

实验模拟与数据分析工具

平荣刚

中国科学院高能物理研究所

(pingrg@ihep.ac.cn)

中国科学院大学，2024-4，课程编号：070200M02020H

目 录

第四章 蒙特卡罗模拟

4.1: 蒙特卡罗方法简史

4.2: 随机数产生和检验

4.3: 概率分布抽样方法

4.4: 蒙特卡罗模拟在物理中的应用

第五章 物理事例产生器

5.1: 事例产生器的作用和原理

5.2: 物理事例的运动学描述

5.3: **PYTHIA**产生子

5.4: 高能物理实验中常用的产生子

本节教材/参考资料

- **KKMC, Comp.Phys.Comm., 130(2000), 260**
- **Babayaga, arXiv:hep-ph/0003268; 0103117;0607181**
- **Photos: CERN-TH.7033/93**
- **Phokhara: hep-ph/0112184;9902399;**
- **EvtGen/BesEvtGen 手册**

5.4: 高能物理实验中常用的产生子

(e^+e^- 对撞事例)

5.4.1: 初态辐射

5.4.2: 末态辐射

5.4.3: 亮度测量

5.4.5: 强子截面测量

5.4.4: 共振态衰变

5.4.1: 初态辐射

- 在 e^+e^- 对撞机中，碰撞之前正负电子在储存环中做圆周运动。带电粒子做加速运动时会放出光子，使自身的能量降低。
- 正负电子在碰撞湮灭之前放出光子的过程，称为初态辐射。
- 初态辐射会使 e^+e^- 湮灭生成的虚光子能量不再是单一的，而是有一个分布。由此而产生的强子截面也跟实验过程有关。在不同实验上测得的强子截面，只有Born截面可以比较。
- Born截面是指经过初态辐射修正过得截面。

- 领头阶微扰修正和指数化形式

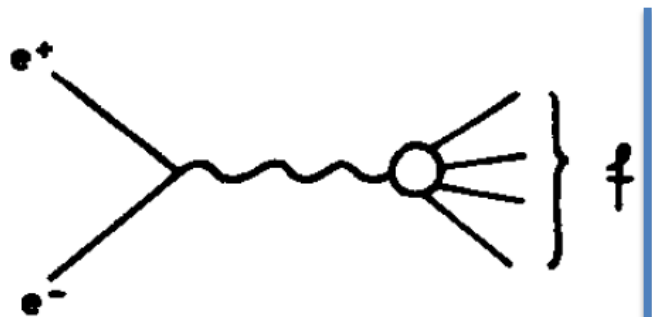


图1. $e^+ e^- \rightarrow f$ 过程

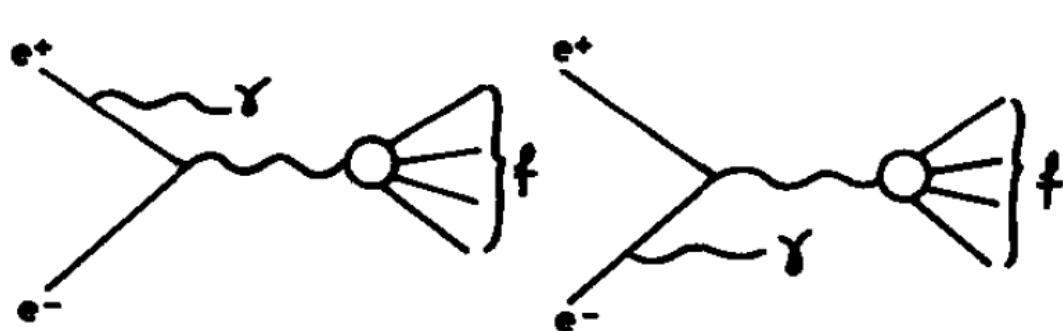


图2: $e^+ e^- \rightarrow \gamma f$ 过程, γ 是初态辐射光子

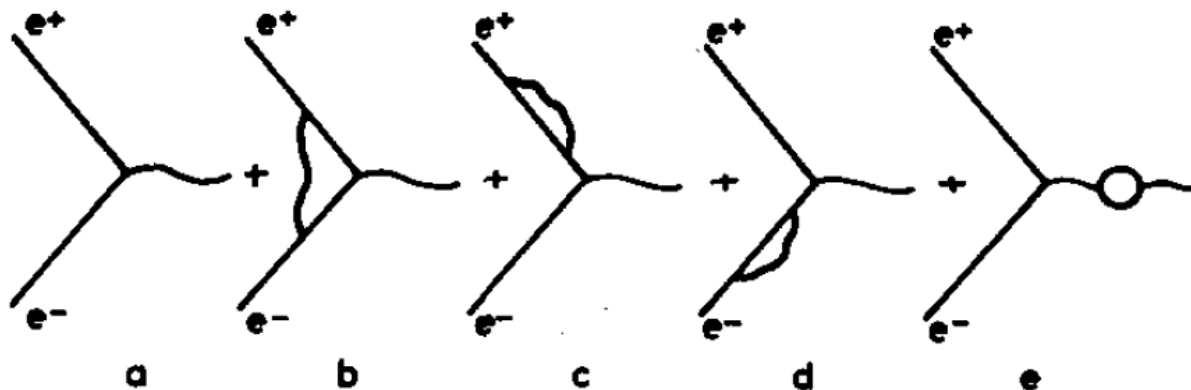


图3: 单光子的顶角修正

- 图1,2,3的截面计算结果为 (Ref. Nucl. Phys. B27, 381)

$$\sigma(W) = \sigma_0(W) \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{17}{36} \right) + \frac{13}{12} \beta + \right. \\ \left. + \beta \int_0^E \frac{dk}{k} \left[\left(1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right) \frac{\sigma_0(W-k)}{\sigma_0(W)} - 1 \right] \right\}.$$

这里 $\beta = \frac{\alpha}{\pi} \log \left(\frac{4E^2}{m_e^2} - 1 \right)$, E 是束流能量, m_e 是电子质量。

积分上限取为 E , 对应着初态辐射光子带走全部的束流能量。一般情况下, 由于末态粒子的质量不为零, 积分上限要比 E 小。

- 如果只考虑图1和2的贡献，并且假设截面随能量的变化非常平缓。

$$\sigma(s) \approx \sigma_0(s) \left(1 + \delta_1 + \beta \ln \frac{k_{\max}}{E} \right), \text{ 这里 } \delta_1 = \frac{3}{4} \beta + \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right),$$

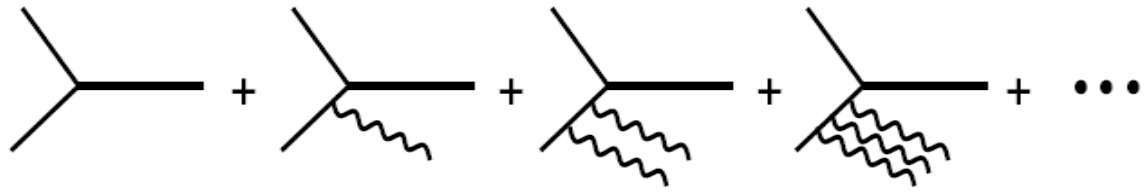
$$\beta = \frac{\alpha}{\pi} \log \left(\frac{4E^2}{m_e^2} - 1 \right), \text{ } E \text{ 是束流能量, } k_{\max} \text{ 是光子的最大能量。}$$

- 对于初态辐射到窄共振态的截面, $\frac{k_{\max}}{E} \rightarrow \frac{\Gamma}{M}$, Γ, M 分别是窄共振态的宽度和质量。例如对于 $e^+e^- \rightarrow \gamma J/\psi$, $\beta \ln \frac{\Gamma}{M} \approx -81\%$.

因此，截面按照 $\beta \ln \frac{k_{\max}}{E}$ 的微扰展开，需要展开到更高阶。

$$\sigma(s) \approx \sigma_0(s)(1 + \delta_1) \left(1 + \beta \ln \frac{k_{\max}}{E} + \frac{1}{2!} \beta^2 \ln^2 \frac{k_{\max}}{E} + \frac{1}{3!} \beta^3 \ln^3 \frac{k_{\max}}{E} + \dots \right)$$

$$= \sigma_0(s)(1 + \delta_1) \exp \left[\beta \ln \frac{k_{\max}}{E} \right] = \sigma_0(s)(1 + \delta_1) \left(\frac{k_{\max}}{E} \right)^\beta.$$



The diagrams show a vertex from which a horizontal line extends to the right. From this vertex, additional lines branch out to the left. The first diagram has no additional lines. The second has one wavy line. The third has two wavy lines. The fourth has three wavy lines. Each diagram is followed by a plus sign and an ellipsis, indicating a series of diagrams.

$$1 + \beta \ln \frac{E_\gamma}{E} + \frac{1}{2!} \left(\beta \ln \frac{E_\gamma}{E} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\beta \ln \frac{E_\gamma}{E} \right)^3 + \dots$$

图：初态辐射
多光子的求和。

- 对应的辐射修正截面可以表示为

$$\sigma(W) = \beta \int_0^E \frac{dk}{k} \left(\frac{k}{E} \right)^\beta \sigma_0(W - k) + \delta \sigma_0(W)$$

其中， $1 + \delta$ 称为辐射修正因子。这个辐射修正截面是在光子的动量在相空间上积分后得到，因此，也称为遍举的幂次化形式。

• 结构函数方法

在场论方法中，如果把 e^+e^- 单光子湮灭的过程看作是Drell-Yan过程，在领头阶近似下，即只保留 $\log(s/m_e^2)$ 的项，有

$$\sigma(W) = \int \int dx_1 dx_2 D(x_1, s) D(x_2, s) \tilde{\sigma}(x_1 x_2 s),$$

$$\text{其中, } \tilde{\sigma}(s) = \frac{\sigma_B(s)}{|1 + \Pi(s)|^2}.$$

$\sigma_B(s)$ 是Born截面， $\Pi(s)$ 是真空极化因子，

$D(x, s)$ 称为结构函数，满足Lipatov-Altarelli-Parisi方程：

$$D(x, s) = \delta(x-1) + \int_{m_e^2}^{Q^2} \frac{\alpha(Q'^2)}{2\pi} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \int_0^1 \frac{dz}{z} P(z) D\left(\frac{x}{z}, Q^2\right),$$

$\alpha(Q^2) = \alpha / \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2} \right]$ 是跑动耦合常数。 $P(z)$ 是劈裂函数：

$$P(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2} - \delta(1-z) \int_0^1 dx \frac{1+x^2}{1-x}.$$

结构函数的直观含义：在母粒子(电子)中找到携带动量比分为 x , 虚度为 Q^2 的虚电子的几率密度。

• 结构函数的具体形式可以从LAP方程中解出，代到截面公式中，有：

$$\sigma(s) = \int_0^{1-s_m/s} dx \frac{\sigma_B(s(1-x))}{|1 + \Pi(s(1-x))|^2} F(s, x),$$

其中， $\sqrt{s_m}$ 对应着单举过程的质量阈。

展开到次领头阶的结构函数为：

$$F(s, x) = \beta x^{\beta-1} \delta^{V+S} + \delta^H, \text{ 其中}$$

$$\delta^{V+S} = 1 + \frac{3}{4}\beta + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \beta^2 \left(\frac{9}{32} - \frac{\pi^2}{12} \right)$$

$$\delta^H = \beta \left(1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{8} \beta^2 \left[4(2-x) \ln \frac{1}{x} - \frac{1+3(1-x)^2}{x} \ln(1-x) - 6 + x \right].$$

在BEPC能区，这个结构函数的精度可达到0.1%。

- 关于结构函数方法的几点说明：

- 结构函数方法计算辐射修正是普适的，可以用于共振态的测量， R -值实验，以及阈值附近的实验。

- 在结构函数中，包含了初态辐射光子转变成为电子对的修正，这在领头阶计算时，虚实电子对的贡献可以抵消。
- 窄共振态的Born截面表示为：

$$\sigma_B(s) = \frac{12\pi\Gamma_{ee}^0\Gamma_f}{(s-M^2)^2 + \Gamma^2 M^2},$$

M, Γ 分别是共振态的质量和总宽度， Γ_{ee}^0 是 e^+e^- 的分宽度， Γ_f 是末态为 f 的分宽度。

由于夸克偶素衰变到 e^+e^- 时是通过虚光子过程，真空极化也会有贡献，即：

$$\Gamma_{ee}^{\text{exp}} = \frac{\Gamma_{ee}^0}{|1 + \Pi(M^2)|^2}.$$

在粒子表(PDG)中, 我们约定测量共振态质量和宽度时, 采用不做真空极化修正的测量截面。

- 窄共振态近似

如果结构函数取一阶近似, 即

$$F(x, s) = \frac{2\alpha}{\pi x} (L - 1) \left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right), L = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{s}}{m_e} \right).$$

对于非常窄的共振态, 可以作 δ -函数近似:

$$\frac{M\Gamma}{(s - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2} \rightarrow \pi \delta(s - M^2), \quad e^+ e^- \rightarrow \gamma V \text{ 的截面为:}$$

$$\sigma^V(s) = \frac{12\pi^2 \Gamma_{ee} \Gamma_V}{M_V^2 s} F(x_V, s), \text{ 其中 } V \text{ 代表矢量介子}$$

