

粒子物理与核物理实验中的 数据分析

王喆
清华大学

第9章-2：置信区间，
似然比求和

Feldman & Cousins 上限

贝叶斯上限的问题：

PRD57, 3873 (1998)

对于泊松过程包含了本底以及有物理边界条件的高斯误差，如何设置上限并给出两边的置信区间？

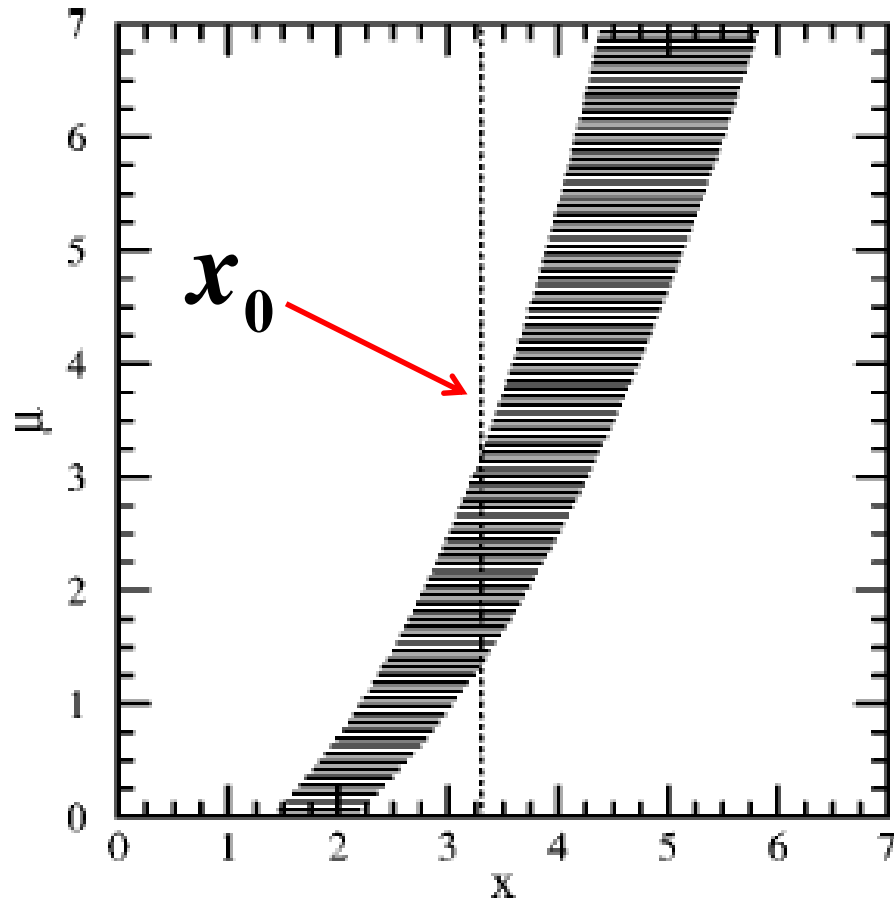
符号定义：用下标 t 表示对应的**未知真值**，下标 0 表示对应的实验测量值，用 α 表示置信区间C.L.。

