

第X讲：螺旋度振幅 /Helicity amplitude

张艳席

内部使用，勿外传

联系方式：

邮箱： yanxi.zhang@pku.edu.cn

电话：13810870213

地址：高能物理中心老化学楼东配楼201-7

参考文献

- On the general theory of collisions for particles with spin
by Jacob and Wick, 鼻祖
- An experimenter's guide to the helicity formalism, by Richman
- Helicity formalism.pdf, (无名)
- spinfm1.pdf, Chung (更严格推导, 前半部分)
- 分波分析方法, 李刚博士后论文

- 多体衰变末态粒子在相空间呈现一定的分布，与初、末态粒子自旋，中间共振态成分有关系
- 原理：能动量守恒，角动量守恒和叠加

➤ 初、末态角动量(自旋)在某方向投影相等： $m_i = m_{f1} + m_{f2}$

➤ $p_i = \sum p_f$ ， $E^2 = p^2 + m^2$

举例：氢原子电子云分布(忽略内禀自旋)。系统总角动量等于轨道角动量 $j = l$ 。

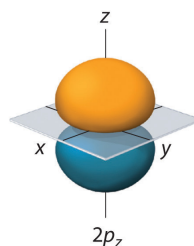
氢原子薛定谔球面部分方程解

$$f(\theta) \propto |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 \propto |d_{m,0}^l|^2$$

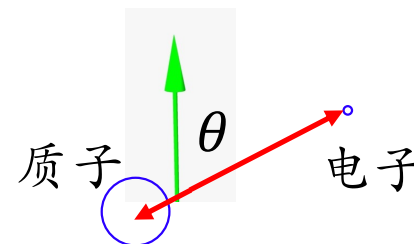
球谐函数 Wigner小d-函数

$$d_{m,0}^l = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

对 $l, m = 1, 0$ ， $|d_{00}^1|^2 = \cos^2 \theta$ 分布为



等价于自旋为 l 的粒子衰变到两个自旋为 0 的粒子 $L \rightarrow 00$ ， θ 为质心系质子/电子的飞行方向。也可求解。



自旋宇称符号标记 J^P

振幅分析应用

- 研究CP破坏、寻找新粒子态、探索反应机制
- 测量粒子自旋、宇称、质量参数

验证希格斯 J^P

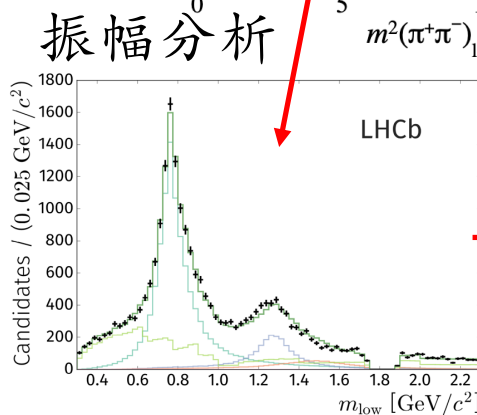
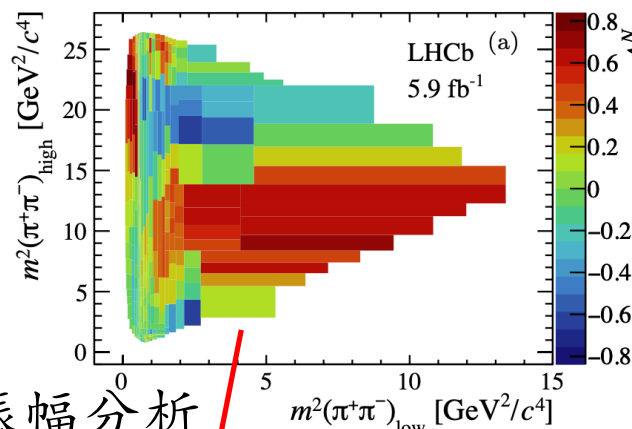
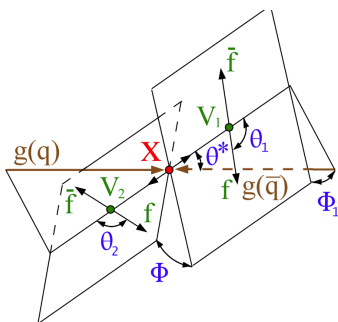
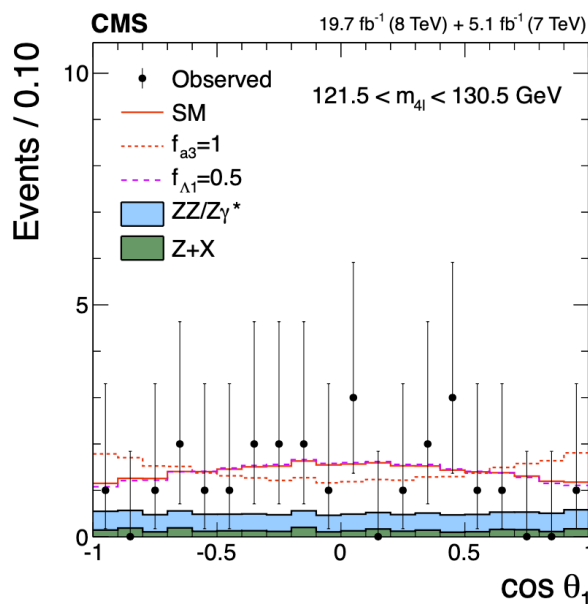
$H \rightarrow Z(l^+l^-)Z^*/\gamma^*(l^+l^-)$

CP破坏研究

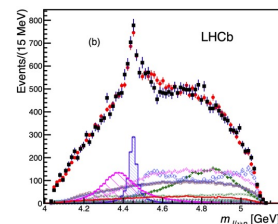
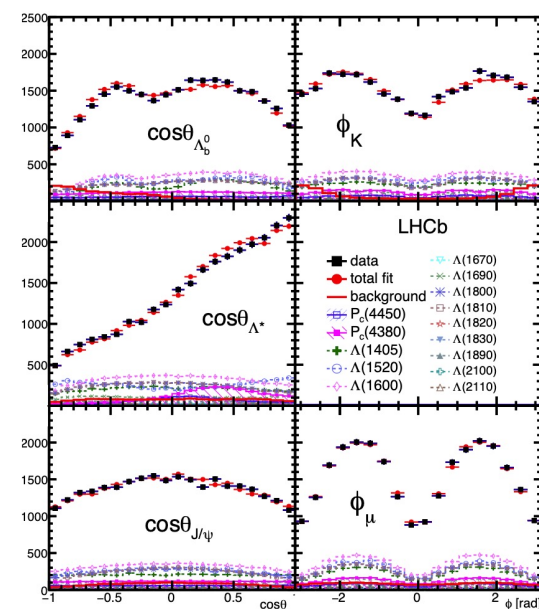
$B^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$

寻找和研究五夸克态

$\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi p K^-$



Component	CP(%)			
$\rho(770)^0$	$+0.7 \pm 1.1$	± 0.6	± 1.5	
$\omega(782)$	-4.8 ± 6.5	± 1.3	± 3.5	
$f_2(1270)$	$+46.8 \pm 6.1$	± 1.5	± 4.4	
$\rho(1450)^0$	-12.9 ± 3.3	± 3.6	± 35.7	
$\rho_3(1690)^0$	-80.1 ± 11.4	± 7.8	± 24.1	
S-wave	$+14.4 \pm 1.8$	± 1.0	± 1.9	



- 反应概率是初、末态量子状态的函数
- 对 $P \rightarrow f_1 f_2 \dots f_n$ 衰变，记各粒子量子态为 $O_i \equiv (J_i, J_{zi}; m_i, \vec{p}_i)$ 则在 P 质心系衰变微分宽度可以一般表示为(舍去常数系数)

$$d\Gamma \propto \frac{1}{M_P} |\mathcal{M}(O_1, O_2 \dots O_n | O_P)|^2 d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n)$$

M_P : 衰变粒子的质量

$\mathcal{M}$: Lorentz-invariant 矩阵元，原则上可以通过动力学计算得到

自旋 m_i 求和: 往往不直接测量自旋，需要对初态自旋求平均，末态自旋求和

$$d\Gamma \propto \sum_{m_i} 1/M_P |\mathcal{M}(O_1, O_2 \dots O_n | O_P)|^2 d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n)$$

Φ_n : 多体相空间，由动量决定，量纲为 E^{2n-4}

$$d\Phi_n = \delta^4(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n 2\pi \delta(E_i^2 - \vec{p}_i^2 - m_i^2) \frac{dE_i d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^4} \quad \text{态密度}$$

能量守恒

质能关系

多体相空间

由于 $\delta(E_i^2 - \vec{p}_i^2 - m_i^2) dE_i = \delta(E_i^2 - \vec{p}_i^2 - m_i^2) \frac{dE_i^2}{2E_i}$

$= \frac{1}{2E_i}$ ，并且 $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$ ，略去常数因子得到

$$d\Phi_n \propto \delta^4(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_i}{E_i}, E_i = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$$

两体： $d\Phi_2 \propto \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 \vec{p}_1}{E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{E_2}$

$$= \delta(M_P - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{d^3 \vec{p}_1}{E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{E_2}$$

$$= \delta(M_P - E_1 - E_2) \frac{d^3 \vec{p}_1}{E_1 E_2}$$

$$= \delta(M_P - E_1 - E_2) \frac{q^2 dq d\cos\theta d\phi}{E_1 E_2}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= -\vec{p}_2 \equiv (q, \theta, \phi) \\ |p_1| &= |p_2| = q \\ E_{1,2} &= \sqrt{q^2 + m_{1,2}^2} \end{aligned}$$

利用 δ 函数性质 $\delta(y)dx = |dy/dx|^{-1} \delta(y)dy$ 得

$$y = E_1 + E_2 \quad = \delta(M_P - y) dy \left| \frac{q}{E_1} + \frac{q}{E_2} \right|^{-1} \frac{q^2}{E_1 E_2} d\Omega = \frac{q}{M_P} d\Omega$$

$$E_1 + E_2 = M_P$$

两体相空间讨论

质量为 M_P 的粒子衰变到质量为 m_1, m_2 的两体末态，其相空间为

$$d\Phi_2 = \frac{q}{M_P} d\Omega, \quad d\Omega \equiv d\cos\theta d\phi$$

- q, θ, ϕ 为质心系中粒子1(2)动量大小和方向
- 质心系动量大小 q 由下式完全确定

$$E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2 + q^2} = M_P$$

求得：

$$q = \frac{\sqrt{(M_P^2 - (m_1 + m_2)^2)(M_P^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M_P}, \quad E_1 = \frac{M_P^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M_P}$$

如果 $m_1 = m_2 = m$ ，则 $E = M_P/2, q = \sqrt{(M_P/2)^2 - m^2}$

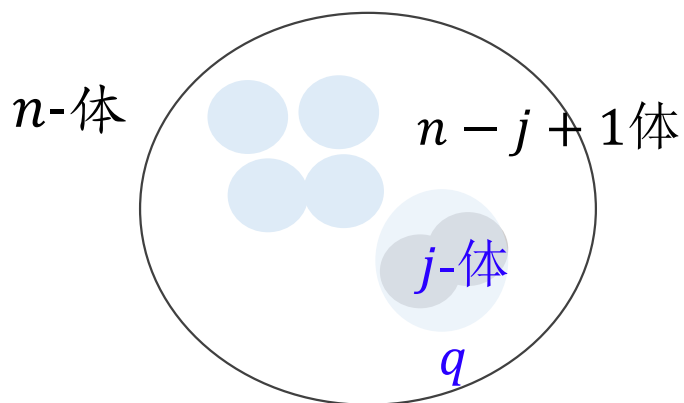
- 2体相空间没有动量大小自由度，仅有动量方向自由度

对于 n 体($n \geq 3$)衰变，可以拆成级联的两体衰变。对于每个两体衰变，重复利用上式。

多体相空间拆解

n -体衰变相空间可以拆成 j 体和 $n - j + 1$ 体两部分子相空间乘积

$$d\Phi_n = \underbrace{d\Phi_j(q; p_1, \dots, p_j)}_{j\text{-体子相空间}} \times \underbrace{d\Phi_{n-j+1}(M_P; q, p_{j+1}, \dots, p_n)}_{j\text{-体作为整体和另外}n-j\text{构成}n-j+1\text{相空间}} (2\pi)^3 \underbrace{dq^2}_{j\text{-体不变质量平方}}$$



j -体子相空间由多种取法

三体： $\Lambda_b^0 \rightarrow (pK)\pi, p(K\pi), (p\pi)K$

四体： $\Lambda_b^0 \rightarrow (pK)(\pi_1\pi_2), (p\pi_1)(K\pi_2)$

$\Lambda_b^0 \rightarrow (pK\pi_1)\pi_2, p(K\pi_1\pi_2) \dots$

三体相空间详解

拆成两个两体相乘，不失一般性把12结合成子空间

$$d\Phi_3 \propto d\Phi_2(M_P; q_{12}p_3) \times d\Phi_2(q; p_1, p_2) dq_{12}^2$$

记 q_{12} 系统的质量为 m_{12} ， q_{12} 系统质心系1(2)粒子的动量大小为 q ，方向为 Ω_1 。

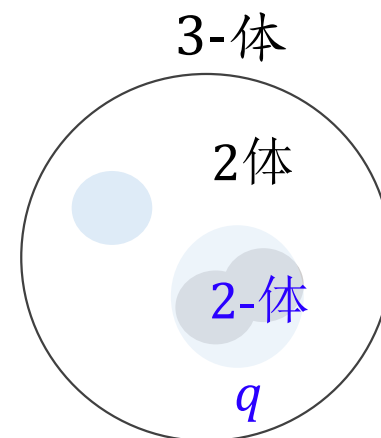
记 q_{12} 系统在 M_P 质心系的动量大小为 p ，方向角为 Ω_q 。

得到：

$$d\Phi_3 \propto \frac{p}{M_P} d\Omega_q \times \frac{q}{m_{12}} d\Omega_1 \times dm_{12}^2 = \frac{pq}{M_P} dm_{12} d\Omega_q d\Omega_1$$

讨论：在 M_P 质心系，末态三粒子动量张成平面，即衰变平面。 Ω_q 和 ϕ_1 决定平面的法线方向和各粒子绕平面法线的共同转动。如果衰变不依赖这三个角度，仅仅依赖于衰变平面内三粒子的相对位置和对量大小，则 $d\Phi_3 = \frac{pq}{M_P} dm_{12} d\cos\theta_1$

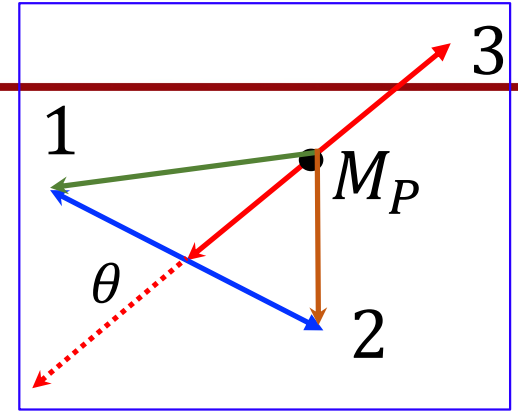
此时三体相空间可表示为： $d\Phi_3 = dm_{12}^2 dm_{23}^2 = dE_1 dE_2$



