\chi_{c0} \rightarrow \phi\phi$, 因为初态粒子自旋为零, 则末态粒子 (ϕ) 在其质心系中的角分布是均匀分布。因为过程是 $0^+ \rightarrow 1^- 1^-$ 且 $L = 0, 2$, 很容易得到 $G_{-1-1}^0 = G_{11}^0$, 而 $G_{1-1}^0 = G_{-11}^0 = G_{\pm 10}^0 = G_{0\pm 1}^0 = 0$, 加上 G_{00}^0 , 故只有两个个独立的 Helicity 振幅。进一步考虑 ϕ 是全同粒子, 而这里只是出约束: $F_{s\sigma}^0 = F_{\sigma s}^0$, 没有更多的化简。
- 虽然 ϕ 的角分布是平庸的, 但是和 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 过程中, 两个光子的极化平面互相垂直, 也就是极化平面夹角满足 $\sin^2 \phi$ 分布相类似, $\chi_{c0} \rightarrow \phi\phi$ 中, ϕ 的极化平面也会出现某些特征, 这个分布和初态粒子 χ_{c0} 的字称有关, 但并没有 π^0 那么简单。
- 最后一级 $\phi \rightarrow K^+ K^-$, 根据角动量守恒, 可以推断出只有一个分波, 也只有一个 Helicity 振幅 $H_{00}^1 (H_{00}^{1'})$ 。一个独立振幅出现在乘积关系中在推导中可以忽略。

根据上面的讨论, 下面我们来具体计算其振幅的具体表达式和完整的角分布。首先在 Helicity 展开中讨论。

下面几个末态粒子采用编号：1: $\gamma(\lambda)$, 2: $\chi_{cJ}(\nu)$, 3: $\phi(s)$ 4: $\phi(\sigma)$, 5: K^+ , 6: K^- , 7: K^+ , 8: K^- 。请注意其中有三对全同粒子，括号中为该粒子的螺旋度， M 为 $\psi(2S)$ 的自旋 z 分量，只能取 ± 1 。

2.1 χ_{c0}

这是一个三级、四次衰变的复杂过程，根据上面的讨论，它有两个独立的 Helicity 振幅。把它的每一级都用 Helicity 表示，然后每级（每个衰变）之间用传播子连接起来，就得到了完整的振幅表达式。具体表达式如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M, \lambda) &= F_{\lambda 0}^1 D_{M\lambda}^{1*}(\theta_2 \phi_2, 0) BW_{\chi_c} G_{s\sigma}^0 H_{00}^1 BW_{\phi_{56}} D_{s0}^{1*}(\theta_5 \phi_5, 0) H_{00}'^1 BW_{\phi_{78}} D_{\sigma 0}^{1*}(\theta_7 \phi_7, 0) \\ &= C_{0,1} D_{M\lambda}^{1*}(\theta_2 \phi_2, 0) D_{s0}^{1*}(\theta_5 \phi_5, 0) D_{\sigma 0}^{1*}(\theta_7 \phi_7, 0)\end{aligned}$$

其中 $C_{0,1}$ 是所有包含能量依赖的因子总和，且略掉一个总因子。

$$C_0 = F_{\lambda 0}^1 BW_{\chi_c} G_{00}^0 H_{00}^1 BW_{\phi_{56}} H_{00}'^1 BW_{\phi_{78}} \quad (1)$$

$$C_1 = F_{\lambda 0}^1 BW_{\chi_c} G_{11}^0 H_{00}^1 BW_{\phi_{56}} H_{00}'^1 BW_{\phi_{78}} \quad (2)$$

重新定义 $a = C_1/C_0 = G_{11}^0/G_{00}^0$ ，原则上 a 可以是复数。进一步化简，把振幅模方并对末态求和，对初态求平均，就可以得到联合角分布。

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Phi} &= \sum_{M\lambda} \left| \sum_{s=\sigma=0,\pm 1} \mathcal{A}(M, \lambda) \right|^2 \\ &= \sum_{M\lambda} \left| ad_{M\lambda}^1(\theta_2) D_{10}^{1*}(\theta_5 \phi_5, 0) D_{10}^{1*}(\theta_7 \phi_7, 0) + ad_{M\lambda}^1(\theta_2) D_{-10}^{1*}(\theta_5 \phi_5, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_7 \phi_7, 0) \right. \\ &\quad \left. + d_{M\lambda}^1(\theta_2) D_{00}^{1*}(\theta_5 \phi_5, 0) D_{00}^{1*}(\theta_7 \phi_7, 0) \right|^2 \\ &\propto \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_2) [\cos \theta_5 \cos \theta_7 + a \sin \theta_5 \sin \theta_7 \cos(\phi_5 + \phi_7)]^2\end{aligned} \quad (3)$$

可以看出脚标 5 和 7 完全地位完全对称，结果满足全同粒子对称性的要求。

2.2 χ_{c1}

第一级衰变 $\psi(2S) \rightarrow \gamma \chi_{c1}$ 过程是辐射衰变，所以 Helicity 振幅 $F_{0\sigma}^1 = 0$ ，又因为 $F_{1\sigma}^1 = -F_{-1-\sigma}^1$ ，只剩下 $F_{11}^1 = -F_{-1-1}^1$ 和 $F_{10}^1 = -F_{-10}^1$ 2 个独立振幅。定义 $x = F_{11}^1/F_{10}^1$ 。计算中用 $F_{10}^1 = 1$ 和 $F_{11}^1 = x$ 。