*: 截面的单位barn, $1\text{GeV}^{-2} = 3.89 \times 10^{-4} \text{barn}$

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow f \bar{f}$$

不考虑初态和末态辐射，正负电子对湮灭成虚光子，再转变成为自旋为1/2的费米子的截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N_c \frac{\alpha^2}{4s} \beta [1 + \cos^2 \theta + (1 - \beta) \sin^2 \theta] Q_f^2,$$

其中， $\beta = v/c$ 是费米子的速度， θ 是散射角， Q_f 是电荷。
 $N_c = 1$ (带电轻子)，3(夸克)。当 $\beta \rightarrow 1$ 时：

$$\sigma = N_c Q_f^2 \frac{86.8 \text{nb}}{s(\text{GeV}^2)}.$$

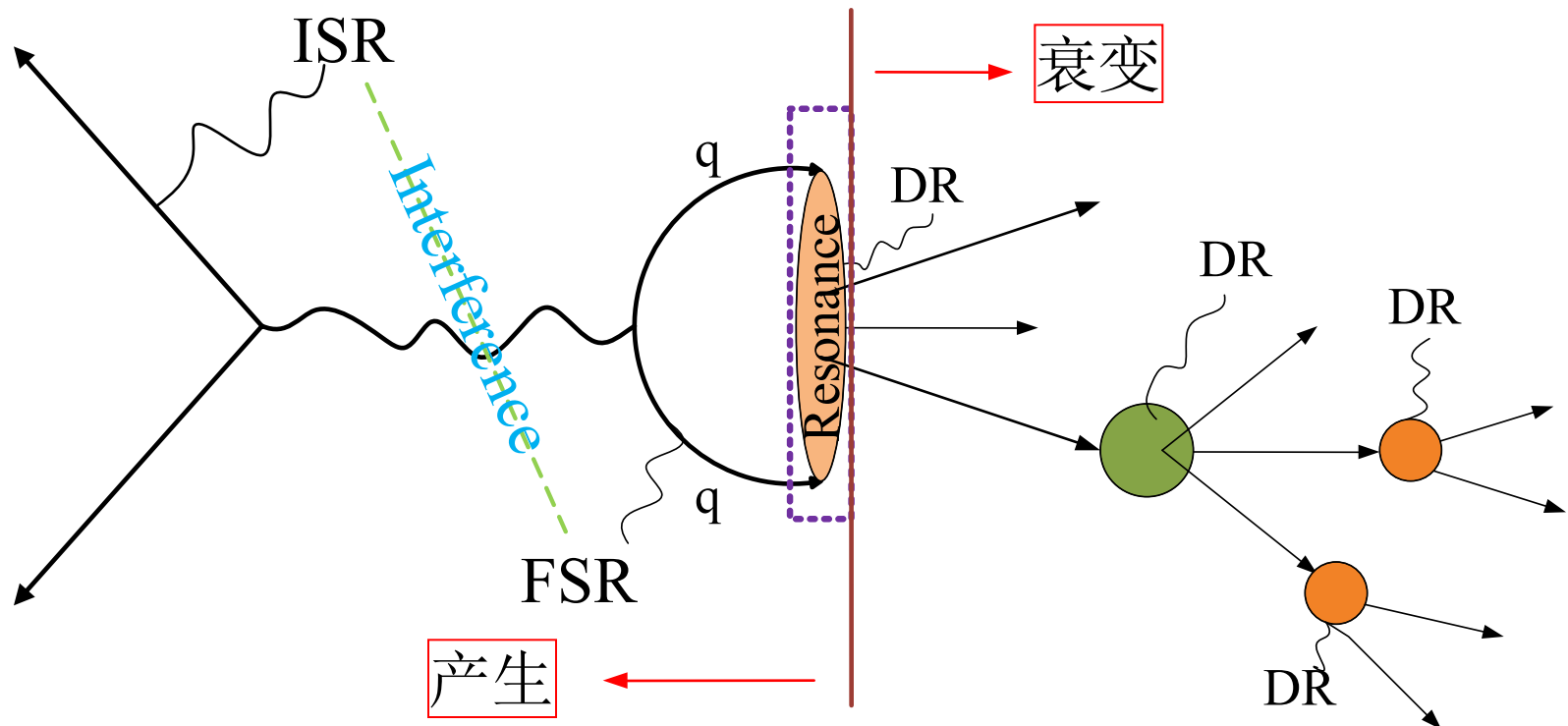
角分布： $\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \propto 1 + \cos^2 \theta$

KKMC产生子

■ 物理过程:

$$e^+e^- \rightarrow f\bar{f} + n\gamma, \quad \mathbf{f}=\mu,\tau,\mathbf{d},\mathbf{u},\mathbf{s},\mathbf{c},\mathbf{b}. \quad E_{\text{cm}} \in [m_\tau, 1\text{TeV}]$$

这个产生子基于Electroweak Standard Model 对这个过程的精确计算结果。



- 早期用于：LEP, SLC；未来：Linear Colliders, b, c, τ^- 工厂.
- 技术特点：
 - ✓考虑了束流的初态辐射 (ISR) 和出射费米子的末态辐射效应 (FSR)，QED计算到达二级精度, 计算采用 Coherent Exclusive Exponentiation (CEEX) 方案，并考虑初态和末态辐射的干涉效应。
 - ✓夸克的强子化采用强子簇射模型 (PYTHIA)，tau-轻子的衰变调用TAUOLA库，并考虑了自旋极化效应。
 - ✓电弱修正采用DIZET库
 - ✓支持共振态衰变.
 - ✓末态粒子的辐射修正：PHOTOS

CEEX自旋振幅

- 在光子的动量被积掉之前，振幅的幂次化是在完整的多光子微分截面上实现的。
- 对于 $e^-(p_a) + e^+(p_b) \rightarrow f(p_c) + \bar{f}(p_d) + \gamma(k_1) + \gamma(k_2) + \dots + \gamma(k_n)$,

CEEX截面为:

$$\sigma^{(r)} = \frac{1}{\text{flux}(s)} \sum_{n=0}^{\infty} d\text{Lisp}_{n+2}(p_a + p_b, p_c, p_d, k_1, \dots, k_n) \times \rho_{\text{CEEX}}^r(p_a + p_b, p_c, p_d, k_1, \dots, k_n),$$

n+2体Lorentz不变相空间

CEEX振幅

$$\bullet \rho_{\text{CEEX}}^{\text{r}}(p_a + p_b, p_c, p_d, k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{n!} e^{Y(\Omega; p_a, \dots, p_d)} \bar{\Theta}(\Omega) \sum_{\sigma_i = \mp 1} \sum_{\lambda_i, \bar{\lambda}_i = \mp 1}$$

$$\sum_{i,j,l,m=0}^3 \hat{\varepsilon}_1^i \hat{\varepsilon}_2^j \sigma_{\lambda_a, \bar{\lambda}_a}^i \sigma_{\lambda_b, \bar{\lambda}_b}^j m_n^{(r)} \begin{pmatrix} p & k_1 & k_2 & k_n \\ \lambda & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \left[m_n^{(r)} \begin{pmatrix} p & k_1 & k_2 & k_n \\ \lambda & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \right]^* \times \sigma_{\bar{\lambda}_c, \lambda_c}^l \sigma_{\bar{\lambda}_d, \lambda_d}^m \hat{h}_3^l \hat{h}_4^m.$$

$$\text{其中, } \begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_a p_b p_c p_d \\ \lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \end{pmatrix}$$

Ref. hep-ph/9905453

$\hat{\varepsilon}_1^i \hat{\varepsilon}_2^j$: 电子的自旋极化矢量; σ : Pauli矩阵; \hat{h}_c : 末态费米子的偏振矢量 (polarimeter vector). $m_n^{(r)}$ 是发射 n 个光子的自旋振幅, $Y(\Omega; p_a, \dots, p_d)$ 是 YFS 形状因子, 用来描述电子发射 n 个光子的幂次化因子。

MC 抽样算法

- 多分叉抽样技术(即：加分布抽样)

在三个地方用多分叉抽样，一是对末态费米子的种类抽样，即 $f = \mu, t, d, u, s, c, b$. 二是对初末态光子的划分，如果有 n 个光子，那么就有 2^n 种ISR和FSR光子的划分。三是光子的极化抽样，如果有 n 个光子，那么就有 2^n 种光子的极化抽样。

- 按照权重作舍选抽样

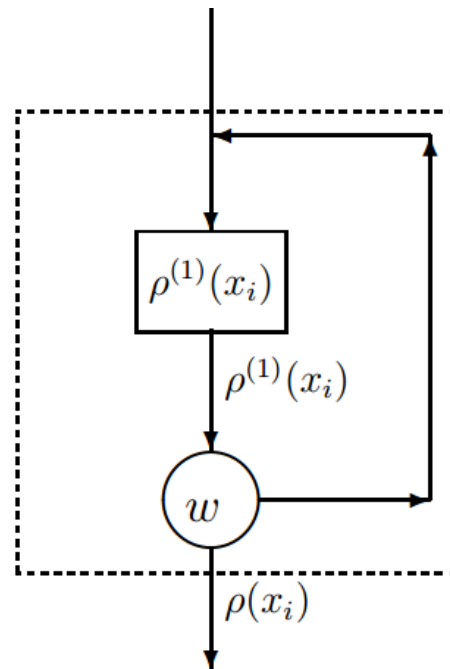
如果有两个分布密度函数， $\rho(x_i)$ 和 $\rho(x_i)^{(1)}$,后者是前者的一个近似，而且它的抽样容易实现。定义权重因子：

$$w(x) = \frac{\rho(x_i)}{\rho(x_i)^{(1)}}.$$

如果 $w(x)$ 在相空间上的最大值为 W ,则 $\rho(x_i)$ 的抽样是对 $\rho(x_i)^{(1)}$ 抽样按照

$$rW < w$$

接受, r 是 $(0, 1)$ 区间上的均匀分布的随机数。



• 四种分布定义的权重

ISR

FSR

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow f(q_1) + \bar{f}(q_2) + n(\gamma(k_j)) + n'(\gamma(k_l))$$

• 用Lorentz不变相空间 $d\tau_n$, 分布密度可表示为:

$$\rho(p_1, p_2, \dots, p_n) = d\sigma(p_1, p_2, \dots, p_n) / d\tau_n(P; p_1, p_2, \dots, p_n).$$

• 初始分布, 密度函数可表示为:

$$\rho^{\text{Pri}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{d\sigma^{\text{Pri}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n)}{d\tau_{n+2}(P; q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n)}.$$

初始分布是最低价的MC抽样函数，它要求是可积的，(半)解析的。

•原始分布，密度函数可表示为：

$$\rho^{\text{Cru}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{d\sigma^{\text{Cru}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n)}{d\tau_{n+2}(P; q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n)}.$$

原始分布要求接近模型分布，而且最大程度简化，起到“重要抽样”的作用。

•物理模型分布

$$\rho^{\text{Mod}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{d\sigma^{\text{Mod}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n)}{d\tau_{n+2}(P; q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n)}.$$

这是产生事例所依赖的最后的物理模型分布。

- 原始分布权重

$$W^{\text{Cru}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{\rho^{\text{Cru}}(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\rho^{\text{Pri}}(p_1, p_2, \dots, p_n)}.$$

- 模型权重

$$W_m^{\text{Mod}}(q_1, q_2, k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{\rho^{\text{Mod}}(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\rho^{\text{Cru}}(p_1, p_2, \dots, p_n)}.$$

- 事例的总权重

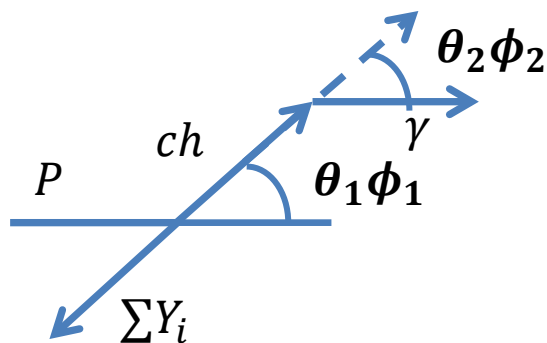
$$W_m^{\text{Tot}} = W^{\text{Cru}} W_m^{\text{Mod}},$$

总截面可用MC方法计算:

$$\sigma_m^{\text{Tot}} = \left\langle W_m^{\text{Tot}} \right\rangle \sigma^{\text{Pri}}.$$

5.4.2: 末态辐射

- 不稳定粒子衰变的产物如果是带电粒子，会发生韧致辐射。如果辐射的光子动量很大，末态辐射修正更重要。
- 末态辐射光子的分布特点是主要分布在以带电粒子为中心的小角圆锥体内。
- 末态辐射修正常用的产生子程序包是PHOTOS.
- 对粒子的衰变过程 $P(p) \rightarrow ch(q_1)Y_2(q_2)Y_3(q_3)\dots\gamma$



定义:

- k : 光子在 P 质心系中的能量

- θ_1, ϕ_1 : 在 P 质心系中 Y (两体衰变)或者 $\sum Y_i$ (多体)

- θ_2, ϕ_2 : 光子在 $(ch, \sum Y_i)$ 质心系中,

与带电径迹的夹角。

末态辐射的截面(近似)

$$d\sigma^R(P \rightarrow ch Y(\gamma)) = d\sigma^B(P \rightarrow ch Y) f(k, \cos \theta_2, \phi_2) k dk d\cos \theta_2 d\phi_2,$$

σ^B 是 $P \rightarrow ch Y$ 过程的Born截面,

$f(k, \cos \theta_2, \phi_2)$ 是韧致辐射因子.