$$\mu_t, n_0, \alpha$$

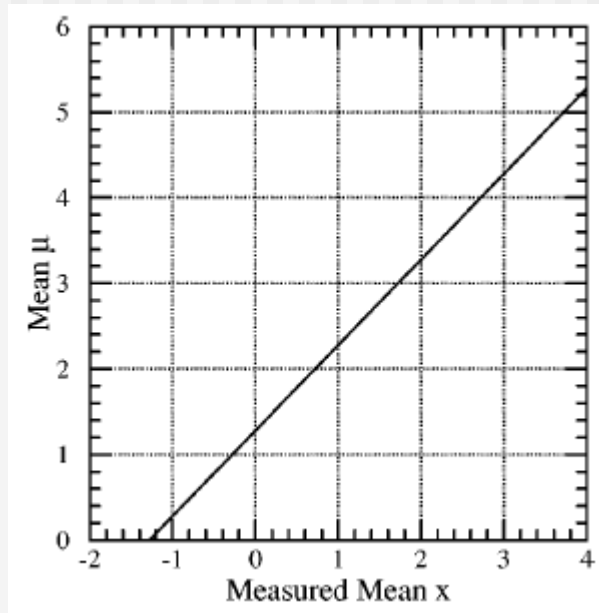
注意：经典置信区间与贝叶斯置信区间的区别

$$P(\mu \in [\mu_1, \mu_2]) = \alpha \qquad \int_{\mu_1}^{\mu_2} P(\mu_t | x_0) d\mu_t = \alpha$$

经典置信区间的置信带

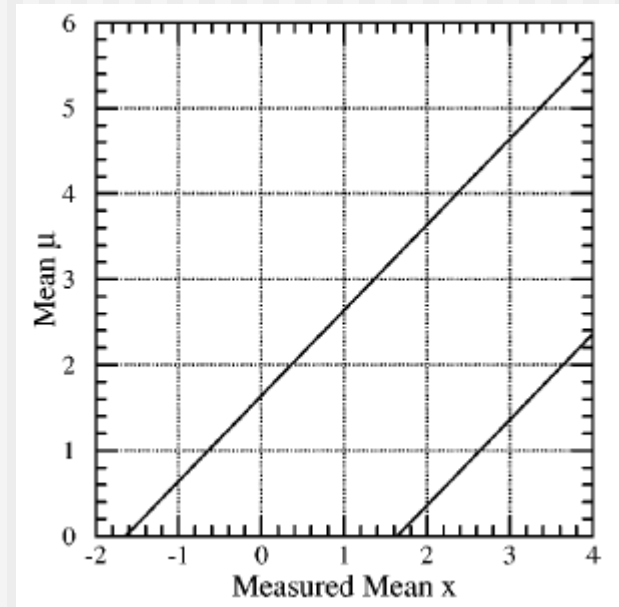


90%的标准置信带：高斯区间



$$P(x < x_1 | \mu) = 1 - \alpha$$

一个具有RMS偏差单位的高斯量均值的90%上限。带中的第2条线在 $x = +\infty$ 处。



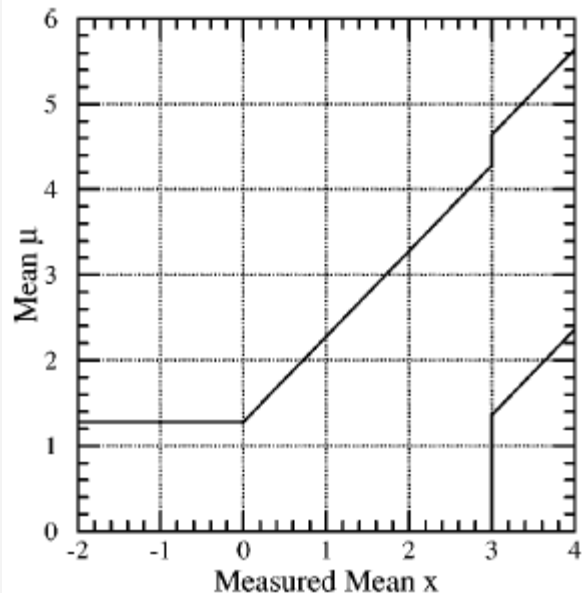
$$P(x < x_1 | \mu) = P(x > x_2 | \mu) = (1 - \alpha) / 2$$

一个具有RMS偏差单位的高斯量均值的90%中心置信区间。

对小量的测量:

如果结果 x 小于3个标准偏差时, 结果从表中给出上限, 否则给出中心置信区间。

如果对一个物理正定的量测量得到负值时, 在给出置信区间时认为测量值为零。



问题: 按照该方法, 置信带不再有效, 因为置信区间并不对应于相应的概率值。例如, 对于 $1.36 < \mu < 4.28$, 覆盖的区间为85%而不是90%。

$$P(\mu \in [\mu_1, \mu_2]) \neq \alpha$$

上限、下限 与 双边区间 突然跳变 (flip-flopping)