附录

已知， m_{12}, M_P ，并标记*是在12质心系的变量

$$E_3 = \frac{M_P^2 + m_3^2 - m_{12}^2}{2M_P} \quad E_{12} = \frac{M_P^2 + m_{12}^2 - m_3^2}{2M_P}$$



3从 M_P 质心系boost到12系统质心系， $\gamma = E_{12}/m_{12}, \beta = p_3/E_{12}$

$$\text{得到：} \quad E_3^* = \gamma(E_3 + \beta p_3) \quad p_3^* = \gamma(p_3 + \beta E_3)$$

$$m_{13}^2 = (E_1^* + E_3^*)^2 - (\vec{p}_1^* + \vec{p}_3^*)^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2E_1^*E_3^* + 2p_1^*p_3^* \cos \theta$$

$$\text{进而：} \quad \frac{\partial m_{13}^2}{\partial \cos \theta} = 2p_1^*p_3^* = 2p_1^*\gamma(p_3 + \beta E_3) = 2p_1^* \frac{E_{12}}{m_{12}} \left(p_3 + \frac{p_3}{E_{12}} E_3 \right) = \frac{2p_1^*p_3M_P}{m_{12}}$$

$$\text{雅可比行列式} \quad dm_{12}^2 dm_{23}^2 = \left| \frac{\partial m_{12}^2}{\partial m_{12}}, \frac{\partial m_{12}^2}{\partial \cos \theta} \right| dm_{12} d\cos \theta = 4M_P p_1^* p_3$$

$$\text{从而：} \quad d\Phi_3 = \frac{p_3^3 p_1^*}{M_P} dm_{12} d\cos \theta \propto \frac{1}{m_P^2} dm_{ij}^2 dm_{ik}^2 = dE_i dE_j$$

$$\text{最后一个利用} \quad dm_{ij}^2 = dE_k \quad (\text{注意} m_{12} p_3^* = M_P p_3)$$

四体相空间

$$d\Phi_4(P; p_1, p_2, p_3, p_4)$$

按照2 + 2体拆解，即 $0 \rightarrow R_1 R_2 \rightarrow (12)(34)$ 衰变模式

$$\propto \frac{\vec{p}_{R_1 R_2}^{\{P\}}}{M_P} d\Omega_{R_1 R_2}^{\{P\}} \frac{\vec{p}_{12}^{\{R_1\}}}{m_{R_1}} dm_{R_1}^2 d\Omega_{12}^{\{R_1\}} \frac{\vec{p}_{34}^{\{R_2\}}}{m_{R_2}} dm_{R_2}^2 d\Omega_{34}^{\{R_2\}}$$

$0 \rightarrow R_1 R_2 \quad R_1 \rightarrow 1 2 \quad R_2 \rightarrow 3 4$

按照3 + 1体拆解，即 $0 \rightarrow R_1 4 \rightarrow [R_2 3] 4 \rightarrow [(12) 3] 4$ 衰变

$$\propto \frac{\vec{p}_{R_1 4}^{\{P\}}}{M_P} d\Omega_{R_1 4}^{\{P\}} \frac{\vec{p}_{R_2 3}^{\{R_1\}}}{m_{R_1}} dm_{R_1}^2 d\Omega_{R_2 3}^{\{R_1\}} \frac{\vec{p}_{12}^{\{R_2\}}}{m_{R_2}} dm_{R_2}^2 d\Omega_{12}^{\{R_2\}}$$

$0 \rightarrow R_1 4 \quad R_1 \rightarrow R_2 3 \quad R_2 \rightarrow 1 2$

结论：多体相空间($\prod d^4 p_i$)可以表示为2体不变质量和2体质心系中粒子动量方向角的函数

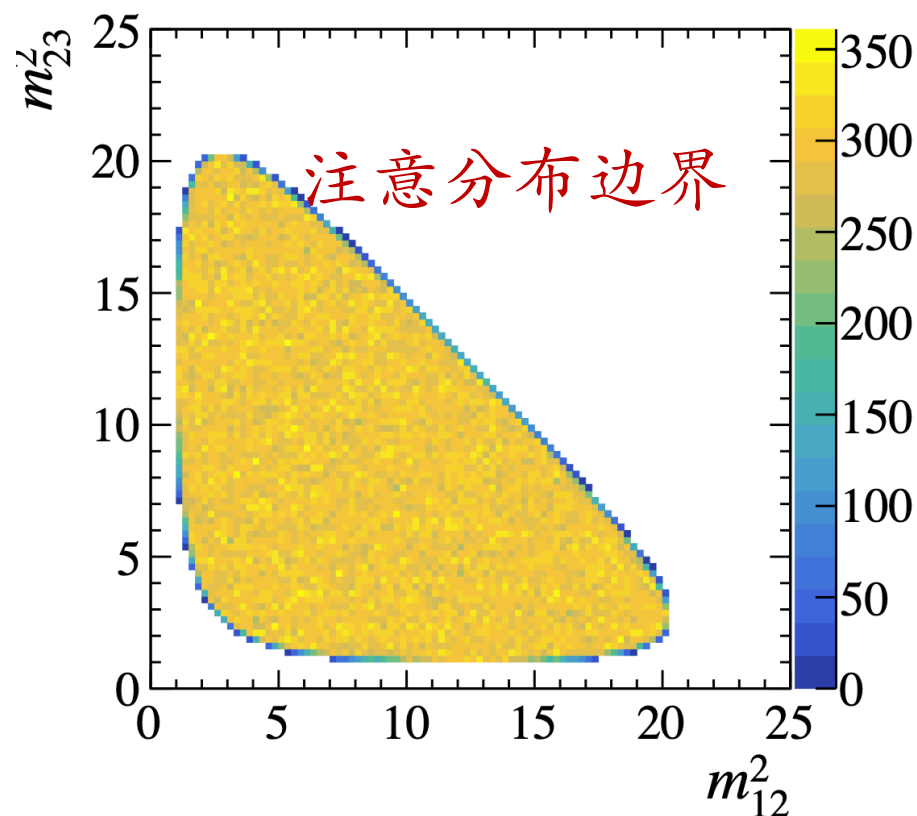
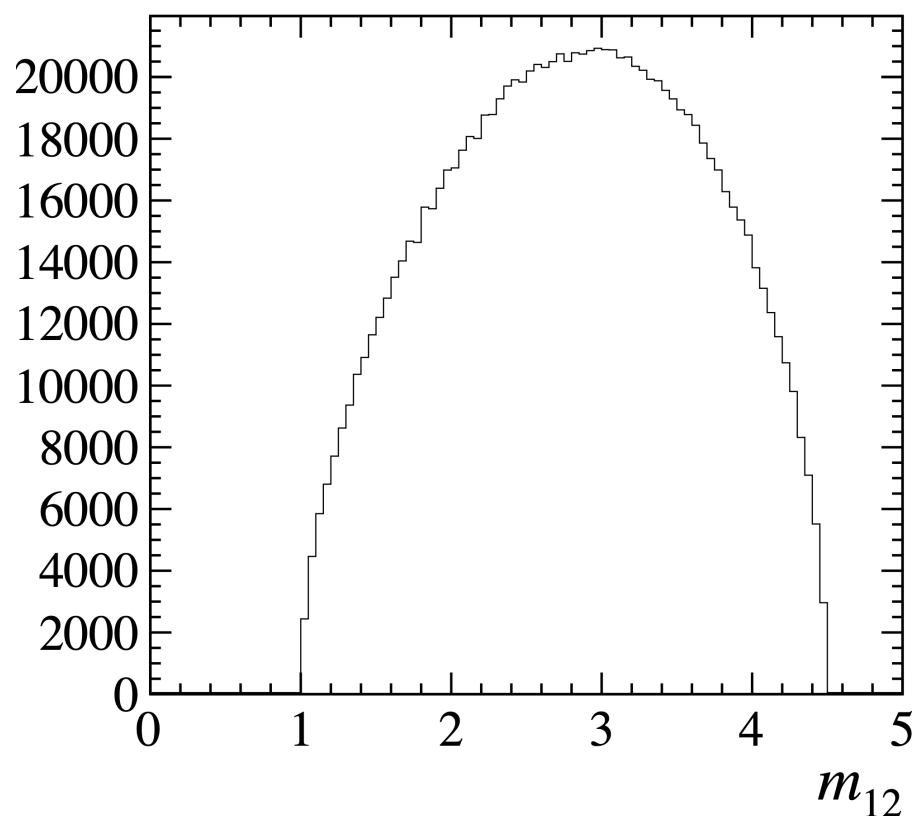
分布实例

对于初、末态粒子无自旋的三体衰变，比如 $B^+ \rightarrow K^+ K^+ K^-$

$$d\Gamma_3(\text{spinless}) \propto \frac{1}{M_P^2} |\mathcal{M}(m_{12}, \cos \theta)|^2 p q dm_{12} d\cos \theta$$

如果振幅为常数，即各相空间点衰变率相等，则

$$d\Gamma_3(\text{spinless}) \propto p q dm_{12} d\cos \theta = dm_{12}^2 dm_{23}^2, \text{ 分布如下图:}$$



一般情况的矩阵元

给定初、末态的量子态(即自旋和动量)，振幅矩阵元可以表示为各种可能的中间过程的叠加，即“多缝干涉”

$$\mathcal{M} = \sum_i \mathcal{A}_i(m, \Omega)$$

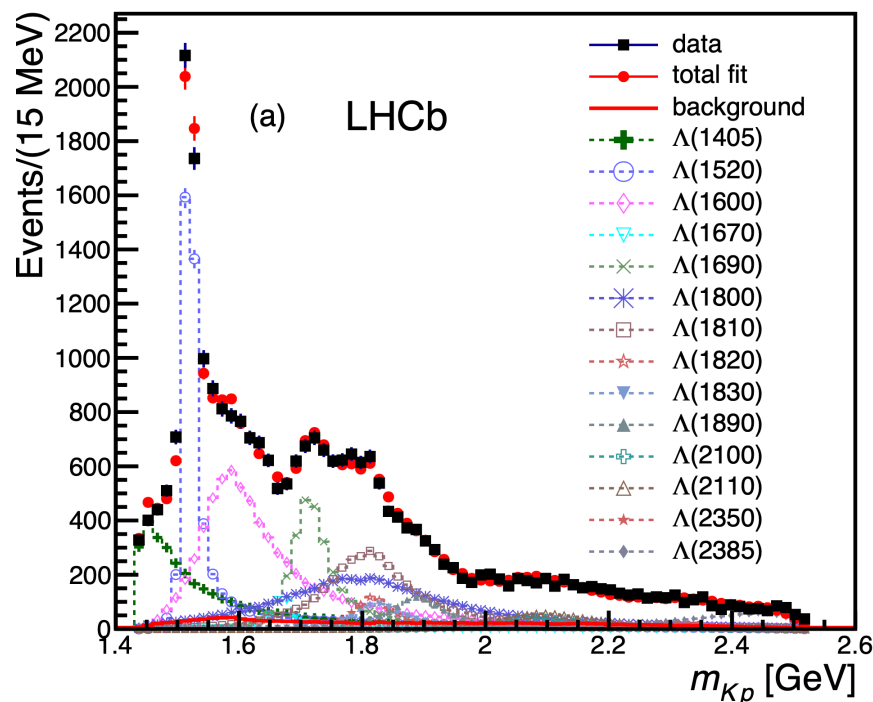
求和 i 包括不同的共振态、每个态各个自旋分量等等

各成分的分布作为相空间 (m, Ω) 的函数可以唯一的表示出来

强子态叠加：

$\Lambda_b^0 \rightarrow \psi K^- p$ 衰变由多个 Λ^* 强子态相干叠加构成

$$\Lambda_b^0 \rightarrow \psi \Lambda^*, \Lambda^* \rightarrow K^- p$$



$\mathcal{M}$ 有由一系列振幅叠加形成，各成分有特定的轨道角动量、自旋、宇称等量子数，因此可因子化为质量和角度分布的乘积

实际分析中，振幅由多个(非)共振态叠加，每个成分 J^{PC} 选定

$$\mathcal{M} = \sum_{R_l} \underbrace{B_l(q, q_0) \times \left(\frac{q}{m_0}\right)^l \times R(m; l, m_0, \Gamma_0)}_{\text{质量分布}} \underbrace{\times T_l(\Omega)}_{\text{角分布}}$$

多级衰变的每级都有一组这些因子相乘

- ✓ $B_l(q, q_0)$: Blatt-Weisskopf 形状因子, 压低高轨道角动量概率，查表获得
- ✓ $\left(\frac{q}{m_0}\right)^l$: 压低小轨道角动量概率
- ✓ $R(m; l, m_0, \Gamma_0)$: 共振态传播子(比如Breit-Wigner共振态函数)

理论上是无限个振幅叠加，但总是根据能量范围的限制以及经验选取有限成分。

注意叠加可以包含多种拓扑结构，通常称为不同的衰变链。

$$\text{举例：}\mathcal{M}(0 \rightarrow 123) = \mathcal{M}(R_{12}3) + \mathcal{M}(R_{13}2) + \mathcal{M}(R_{23}1)$$

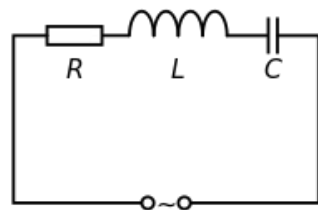
共振、谐振、共振态

外界对系统的扰动频率与系统的本征频率相等的时候，系统响应极大

简谐振动 $x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega\omega_0\zeta)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \varphi),$

固有频率：材料弹性性质

RLC电路：



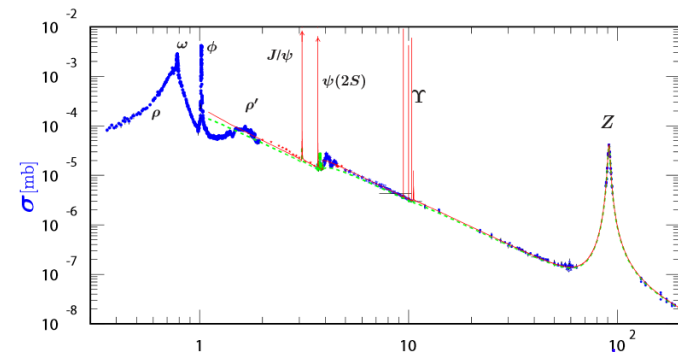
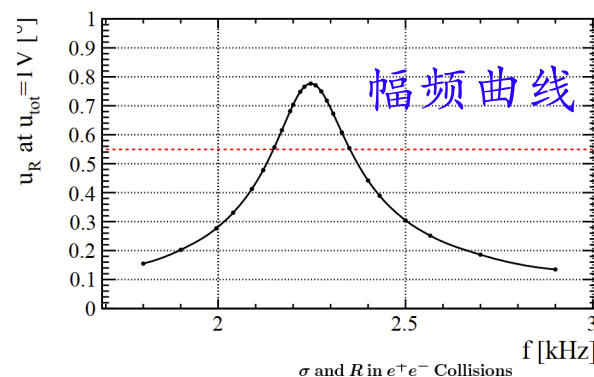
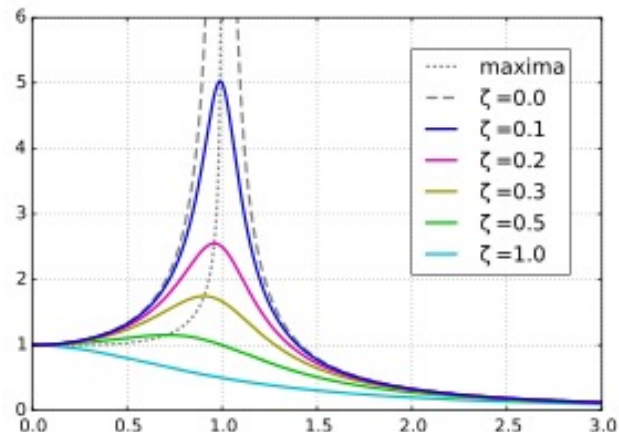
$$I = \frac{U}{i(\omega L - 1/\omega C) + R} = \frac{-iU\omega/L}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\omega R/L}, \quad \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