展开至log的领头阶, 对自旋为1/2的粒子, f 因子为:

$$f(k, \cos \theta_2, \phi_2) = \frac{1}{4\pi m_p^2} \left\{ \delta\left(\frac{k}{m_p}\right) \frac{m_p}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} N\right) + \Theta(k - \varepsilon) \frac{\alpha}{\pi} \times \right. \\ \left. \left[1 + \left(1 - \frac{k}{k_{\max}}\right)\right] \frac{m_P^2}{2k^2} \frac{2}{1 - \cos \theta_2 \sqrt{1 - \frac{4m_{ch}^2 m_P^2}{m_{ch}^2 + m_P^2}}} \right\},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m_{ch}^2 m_P^2}{m_{ch}^2 + m_P^2}}} \ln \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m_{ch}^2 m_P^2}{m_{ch}^2 + m_P^2}} \right)^2 + \frac{m_{ch}^2 + m_P^2}{4m_{ch}^2 m_P^2} \right] \times$$

$$\left(\ln \frac{k_{\max}}{k} - \frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{k_{\max}} - \frac{\varepsilon^2}{4k_{\max}^2} \right). \text{ 其中 } \varepsilon \text{ 是软光子的截断。}$$

- 单光子抽样算法

- (1) 计算 $\cos\theta_1, \phi_1, ch$ 以及旁观者 $\Sigma_i Y_i$ 的不变质量。
- (2) 根据 f 因子的分布函数，抽取韧致辐射光子的动量 k 和角度 $\cos\theta_2, \phi_2$ 。
- (3) 如果 $k=0$, 不改变原来的事例，转到(9)。
- (4) 在 $(ch, \Sigma_i Y_i)$ 静止系中修改 ch 的动量为 q :

$$q = \frac{\lambda^{1/2}(m_P^2(1 - \frac{2k}{m_P}), m_{ch}^2, M_Y^2)}{2m_P \sqrt{1 - \frac{2k}{m_P}}}.$$

(5)转动 P 的衰变末态，使得 ch 的动量方向沿 $-z$.

(6)把 ch 的动量沿着 z 轴方向做boost，使它的动量减小到 $-q$ ，同样， Y 做boost，使它的动量减小到 q 。

(7)用 $k, \cos\theta_2, \phi_2$ 重建光子的四动量。

(8)作Lorentz变换，首先转动光子的动量沿着 z' -轴方向，然后，把其他粒子的四动量boost到 P 的静止系，最后作转动，使得 Y 沿 z -轴方向，最后转到，使 Y 回到原来的方向。

螺旋度系

(9)对带点粒子作循环，如果有一个光子成功产生，或者没有带电粒子，终止循环。

5.4.3: 亮度测量

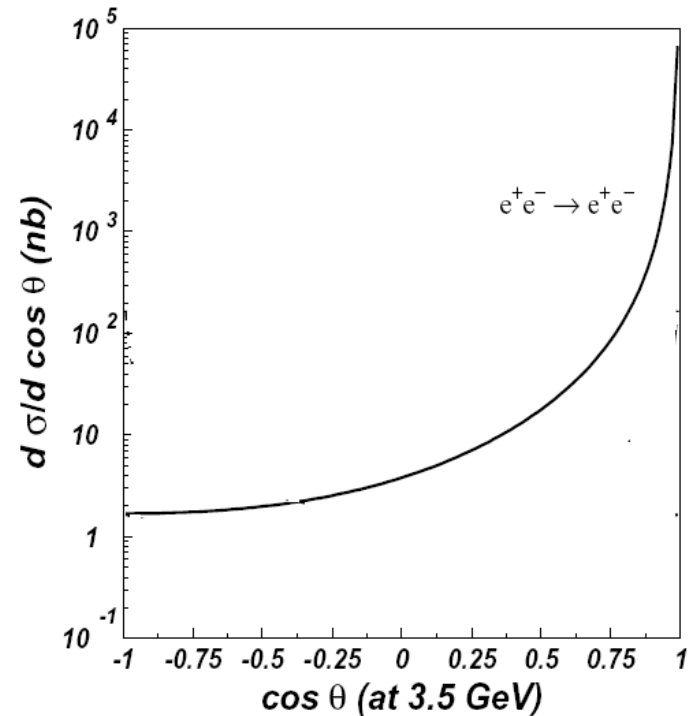
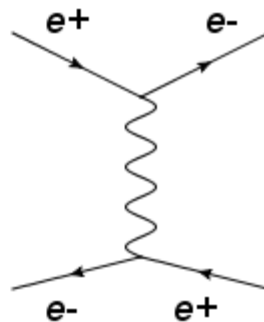
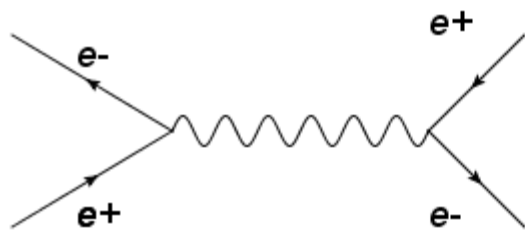
- 积分亮度是数据样本大小的一个基本量，积分亮度的精度将会影响基于这批数据测量的各个物理量的精度。
- 积分亮度的测量可以用截面较大的物理过程，而且它们的截面计算可靠，误差较小。在 e^+e^- 对撞机上，常用的过程有Bhabha和双光子过程。

$$L = \frac{N_{obs} - N_{bkg}}{\sigma \epsilon}$$

L 是积分亮度， σ, ϵ 是对应某个过程的截面和效率，对应的观测事例数为 N_{obs} ，本底数为 N_{bkg} 。

Bhabha过程

- 领头阶的Feynman图(Born截面)



$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \frac{(3 + \cos^2\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2}, \text{ 当 } \cos\theta \rightarrow 1, \text{ 发散.}$$

其中, θ 是电子或者正电子的极角。

Babayaga

- Babayaga是Bhabha过程的高精度产生子, V3.5版本的截面精度达到0.5%。
- 使用完整的次领头阶的计算结果与parton shower (PS)方案匹配, 提高计算精度
- PS方案中, Bhabha过程伴随着任意多个初态/末态辐射光子的截面为:

$$d\sigma_{LL}^{\infty} = \Pi(Q^2, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |M_{n,LL}|^2 d\Phi_n.$$

$\Pi(Q^2, \varepsilon)$ 是Sudakov形状因子, 用来描述软光子和虚光子的贡献, ε 是介于软、硬光子之间, 用来消除红外发散的截断量。 Q^2 是Bhabha过程的能量标度。

$|M_{n,LL}|^2$ 是 $\log\text{-leading}$ 近似下的伴随 n 个光子的振幅的平方， $d\Phi_n$ 是除了 e^+e^- 外，额外有 n 个光子的相空间。对于一个光子的情况，振幅的展开为：

$$|M_{1,LL}|^2 = P(z)I(k)|M_0|^2 \frac{8\pi^2}{E^2 z(1-z)},$$

$1-z$ 是光子带走的能量比分， $P(z)$ 是 Aktarekku-Parisi 劈裂函数。 $I(k)$ 是光子的角分布函数。应用这个式子，PS 方案的截面为

$$d\sigma_{LL}^\alpha = [1 + C_{\alpha,LL}] |M_0|^2 d\Phi_0 + |M_{1,LL}|^2 d\Phi_1,$$

Feynman 方案计算的次领头阶的结果为：

$$d\sigma^\alpha = [1 + C_\alpha] |M_0|^2 d\Phi_0 + |M_1|^2 d\Phi_1,$$

这两种计算方案的结果不一致。但 $C_{\alpha,LL}$ ， C_α 有同样的指数结构，

$|M_{1,LL}|^2$ 和 $|M_1|^2$ 有同样的奇异行为。

为了匹配次领头阶和PS计算的结果，引进两个修正因子。对软光子和虚光子， $F_{SV} = 1 + (C_a - C_{a,LL})$ ，对于硬的韧致辐射光子，

$$F_H = 1 + \frac{|M_1|^2 - |M_{1,LL}|^2}{|M_{1,LL}|^2}, \text{ 则PS的截面，在 } O(\alpha) \text{ 为}$$

$$d\sigma_{LL}^\alpha = F_{SV} [1 + C_{a,LL}] |M_0|^2 d\Phi_0 + F_H |M_{1,LL}|^2 d\Phi_1,$$

PS方案中无穷阶的截面为：

$$\sigma_{LL}^\infty = F_{SV} \Pi(Q^2, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{i=0}^n F_{Hi} \right) |M_{n,LL}|^2 d\Phi_n.$$

Babayaga中的MC抽样算法

- 结构函数中的**PS**方法,主方程为 *Phys.Rev.D* 48 (1993) 1021

$$\sigma(s) = \int dx_- dx_+ dy_- dy_+ \int d\Omega_{lab} D(x_-, Q^2) D(x_+, Q^2) \times \\ D(y_-, Q^2) D(y_+, Q^2) \frac{d\sigma_0}{d\Omega_{cm}}(x_- x_+ s, \theta_{cm}) J(x_- x_+, \theta_{lab}) \Theta(cuts).$$

其中, $D(x_-, Q^2)$ 是电子的结构函数, $\frac{d\sigma_0}{d\Omega_{cm}}$ 是Born截面,

包括s, t-道的图及它们之间相干项的贡献, 也包括矢量共振态的贡献。 $J(\dots)$ 是Jacobi行列式, 对应着从质心系到实验室系的变换。

结构函数 $D(x, Q^2)$ 是PS方案中最基本的要素，它描述的是在电子中找到具有动量比分为 x , 虚度为 Q^2 的电子的几率密度。它的具体表达式可以在QED中求解Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) 演化方程得到，即

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} D(x, Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_+(y) D\left(\frac{x}{y}, Q^2\right),$$

其中， $P_+(x)$ 是 $e \rightarrow e\gamma$ 过程的劈裂函数：

$$P_+(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} - \delta(1-x) \int_0^1 dt P(t).$$

PS计算方案中的出发点是Sudakov形状因子:

$$\Pi(s_1, s_2) = \exp \left[-\frac{\alpha}{2\pi} \int_{s_2}^s \frac{ds'}{s'} \int_0^{x_+} dz P(z) \right].$$

它表示电子从虚度为 $-s_2$ 演化到虚度为 $-s_1$ 的过程中, 没有发射光子能量比分大于 $\varepsilon = 1 - x_+$ 的几率。利用Sudakov形状因子, DGLAP方程可以写成迭代的形式:

$$D(x, s) = \Pi(s, m^2) \delta(1 - x) + \int_{m^2}^s \Pi(s, s') \frac{ds'}{s'} \Pi(s', m^2) \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{x_+} dy P(y) \delta(x - y)$$

0个光子

1个光子

$$\begin{aligned}
& + \int_{m^2}^s \Pi(s, s') \frac{ds'}{s'} \int_{m^2}^{s'} \Pi(s', s'') \frac{ds''}{s''} \Pi(s'', m^2) \times \\
& \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \int_0^{x_+} dx_1 \int_0^{x_+} dx_2 P(x_1) P(x_2) \delta(x - x_1 x_2) + \cdots
\end{aligned}$$

2个光子

$D(x, s)$ 的计算可以如下的MC方案来实现:

(1) 电子的虚度和动量比分的初始值设置为

$$K^2 = m_e^2, x = 1$$

(2) 产生(0,1)期间均匀分布的随机数 ξ .