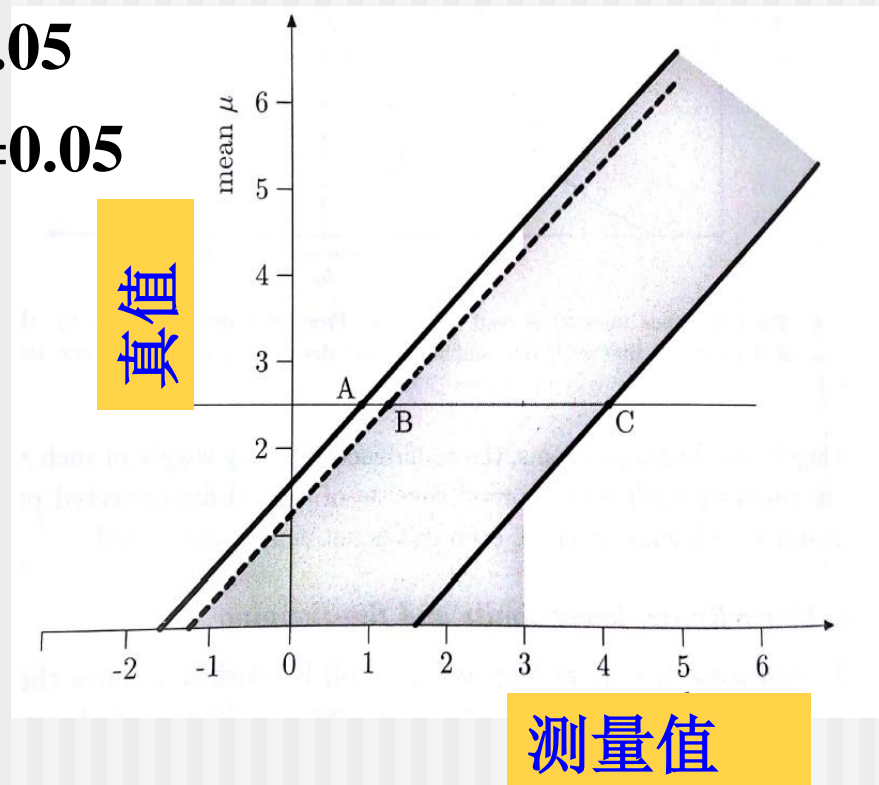
实线为90%的对称区间, $\alpha=\beta=0.05$

虚线为单边的上限, $\alpha=0.10, \beta=0.05$

1. 通常对某一结果, 假如显著性超过某一值 3σ , 就报道双边区间

2. 反之则只报道上限

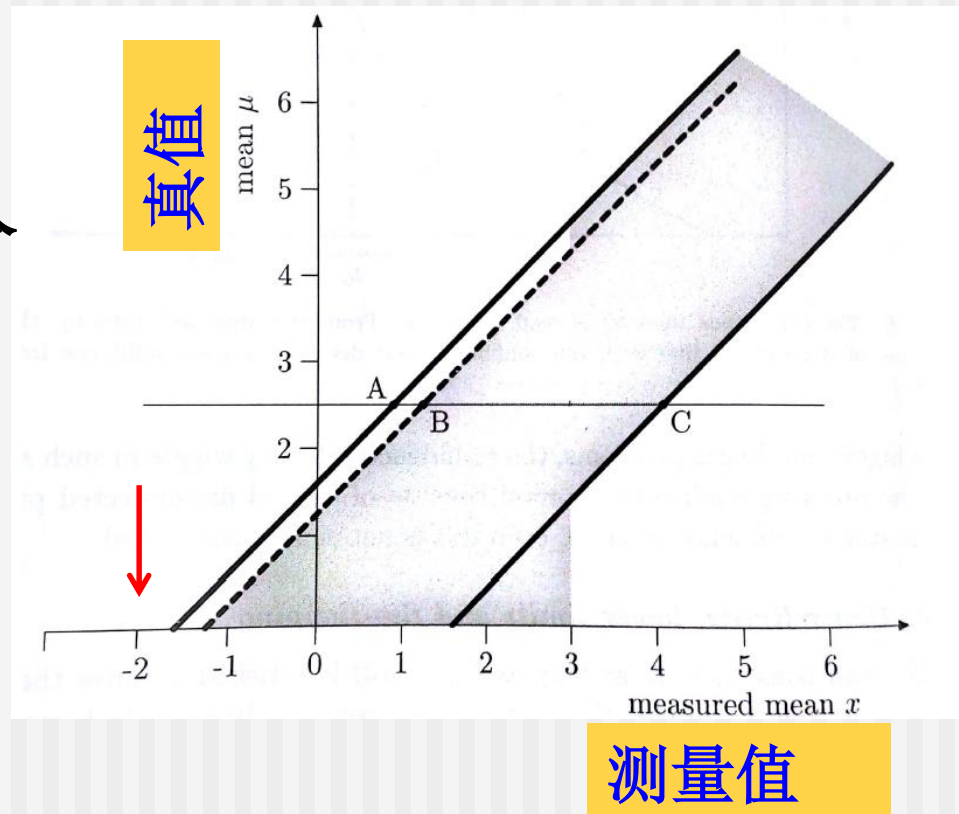
3. 在选择上有人为的任意性——突然跳变



在该图中, 测量值为偏离0的程度, 跳变发生在 3σ 的位置