QCD/粒子物理共振态(Breit-Wigner传播子)

$$R(m) = \frac{1}{m_0^2 - m^2 - im_0\Gamma(m)} \quad l \text{ 是轨道角动量}$$

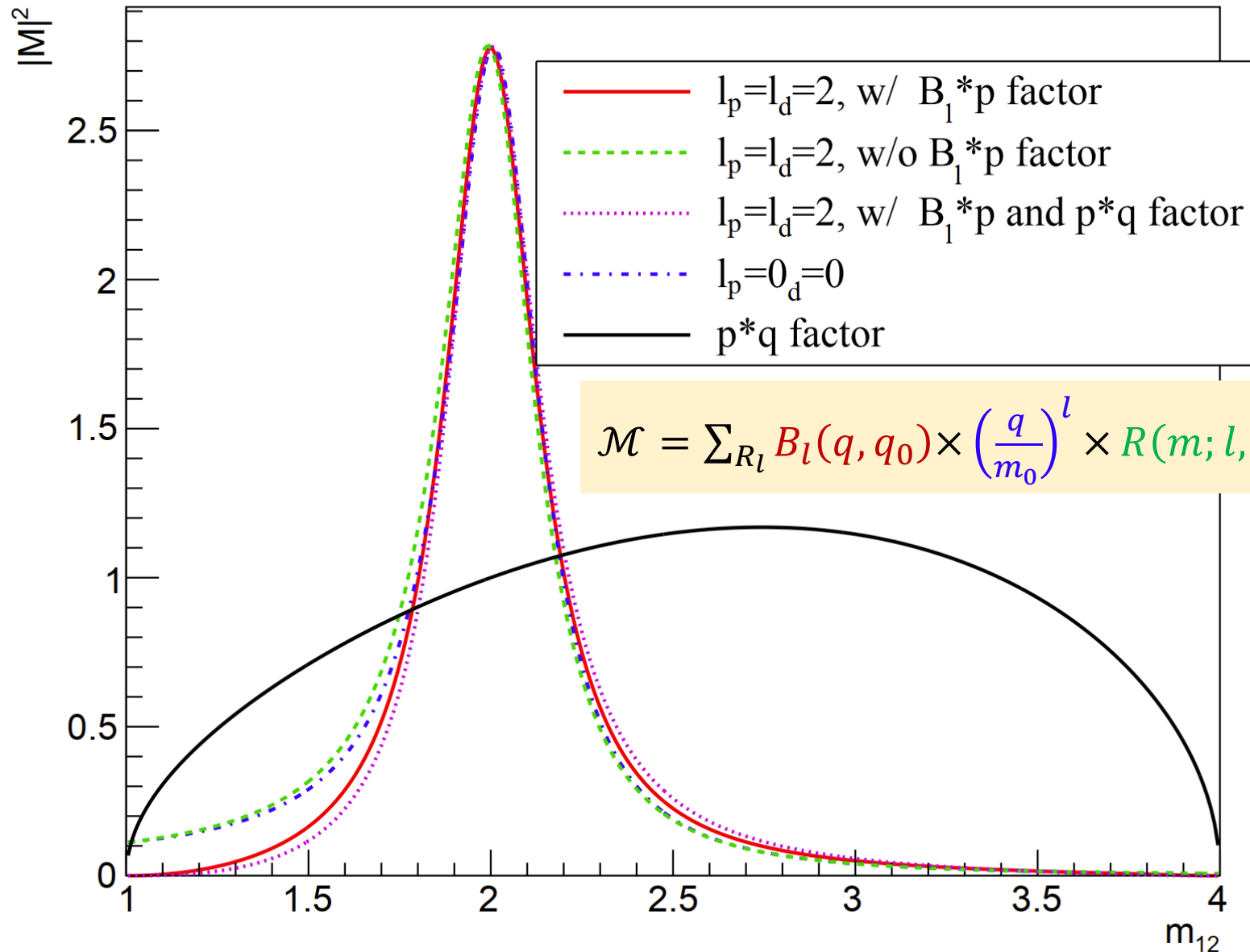
$$\Gamma(m) = \Gamma_0 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{2l+1} \left(\frac{m_0}{m}\right) B_l^2$$

振动
幅度



考虑形状因子后的质量分布

Breit-Wigner, 5.0→R+1.0, R(2.0,0.3)→0.5,0.5 [GeV]



$$\mathcal{M} = \sum_{R_l} B_l(q, q_0) \times \left(\frac{q}{m_0}\right)^l \times R(m; l, m_0, \Gamma_0) \times T_l(\Omega)$$

$$d\Gamma \propto \frac{1}{M_P} \left| \sum_{R_l} R'(m; l, m_0, \Gamma_0) \times T_l(\Omega) \right|^2 d\Phi_n(m, \Omega)$$

$$\text{记: } R'(m; l, m_0, \Gamma_0) \equiv B_l(q, q_0) \times \left(\frac{q}{m_0} \right)^l R(m; l, m_0, \Gamma_0)$$

多级衰变

$$d\Gamma \propto \frac{1}{M_P} \left| \sum_{(R_1, R_2 \dots)} R'_1 \times T_1 R'_2 \times T_2 \dots \right|^2 d\Phi_n(m, \Omega)$$

只剩角度部分需要求解

已知特定成分、特定相空间位置，求对应的角分布

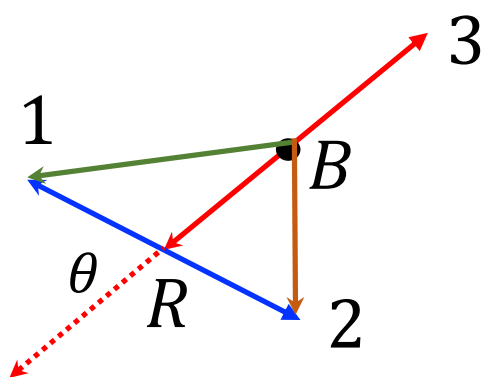
注意这里的角分布是2体质心系中末态粒子动量的方向角

螺旋度公式法(Helicity formalism)

坐标系与参考系

坐标系：(3维)互相正交的基矢，对物理量进行投影

参考系：某粒子的静止系，由于洛伦兹变换不对易，参考系需要标记具体的洛伦兹变换



记 R 在 B 质心系和实验室系的动量分别为 $\vec{p}_R^{\{B\}}$ ， $\vec{p}_R^{\{L\}}$ 。1粒子在实验室系动量为 $\vec{p}_1^{\{R\}}$ ， B 在实验室系动量为 $\vec{p}_B^{\{L\}}$ 。求粒子1在实验室系的动量？

错误方案： $p_1^{\{R\}} \xrightarrow{\vec{p}_R^{\{L\}}} p_1^{\{L\}}$

正确方案： $p_1^{\{R\}} \xrightarrow{\vec{p}_R^{\{B\}}} p_1^{\{B\}} \xrightarrow{\vec{p}_B^{\{L\}}} p_1^{\{L\}}$

粒子静止系中自旋态

对于自旋为 j 的粒子，选定量子化坐标系，记为 $C_0 \equiv (x, y, z)_0$

粒子有 $2j + 1$ 个自旋本征态： $|m\rangle_0$ ， $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$

下表0表示定义在 C_0 坐标系中

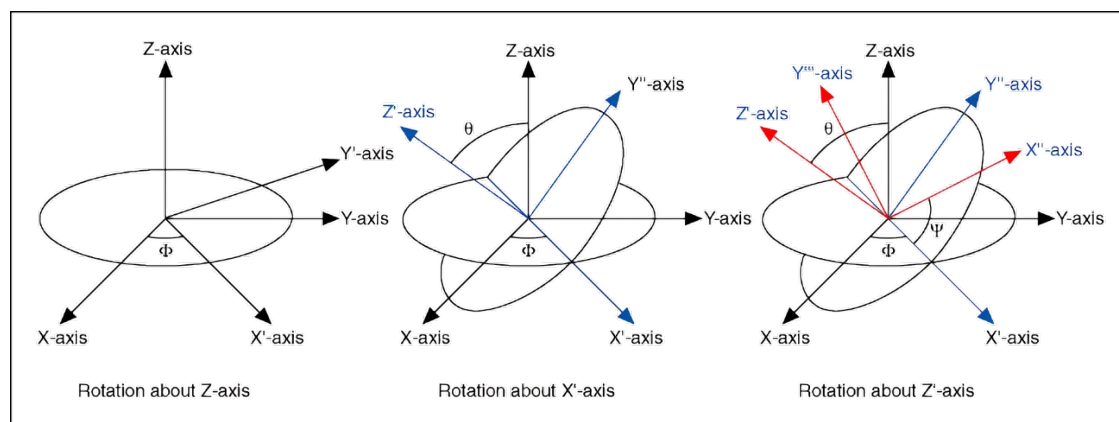
正交、归一性： ${}_0\langle m|n\rangle_0 = \delta_{mn}$

完备性： $\sum_m |m\rangle_0 {}_0\langle m| = 1$

(无质量粒子只有螺旋度态，取值 $|\pm j\rangle$ ，稍后介绍)

有另一坐标系 C_1 ，由 C_0 经过 $\alpha_z \rightarrow \beta_{y'} \rightarrow \gamma_{z''}$ 三次欧拉转动达到。
也记作 $\phi_z \rightarrow \theta_{y'} \rightarrow \psi_{z''}$ 。注意三次转轴所在的坐标系不同，
称为被动转动。

可以证明其与 $\gamma_z \rightarrow \beta_y \rightarrow \alpha_z$ 等价，后者坐标系不变，
称为主动转动。



C_1 系与 C_0 自旋本征态的关系

C_1 系中自旋本征态记为 $|n\rangle_1$ 。

对于 C_0 系中任一态 $|m\rangle_0$ ，如果它与 C_0 的复制坐标系一起按照 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 转动，直到 C_0 转到 $C_1 = R(\alpha, \beta, \gamma)C_0$ ，新态记为 $|X\rangle_1$ 。对称性使得在 C_1 观察 $|X\rangle_1$ 态应与 C_0 观察 $|m\rangle_0$ 态无法区分，

即： $|X\rangle_1 = |m\rangle_1$ ，在相应的z-轴投影相同，且相位一样

变成新坐标系的自旋本征态

也就是： $|m\rangle_1 = U(R(\alpha, \beta, \gamma))|m\rangle_0$

$$= \sum_{m'} |m'\rangle_{00} \langle m' | U(R(\alpha, \beta, \gamma)) | m \rangle_0 \quad (\text{态完备条件})$$

$$= \sum_{m'} |m'\rangle_0 D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{注意是左求和})$$

$$|m'|, |m| \leq j$$

Wigner大D函数： $D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \langle m' | U(R(\alpha, \beta, \gamma)) | m \rangle$

可以查表，部分可见 [rpp2020-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf](#)

Wigner D 函数 (spinfm1 附录)

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma)) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}, \text{ 主动变换 } \gamma_z \rightarrow \beta_y \rightarrow \alpha_z$$

$$D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \langle m' | U(R(\alpha, \beta, \gamma)) | m \rangle = e^{-i\alpha m'} d_{m'm}^j(\beta) e^{-i\gamma m}$$

$$\text{Wigner小}d\text{函数: } d_{m'm}^j(\beta,) \equiv \langle m' | e^{-i\beta J_y} | m \rangle$$

$$D\text{函数正交性: } \sum_k D_{m'k}^j(R) D_{mk}^{j*}(R) = \delta_{m'm}$$

$$D\text{函数结合律: } \sum_k D_{m'k}^j(R_2) D_{km}^j(R_1) = D_{m'm}^j(R_2 R_1)$$

$$\text{反演性: } d_{m'm}^j(\theta) = (-)^{m'-m} d_{mm'}^j(\theta) = d_{-m-m'}^j(\theta) = d_{mm'}^j(-\theta)$$

$$\text{另有: } D_{m'm}^j(\pi + \phi, \pi - \theta, 0) = e^{i\pi j} D_{m',-m}^j(\phi, \theta, 0)$$

$$\text{以及: } d_{m'm}^j(\pi - \theta) = (-)^{j+m'} d_{m',-m}^j(\theta)$$

$$\text{特例: } D_{m'm}^j(0,0,0) = \delta_{m'm}, \quad D_{m'm}^0(R) = \delta_{m'0} \delta_{m0}$$

C_1 与 C_0 系自旋本征态的反关系

利用 $|m\rangle_1 = \sum_{m'} |m'\rangle_0 D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$

利用 D -函数的正交性 $\sum_k D_{m'k}^j(R) D_{mk}^{j*}(R) = \delta_{m'm}$

$$\begin{aligned} \text{得到：} \sum_m D_{km}^{j*}(R) |m\rangle_1 &= \sum_{m'm} |m'\rangle_0 D_{m'm}^j(R) D_{km}^{j*}(R) \\ &= \sum_{m'} |m'\rangle_0 \delta_{m'k} \\ &= |k\rangle_0 \end{aligned}$$

即： $|m\rangle_0 = \sum_{m'} D_{mm'}^{j*}(R) |m'\rangle_1$ 注意：共轭、右求和

解释： C_1 (新)系下的态可以表征为 C_0 (旧)系的态的线性叠加，(左)叠加系数 $D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ 函数与 $C_0 \rightarrow C_1$ 的转角有关系。
反之 C_0 系态表征为 C_1 系态的叠加，(右)系数为 $D_{m'm}^{j*}(\alpha, \beta, \gamma)$

相对论粒子自旋态(以下内容参考Chung的spinfm1.pdf)

粒子动量为 $\vec{p}$ ，球坐标系为 $p, \Omega \equiv (\theta, \phi)$

正则(canonical)态: $|\vec{p}, jm\rangle = U[L(\vec{p})]|jm\rangle$

解释：质心系自旋为 $|jm\rangle$ 粒子boost到动量 $\vec{p}$

由于： $U[L(\vec{p})] \equiv U[R(\phi\theta 0)][L_z(p)]U^{-1}[R(\phi\theta 0)]$

解释： $R(\phi\theta 0)$:把z-轴转到 $\vec{p}$ 方向，这里只需要两次转动，(主动)第一次转动不动(先沿y-轴转 θ ，再沿z-轴转 ϕ ，则z-轴与 $\vec{p}$ 重合)。

把 $\vec{p}$ 转到z-轴方向，沿着z-方向做大小为 $|\vec{p}|$ 的boost，再把z-轴转回 $\vec{p}$ 方向

螺旋度(helicity)态: $|\vec{p}, j\lambda\rangle \equiv |\Omega, p, j\lambda\rangle = U[L(\vec{p})]U[R(\phi, \theta, 0)]|j\lambda\rangle$