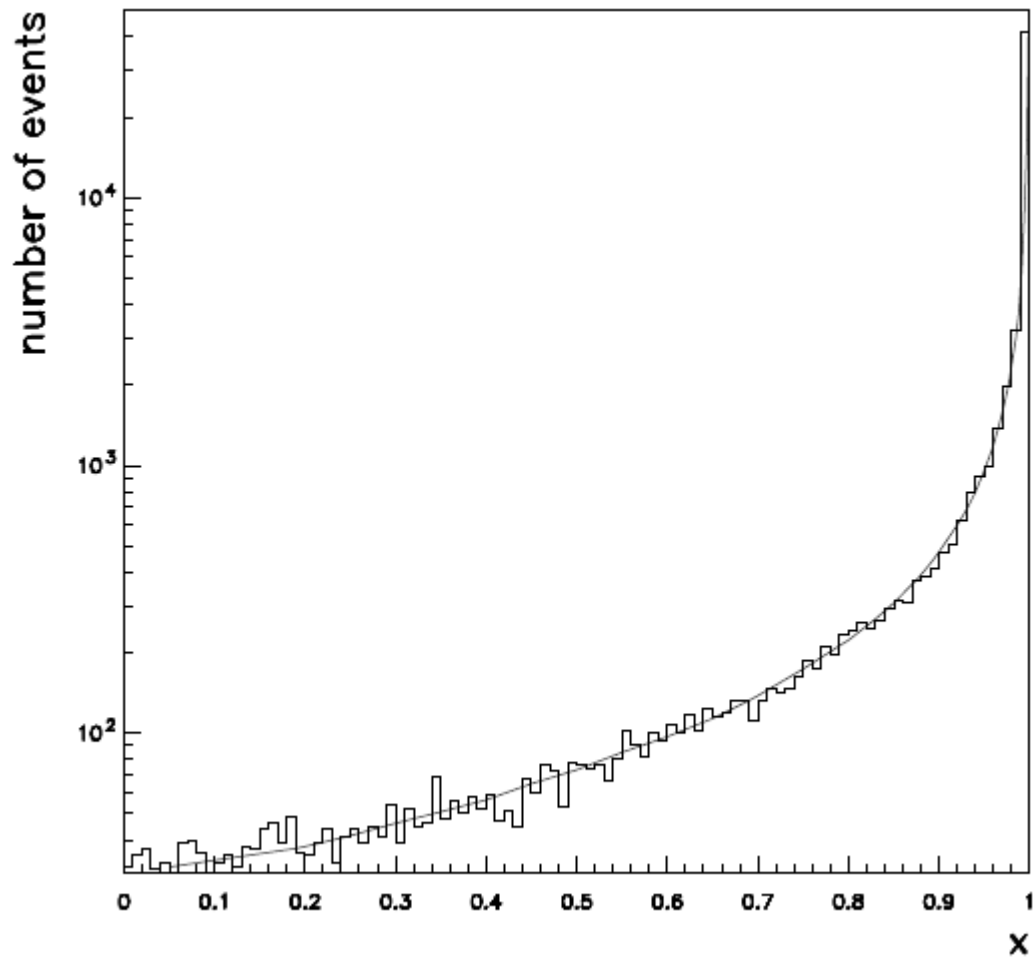
(3)如果 $\xi < \Pi(s, K^2)$, 则停止, 这是无光子的情况。

(4) 如果 $\xi > \Pi(s, K^2)$, 辐射一个光子, 然后计算电子的虚度, 它是 $\xi = \Pi(K'^2, K^2)$ 的解。

(5) 根据劈裂函数 $P(z)$, 在 $[0, x_+]$ 期间选择电子的剩余动量比分 z .

(6) 把 x 换成 zx , K^2 换成 K'^2 .回到(2)

通过这种方式, 可以得到结构函数的解。



hep-ph/0003268

$D(x,s)$ 不同方案计算的比较，曲线：Mellin变换的数值结果，直方图是MC方法的结果。

初末态电子的结构函数计算的MC方法:

$$\begin{aligned} & [D(x_-, s)D(x_+, s)D(y_+, s)D(y_-, s)]_{O(\alpha)} = \\ & [\Pi^4(s, m^2)]_{O(\alpha)} \delta(1 - x_+) \delta(1 - x_-) \delta(1 - y_+) \delta(1 - y_-) \\ & + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m^2} \{ \delta(1 - x_-) \delta(1 - y_+) \delta(1 - y_-) P(x_+) \\ & \quad + \delta(1 - x_+) \delta(1 - y_+) \delta(1 - y_-) P(x_-) \\ & \quad + \delta(1 - x_+) \delta(1 - x_-) \delta(1 - y_+) P(y_-) \\ & \quad + \delta(1 - x_+) \delta(1 - x_-) \delta(1 - y_-) P(y_+) \}, \end{aligned}$$

$D(x, s)$ 的计算可以如下的MC方案来实现:

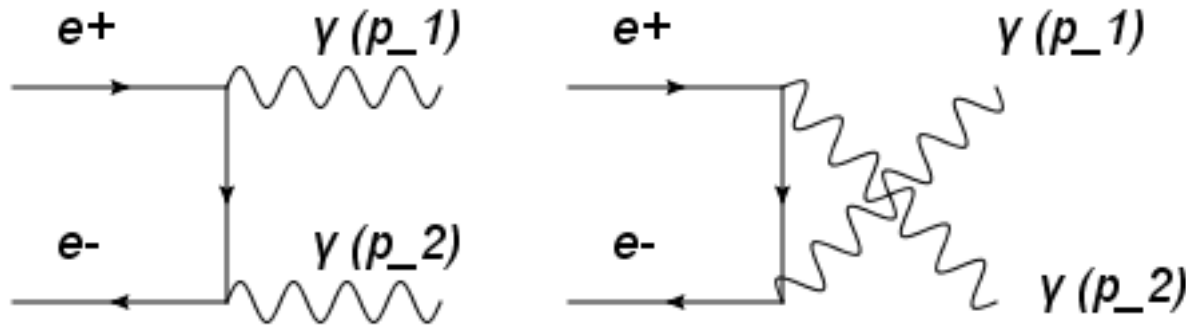
(1) 电子的虚度和动量比分的初始值设置为

$$K^2 = m_e^2, x_+ = x_- = y_+ = y_- = 1$$

- (2)产生(0,1)期间均匀分布的随机数 ξ .
- (3)如果 $\xi < [\Pi^4(s, K^2)]_{0(\alpha)}$, 则停止, 这是无光子的情况。
- (4) 如果 $\xi > [\Pi^4(s, K^2)]_{0(\alpha)}$, 辐射一个光子, 然后计算电子的虚度, 它是 $\xi = [\Pi^4(s, K^2)]_{0(\alpha)}$ 的解。
- (5) 随机地选择辐射光子的电子
- (6) 根据劈裂函数 $P(z)$, 在 $[0, 1 - \varepsilon]$ 期间选择电子的剩余动量比分 z . 根据辐射光子的粒子, 把动量比分 x_+, x_-, y_+, y_- 换成 z .
- (6) 算法结束

双光子过程的Born截面

- $e^+e^- \rightarrow \gamma(p_1)\gamma(p_2)$ 的费曼图

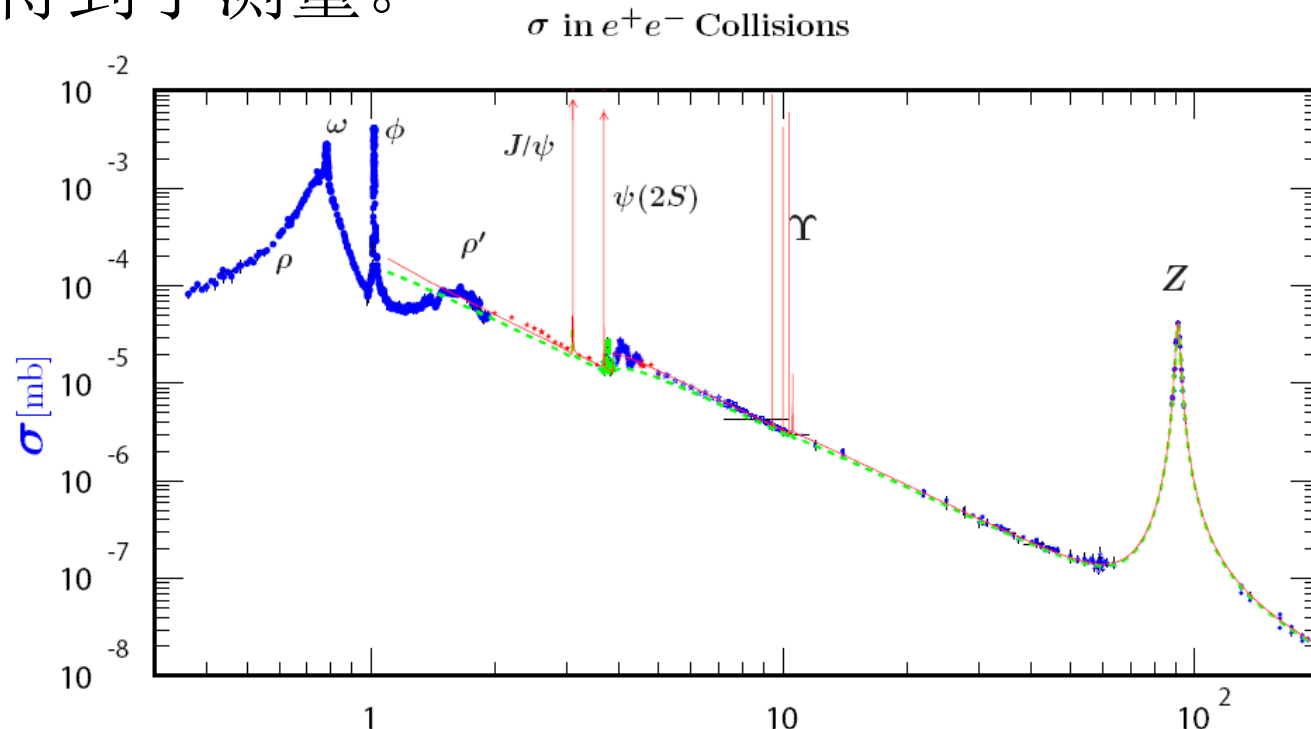


- Born截面满足:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

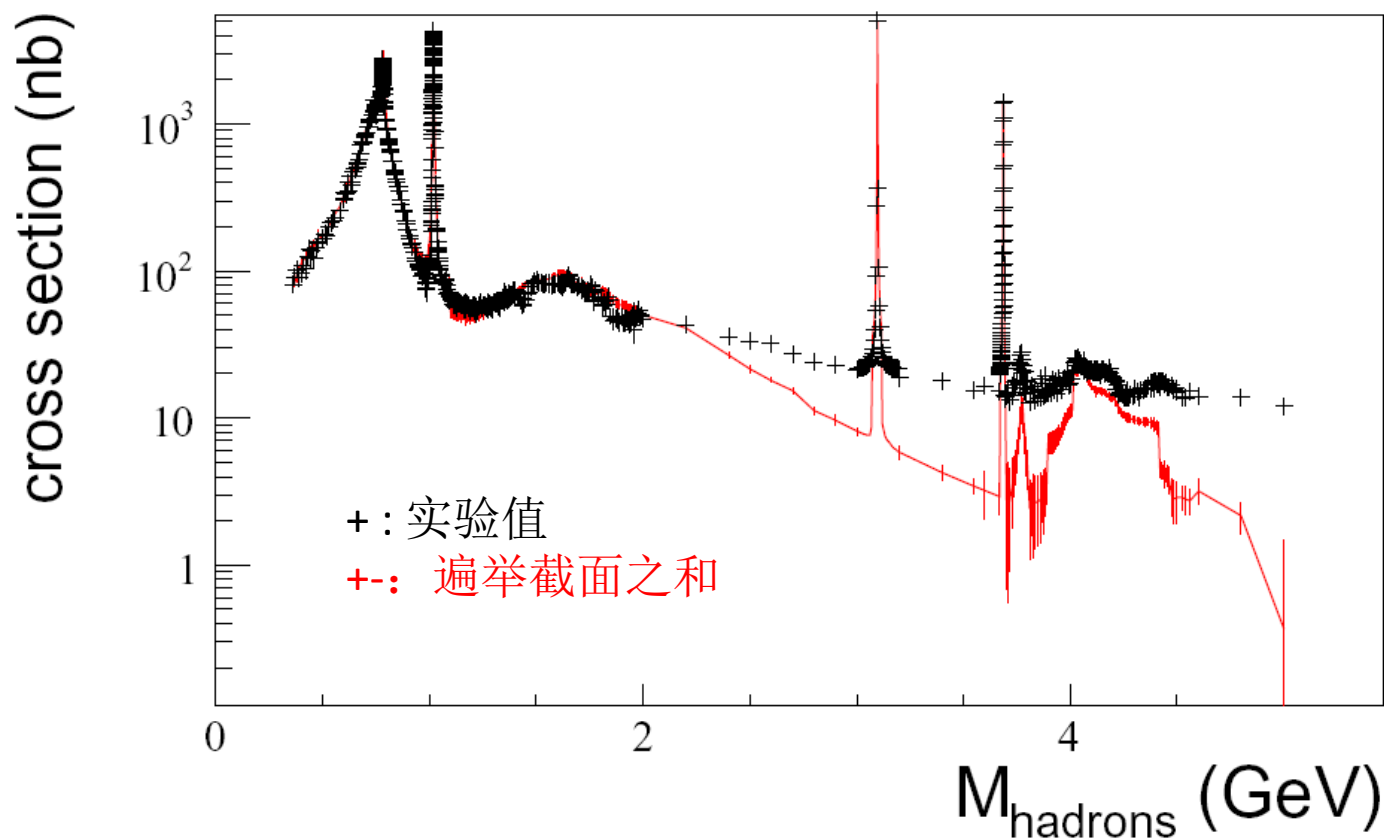
- Babayaga产生子中提供了双光子过程，V3.5版本的精度是1%. MC抽样方法与Bhabha过程类似。
- 此外，它还提供了 $\mu^+\mu^-$ 过程，精度是1%.