物理边界

1. 某些物理量是有约束的，例如非负（质量，分支比）。
2. 假如测量值为 -2 ，真值的上限为负
3. 明显是不合理的，应该有特别的处理



在该图中，测量值为偏离**0**的程度

统一方法（似然比求和）

朱永生11.2

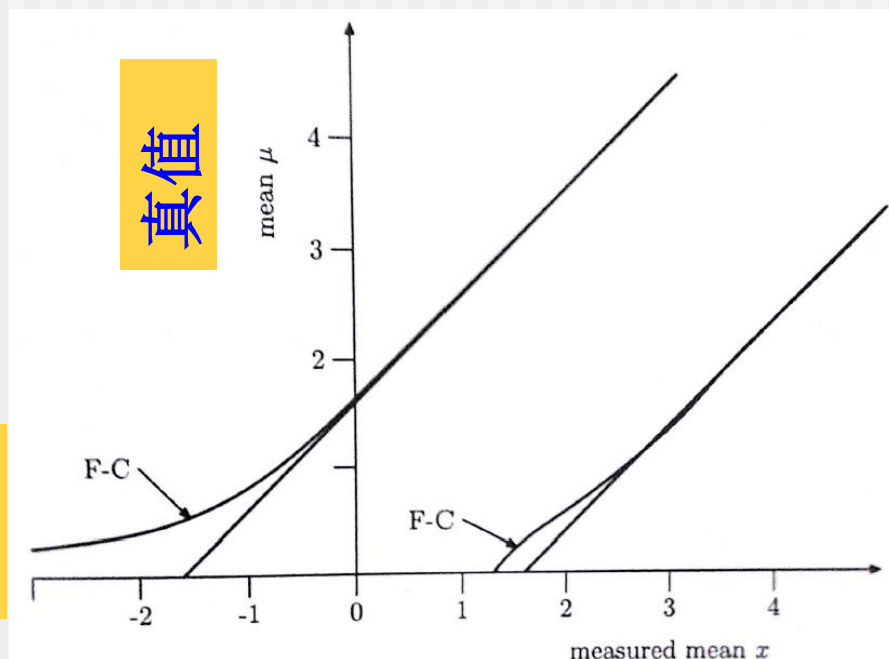
处理突然跳变问题，
处理物理边界问题，
唯一的确定区间 $[a(\hat{\theta}), b(\hat{\theta})]$