解释：先把 $|jm\rangle$ 态转到 $\vec{p}$ 方向，即使之成为沿着 $\vec{p}$ 方向投影为 m 的态，再沿着 $\vec{p}$ 方向做boost。Boost方向跟自旋方向一致。

根据 $U[L(\vec{p})]$ 定义可得：

$$|\vec{p}, j\lambda\rangle = U[R(\phi\theta 0)][L_z(p)]|j\lambda\rangle$$

解释：沿着z(自旋)-方向做大小为 $|\vec{p}|$ 的boost，再把z-轴转到 $\vec{p}$ 方向

两种相对论自旋态的性质

正则态与静止系态具有类似的转动关系

根据定义(记 $R_{\vec{p}} \equiv R(\phi_{\vec{p}}, \theta_{\vec{p}}, 0)$) :

$$\begin{aligned} U[R_{\vec{p}'}]|\vec{p}, jm\rangle &= U[R_{\vec{p}'}]U[R_{\vec{p}}][L_z(p)]U^{-1}[R_{\vec{p}}]U^{-1}[R_{\vec{p}'}]U[R_{\vec{p}'}]|j, m\rangle \\ &= U[R_{\vec{p}'}R_{\vec{p}}][L_z(p)]U^{-1}[R_{\vec{p}'}R_{\vec{p}}]U[R']|j, m\rangle \\ &= U[R_{\vec{p}'}R_{\vec{p}}][L_z(p)]U^{-1}[R_{\vec{p}'}R_{\vec{p}}]\sum_{m'}|m'\rangle D_{m'm}^j(R') \\ &= \sum_{m'}|R_{\vec{p}'}R_{\vec{p}}\hat{p}\hat{z}, m'\rangle D_{m'm}^j(R') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而螺旋度态 : } U(R')|\vec{p}, j\lambda\rangle &= U(R')U[R][L_z(p)]|j\lambda\rangle \\ &= U(R'R)[L_z(p)]|j\lambda\rangle \end{aligned}$$

即沿着 $R'R\hat{z}$ 方向的螺旋度态，称为螺旋度态的旋转不变性(λ 不变)

$$\text{两个态的定义有如下关系 : } |\vec{p}, j\lambda\rangle = \sum_m |\vec{p}, jm\rangle D_{m\lambda}(R_{\vec{p}})$$

两种相对论自旋态的性质

对于正则态，当粒子沿着动量反方向boost到质心时候，自旋指向z-轴，投影为 m ，即 $|j, m\rangle_{\hat{z}}$

而对于螺旋度态，当粒子沿着动量反方向boost到质心时候，自旋指向原来的 $\vec{p}$ -方向，投影为 m ，即 $|j, m\rangle_{\hat{p}}$

当沿着动量方向进一步boost时候，螺旋态性质不变，只是动量大小改变

$$\begin{aligned} U[L(\vec{p}')]|\vec{p}, j\lambda\rangle &= U[L(\vec{p}')]U[L(\vec{p})]U[R(\phi, \theta, 0)]|j\lambda\rangle \\ &= U[L(\vec{p}' + \vec{p})]U[R(\phi, \theta, 0)]|j\lambda\rangle \\ &= |\vec{p}' + \vec{p}, j\lambda\rangle \end{aligned}$$

0质量粒子无质心系，抽象的定义其螺旋度态为 $|\vec{p}, \pm j\rangle$

两粒子态/正则态

仅需定义在衰变粒子质心中末态两粒子态

两粒子态为单粒子态直乘，二粒子动量互补。

两粒子正则态：

$$|\phi\theta m_1 m_2\rangle = (U[L(\vec{p})] |s_1 m_1\rangle) \otimes (U[L(-\vec{p})] |s_2 m_2\rangle)$$

说明：这里的方向角 $\Omega \equiv \phi\theta$ 是使用1粒子来标记，称为参考粒子。

$$\begin{aligned} U[L(-\vec{p})] &= U[R(\phi_1 \theta_1 0)] L_{-z}(p) U^{-1}[R(\phi_1 \theta_1 0)] \text{ 由粒子1方向定义} \\ &= U[R(\pi + \phi_1, \pi - \theta_1 0)] L_z(p) U^{-1}[R(\pi + \phi_1, \pi - \theta_1 0)] \\ &= U[R(\phi_2, \theta_2 0)] L_z(p) U^{-1}[R(\phi_2, \theta_2 0)] \quad \text{由粒子2方向定义} \end{aligned}$$

利用角动量叠加性质构成具有确定总自旋角的态 $|sm_s\rangle$ ：

$$|\Omega sm_s\rangle = \sum_{m_1 m_2} (s_1 m_1 s_2 m_2 | sm_s) |\phi\theta m_1 m_2\rangle$$

$$U[R] |\Omega sm_s\rangle = \sum_{m'_s} D_{m'_s m_s}^s(R) |R\Omega sm'_s\rangle \text{ [spinfm1, 4.4]}$$

正则两粒子态

具有特定轨道角动量的正则两粒子(有心势薛定谔方程球面解)

$$|lmsm_s\rangle = \int d\Omega Y_m^l(\Omega) |\Omega sm_s\rangle \quad d\Omega \equiv \cos\theta d\phi$$

沿 Ω 方向的概率幅为球谐函数 $Y_m^l(\Omega)$

旋转变换：

$$\begin{aligned} U[R]|lmsm_s\rangle &= \int d\Omega Y_m^l(\Omega) U[R]|\Omega sm_s\rangle \\ &= \sum_{m'm'_s} D_{m'm}^l(R) D_{m'_sm_s}^l(R) |lm'sm'_s\rangle \end{aligned}$$

即系统自旋和轨道角动量同时按单粒子方式转动

进一步利用角动量叠加关系组成具有特定总角动量的两粒子态：

$$\begin{aligned} |JMls\rangle &= \sum_{mm_s} (lmsm_s|JM) |lmsm_s\rangle \\ &= \sum_{mm_sm_1m_2} (lmsm_s|JM) (s_1m_1s_2m_2|sm_s) \times \int d\Omega Y_m^l(\Omega) |\Omega m_1m_2\rangle \end{aligned}$$

旋转变换：

$$U[R]|JMls\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^S(R) |JM'ls\rangle \quad \text{满足isobar模型需要}$$

两粒子态/螺旋态

为单粒子螺旋度态直乘， spinfm1 定义为：

$$|\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle = U[R(\phi\theta 0)]\{(U[L_z(p)]|s_1\lambda_1\rangle)(U[L_{-z}(p)]|s_2-\lambda_2\rangle)\}$$

解释：粒子1和2分别向 $\pm z$ 方向boost，然后z-轴转到粒子1动量方向

直观来看粒子1和2在定两粒子螺旋度态的义中地位不等价

表示为对称性的形式：

$$|\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle = (-)^{s_2}(U[R(\phi\theta 0)]U[L_z(p)]|s_1\lambda_1\rangle)(U[R(\bar{\phi}\bar{\theta} 0)]U[L_z(p)]|s_2\lambda_2\rangle)$$

其中 $\bar{\phi} = \pi + \phi$ ， $\bar{\theta} = \pi - \theta$ 为2-粒子的动量方向

全局相因子 $(-)^{s_2}$ 不影响角分布结果。

证明见下页。

两粒子螺旋态对称形式

根据定义： $U[L(\vec{p})] \equiv U[R(\phi\theta 0)][L_z(p)]U^{-1}[R(\phi\theta 0)]$

得到 $U[L_{-z}(p)] \equiv U[L(-|p|\hat{z})] = U[R(\pi\pi 0)][L_z(p)]U^{-1}[R(\pi\pi 0)]$

说明：上式 $L_{-z}(p)$ 是沿 $-\hat{z}$ 方向大小为 $|p|$ 的boost，可以看做先把坐标系绕 x -轴转 π （此时 y 和 z 反向），做boost，再反向转回去

$$\begin{aligned} \text{进而 } U[R(\phi\theta 0)]U[L_{-z}(p)]|s_2 - \lambda_2\rangle \\ &= U[R(\phi\theta 0)]U[R(\pi\pi 0)][L_z(p)]U^{-1}[R(\pi\pi 0)]|s_2 - \lambda_2\rangle \\ &= e^{i\pi s_2}U[R(\phi\theta 0)]U[R(\pi\pi 0)][L_z(p)]|s_2 \lambda_2\rangle \quad (\text{a}) \\ &= e^{i\pi s_2}U[R(\bar{\phi}\bar{\theta} 0)][L_z(p)]|s_2 \lambda_2\rangle \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

(a)等式证明如下：

$$\begin{aligned} U^{-1}(R)U(R) &= 1 \Rightarrow \delta_{mn} = \sum_k \langle m|U^{-1}(R)|k\rangle \langle k|U(R)|n\rangle \\ \Rightarrow \delta_{mn} &= \sum_k X_{mk}(U^{-1})D_{kn}^j(\Omega) \text{ , 由 } D \text{ 的正交性得 } \langle m|U^{-1}(R)|k\rangle = D_{mk}^{j*}(\Omega) \\ \text{又利用 } D_{m',m}^j(\pi\pi 0) &= (-)^j \delta_{m',-m} \text{ 得到} \\ U^{-1}[R(\pi\pi 0)]|\lambda_2\rangle &= \sum_{\lambda'_2} |\lambda'_2\rangle \langle \lambda'_2|U^{-1}[R(\pi\pi 0)]|\lambda_2\rangle = e^{i\pi s_2} |-\lambda_2\rangle \end{aligned}$$

(b)式：由于 $U[R(\pi\pi 0)]\hat{z} = -\hat{z}$ ，所以 $R(\phi\theta 0)\hat{z} = \hat{p}_1$ ，而 $R(\phi\theta 0)R(\pi\pi 0)\hat{z} = -\hat{p}_1 = \hat{p}_2$ ，因此 $U[R(\phi\theta 0)]U[R(\pi\pi 0)] = U[R(\bar{\phi}\bar{\theta} 0)]$

螺旋度两粒子态构成特定角动量

由两粒子螺旋度态构造具有特定角动量的态

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle \propto \int dR D_{M\mu}^{J*}(R) U[R] |00\lambda_1\lambda_2\rangle \quad (a)$$

满足空间转动变换关系

$$dR \equiv d\phi d\cos\theta d\psi, \mu \text{待定}$$

$$U[R'] |JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^J(R') |JM'\lambda_1\lambda_2\rangle$$

spinfm1 (4.13)

(a) 进一步化简为

$$\begin{aligned} |JM\lambda_1\lambda_2\rangle &\propto \int d\phi d\cos\theta d\psi D_{M\mu}^{J*}(R) U[R(\phi\theta 0)] U[(00\psi)] (U[L_z(p)] |\lambda_1\rangle U[L_{-z}(p)] |-\lambda_2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d\phi d\cos\theta d\psi D_{M\mu}^{J*}(\phi\theta 0) e^{+i\mu\psi} U[R(\phi\theta 0)] e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)\psi} |00\lambda_1\lambda_2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d\Omega D_{M\mu}^{J*}(\phi\theta 0) U[R(\Omega)] |00\lambda_1\lambda_2\rangle, \mu = \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d\Omega D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\phi\theta 0) |\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle, \mu = \lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned}$$

解释：沿各个方向的两粒子螺旋度态以D-函数作为系数线性叠加构成具有特定角动量的态。两粒子系统总自旋和轨道角动量不确定。

两粒子螺旋度态与正则态的线性叠加关系

$$\begin{aligned} |\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle &= U[R(\Omega)]\{U[L_z(p)]|s_1\lambda_1\rangle U[L_{-z}(p)]|s_2-\lambda_2\rangle\} \\ &= U[L(\vec{p})]U[R(\Omega)]|s_1\lambda_1\rangle \otimes U[L(-\vec{p})]U[R(\Omega)]|s_2-\lambda_2\rangle \\ &= \sum_{m_1 m_2} D_{m_1\lambda_1}^{s_1}(\Omega) D_{m_2-\lambda_2}^{s_2}(\Omega) |\phi\theta m_1 m_2\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |JM\lambda_1\lambda_2\rangle &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sum_{m_1 m_2} \int d\Omega D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\Omega) D_{m_1\lambda_1}^{s_1}(\Omega) D_{m_2-\lambda_2}^{s_2}(\Omega) |\Omega m_1 m_2\rangle \\ &= \dots \\ &= \sum_{ls} \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} (l0s\lambda|J\lambda)(s_1\lambda_1 s_2-\lambda_2|s\lambda) |JMls\rangle \end{aligned}$$

$$|JMls\rangle = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} (l0s\lambda|J\lambda)(s_1\lambda_1 s_2-\lambda_2|s\lambda) |JM\lambda_1\lambda_2\rangle$$

螺旋度系统好量子数 $JM\lambda_1\lambda_2$ ，正则系统好量子数 $JMls$

正交性条件

$$\langle \Omega' \lambda'_1 \lambda'_2 | \Omega \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \delta^2(\Omega' - \Omega) \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}$$

对正则态和螺旋度两粒子态都成立

$$\langle J' M' \lambda'_1 \lambda'_2 | J M \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}$$

$$\langle \phi \theta \lambda'_1 \lambda'_2 | J M \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{M \lambda_1 - \lambda_2}^{J*} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2}$$

$$\langle J' M' l' s' | J M l s \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{l'l} \delta_{s's}$$

衰变角分布

考虑 $P \rightarrow 12$ 两粒子衰变，根据衰变率定义

$$\mathcal{M}(O_1, O_2 | O_P)$$

其中初末态处于特定的量子状态 $O_i \equiv (J_i, J_{zi}; m_i, \vec{p}_i)$ ，即分波。

对于初态 P ，取其质心系，则 $\vec{p}_P = 0$ 。其自旋定义在质心系，其取向和数值由 P 的产生机制决定，记坐标系为 C_P ，分量为 M

对于末态 1,2，动量定义在 P 的质心系为 $\vec{p}_1 = (p, \Omega) = -\vec{p}_2$ 。其自旋选取螺旋度两粒子态，一般情况下是螺旋度两粒子态求和。

则： $\mathcal{M}(O_1, O_2 | O_P) = \langle \phi \theta \lambda_1 \lambda_2 | H | J M \rangle$ 插入完备集

$$= \sum_{J' M' \lambda'_1 \lambda'_2} \langle \phi \theta \lambda_1 \lambda_2 | J' M' \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle \langle J' M' \lambda'_1 \lambda'_2 | H | J M \rangle$$

$$= D_{M' \lambda'_1 - \lambda'_2}^{J'^*}(\phi \theta 0) \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} \delta_{JJ'} \delta_{M'M} H_{\lambda'_1 \lambda'_2}$$

$$= D_{M \lambda_1 - \lambda_2}^{J^*}(\phi \theta 0) H_{\lambda_1 \lambda_2}$$

角动量守恒和对称性
使得振幅与 M 无关

讨论1

自旋为 M 的态衰变到质心系内动量沿 Ω 方向的螺旋度态的振幅为

$$\mathcal{M}(O_1, O_2 | O_P) = D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\phi\theta 0) H_{\lambda_1\lambda_2}$$

$H_{\lambda_1\lambda_2} \equiv \langle JM\lambda_1\lambda_2 | H | JM \rangle$ 称为螺旋度耦合系数(Helicity coupling)。
 D 函数上标为衰变粒子的自旋。