5.4.5: 强子截面测量

- Tau-粲能区总的强子截面(或者R-值)的精确测量, 可以提高真空极化计算的精度, 以及 μ 反常磁矩 $(g-2)_\mu$ 因子的精度和抽取 α_{QED} 的精度。
- 目前, 在Z-波色子及其以下的能区, 单举总强子截面的都得到了测量。



- 遍举(exclusive)过程截面的测量用于研究形状因子, 和寻找新的矢量粒子. 在tau-粲能区, 目前有70多个遍举到的截面得到了测量。这些遍举道的截面之和与总的强子截面的比较见图。



- Born截面的测量方法

$$\sigma = \frac{N^{obs} - N^{bg}}{L \varepsilon f_{ISR} f_{VP}},$$

N^{obs} : 观测事例数, N^{bg} : 本底事例数, L : 积分亮度
 f_{ISR} : 初态辐射修正因子, f_{VP} : 真空极化因子, ε : 效率

--说明:

- 探测效率与初态辐射因子和真空极化因子是相关的, f_{ISR} 和 f_{VP} 通常有产生子提供。
- 对于同一遍举道, 如果事例选择时用到了能动量守恒条件, 在不同能量点, $e f_{ISR} f_{VP}$ 的值是稳定的。

Phokhara产生子

- Phokhara 6.0 (realised at Dec. 2006)
- Source: <http://ific.uv.es/~rodrigo/phokhara/>
- 辐射修正精度: 次领头阶 (NLO)
- 轻子道: $\mu^+\mu^-$
- 强子道:

$$\pi^+\pi^-$$

$$2\pi^0\pi^+\pi^-, 2\pi^+2\pi^-$$

$$p\bar{p}, n\bar{n}, \Lambda\bar{\Lambda}$$

$$\pi^0\pi^+\pi^-, K^+K^-, K^0\bar{K}^0$$

截面的计算用形状因子, 参数通过实验确定,
程序模块化, 便于更新和替换。

初态辐射

●软光子和虚光子的贡献

初态辐射近似到次领头阶，考虑如下的过程：

$$e^+(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow \gamma^*(Q) + \gamma(k_1)$$

微分截面为：

$$d\sigma = \frac{1}{2s} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} d\Phi_2(p_1, p_2; Q, k) d\Phi_n(Q, q_1 \dots q_n) \frac{dQ_2}{2\pi}$$

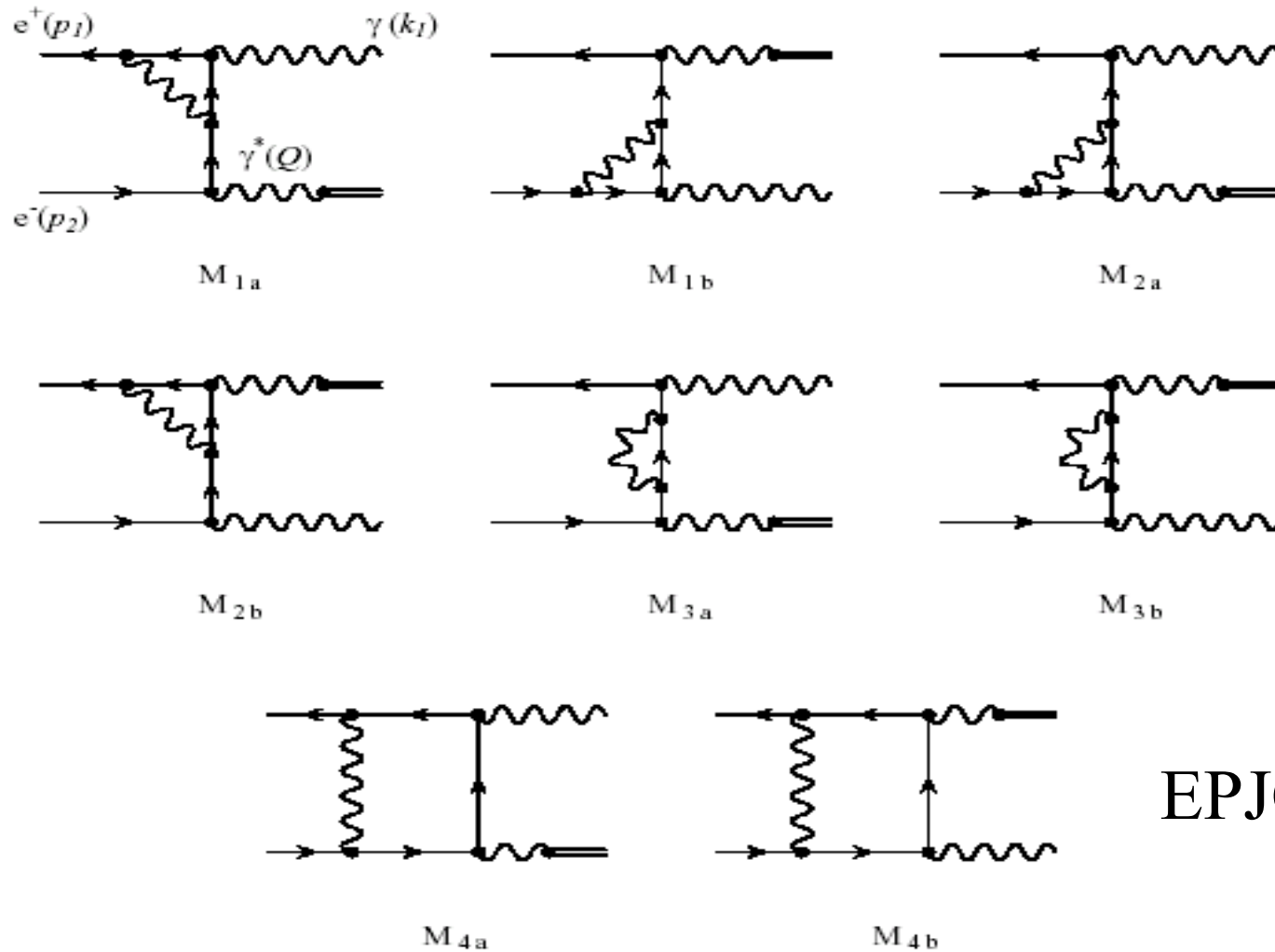
$L_{\mu\nu}$ ：次领头阶的轻子张量

$H^{\mu\nu}$ ：模型依赖的强子张量

对于 $\pi^+ \pi^-$ 过程， $H^{\mu\nu} = J^\mu J^{\nu+}$, J^μ 可以用形状因子来表达：

$$J^\mu = ieF_{2\pi}(Q^2)(q_{\pi^+} - q_{\pi^-})^\mu.$$

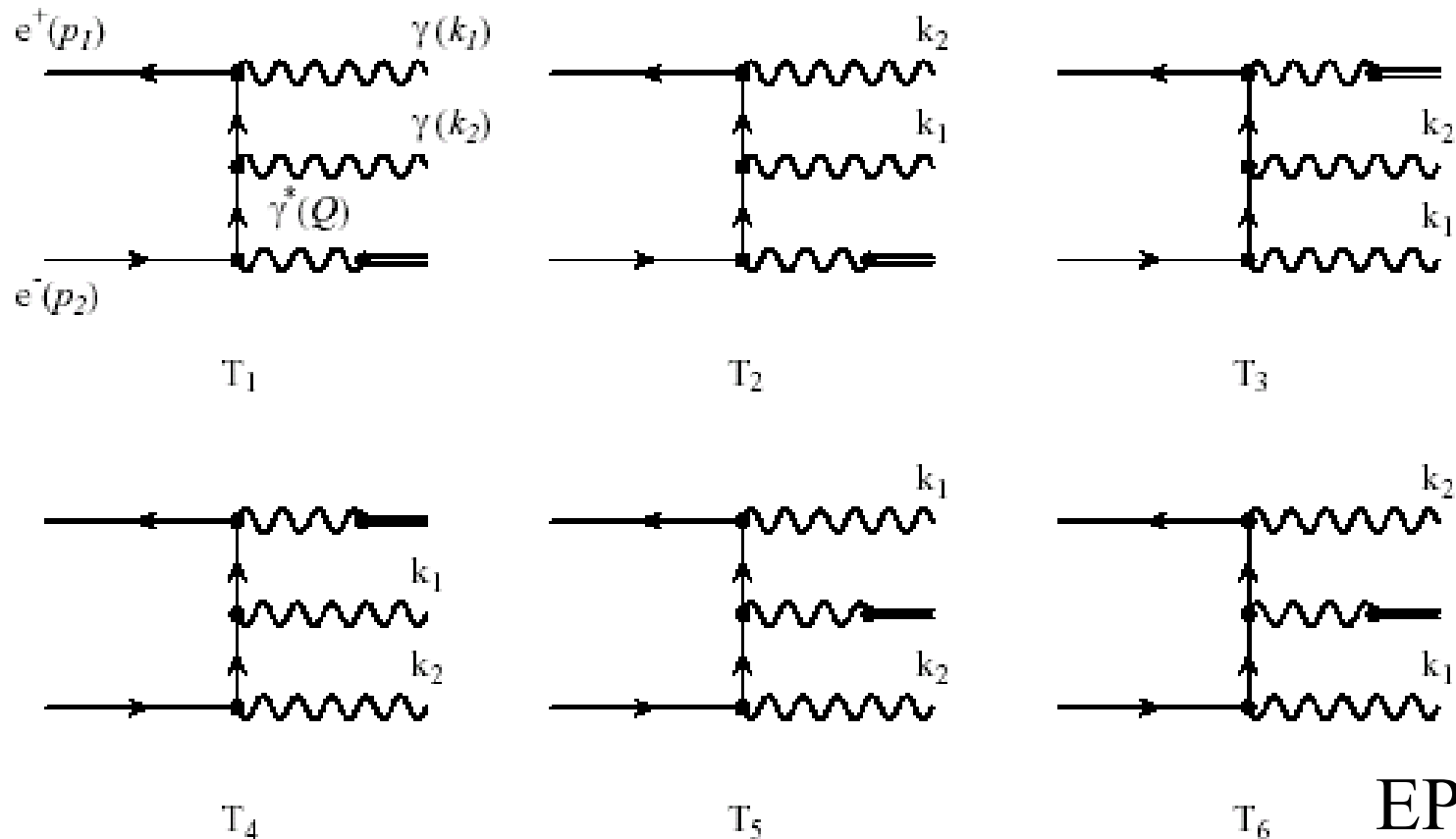
轻子张量 $L_{\mu\nu}$ 由次领头阶的费曼图计算给出:



EPJC24,71

Fig. 1. One-loop corrections to initial state radiation in $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{hadrons}$

- 两个光子过程对初态辐射修正的贡献

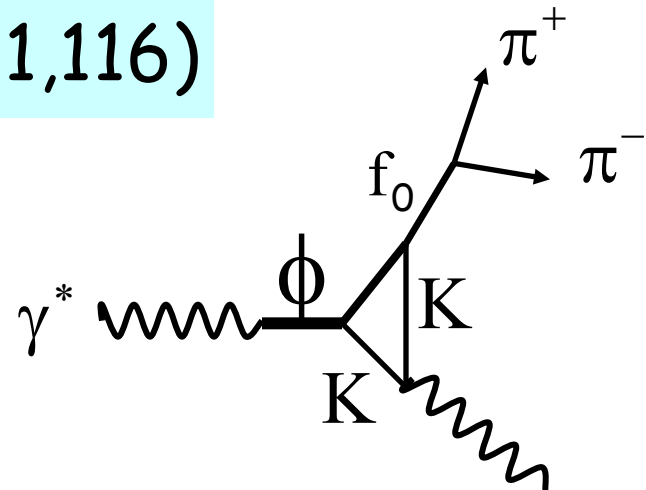
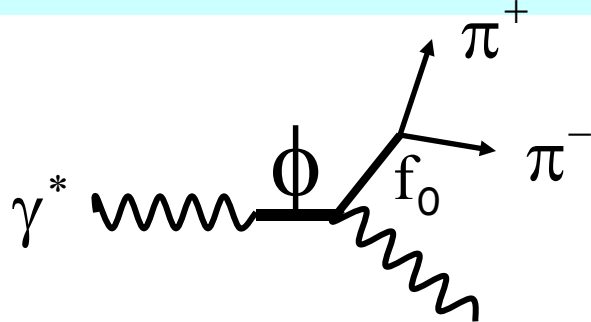


EPJC24,71

Fig. 2. Emission of two real photons from the initial state in e^+e^- annihilation into hadrons