第二级衰变。考虑到角动量守恒， $G_{-1+1}^1 = G_{+1-1}^1 = 0$ ；考虑宇称守恒， $F_{s\sigma}^1 = -F_{-s-\sigma}^1$ ，因此末态有 $G_{11}^1 = -G_{-1-1}^1$ ， $G_{01}^1 = -G_{0-1}^1$ ，和 $G_{10}^1 = -G_{-10}^1$ 和 G_{00}^1 等 4 个独立振幅；再考虑 ϕ 是全同粒子对称性，可以出约束： $G_{s\sigma}^1 = -G_{\sigma s}^1$ ，所以有 $G_{01}^1 = -G_{0-1}^1 = -G_{10}^1 = G_{-10}^1$ 和 $G_{00}^1 = -G_{00}^1 = 0$ 、 $G_{11}^1 = -G_{11}^1 = 0$ 、 $G_{-1-1}^1 = -G_{-1-1}^1 = 0$ ，独立振幅减少到 1 个。

在不考虑全同粒子对称性时，可以定义 $a = G_{11}^1/G_{10}^1$ ， $b = G_{00}^1/G_{10}^1$ ，用来检测全同粒子对称性。计算中用 $G_{01}^1 = -G_{0-1}^1 = -G_{10}^1 = G_{-10}^1 = 1$ 和 $G_{00}^1 = G_{11}^1 = -G_{-1-1}^1 = 0$ 。计算中 $G_{10}^1 = 1$ 处理，其他是 $\pm a$ 和 $\pm b$ 。考虑到全同粒子对称性时，这一级的 helicity 振幅只有一个是独立的，可以当做 ± 1 处理。

第三级衰变 $\phi \rightarrow KK$ 只有一个振幅。因此 helicity 振幅可以当做 1 处理。

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Phi} &= \sum_{M=-1, \lambda=\pm 1} \left| \sum_{\nu=0, \pm 1, s=\sigma=0, \pm 1} \mathcal{A}(M, \lambda) \right|^2 \\
&= \sum_{M=-1, \lambda=-1} \left| \begin{aligned}
&F_{-1-1}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{-1-1}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{-1-1}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{00}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{00}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{00}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{-1-1}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{+1+1}^1 D_{+1,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{-10}^1 D_{-1,-1}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{-1-1}^1 D_{0,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{-10}^1 D_{-1,-1}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{00}^1 D_{0,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{00}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{00}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{-10}^1 D_{-1,-1}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{+1+1}^1 D_{0,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0)
\end{aligned} \right|^2 \\
&+ \sum_{M=-1, \lambda=+1} \left| \begin{aligned}
&F_{+10}^1 D_{-1,+1}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{-1-1}^1 D_{0,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{+10}^1 D_{-1,+1}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{00}^1 D_{0,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{00}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{00}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{+10}^1 D_{-1,+1}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{+1+1}^1 D_{0,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{+1+1}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{-1-1}^1 D_{+1,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{-10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{+1+1}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{00}^1 D_{+1,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{00}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{00}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0) \\
&+ F_{+1+1}^1 D_{-1,0}^{1*}(\theta_2, \phi_2, 0) G_{+1+1}^1 D_{+1,0}^{1*}(\theta_3, \phi_3, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_5, \phi_5, 0) D_{+10}^{1*}(\theta_7, \phi_7, 0)
\end{aligned} \right|^2
\end{aligned} \tag{4}$$

2.3 χ_{c2}

第一级衰变 $\psi(2S) \rightarrow \gamma \chi_{c2}$ 过程是辐射衰变，所以 Helicity 振幅 $F_{0\sigma}^1 = 0$ ，又因为 $F_{1\sigma}^1 = F_{-1-\sigma}^1$ ，只剩下 $F_{12}^1 = F_{-1-2}^1$ 、 $F_{11}^1 = F_{-1-1}^1$ 和 $F_{10}^1 = F_{-10}^1$ 3 个独立振幅。 $x = F_{12}^1/F_{10}^1$ ， $y = F_{11}^1/F_{10}^1$ 。

第二级衰变先考虑宇称守恒： $F_{s\sigma}^2 = F_{-s-\sigma}^2$ ，因此末态有 $G_{1-1}^2 = G_{-11}^2$ ， $G_{11}^2 = G_{-1-1}^2$ ， $G_{01}^2 = G_{0-1}^2$ ， $G_{10}^2 = G_{-10}^2$ 和 G_{00}^2 等 5 个独立振幅；再考虑 ϕ 是全同粒子对称性，可以出约束： $F_{s\sigma}^2 = F_{\sigma s}^2$ ，所以 $G_{01}^2 = G_{0-1}^2 = G_{10}^2 = G_{-10}^2$ ，独立振幅减少到 4 个。 $a = G_{1-1}^2/G_{00}^2$ ， $b = G_{11}^2/G_{00}^2$ ， $c = G_{10}^2/G_{00}^2$ 。

$$\frac{d\sigma}{d\Phi} = \sum_{M\lambda} \left| \sum_{\nu=0, \pm 1, \pm 2, s=\sigma=0, \pm 1, \pm 2} \mathcal{A}(M, \lambda) \right|^2 \tag{5}$$

3 问题

考虑 $\chi_{cJ} \rightarrow \phi\phi$ 和 $\chi_{cJ} \rightarrow K^* \bar{K}^*$ 两个过程，前者是全同粒子，后者不是。

- χ_{c0} , χ_{c1} 和 χ_{c2} 到末态这三个过程看来只有 χ_{c1} 对全同粒子的结果是非平庸的，但不完全确定？
- 测量什么量对全同粒子的干涉和相干行为最敏感？