末态粒子1(2)是处于质心系 $\Omega(\bar{\Omega})$ 方向的螺旋度态 $\lambda_1(\lambda_2)$ 。

螺旋度耦合系数替换为 ls 耦合系数 a_{ls} :

$$\begin{aligned} H_{\lambda_1\lambda_2} &\equiv \langle JM\lambda_1\lambda_2 | H | JM \rangle \\ &= \sum_{ls} \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} (l0s\lambda | J\lambda) (s_1\lambda_1s_2 - \lambda_2 | s\lambda) \langle JMls | H | JM \rangle \\ &= \sum_{ls} \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} (l0s\lambda | J\lambda) (s_1\lambda_1s_2 - \lambda_2 | s\lambda) a_{ls} \end{aligned}$$

讨论2

对于级联衰变 $P \rightarrow 12$, $1 \rightarrow AB$, $2 \rightarrow CD$

$P \rightarrow 12$ 衰变, 末态粒子1(2)处于 P 质心系 $\Omega(\bar{\Omega})$ 方向的螺旋度态 $\lambda_1(\lambda_2)$,
当boost回到粒子1(2) 质心系时, 粒子1(2)处于自旋为 $\lambda_1(\lambda_2)$ 的状态。

1和2粒子的质心系自旋态分别定义在坐标系 $R(\phi\theta 0)C_P$ 和 $R(\bar{\phi}\bar{\theta} 0)C_P$ 中。

因此 $1 \rightarrow AB$, $2 \rightarrow CD$ 与 $P \rightarrow 12$ 衰变完全等价, 对应关系为:

衰变	$P \rightarrow 12$	$1 \rightarrow AB$	$2 \rightarrow CD$
初态坐标系	C_P	$C_1 = R\left(\Omega_1^{\{P\}}\right) C_P$	$C_2 = R\left(\Omega_2^{\{P\}}\right) C_P$
参考系	P 质心系	P 质心系 $\rightarrow$ 1 质心系	P 质心系 $\rightarrow$ 2 质心系
末态动量	$p_{12}^{\{P\}}, \Omega_1, \Omega_2$	$p_{AB}^{\{1\}}, \Omega_A^{\{1\}}, \Omega_B^{\{1\}}$	$p_{CD}^{\{2\}}, \Omega_C^{\{2\}}, \Omega_D^{\{2\}}$
末态螺旋度	$\lambda_1^{\{P\}}, \lambda_2^{\{P\}}$	$\lambda_A^{\{1\}}, \lambda_B^{\{1\}}$	$\lambda_C^{\{2\}}, \lambda_D^{\{2\}}$
耦合系数	$H_{\lambda_1\lambda_2}$	$H_{\lambda_A\lambda_B}$	$H_{\lambda_C\lambda_D}$

总的振幅为: $D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\Omega_1)H_{\lambda_1\lambda_2}D_{\lambda_1\lambda_A-\lambda_B}^{J*}(\Omega_A)H_{\lambda_A\lambda_B}D_{\lambda_2\lambda_C-\lambda_D}^{J*}(\Omega_B)H_{\lambda_C\lambda_D}$

更多级衰变可以按照这种方式继续写

振幅举例： $\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-$

- 列出各粒子总自旋： $1/2 \rightarrow 1/2\ 0$
- 选取坐标系 C_0 ，这里我们选 Λ^0 自旋方向为 z -轴， y -轴任取
- 选择初、末态自旋(螺旋度)本征态分量， $m = \pm 1/2$ ， $\lambda_1 = \pm 1/2$ ， $\lambda_2 = 0$ ，计算振幅

$$\mathcal{M} = D_{m\lambda_1}^{1/2*}(\phi, \theta, 0)$$

- 计算概率密度。对末态螺旋求和，并乘上相空间。如果初态各自旋概率一样则求其平均。此处二体相空间为 $|p|/M_{\Lambda^0} d\Omega$

$$d\Gamma \propto \sum_{\lambda_1} \left| D_{m\lambda_1}^{1/2*}(\phi, \theta, 0) H_{\lambda_1} \right|^2 \frac{|p|}{M_{\Lambda^0}} d\Omega$$

$$\propto \sum_{\lambda_1} \left| D_{m\lambda_1}^{1/2*}(\phi, \theta, 0) H_{\lambda_1} \right|^2 d\Omega$$

$$= (|H_+|^2 |d_{m+}(\theta)|^2 + |H_-|^2 |d_{m-}(\theta)|^2) d\Omega$$

$$= (1 + 2m\alpha) \cos \theta \, d \cos \theta \, d\phi \quad \text{定义 } |H_{\pm}|^2 = (1 \pm \alpha)$$

测量角分布抽取 α 参数

如果初态 Λ^0 上下分量相等则，对 m 求平均，无角分布

振幅举例：氢原子模型

将氢原子模型想象成总自旋为 $J = L$ 的氢原子系统衰变到自旋为0的两粒子末态： $H^1 \rightarrow p^0 e^0$ 。角分布表示末态粒子的出射方向

- 列出各粒子总自旋： $L \rightarrow 0\ 0$
- 选取坐标系 C_0 ，在 C_0 中氢原子自旋在 z_0 -轴投影为 M
- 计算振幅概率密度

$$\mathcal{M}(\theta, \phi) \propto D_{M0}^{L*}(\phi, \theta, 0) H_{00}^L \propto Y_L^M(\theta, \phi) H_{00}^L$$

耦合系数不依赖于 M ，但不同的 L ， H_{00}^L 一般不相等。

$$\text{关系：} Y_L^M(\theta, \phi) = \sqrt{(2L+1)/4\pi} d_{M0}^L(\theta) e^{iM\phi} = D_{M0}^{L*}(\theta, \phi, 0)$$

(D -函数性质和关系参考spinfm1.pdf附录和PDG CG系数)

空间反演P宇称对称性，单粒子态

对称性使得不同(ls)或者($\lambda_1\lambda_2$)分量的耦合系数相联系。

单粒子态：

1. 静止系，内禀宇称 $\eta \pm 1$: $\mathcal{P}|jm\rangle = \eta|jm\rangle$

2. 运动系

转动与空间反演对易： $[\mathcal{P}, U[R]] = 0$

Boost与在空间反演下的变换为 $\mathcal{P}L(\vec{p})\mathcal{P}^\dagger = L(-\vec{p})$

从而得到：

正则态： $\mathcal{P}|\vec{p}, jm\rangle = \mathcal{P}U[L(\vec{p})]\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}|jm\rangle = \eta|-\vec{p}, jm\rangle$

螺旋度： $\mathcal{P}|\vec{p}, j\lambda\rangle = \mathcal{P}U[R(\Omega)]U[L_z(p)]|j\lambda\rangle$

$$= \eta U[R(\Omega)]\mathcal{P}U[L_z(p)]\mathcal{P}^\dagger|j\lambda\rangle$$

$$= \eta U[R(\Omega)]U[L_{-z}(p)]|j\lambda\rangle$$

$$= \eta e^{i\pi s} U[R(\bar{\phi}\bar{\theta}0)]U[L_z(p)]|j-\lambda\rangle \quad \text{利用p30结果}$$

$$= \eta e^{i\pi s} |p\bar{\phi}\bar{\theta}j-\lambda\rangle \neq \eta |p\phi\theta j-\lambda\rangle$$

空间反演P宇称对称性，两粒子正则态

两粒子态宇称对称性，由单粒子态直乘定义来求得。

正则态：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}|\phi\theta m_1 m_2\rangle &= \mathcal{P}(|\vec{p}m_1\rangle|-\vec{p}m_2\rangle) = \eta_1\eta_2|-\vec{p}m_1\rangle|\vec{p}m_2\rangle \\ &= \eta_1\eta_2|\vec{p}'m_1\rangle|-\vec{p}'m_2\rangle\end{aligned}\quad \vec{p}' = -\vec{p} = \bar{\Omega}$$

对于具有特定 Jls 的二粒子态，根据定义得：

$$\begin{aligned}|JMls\rangle &= \sum_{mm_s m_1 m_2} (lmsm_s|JM)(s_1 m_1 s_2 m_2|sm_s) \\ &\quad \times \int d\Omega Y_m^l(\Omega) |\Omega m_1 m_2\rangle\end{aligned}$$

$\mathcal{P}|JMls\rangle = \eta_1\eta_2(-)^l|JMls\rangle$ ，即对称性由轨道角动量决定

如果衰变满足 $\mathcal{P}$ 反演对称性，则对于 ls 耦合系数：

$$a_{ls} \equiv \langle JMls|H|JM\rangle = \eta_0\eta_1\eta_2(-)^l a_{ls}$$

对轨道角动量有选择。(举例： $\Lambda^0 \rightarrow p\pi$ 的s-波和p-波)

空间反演P宇称对称性，两粒子螺旋度态

螺旋度量子态空间反演对称性：

$$\begin{aligned}\text{由于 } \mathcal{P}|\vec{p}, j\lambda\rangle &= \eta U[R(\Omega)]U[L_{-z}(p)]|j\lambda\rangle \\ &= \eta e^{i\pi s} U[R(\bar{\Omega})]U[L_z(p)]|j-\lambda\rangle \equiv \eta e^{i\pi s} |p\bar{\Omega}j\lambda\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{则 } \mathcal{P}U[R(\Omega)]U[L_{-z}(p)]|j-\lambda\rangle &= e^{i\pi s_2} \mathcal{P}U[R(\bar{\Omega})]U[L_z(p)]|j\lambda\rangle \\ &= e^{i\pi s} \mathcal{P}|p\bar{\Omega}j\lambda\rangle = \eta e^{i\pi s} U[R(\bar{\Omega})]U[L_{-z}(p)]|j\lambda\rangle \quad (\text{多次套用上式})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{从而 } \mathcal{P}|\vec{p}, j\lambda\rangle &= \mathcal{P}U[R(\Omega)]\{(U[L_z(p)]|s_1\lambda_1\rangle)(U[L_{-z}(p)]|s_2-\lambda_2\rangle)\} \\ &= \eta_1 e^{i\pi s_1} \eta_2 e^{i\pi s_2} U[R(\bar{\Omega})]\{(U[L_z(p)]|s_1-\lambda_1\rangle)(U[L_{-z}(p)]|s_2\lambda_2\rangle)\} \\ &= \eta_1 e^{i\pi s_1} \eta_2 e^{i\pi s_2} |p\bar{\Omega}-\lambda_1-\lambda_2\rangle\end{aligned}$$

空间反演P宇称对称性，两粒子螺旋度态

对于具有特定 $J\lambda_1\lambda_2$ 的二粒子态，根据定义得：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}|JM\lambda_1\lambda_2\rangle &= \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d\Omega D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\phi\theta 0) \mathcal{P}|\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle \\&= \eta_1 e^{i\pi s_1} \eta_2 e^{i\pi s_2} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d\Omega D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\phi\theta 0) |\bar{\Omega} - \lambda_1 - \lambda_2\rangle \\&= \eta_1 e^{i\pi s_1} \eta_2 e^{i\pi s_2} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d\Omega e^{i\pi J} D_{M\lambda_2-\lambda_1}^{J*}(\bar{\Omega}) |\bar{\Omega} - \lambda_1 - \lambda_2\rangle \\&= \eta_1 e^{i\pi s_1} \eta_2 e^{i\pi s_2} e^{i\pi J} |JM - \lambda_1 - \lambda_2\rangle \\&= \eta_1 \eta_2 (-)^{J-s_1-s_2} |JM - \lambda_1 - \lambda_2\rangle\end{aligned}$$

$J - s_1 - s_2$ 必是整数

如果衰变满足 $\mathcal{P}$ 对称性，则对于螺旋度耦合系数：

$$H_{\lambda_1\lambda_2} \equiv \langle JM\lambda_1\lambda_2 | H | JM \rangle = \eta_0 \eta_1 \eta_2 (-)^{J-s_1-s_2} H_{-\lambda_1-\lambda_2}$$

另外一种视角

质心坐标系 C_0 中自旋态为 $|JM\rangle_0$ 的粒子衰变到 $|p\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle$ 螺旋度态。如果 $\Omega \equiv (\theta, \phi) = 0$, 即末态粒子运动方向与初态粒子自旋平行, 则角动量守恒要求 $\langle 00\lambda_1\lambda_2|\mathcal{M}|JM\rangle \propto \delta_{M\lambda} H_{\lambda_1\lambda_2}$ 。

初态和末态自旋态在同一个坐标系定义。

如果初态粒子自旋 $|JM'\rangle_0$ 与末态粒子运动方向 Ω 不平行, 则先把 $|JM'\rangle_0$ 转动到 Ω 方向, C_0 转到坐标系 C_1 。有如下关系:

$$|JM'\rangle_0 = \sum_M D_{M'M}^{J*}(\Omega) |JM\rangle_1 \text{ 和 } {}_1\langle 00\lambda_1\lambda_2|\mathcal{M}|JM\rangle_1 = \delta_{M\lambda} H_{\lambda_1\lambda_2}$$

$$\text{则: } {}_1\langle 00\lambda_1\lambda_2|\mathcal{M}|JM'\rangle_0 = D_{M'\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\phi\theta 0) H_{\lambda_1\lambda_2}$$

汇总

对于级联衰变 $P \rightarrow 12$, $1 \rightarrow AB$, $2 \rightarrow CD \dots$, 角分布振幅为

$$T(\Omega, s\lambda) = D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\Omega_1)H_{\lambda_1\lambda_2}D_{\lambda_1\lambda_A-\lambda_B}^{J*}(\Omega_A)H_{\lambda_A\lambda_B}D_{\lambda_2\lambda_C-\lambda_D}^{J*}(\Omega_B)H_{\lambda_C\lambda_D} \dots$$

考虑质量项后总概率密度函数为

$$f(m, \Omega | R s \lambda) d\Phi_n = \sum_{\lambda_P \lambda_f} \left| \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{R_1 R_2} R'_1(m) R'_2 \dots T(\Omega, s\lambda) \right|^2 d\Phi_n$$

对初态和末态自旋、动量在模方外部求和(非相干叠加)

对中间态自旋和共振态成分在模方内部求和(相干叠加)

所有角度按照螺旋度振幅规则，按顺序boost到各级质心系计算。

初始坐标系的选择

前述坐标系问题：

对于 $P(m_P) \rightarrow 1(\lambda_1)2(\lambda_2) \dots$ 衰变，选定初始坐标系 C_P 后，后续坐标系和参考系根据螺旋度规则完全确定。通常把 z -轴选在初始粒子(可能的)极化方向。