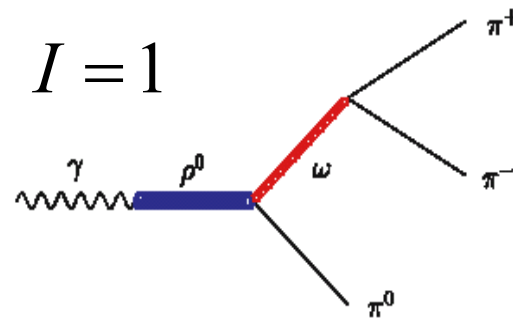
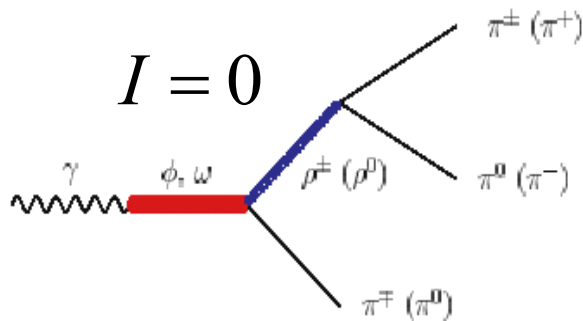
强子张量 $H^{\mu\nu}$ 是模型依赖，包括中间共振态的贡献：

$$\gamma^* \rightarrow \pi^+ \pi^- \text{ (Phys. Lett. B611,116)}$$

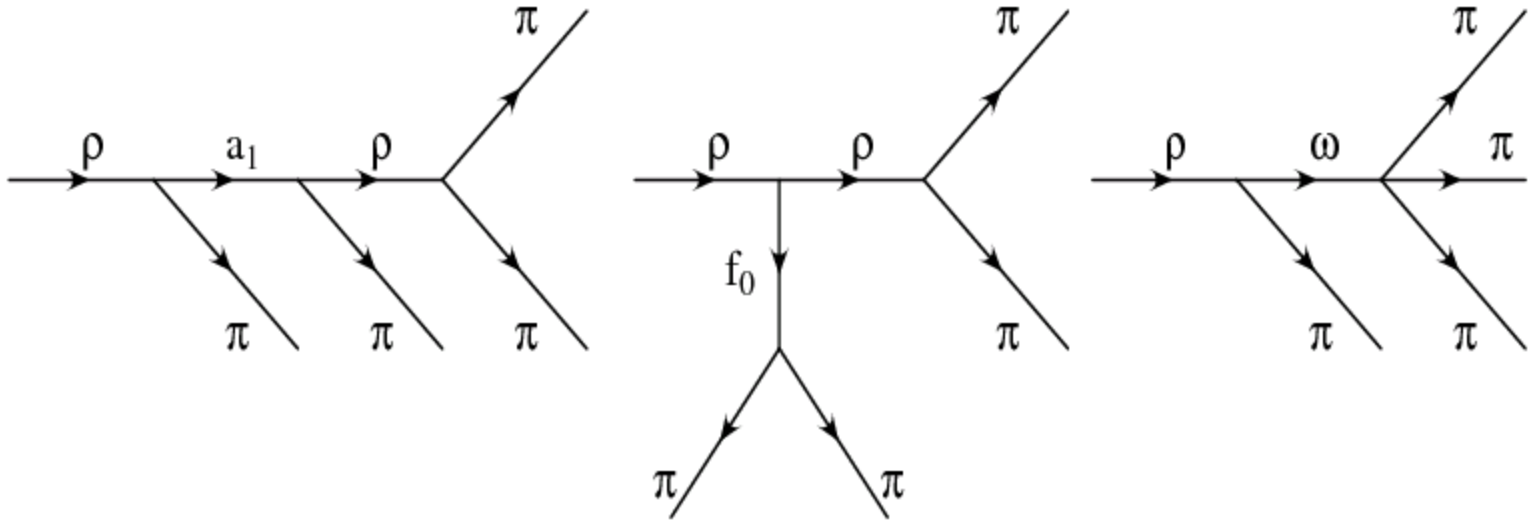


Switches in program: f0_model

$$\gamma^* \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^- \text{ (EPJC47,617)}$$



$$\gamma^* \rightarrow 4\pi$$



Eur.Phys.J.C18 : 497(hep-ph/0008262)

Nucl. Phys. B (proc. Suppl.)98,289

$$\gamma^* \rightarrow p\bar{p}, n\bar{n}, \Lambda\bar{\Lambda}$$

EPJC35,527

PRD75,074026

Pauli and Dirac form factor :

$$J_\mu = -ie\bar{u}(q_2)(F_1^N(Q^2)\gamma_\mu - \frac{F_2^N(Q^2)}{4m_N}[\gamma_\mu, \not{Q}])v(q_1)$$

$$H_{\mu\nu} = J_\mu J_\nu^+$$

Nucleon form factors are determined by fitting exp. data

•末态辐射和初态辐射的干涉效应:

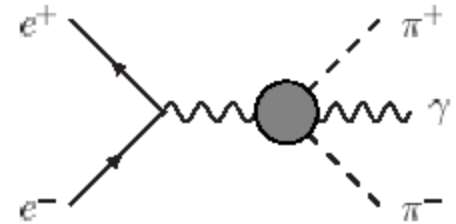
$$d\sigma = d\sigma_{\text{ISR}} + d\sigma_{\text{FSR}} + d\sigma_{\text{INT}}$$

ISR: 由束流平行的光子事例支配

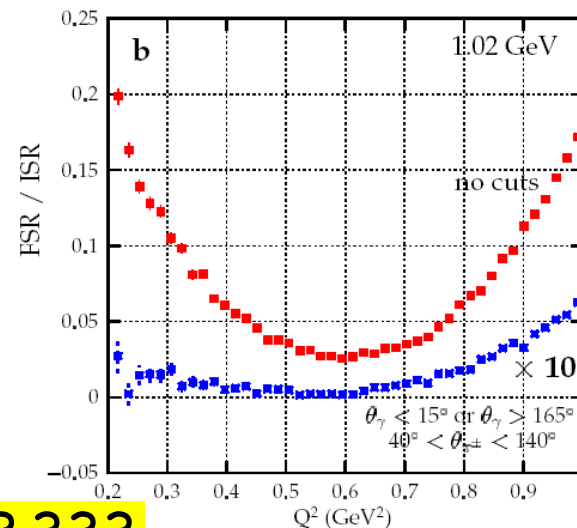
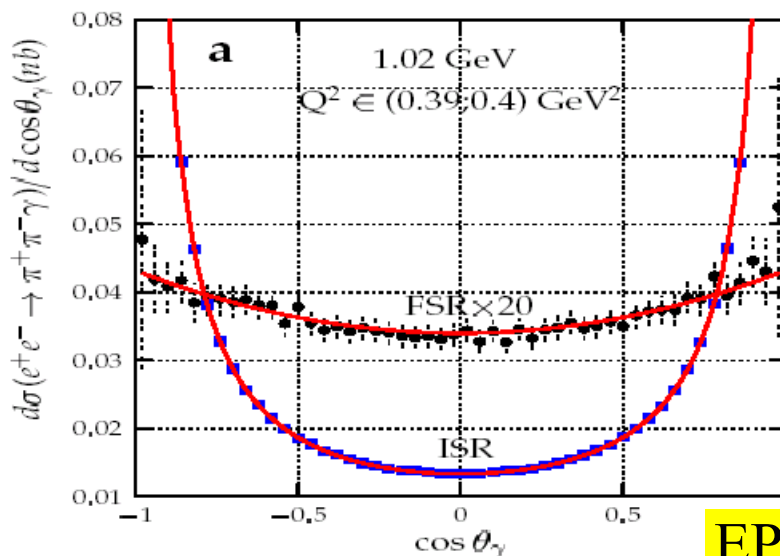
FSR: 由强子平行的光子事例支配

INT: 角分布非对称, 用于检验末态辐射方案

支招: 通过适当的角度选择, 可以把初态辐射和末态辐射分开。



FSR for
 $e^+e^- \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$



EPJC33,333

PHOKHARA中的相空间抽样方案

- 考虑如下过程的相空间：

$$e^+(p_1)e^-(p_2) \rightarrow h_1(q_1)\dots h_n(q_n)\gamma(k_1)\dots\gamma(k_m),$$

$h_i(q_i)$ 表示末态强子，动量为 q_i 。 Lorentz不变相空间为：

$$d\Phi_{m+n}(p_1, p_2; k_1, \dots, k_m, q_1, \dots, q_n) =$$

$$d\Phi_m(p_1, p_2; Q, k_1, \dots, k_m) d\Phi_n(Q; q_1, \dots, q_n) \frac{dQ^2}{2\pi},$$

其中， $Q = \sum q_i$ 对于末态为 $\pi^+\pi^-$ 过程，

$$d\Phi_2(Q; q_1, q_2) = \frac{\sqrt{1 - 4m^2 / Q^2}}{32\pi^2} d\Omega.$$

Ω 是 π 在 Q^2 静止系中定义的立体角。

对于单光子过程，相空间部分为：

$d\Phi_2(p_1, p_2; Q, k_1) = \frac{1 - Q^2/s}{32\pi^2} d\Omega_1$ ，其中， Ω_1 是在 e^+e^- 质心系中定义的光子的立体角。极角的蒙特卡罗抽样为：

$\cos \theta_1 = \frac{1}{\beta} \tanh(\beta t_1)$ ， $\beta = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$ 。其中 t_1 是 $(-\infty, \infty)$ 中的均匀分布的随机数。可以证明： $\cos \theta_1$ 的分布函数为：

$$f(\cos \theta_1) = \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_1},$$

这正是初态电子/正电子发射共线光子的角分布。

5.4.4: 共振态衰变

- 共振态是指不稳定的粒子，能衰变到更轻的粒子。不论在散射实验，还是产生实验中，观测到的同一个共振态被认为具有相同的质量、衰变宽度和自旋、宇称。
- 产生和衰变过程中的振幅满足因子化条件，共振态用Breit-Wigner或者Flatte公式表示，再乘上产生和衰变顶点函数，就是总的振幅。
- 振幅应该满足么正性、解析性、以及其他对称性的要求。

衰变振幅

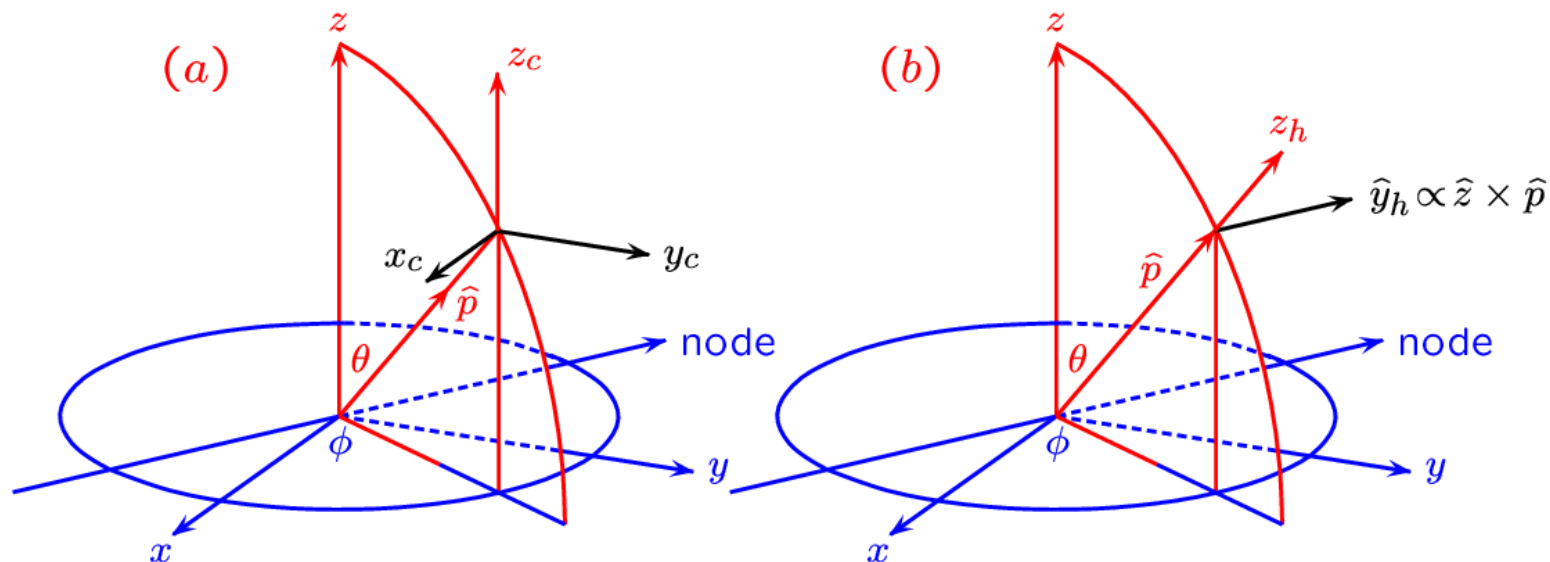
- 衰变振幅通常有两种表达形式，协变张量和螺旋度振幅形式。
- 螺旋度振幅能够把角度分离出来，常用来研究衰变的角分布形式，重点介绍这种方法。
- 对于两体衰变 $A(J, \eta_A) \rightarrow B(s, \eta_B) + C(\sigma, \eta_c)$, 括号中给出了粒子的(自旋, 宇称), 衰变振幅为:

$$A_{\lambda, \nu}^J(\theta, \phi; M) \propto D_{M, \lambda - \nu}^{J*}(\phi, \theta, 0) F_{\lambda, \nu}^J,$$