$$\text{定义似然比: } R(x) = \frac{P(x | \mu_0)}{P(x | \hat{\mu})}$$

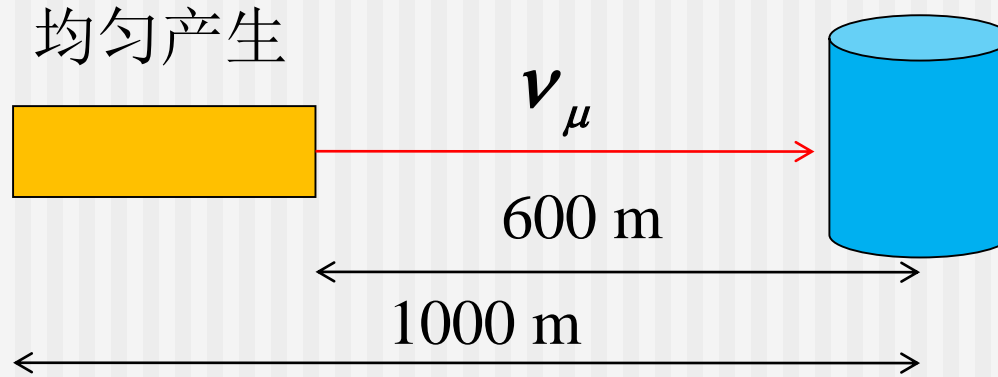
$\hat{\mu}$ 为在物理区间内，对应数据测量 x

能给出最优的似然值 $P(x | \hat{\mu})$

μ_0 为某一待选择区域，只有 μ_0 也在合法区域 $P(x | \mu_0)$ 才非零
置信带按照似然比 R 从大到小构造，只包含合法区域。



中微子振荡的Toy 模型



能量: 10–60 GeV

假设: $P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e) = 0.01$

本底: 100 evts/bin

信号: 100 evts/bin

F&C方法分析中微子振荡

$$P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E}\right)$$

测量: $N \equiv \{n_i\}$

预期的本底均值: $B \equiv \{b_i\}$

预期振荡的贡献: $T \equiv \{\mu_i \mid \sin^2(2\theta), \Delta m^2\}$

$$R = \frac{P(N \mid T)}{P(N \mid T_{best})}$$

$$T_{best} : T_{best}(\sin^2(2\theta)_{best}, \Delta m^2_{best})$$

F&C方法分析中微子振荡

高斯条件下， $\chi^2 = -2\ln(P)$ ，因此

$$R' \equiv \Delta\chi^2 = \sum_i \left[\frac{(n_i - b_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} - \frac{(n_i - b_i - \mu_{best_i})^2}{\sigma_i^2} \right]$$

推荐换为基于似然函数的形式

$$R'' \equiv \Delta\chi^2 = 2 \sum_i \left[\mu_i - \mu_{best_i} + n_i \ln \left(\frac{\mu_{best_i} + b_i}{\mu_i + b_i} \right) \right]$$

以便对所有情况都适用。

操作方法

把 $\{\sin^2(2\theta), \Delta m^2\}$ 的参数空间分成很多格点

↓ 对每个格点

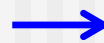
产生N个模拟实验



拟合得到
最好的 χ^2



计算 $\Delta\chi^2$ ，按似然比求和，
得到阈值 χ^2_c ，得到它可以
排除 α (C.L.) 的范围



拟合数据得到
数据的 χ^2



如果 $\chi^2_{\text{data}} > \chi^2_c$ ，
则从格点平面
上去除该点

Toy 模型结果的F&C置信区间

参数空间中，模拟实验有90%满足

$$\Delta\chi^2(N|\sin^2(2\theta), \Delta m^2) < \Delta\chi_c^2(\sin^2(2\theta), \Delta m^2).$$