1. 如果初始粒子无自旋 $s_P = 0$ ，则 C_P 任选，分布形式固定
2. 如果初始粒子有自旋但无极化，则 C_P 任选。

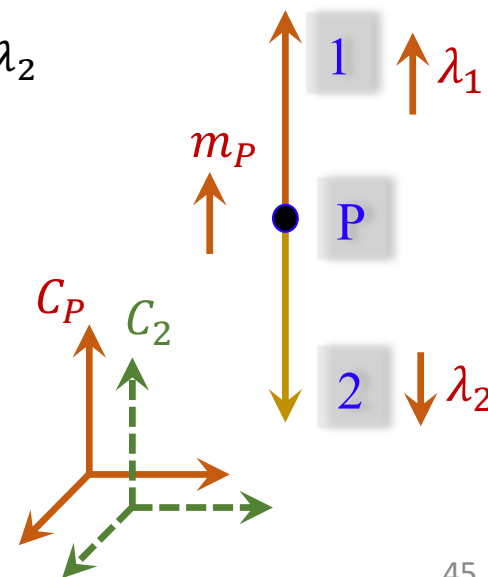
对这两种情况，可以按方便选为粒子1的运动方向为 C_P z -轴。

$$\text{此时：} \mathcal{M}(P \rightarrow 12) = D_{m_P \lambda_1 - \lambda_2}^{S_P*}(0) H_{\lambda_1 \lambda_2} = \delta_{m_P, \lambda_1 - \lambda_2} H_{\lambda_1 \lambda_2}$$

在末态粒子运动方向角动量守恒

此时对于 $P \rightarrow 12$ 衰变，末态是均匀角分布：

$$\sum_{\lambda_P \lambda_1 \lambda_2} |\mathcal{M}|^2 = \text{常数}$$



无极化量级衰变

对于 $P(m_P) \rightarrow 1(\lambda_1)2(\lambda_2)$ ， $1 \rightarrow A(\lambda_A)B(\lambda_B)$ 级联衰变。如果 P 粒子无极化，用 P 质心系内动量 $\vec{p}_1, \vec{p}_A, \vec{p}_B$ 确定 C_P 坐标系为

- $z_P = z_1$ 轴: $\vec{p}_1$
- $y_P = y_1$ 轴: $\vec{p}_B \times \vec{p}_A$
- $x_P = x_1$ 轴: $\vec{y}_P \times \vec{z}_P$

$P(\lambda_P) \rightarrow 1(\lambda_1)2(\lambda_2)$ 衰变矩阵元: $H_{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\lambda_P\lambda_1-\lambda_2}$

对于 $1(\lambda_1) \rightarrow A(\lambda_A)B(\lambda_B)$ 衰变，由于初始 C_P 坐标系的选取，只需要绕 y_P 转 θ 角可实现 C_P 与 1 质心系中粒子 A 动量方向重合，即 $\Omega_A^{\{1\}} = (0, \theta)$

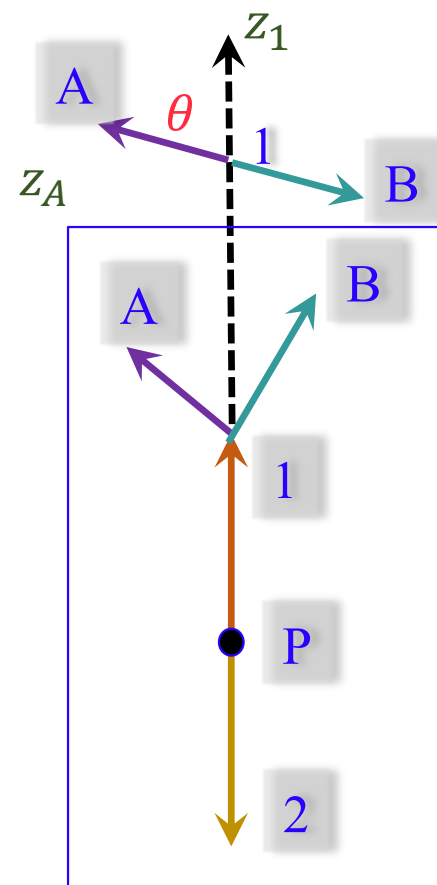
衰变矩阵元: $H_{\lambda_A\lambda_B}D_{\lambda_1\lambda_A-\lambda_B}^{*j}(0, \theta, 0)$

总角分布为：

$$\sum_{\lambda_P\lambda_2\lambda_C\lambda_D} \left| \sum_{\lambda_1} H_{\lambda_1\lambda_2} \delta_{\lambda_P\lambda_1-\lambda_2} H_{\lambda_A\lambda_B} D_{\lambda_1\lambda_A-\lambda_B}^{j*}(0, \theta, 0) \right|^2$$

$$= \sum_{\lambda_P\lambda_2\lambda_C\lambda_D} \left| H_{\lambda_P+\lambda_2} H_{\lambda_A\lambda_B} d_{\lambda_P+\lambda_2\lambda_A-\lambda_B}^j(\theta) \right|^2$$

没有 ϕ 角分布(坐标系 ?)



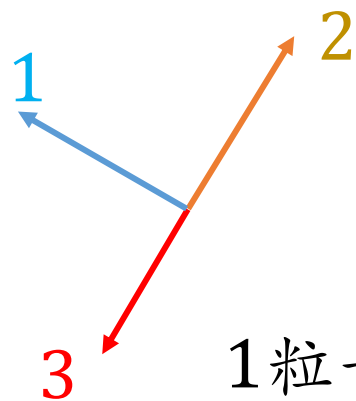
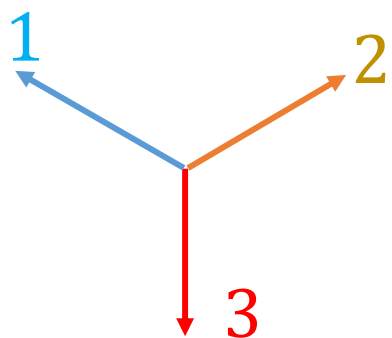
其他值得研究的问题

- 多衰变链末态螺旋度不重合问题

arXiv:2302.13862

$P \rightarrow 123$ 衰变三个不同的链，定义螺旋度的参考系不同，必须重新对齐

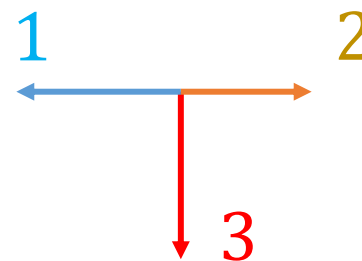
(选取某个链作为基准，其他chain增加一次转动)



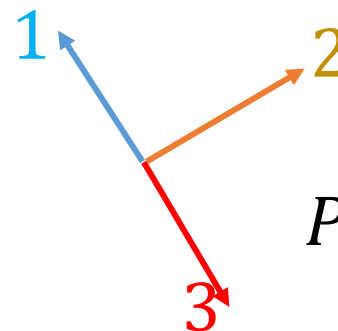
$P \rightarrow R_{23}1$

1粒子螺旋度方向 $\vec{p}_1^{\{P\}}$

$P \rightarrow R_{12}3$



1粒子螺旋度方向 $\vec{p}_1^{\{12\}}$



$P \rightarrow R_{13}2$

1粒子螺旋度方向 $\vec{p}_1^{\{13\}}$

其他值得研究的问题

在求子粒子坐标系时，仅根据子粒子动量方向(Ω)转动，少一次欧拉转动。对于包含三次转动的情况：

两粒子螺旋度态重新定义为：

$$|\phi\theta\psi\lambda_1\lambda_2\rangle = U[R(\phi\theta\psi)]\{(U[L_z(p)]|s_1\lambda_1\rangle)(U[L_{-z}(p)]|s_2-\lambda_2\rangle)\}$$

绕z-轴的转动与沿z-轴的boost对易， $U[R_z(\psi)]U[L_z(p)] = U[L_z(p)]U[R_z(\psi)]$

$$\begin{aligned} &= e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)\psi} U[R(\phi\theta 0)]\{(U[L_z(p)]|s_1\lambda_1\rangle)(U[L_{-z}(p)]|s_2-\lambda_2\rangle)\} \\ &= e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)\psi} |\phi\theta 0\lambda_1\lambda_2\rangle \end{aligned}$$

角分布振幅改写为：

$$\begin{aligned} \langle\phi\theta\psi\lambda_1\lambda_2|H|JM\rangle &= e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)\psi} \langle\phi\theta\lambda_1\lambda_2|H|JM\rangle \\ &= e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)\psi} D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\phi\theta 0) H_{\lambda_1\lambda_2} \\ &= D_{M\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\phi\theta 0) H'_{\lambda_1\lambda_2} \end{aligned}$$

等价于重新定义螺旋度耦合系数，角分布形式不变

其他值得研究的问题

如果对某中间态粒子的所有衰变末态自旋和角度积分，等价于把该中间态粒子当成末态粒子（不再考虑其衰变）。

密度矩阵

描述粒子极化的方法： ρ_{ij} ，自旋处于 ij 的几率幅

对于纯态 $|\psi\rangle = \sum_i a_i^\psi |i\rangle$ ($|i\rangle$ 是本征态)，密度矩阵为 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

一般情况：密度矩阵 $\rho = \sum_\psi p_\psi |\psi\rangle\langle\psi|$ ，由纯态叠加组成。要求 $\rho = \rho^\dagger$ ，即 $p_i = p_i^*$ 。 $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$ ， $\rho = \sum_{ij} |i\rangle\rho_{ij}\langle j|$ ， $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$

已知粒子 P 的密度矩阵 ρ_{ij} ，则 $P \rightarrow 12$ 衰变角分布概率密度为：

$$T(\Omega) = \sum_{ij} \rho_{ij} D_{i\lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\Omega) H_{\lambda_1\lambda_2} D_{j\lambda_1-\lambda_2}^J(\Omega) H_{\lambda_1\lambda_2}^*$$

对于 $\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^-$, $\Lambda_c^+ \rightarrow xy$ 衰变，初态 Λ_b^0 无极化，则初始坐标系选 Λ_c^+ 动量方向，角分布概率密度

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \sum_{\lambda_b} \left| \sum_{\lambda_c} H_{\lambda_c} D_{\lambda_b\lambda_c}^{Jb*}(\Omega_c) H_{\lambda_x\lambda_y} D_{\lambda_c\lambda_x-\lambda_y}^{Jc*}(\Omega_x) \dots \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda_b} \sum_{\lambda_c\lambda'_c} H_{\lambda_c} D_{\lambda_b\lambda_c}^{Jb*}(\Omega_c) D_{\lambda_c\lambda_x-\lambda_y}^{Jc*}(\Omega_x) H_{\lambda_x\lambda_y} H_{\lambda'_c}^* D_{\lambda_b\lambda'_c}^{Jb}(\Omega_c) D_{\lambda'_c\lambda_x-\lambda_y}^{Jc}(\Omega_x) H_{\lambda_x\lambda_y}^* \\ &= \sum_{\lambda_c\lambda'_c} \left(\sum_{\lambda_b} H_{\lambda_c} D_{\lambda_b\lambda_c}^{Jb*}(\Omega_c) H_{\lambda'_c}^* D_{\lambda_b\lambda'_c}^{Jb}(\Omega_c) \right) D_{\lambda_c\lambda_x-\lambda_y}^{Jc*}(\Omega_x) H_{\lambda_x\lambda_y} D_{\lambda'_c\lambda_x-\lambda_y}^{Jc}(\Omega_x) H_{\lambda_x\lambda_y}^* \end{aligned}$$

即密度矩阵 $\rho_{\lambda_c\lambda'_c}$ ，完全由 Λ_c^+ 产生机制决定

密度矩阵续

$\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^-$ 衰变产生的 Λ_c^+ 密度矩阵为：

$$\begin{aligned}\rho_{\lambda_c \lambda'_c} &= \sum_{\lambda_b} H_{\lambda_c} D_{\lambda_b \lambda_c}^{J_b^*}(\Omega_c) H_{\lambda'_c}^* D_{\lambda_b \lambda'_c}^{J_b}(\Omega_c) \\ &= H_{\lambda_c} H_{\lambda'_c}^* \sum_{\lambda_b} D_{\lambda_b \lambda_c}^{J_b^*}(\Omega_c) D_{\lambda_b \lambda'_c}^{J_b}(\Omega_c) \\ &= H_{\lambda_c} H_{\lambda'_c}^* \delta_{\lambda_c \lambda'_c} = |H_{\lambda_c}|^2\end{aligned}\quad (D \text{ 函数正交性})$$

也就是： $\rho^{\Lambda_c^+} = \begin{pmatrix} |H_+|^2 & 0 \\ 0 & |H_-|^2 \end{pmatrix}$ 当 $|H_+|^2 = |H_-|^2$ 无极化

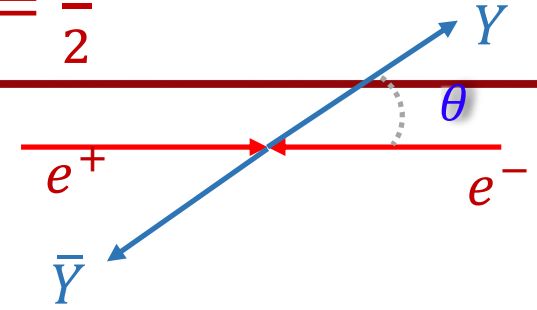
即如果母粒子无极化，其衰变末态只能是纵向极化(极化沿着动量方向)或者无极化，无横向极化。

自旋为1/2的密度矩阵统一写为 $\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{a} \cdot \sigma)$ σ 为泡利矩阵

$$\text{例：} \rho^{\Lambda_c^+} = \frac{1}{2}[(|H_+|^2 + |H_-|^2)I + (|H_+|^2 - |H_-|^2)\sigma_3]$$

若 P 宇称守恒，则 $|H_+|^2 = |H_-|^2$ ，得到 $a_z = 0$ ，无纵向极化。

应用举例： $e^+e^- \rightarrow \psi(\gamma^*) \rightarrow Y\bar{Y}$ $J_Y = \frac{1}{2}$



定义 e^+e^- 束流方向为z-轴，y-轴任取

对于 $e^+e^- \rightarrow \psi$ 过程，其矩阵元为

$$\begin{aligned} A^{e^+e^- \rightarrow \psi}(\Omega = 0) &= A^{\psi \rightarrow e^+e^-*}(\Omega = 0) \\ &= H_{\lambda_{e^+}\lambda_{e^-}}^* D_{m_\psi \lambda_{e^+} - \lambda_{e^-}}^1(\Omega = 0) = H_{\lambda_{e^+}\lambda_{e^-}}^* \delta_{m_\psi, \Delta\lambda_e} \end{aligned}$$

对于 $e^+e^- \rightarrow \psi$ 过程，其矩阵元为 $A^{\psi \rightarrow Y\bar{Y}} = H_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}} D_{m_\psi \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^{1*}(\theta, \phi)$

角分布概率密度($Y\bar{Y}$ 继续衰变时)为：

$$\begin{aligned} T(\Omega) &= \sum_{\lambda_{e^+}\lambda_{e^-}\lambda_f} \left| \sum_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda_{e^+}\lambda_{e^-}}^* \delta_{m_\psi, \Delta\lambda_e} H_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}} D_{m_\psi \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^{1*}(\theta, \phi) \dots \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda_{e^+}\lambda_{e^-}\lambda_f} \left| H_{\lambda_{e^+}\lambda_{e^-}}^* \right|^2 \left| \sum_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}} \dots \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}\lambda'_Y\lambda'_{\bar{Y}}} \left(\sum_{\lambda_{e^+}\lambda_{e^-}} H_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda'_Y\lambda'_{\bar{Y}}}^* D_{\Delta\lambda_e \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^{1*}(\Omega) D_{\Delta\lambda_e \lambda'_Y - \lambda'_{\bar{Y}}}^1(\Omega) \right) \dots \\ &= \sum_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}\lambda'_Y\lambda'_{\bar{Y}}} \left(\sum_{\Delta\lambda_e} H_{\lambda_Y\lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda'_Y\lambda'_{\bar{Y}}}^* d_{\Delta\lambda_e \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) d_{\Delta\lambda_e \lambda'_Y - \lambda'_{\bar{Y}}}^1(\theta) \right) \dots \end{aligned}$$