其中 M 是自旋 J 在 z -轴上的投影, λ, ν 是 B 和 C 粒子的螺旋度, 即是它们的自旋在 B 粒子飞行方向的投影。

θ, ϕ 是把母粒子自旋旋转到 B 粒子飞行方向角度。

$F_{\lambda,\nu}^J$ 是螺旋度振幅， $D_{M,\lambda-\nu}^J(\phi,\theta,0)$ 是Wigner-D函数。



图(a)母粒子静止坐标系，(b)粒子衰变的螺旋度坐标系

Wigner-D函数的定义：

$$D_{\mu,\nu}^J(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\mu\alpha} d_{\mu,\nu}^J(\beta) e^{-i\nu\gamma}$$

其中, $d_{m',m}^j$ 满足对称关系: $d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m',-m}^j$,

$d_{m,m'}^j(\theta)$ 的一些特例:

$$d_{0,0}^1 = \cos \theta, d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}, d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2},$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}, d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2},$$

$$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}, d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

在强衰变和辐射衰变中，宇称守恒，螺旋度振幅满足：

$$F_{\lambda,\nu}^J = \eta_A \eta_B \eta_C (-1)^{J-s-\sigma} F_{-\lambda,-\nu}^J.$$

$F_{\lambda,\nu}^J$ 也可以用 LS 耦合振幅 G_{LS}^J 来表示。对于两体衰变
 $A(J, \eta_A) \rightarrow B(s, \eta_B) + C(\sigma, \eta_c)$, $S = s \otimes \sigma$, l 是BC间的轨道角动量，有

$$F_{\lambda\nu}^J = \sum_{lS} \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} \langle l0S\delta | J\delta \rangle \langle s\lambda\sigma-\nu | S\delta \rangle G_{lS}^J.$$

对于两体衰变，可以通过螺旋度振幅分析，给出衰变的角分布。

例： $e^-e^+ \rightarrow J/\psi(M) \rightarrow \rho^0(\lambda)\pi^0(\mu)$ 的螺旋度振幅分析
 螺旋度振幅 $F_{\lambda,\mu}$ 有三个分量： $F_{1,0}, F_{0,0}, F_{-1,0}$ ，由于宇称守恒，
 有 $F_{\lambda,\mu} = -F_{-\lambda,-\mu}$ ，因此 $F_{-1,0} = -F_{1,0}, F_{0,0} = 0$ 。独立的振幅只有一个，选 $F_{1,0}$ 。振幅为：

$$\begin{aligned}
 |M|^2 &\propto \sum_{m=\pm 1, \lambda=0, \pm 1} D_{m,\lambda}^1(\phi, \theta, 0) D_{m,\lambda}^{1*}(\phi, \theta, 0) F_{\lambda,0} F_{\lambda,0}^* \\
 &= d_{1,1}^1(\theta) d_{1,1}^{1*}(\theta) |F_{1,0}|^2 + d_{1,-1}^1(\theta) d_{1,-1}^{1*}(\theta) |F_{-1,0}|^2 \\
 &\quad + d_{-1,1}^1(\theta) d_{-1,1}^{1*}(\theta) |F_{1,0}|^2 + d_{-1,-1}^1(\theta) d_{-1,-1}^{1*}(\theta) |F_{-1,0}|^2 \\
 &= 2 \left(d_{1,1}^1(\theta) d_{1,1}^{1*}(\theta) |F_{1,0}|^2 + d_{1,-1}^1(\theta) d_{1,-1}^{1*}(\theta) |F_{-1,0}|^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$|M|^2 \propto \left[\left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-\cos\theta}{2} \right)^2 \right] |F_{1,0}|^2$$

$$\propto 1 + \cos^2 \theta$$

- 共振态的参数化

共振态的振幅通常用Breit-Wigner函数来表达:

$$BW(s) = \frac{1}{s - M_{BW}^2 + i\sqrt{s}\Gamma_{tot}(s)}.$$

有三种变化形式:

- (1)如果共振态衰变的质量阈远离质量, 可以 $\Gamma_{tot}(s) \rightarrow \Gamma_{BW}$;
- (2)对于窄共振态, 可以 $\sqrt{s} \rightarrow M_{BW}$;

(3)在衰变的质量阈附近,

$$\Gamma(s) = \sum_c \Gamma_{R \rightarrow c} \left(\frac{q_c}{q_{R_c}} \right)^{2L+1} \left(\frac{F_{Lc}(q_c, q_0)}{F_{Lc}(q_{R_c}, q_0)} \right)^2.$$

其中, q_c 是末态粒子在母粒子静止系中的动量大小, q_{R_c} 对应于 M_{BW} 动量大小, $F_{Lc}(q_c, q_0)$ 是末态粒子的角动量为 L 的离心势垒形状因子。

BesEvtGen

- ✓ BesEvtGen是基于EvtGen产生子发展的tau-粲能区的产生子，在EvtGen的模型基础上，添加了更多的tau-粲物理的模型
- ✓ EvtGen产生子是BaBar和CLEO合作组联合发展的、为研究B物理而研制的产生子
- ✓ EvtGen平台具有强大的功能，不仅支持粲夸克偶素的遍举衰变模型，也提供了连结其它产生子的接口，如PYTHIA, PHOTOS等。
- ✓ BesEvtGen大多属于动力学产生子，实现的算法采用基于衰变的振幅概率的舍选抽样，对于级联式衰变，EvtGen平台能够自动计算各级衰变的自旋密度矩阵，并把它们关联起来。

EvtGen的算法

为了说明EvtGen事例产生的算法，我们以衰变 $B \rightarrow D^* \tau \nu$, $D^* \rightarrow D\pi, \tau \rightarrow \pi \nu$ 为例。这个例子可以推广到更一般的情况。这个级联式衰变的振幅写为：

$$A = \sum_{\lambda_{D^*}, \lambda_\tau} A_{\lambda_{D^*}, \lambda_\tau}^{B \rightarrow D^* \tau \nu} A_{\lambda_{D^*}}^{D^* \rightarrow D\pi} A_{\lambda_\tau}^{\tau \rightarrow \pi \nu}.$$

$\lambda_{D^*}, \lambda_\tau$ 是 D^*, τ 的自旋。

•传统的抽样方法：

用相空间模型产生衰变 $B \rightarrow D^* \tau \nu, D^* \rightarrow D\pi, \tau \rightarrow \pi \nu$, 得到各级衰变粒子的四动量，从而计算这个级联式衰变的几率 $P = |A|^2$. 抽样步骤如下：

- (1) 在这个级联式衰变的相空间上找到几率的最大值 P_{\max} .
- (2) 产生相空间事例 N_i .
- (3) 产生 $(0, 1)$ 区间上的均匀分布的随机数 ξ , 如果 $\xi \leq P/P_{\max}$, 接受事例 N_i , 否则, 回到(2).

这种抽样有三大局限:

1. 寻找到级联式衰变相空间上的最大值CPU费用高。
2. 对于长链衰变, 如果某个中间过程的抽样不满足总体舍选抽样的要求, 则整个衰变链都被舍弃, 抽样效率会很低。
3. 对于相同的中间态衰变, 如果出现在不同的衰变链中, 代码难于模块化, 共用程度低。

以上这种抽样的方式是基于几率模型，EvtGen的抽样是采用衰变振幅，各级衰变分别抽样，各级的衰变的关联通过自旋密度矩阵实现。抽样步骤为：

(1) 用相空间模型产生衰变 $B \rightarrow D^* \tau \nu$, 计算相应的衰变几率

$$P = \sum_{\lambda_{D^*}, \lambda_\tau} |A_{\lambda_{D^*}, \lambda_\tau}^{B \rightarrow D^* \tau \nu}|^2, \text{再用舍选抽样, 直到抽到满足几率}$$

分布的事例, 然后转到下一级 D^* 衰变的抽样。

(2) 计算 D^* 的自旋密度矩阵 $\rho_{\lambda_{D^*}, \lambda'_{D^*}}^{D^*} = \sum_{\lambda_\tau} A_{\lambda_{D^*}, \lambda_\tau}^{B \rightarrow D^* \tau \nu} \left(A_{\lambda'_{D^*}, \lambda_\tau}^{B \rightarrow D^* \tau \nu} \right)^*$, 然后

用相空间产生 $D^* \rightarrow D \pi$ 衰变, 用末态粒子的运动学量计算 D 的衰变几率:

$$P_{D^*} = \frac{1}{\text{Tr} \rho^{D^*}} \sum_{\lambda_{D^*}, \lambda'_{D^*}} \rho_{\lambda_{D^*}, \lambda'_{D^*}}^{D^*} A_{\lambda_{D^*}}^{D^* \rightarrow D\pi} \left(A_{\lambda'_{D^*}}^{D^* \rightarrow D\pi} \right)^*,$$

根据 P_{D^*} 用舍选抽样抽取 $D^* \rightarrow D\pi$ 衰变，然后转到 τ 衰变抽样。

(3) 先计算 D^* 的自旋密度矩阵元

$$\rho_{\lambda_{D^*}, \lambda'_{D^*}}^{D^*} = A_{\lambda_{D^*}}^{D^* \rightarrow D\pi} \left(A_{\lambda'_{D^*}}^{D^* \rightarrow D\pi} \right)^*, \text{这是用} D \text{衰变的子粒子运动学}$$

量计算的，称为后向自旋密度矩阵元(back spin-density matrix). 然后再计算 τ 的自旋密度矩阵元：

$$\rho_{\lambda_\tau, \lambda'_\tau}^\tau = \sum_{\lambda_{D^*}, \lambda'_{D^*}} \rho_{\lambda_{D^*}, \lambda'_{D^*}}^{D^*} A_{\lambda_{D^*}, \lambda_\tau}^{B \rightarrow D^* \tau \nu} \left(A_{\lambda'_{D^*}, \lambda'_\tau}^{B \rightarrow D^* \tau \nu} \right)^*.$$

计算 τ 的衰变几率：

$$P_\tau = \frac{1}{\text{Tr} \rho^\tau} \sum_{\lambda_\tau, \lambda'_\tau} \rho_{\lambda_\tau, \lambda'_\tau}^\tau A_{\lambda_\tau}^{\tau \rightarrow \pi \nu} \left(A_{\lambda'_\tau}^{\tau \rightarrow \pi \nu} \right)^*,$$

用相空间产生 $\tau \rightarrow \pi \nu$ 衰变，得到末态粒子的运动学量，根据计算得到的衰变几率 P_τ ，用舍选抽样的方法，接受 $\tau \rightarrow \pi \nu$ 的衰变事例。

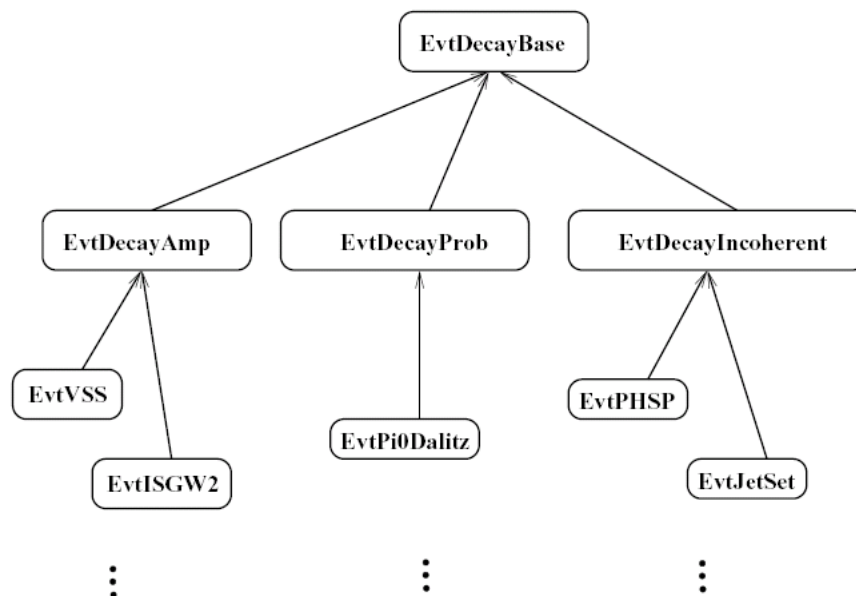
用自旋密度矩阵元关联的方法，把 $\tau \rightarrow \pi \nu$ 的衰变与其他衰变链起来，其效果与完整的衰变这幅计算的几率抽样一致的。

衰变模型

- EvtGen中的衰变模型有三种，衰变振幅模型、衰变几率模型和不相干的衰变模型。
- 衰变振幅模型：
利用自旋密度矩阵元关联衰变振幅的方法实现级联式衰变的抽样，包含了完整的动力学信息。
- 衰变几率模型：
单级衰变根据衰变几率抽样产生，但它与衰变链上的其他衰变没有关联。这往往用来描述多体衰变，如三体衰变根据Dalitz振幅产生。无关联的原因是EvtGen目前只提供两体衰变的自旋密度矩阵元的关联计算。

- 不相干的衰变模型：
比如相空间模型，接受Pythia产生子提供的末态粒子运动量的模型。
- 在EvtGen软件框架中，对应每一级粒子的衰变，可以创建一个模型。创建衰变振幅模型，用户只需要对每一级衰变提供相应的振幅，EvtGen会把衰变链上的各级衰变振幅用自旋密度矩阵关联起来。

- 三种不同的模型都是从从
EvtDecayBase这个
基类派生出来的。



例： EvtVSS模型

VSS 模型是矢量介子衰变到两个赝标量介子。协变张量的振幅可以写为 $M = \varepsilon \bullet p$, ε 是矢量介子的极化矢量, p 是末态粒子的四动量.

- 头文件: EvtVSS.hh

```
#define EVT_VSS_HH  
#include "EvtGen/EvtDecayAmp.hh"  
#include "EvtGen/EvtParticle.hh"  
class EvtVSS:public EvtDecayAmp {  
public:
```

```
EvtVSS() {} //结构体函数  
virtual ~EvtVSS(); //析构函数
```

```
EvtDecayBase* clone();  
void getName(EvtString& name);
```

```
void init();  
void initProbMax();  
void decay(EvtParticle *p);  
};  
#endif
```


- 定义函数

```
EvtDecayBase* EvtVSS::clone(){  
    return new EvtVSS;  
}
```

每次在Decay表中调用这个模型的时候，就创建这个模型的一个实体。

```
void EvtVSS::getName(EvtString& model_name){  
    model_name="VSS";  
}
```

指定模型的名称，在解析衰变表时被调用。

EvtReadDecay这个类在读取衰变表时，会把模型名称与getName定义的模型名称进行比较，查看是否匹配。

```
void EvtVSS::initProbMax() {  
    setProbMax(1.0);  
}
```

设置振幅的最大值。注意：如果设置比真正的最大值小，当事例产生过程中，计算的值比设置大时，系统会报警告信息，这时抽样有问题。

```
void EvtVSS::Init(){  
    // check that there are 0 arguments  
    if (getNArg()!=0) {  
        report(ERROR,"EvtGen") << "EvtVSS generator expected "  
            << " 0 arguments but found:"<<getNArg()<<endl;  
        report(ERROR,"EvtGen") << "Will terminate execution!"<<endl;  
        ::abort();  
    }  
}
```

```

if ( getNDaug()!=2) {
    report(INFO,"EvtGen") << getNDaug() <<"
                                "<<EvtPDL::name(getDaug(0))<<endl;
    report(ERROR,"EvtGen") << "EvtVSS generator expected "
                                << " a 2 daughters, found:"<<

    getNDaug()<<endl;
    report(ERROR,"EvtGen") << "Will terminate execution!"<<endl;
    ::abort();
}
EvtSpinType::spintype parenttype = EvtPDL::getSpinType(getParentId());
EvtSpinType::spintype d1type=EvtPDL::getSpinType(getDaug(0));
EvtSpinType::spintype d2type=EvtPDL::getSpinType(getDaug(1));

if ( parenttype != EvtSpinType::VECTOR ) {
    report(ERROR,"EvtGen") << "EvtVSS generator expected "
                                << " a VECTOR parent, found:"<<

    EvtPDL::name(getParentId())<<endl;
    report(ERROR,"EvtGen") << "Will terminate execution!"<<endl;
    ::abort();
}

```

```

if ( d1type != EvtSpinType::SCALAR ) {
    report(ERROR,"EvtGen") << "EvtVSS generator expected "
        << " a SCALAR 1st daughter, found:"<<
        EvtPDL::name(getDaug(0))<<endl;
    report(ERROR,"EvtGen") << "Will terminate execution!"<<endl;
    ::abort();
}
if ( d2type != EvtSpinType::SCALAR ) {
    report(ERROR,"EvtGen") << "EvtVSS generator expected "
        << " a SCALAR 2nd daughter, found:"<<
        EvtPDL::name(getDaug(1))<<endl;
    report(ERROR,"EvtGen") << "Will terminate execution!"<<endl;
    ::abort();
}
}

```

- Init函数用于检查用户指定的衰变是不是与VSS模型匹配。如果不匹配，则终止程序执行。

```

void EvtVSS::Decay( EvtParticle *p){
    p->initializePhaseSpace(getNDaug(),getDaugs());
    EvtVector4R pdaug = p->getDaug(0)->getP4();
    double norm=1.0/pdaug.d3mag();
    vertex(0,norm*pdaug*(p->eps(0)));
    vertex(1,norm*pdaug*(p->eps(1)));
    vertex(2,norm*pdaug*(p->eps(2)));
    return;
}

```

在Decay函数中对于衰变振幅，vertex(spin_index, amplitudes)对于不同自旋分量对应的振幅。

- VSS模型的调用，例如： $J/\psi \rightarrow \pi^+ \pi^-$

Decay J/psi

1 pi+ pi- VSS;

Enddecay

End

格式： Br son1 son2 ... Model_Name

- 衰变卡片

对应于一级
衰变

下一级衰变

```
Decay 母粒子的名称  
Br  $x_1$   $x_2$   $\dots$   $x_n$  衰变模型 (参数);  
Enddecay  
  
.....  
  
End
```

—几点说明

1. 衰变卡片中的粒子名称，必须是EvtGen的粒子表中定义的，衰变模型必须是EvtGen中的注册模型。衰变模型的引用及参数必须按照手册中的格式要求填写。EvtGen在初始化时如果检测到没有定义的粒子或模型，将终止程序执行。

2. 如果衰变链中某一级的衰变没有指定分支比和模型，EvtGen将会按照一个内置的衰变卡进行衰变，衰变模式是按照粒子表中现有的衰变道抽样。
3. 如果某个母粒子的衰变道分支比之和大于或者小于1，EvtGen平台将会对这些道的分支比重新归一。

衰变卡片例子: $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi, J/\psi \rightarrow e^+ e^-$

```
Decay psi(2S)
1.0 J/psi pi+ pi- VVPIPI;
Enddecay

Decay J/psi
1.0 e+ e- VLL;
Enddecay

End
```

• HELAMP模型

两体衰变的螺旋度振幅模型，模型调用格式：

BrFr son1 son2 HELAMP amplitudes;

- BrFr是衰变分支比，son1,son2是子粒子的名称，HELAMP是模型名称，amplitudes是参数，是衰变的所有螺旋度振幅，是复数。每个螺旋度振幅用两个量来表示，即振幅大小和相位。
- 螺旋度振幅的排序：螺旋度振幅有两个指标，分别是第一，二个粒子的螺旋度取值，先把第一个指标固定在最大值上，然后按第二个指标从大到小依次排列振幅，接着第一个指标减一，再依次按第二个指标从大到小依次排列振幅，直到第一个指标达到最小值。

- 对于强衰变和电磁过程，螺旋度振幅的取值要考虑P-宇称守恒的要求。

●例如用HELAMP模型产生衰变 $J/\psi \rightarrow \rho^0 \pi^0$ 。

粒子	J/ψ	ρ^0	π^0
P-宇称:	-1	-1	-1
螺旋度取值:		$\lambda = \pm 1, 0$	$\mu=0$

螺旋度振幅 $H_{\lambda,\mu}$ 的有三个分量: $H_{1,0}, H_{0,0}, H_{-1,0}$

P-宇称要求: $H_{-\lambda,-\mu} = \eta\eta_1\eta_2(-1)^{J-s_1-s_2} H_{\lambda,\mu}$

即 $H_{-\lambda,-\mu} = -H_{\lambda,\mu}$, 所以有 $H_{-1,0} = -H_{1,0}, H_{0,0} = 0$

所以，三个振幅只有一个独立的变量，通常可以这个独立的量取成1. HELAMP的参数为：

HELAMP $|H_{1,0}| \arg(H_{1,0}) |H_{0,0}| \arg(H_{0,0}) |H_{-1,0}| \arg(H_{-1,0})$

衰变卡片写为：

```
Decay J/psi
1 rho0 pi0 HELAMP 1 0 0 0 1 3.1415926;
Enddecay
End
```

这样产生的角分布满足 $d\sigma/d\cos\theta \propto (1+\cos^2\theta)|\Phi_{1,0}|^2$.
所以，HELAMP中的参数 π 也可以取为0，效果是一致的。

作业:

1. 领头阶近似下, Bhabha过程的微分截面的角分布为

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \frac{(3 + \cos^2\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2}, \text{其中, } \theta \text{ 是电子或者正电}$$

子的极角。在 $-0.99 \leq \cos\theta \leq 0.99$ 范围内, 写出极角的蒙特卡罗抽样算法。

2. 在PHOKHARA产生子中, 共线光子的极角 $\cos\theta_1$ 的抽样:

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\beta} \tanh(\beta t_1), t_1 \text{ 是 } (-\infty, \infty) \text{ 的均匀分布的随机数,}$$

$\beta = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$, s 是 e^+e^- 质心系的能量。证明极角的密度

$$\text{函数为 } f(\cos\theta_1) = \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2\theta_1}.$$

3. 如果 e^+e^- 的质心能量为 $\sqrt{s} = 3.773\text{GeV}$,用窄共振态近似, 估算 ω, ϕ 和 J/ψ 的产生截面。

4. 在 e^+e^- 对撞事例中的 J/ψ , 它的两体衰变中末态粒子的角分布满足 $\frac{dN}{d\cos\theta} \propto 1 + \alpha \cos^2\theta$, 其中, α 称为角分布系数, 证明

(a) 在 $J/\psi \rightarrow VP$ 衰变中, $\alpha = 1$;

(b) 在 $J/\psi \rightarrow PP$ 衰变中, $\alpha = -1$;

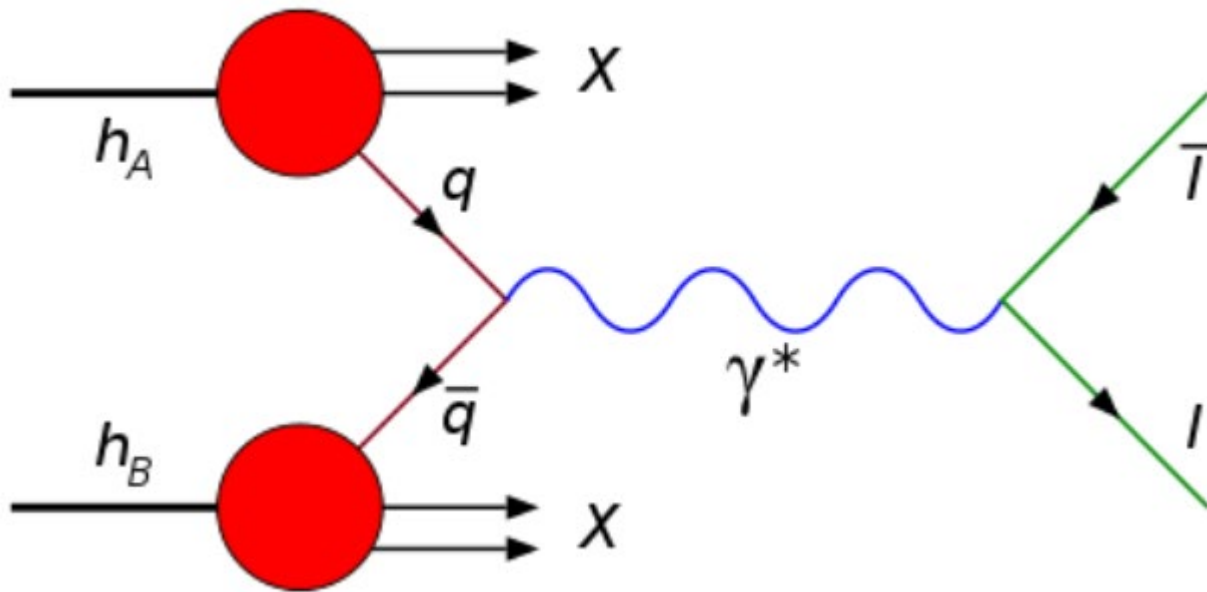
(c) 在 $J/\psi \rightarrow B_8\bar{B}_8, B_{10}\bar{B}_{10}$ 衰变中, $-1 \leq \alpha \leq 1$, 写出 α 与螺旋度振幅的关系。

其中, V, P, B_8, B_{10} 表示矢量介子, 赝标量介子, 八重态和10重态重子, \bar{B} 表示反重子。

5. 对于级联式衰变 $\psi(2S) \rightarrow \gamma \chi_{c0}, \chi_{c0} \rightarrow \gamma J/\psi, J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$,
用EvtGen中的HELAMP模型, 写出事例产生的衰变卡片。

Drell-Yan 过程

$$q\bar{q} \rightarrow \gamma^*/Z^0 \rightarrow l^+l^-$$



Sidney Drell and Tung-Mow Yan @1970

[返回](#)

返回