密度矩阵

$$\rho_{\lambda_Y \lambda_{\bar{Y}} \lambda'_Y \lambda'_{\bar{Y}}} = \sum_{\Delta \lambda_e} H_{\lambda_Y \lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda'_Y \lambda'_{\bar{Y}}}^* d_{\Delta \lambda_e \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) d_{\Delta \lambda_e \lambda'_Y - \lambda'_{\bar{Y}}}^1(\theta)$$

定义：

$$\rho_{\lambda_Y \lambda_{Y'}} = \sum_{\Delta \lambda_e \lambda_{\bar{Y}} \lambda'_{\bar{Y}}} H_{\lambda_Y \lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda'_Y \lambda'_{\bar{Y}}}^* d_{\Delta \lambda_e \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) d_{\Delta \lambda_e \lambda'_Y - \lambda'_{\bar{Y}}}^1(\theta) \delta_{\lambda_{\bar{Y}} \lambda'_{\bar{Y}}}$$

P 宇称守恒要求：

$$\begin{aligned} \rho_{-\lambda_Y - \lambda_{Y'}} &= \sum_{\Delta \lambda_e \lambda_{\bar{Y}} \lambda'_{\bar{Y}}} H_{-\lambda_Y + \lambda_{\bar{Y}}} H_{-\lambda'_Y \lambda'_{\bar{Y}}}^* d_{\Delta \lambda_e - \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) d_{\Delta \lambda_e - \lambda'_Y - \lambda'_{\bar{Y}}}^1(\theta) \\ &= \sum_{\Delta \lambda_e \lambda_{\bar{Y}}} H_{-\lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}} H_{-\lambda'_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^* d_{-\Delta \lambda_e - \lambda_Y + \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) d_{-\Delta \lambda_e - \lambda'_Y + \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) \\ &= \sum_{\Delta \lambda_e \lambda_{\bar{Y}}} (-)^{\Delta \lambda_e - (\lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}})} (-)^{-\Delta \lambda_e + (\lambda'_Y - \lambda_{\bar{Y}})} H_{\lambda_Y \lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda'_Y \lambda_{\bar{Y}}}^* d_{\Delta \lambda_e \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) d_{\Delta \lambda_e \lambda'_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) \\ &= \sum_{\Delta \lambda_e \lambda_{\bar{Y}}} (-)^{\lambda_Y - \lambda'_Y} H_{\lambda_Y \lambda_{\bar{Y}}} H_{\lambda'_Y \lambda_{\bar{Y}}}^* d_{\Delta \lambda_e \lambda_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) d_{\Delta \lambda_e \lambda'_Y - \lambda_{\bar{Y}}}^1(\theta) \\ &= (-)^{\lambda_Y - \lambda'_Y} \rho_{\lambda_Y \lambda_{Y'}} \end{aligned}$$

得到： $\rho_{+-} = -\rho_{-+}$ ， $\rho_{++} = \rho_{--}$

即 $a_y \neq 0, a_x = a_z = 0$ $\rho^Y = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ -\rho_{+-} & \rho_{++} \end{pmatrix}$

对于 $Y = \mu^+$ 情况

$$T(\Omega) \propto \sum_{\lambda_e + \lambda_{e-} = \lambda_{\mu} + \lambda_{\mu-}} \left| H_{\lambda_e + \lambda_{e-}}^* \right|^2 \left| H_{\lambda_{\mu} + \lambda_{\mu-}} D_{\Delta\lambda_e \Delta\lambda_{\mu}}^{1*}(\theta, \phi) \right|^2$$

$$= \sum_{\lambda_e + \lambda_{e-} = \lambda_{\mu} + \lambda_{\mu-}} \left| H_{\lambda_e + \lambda_{e-}}^* \right|^2 \left| H_{\lambda_{\mu} + \lambda_{\mu-}} \right|^2 \left| D_{\Delta\lambda_e \Delta\lambda_{\mu}}^{1*}(\theta, \phi) \right|^2$$

手征性守恒(小质量近似) : $\Delta\lambda_l = \pm 1$, 即 $H_{\pm 0} = H_{0\pm} = 0$

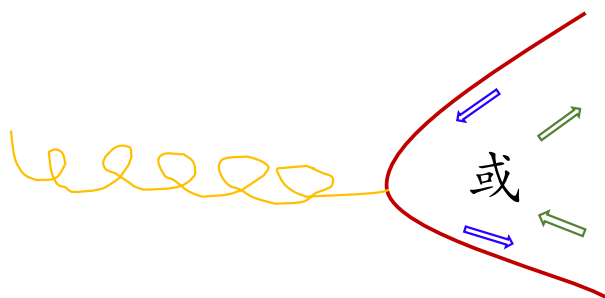
P 宇称对称性 : $H_{++} = \eta_+ \eta_- \eta_\psi (-)^{1-1/2-1/2} H_{--} = H_{--}$

$$\propto \sum_{\Delta\lambda_e = \pm 1, \Delta\lambda_{\mu} = \pm 1} \left| D_{\Delta\lambda_e \Delta\lambda_{\mu}}^{1*}(\theta, \phi) \right|^2$$

$$= |d_{+1+1}^1(\theta)|^2 + |d_{+1+1}^1(\theta)|^2 + |d_{+1-1}^1(\theta)|^2 + |d_{-1-1}^1(\theta)|^2$$

$$= 2[(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2] \propto 1 + \cos^2 \theta$$

$$f(\Omega)d\Omega = (1 + \cos^2 \theta) d\cos\theta \quad \text{前冲}$$



$$\text{手征性守恒 } \mathcal{L} \propto \bar{\psi}_L \gamma^\mu A_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu A_\mu \psi_R$$

应用于 $B^+ \rightarrow \psi K^+ \rightarrow (\mu^+ \mu^-) K^+$

- 自旋宇称构成 $0^- \rightarrow 1^- \quad 0^- \rightarrow (1/2, 1/2) 0^-$
- B^+ 是标量粒子，初始坐标系任选(按方便进行选取)

$$W(\theta) = \sum_{\lambda_{\mu^+} \lambda_{\mu^-}} \left| H_{00} H_{\lambda_{\mu^+} \lambda_{\mu^-}} d_{\lambda_{\mu^+} - \lambda_{\mu^-}}^j(\theta_{\mu}) \right|^2$$

$$= (|H_{++}|^2 + |H_{--}|^2) \cos^2 \theta + (|H_{+-}|^2 + |H_{-+}|^2) \sin^2 \theta / 2$$

$\gamma^* \rightarrow e^+ e^-$ 衰变手征性守恒, 得到 $H_{++} = H_{--} = 0$

$$= (|H_{+-}|^2 + |H_{-+}|^2) \sin^2 \theta / 2$$

空间反演宇称守恒, 所以 $H_{+-} = P_{\mu^+ \mu^-} P_{\psi} (-)^{1-1/2-1/2} H_{-+} = H_{-+}$

$$= \sin^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta)$$

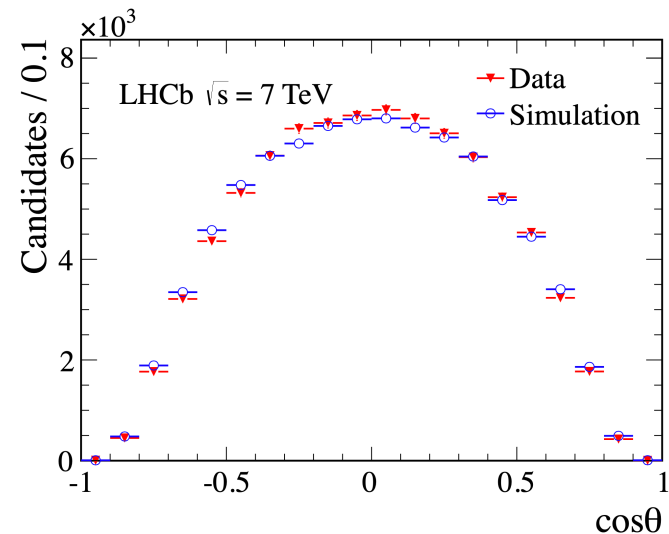
没有自由参数

$$\lambda_{\psi} = 0$$

$$d_{01}^1 = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{0-1}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{00}^1 = \cos \theta$$



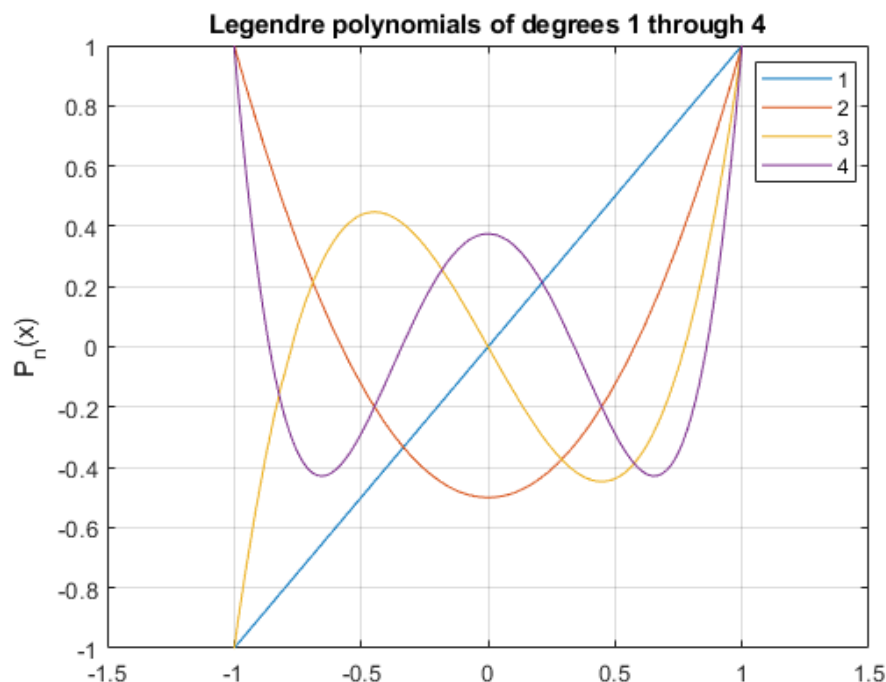
Dalitz 图

$0^- \rightarrow 0^-(0^-0^-)$ 三体衰变, 初、末态都是标量粒子, 称为Dalitz图分析

单一共振态 R 成分: $W(\theta) = |H^R d_{00}^j(\theta)|^2 = |H^R P_j(\cos \theta)|^2$

$P_j(\cos \theta)$: Legendre 多项式

多共振态成分: $W(\theta) = |\sum_R H^R d_{00}^{j_R}(\theta)|^2 = |\sum_R P_{j_R}(\cos \theta)|^2$



$j = 0$: 均匀分布

$j = 1$: 单节点

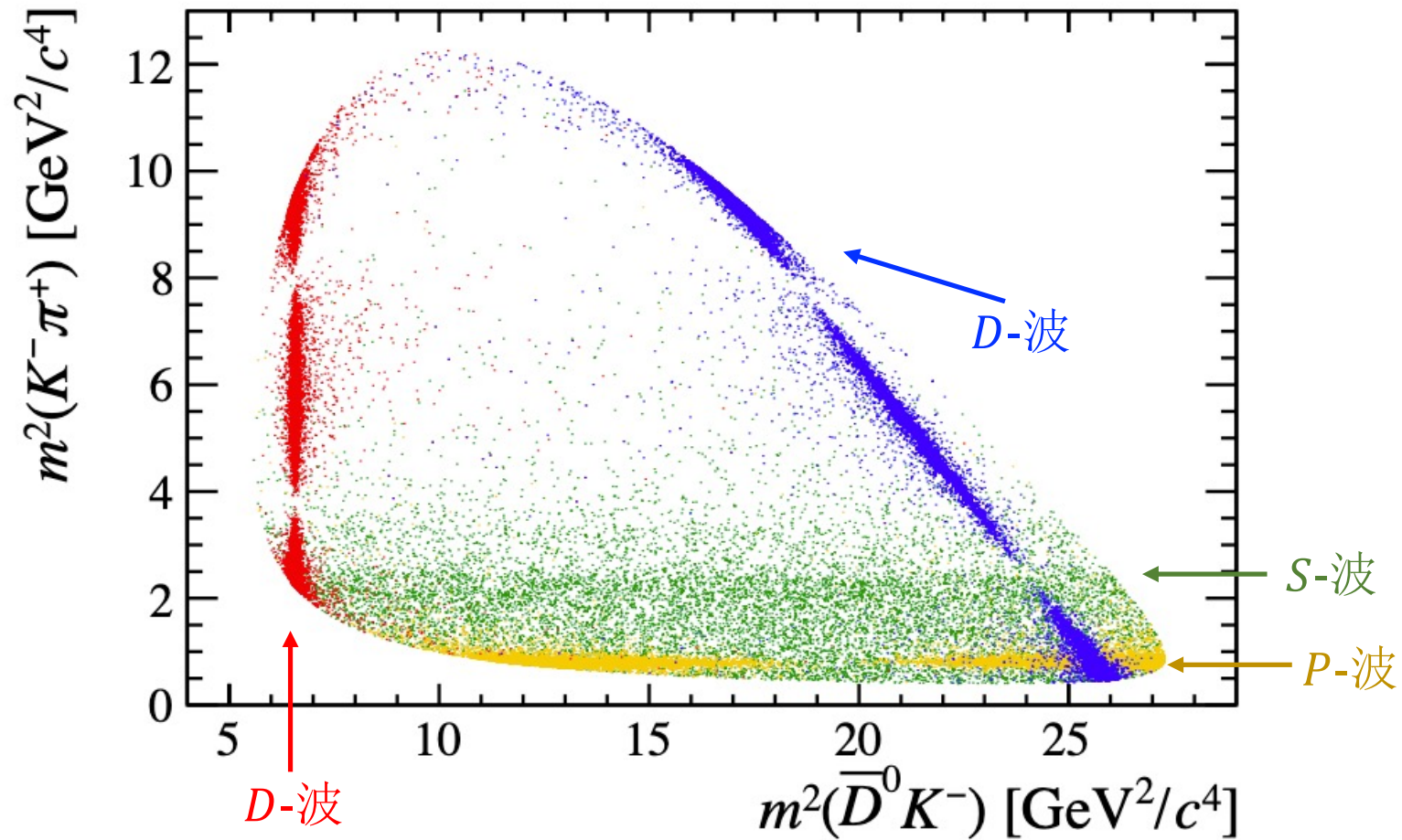
$j = 2$: 双节点

$j = 3$: 三节点

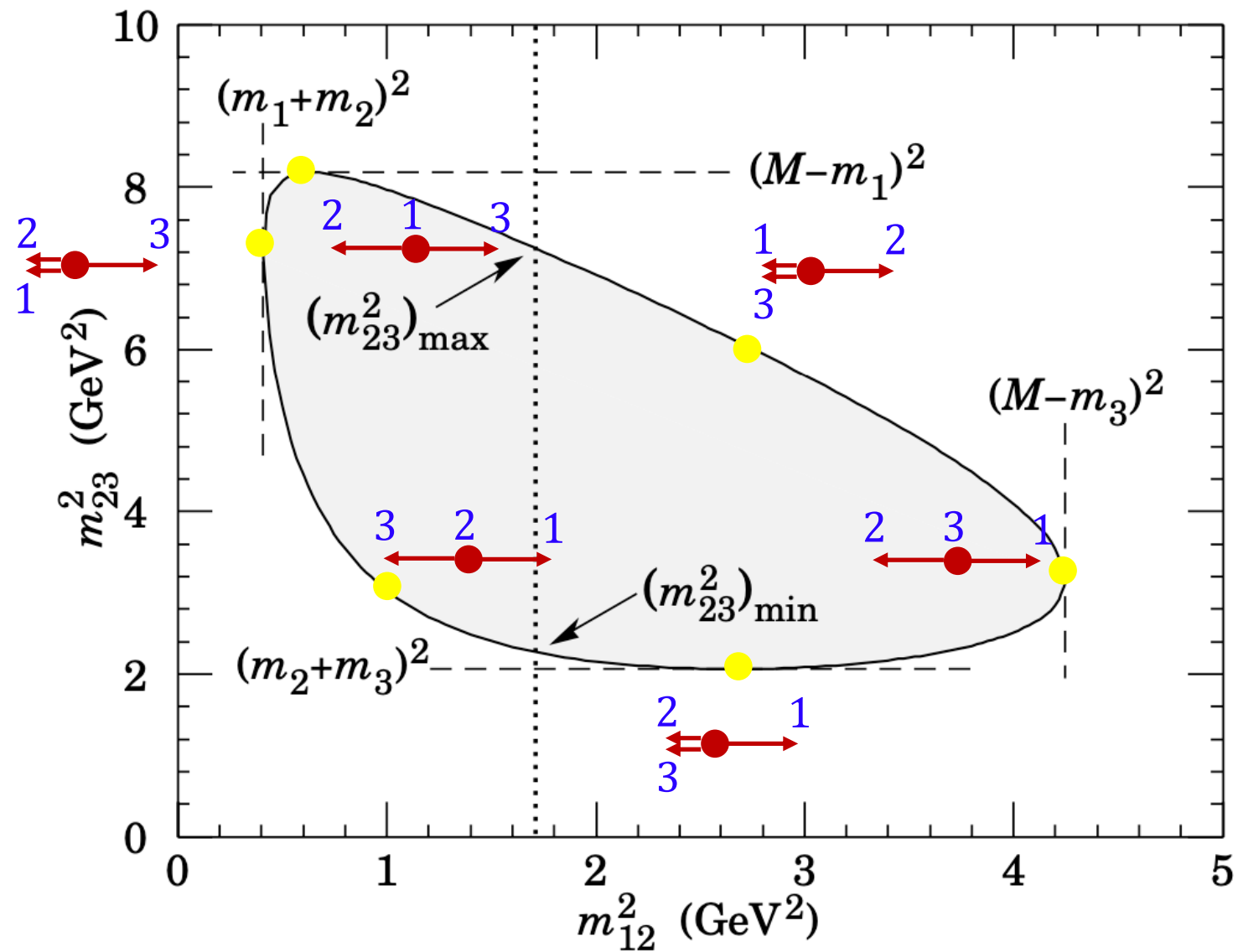
.....

Dalitz plot

$$\cos \theta = \frac{(m_{13}^2)_{\max} + (m_{13}^2)_{\min} - 2(m_{13}^2)}{(m_{13}^2)_{\max} - (m_{13}^2)_{\min}}$$



Dalitz plot



应用于 $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \rightarrow (\Xi_c^0 \gamma) \pi^+$

- 自旋构成: $1/2^+ \rightarrow 1/2^+ (\rightarrow 1/2^+ 1^-) 0^-$.
- 粒子标记 A: Ξ_{cc}^+ , B: $\Xi_c'^0$, C: π^+ , D: Ξ_c^0 , E: γ
- 耦合系数, 注意光子没有0分量

$$\triangleright H_{\lambda_A + \lambda_C \lambda_C}^{A \rightarrow BC}: H_{+1/2}^{A \rightarrow BC} \equiv H_+^A, H_{-1/2}^A \equiv H_-^A$$

$$\triangleright H_{\lambda_D \lambda_E}^{B \rightarrow DE}: H_{+1/2+1}^{B \rightarrow DE} \equiv H_{++}^B, H_{--}^B, H_{+-}^B, H_{-+}^B$$

$$\bullet \text{ P宇称对称性: } H_{\lambda_D \lambda_E}^{B \rightarrow DE} = P_B P_D P_E (-1)^{j_B - j_D - j_E} H_{-\lambda_D - \lambda_E}^{B \rightarrow DE} =$$

$$(+)(+)(-)(-)^{-1} H_{-\lambda_D - \lambda_E}^{B \rightarrow DE} = H_{-\lambda_D - \lambda_E}^{B \rightarrow DE}$$

$$\triangleright H_{++}^B = H_{--}^B \equiv H_e$$

$$\triangleright H_{+-}^B = H_{-+}^B \equiv H_o$$

$$\sum_{\lambda_A, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E} |H_{\lambda_A + \lambda_C \lambda_C} H_{\lambda_D \lambda_E} d_{\lambda_A + \lambda_C, \lambda_D - \lambda_E}^j(\theta)|^2 = \sum_{\lambda_A, \lambda_D, \lambda_E} |H_{\lambda_A} H_{\lambda_D \lambda_E} d_{\lambda_A, \lambda_D - \lambda_E}^j(\theta)|^2$$

$$= |H_+ H_e d_{1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_+ H_o d_{1/2, 3/2}^{1/2}(\theta)| + |H_+ H_o d_{1/2, -3/2}^{1/2}(\theta)| + |H_+ H_e d_{1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)|$$

$$+ |H_- H_e d_{-1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_- H_o d_{-1/2, 3/2}^{1/2}(\theta)| + |H_- H_o d_{-1/2, -3/2}^{1/2}(\theta)| + |H_- H_e d_{-1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)|$$

$$\begin{array}{cccc} \text{+/-1/2, +1/2, +1} & \text{+/-1/2, +1/2, -1} & \text{+/-1/2, -1/2, +1} & \text{+/-1/2, -1/2, -1} \end{array}$$

$$= |H_+ H_e d_{1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_+ H_e d_{1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_- H_e d_{-1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_- H_e d_{-1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)|$$

应用于 $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \rightarrow (\Xi_c^0 \gamma) \pi^+$

$$= |H_+ H_e d_{1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_+ H_e d_{1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_- H_e d_{-1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)| + |H_- H_e d_{-1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)|$$

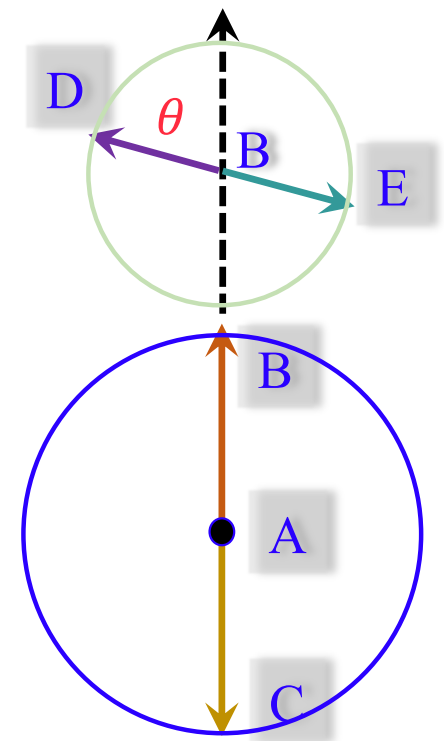
$$= |H_+|^2 (|d_{1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)|^2 + |d_{1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)|^2) + |H_-|^2 (|d_{-1/2, -1/2}^{1/2}(\theta)|^2 + |d_{-1/2, 1/2}^{1/2}(\theta)|^2)$$

$$= |H_+|^2 + |H_-|^2 = \text{Const} \quad \text{Uniform distribution or Flat Phase Space}$$

$$d_{1/2, 1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2, -1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{m', m}^j = (-)^{m-m'} d_{m, m'}^j = d_{-m, -m'}^j$$



应用于 $\Lambda_b^0 \rightarrow D_s^{*+} \Lambda_c^+ \rightarrow (D_s^+ \gamma) \Lambda_c^+$

- 自旋构成: $1/2^+ \rightarrow 1^-(0^- 1^-) 1/2^+$, 角分布为

$$\sum_{\lambda_A, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E} \left| \sum_{\lambda_B} H_{\lambda_B \lambda_C} \delta_{\lambda_A \lambda_B - \lambda_C} H_{\lambda_D \lambda_E} d_{\lambda_B, \lambda_D - \lambda_E}^j(\theta) \right|^2$$

- 粒子标记 A: Λ_b^0 , B: D_s^{*+} , C: Λ_c^+ , D: D_s^+ , E: γ
- 耦合系数

$$\triangleright H_{\lambda_A + \lambda_C \lambda_C}^{A \rightarrow BC}: H_{1,1/2}^{A \rightarrow BC}, H_{0,1/2}^{A \rightarrow BC}, H_{0,-1/2}^{A \rightarrow BC}, H_{-1,-1/2}^{A \rightarrow BC}$$

$$\triangleright H_{\lambda_D \lambda_E}^{B \rightarrow DE}: H_{0+1}^{B \rightarrow DE} \equiv H_+^B, H_{-1}^B$$

- P宇称对称性: $H_{\lambda_P \lambda_E}^{B \rightarrow DE} = P_B P_D P_E (-1)^{j_B - j_D - j_E} H_{-\lambda_D - \lambda_E}^{B \rightarrow DE} = (-)(-)(-)(-)^{1-1} H_{-\lambda_D - \lambda_E}^{B \rightarrow DE} = -H_{-\lambda_D - \lambda_E}^{B \rightarrow DE}$

$$\triangleright H_+^B = -H_{--}^B \equiv H^B$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_A \lambda_E \lambda_C} |H_{\lambda_A + \lambda_C \lambda_C}^A H_{\lambda_E}^B d_{\lambda_A + \lambda_C, -\lambda_E}^1(\theta)| &= \sum_{\lambda_A \lambda_E \lambda_C} |H_{\lambda_A + \lambda_C \lambda_C}^A|^2 |d_{\lambda_A + \lambda_C, -\lambda_E}^1|^2 \\ &= h_{1,1/2} (|d_{1,1}^1(\theta)|^2 + |d_{1,-1}^1(\theta)|^2) + h_{-1,1/2} (|d_{-1,1}^1(\theta)|^2 + |d_{-1,-1}^1(\theta)|^2) \\ &\quad + (h_{0,1/2} + h_{0,-1/2}) (|d_{0,1}^1(\theta)|^2 + |d_{0,-1}^1(\theta)|^2) \\ &= (h_{1,1/2} + h_{-1,1/2}) (|d_{1,1}^1(\theta)|^2 + |d_{1,-1}^1(\theta)|^2) \\ &\quad + (h_{0,1/2} + h_{0,-1/2}) (|d_{0,1}^1(\theta)|^2 + |d_{0,-1}^1(\theta)|^2) = |A|(1 + \cos^2 \theta) + |B| \sin^2 \theta \end{aligned}$$

D-函数见下页

45. Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and d Functions

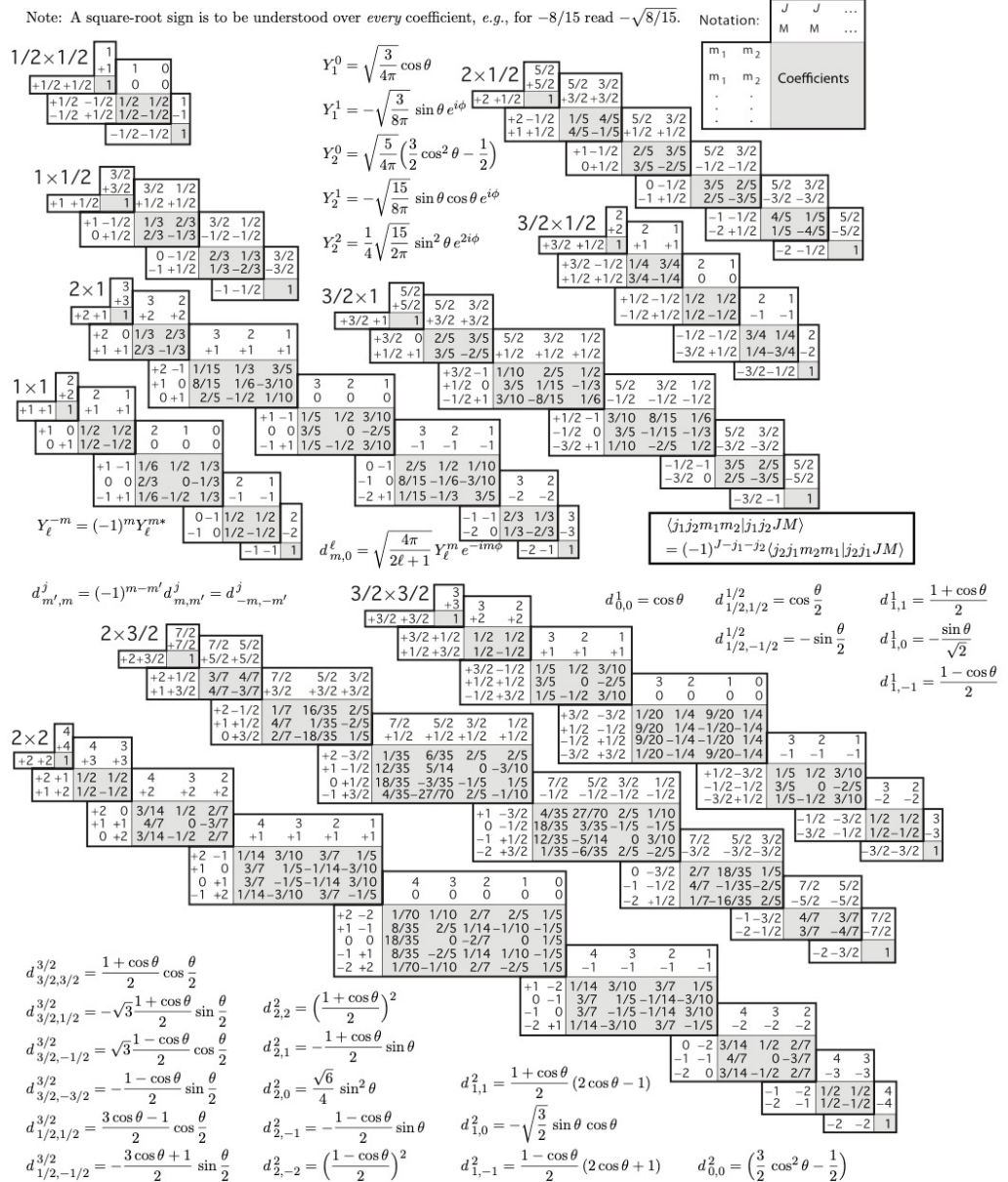


Figure 45.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).

- 共振态质量分布(线型)
- 效率(arXiv:2308.15490)
- 本底
- 拟合程序f
- CP 破坏
- 不要忘记相空间对质量分布的影响