



热磁场中的 QCD 轴子

翟士杰

2025.9.25





理论推导

0

考虑 CP 破坏项的两味 NJL 模型的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{det} + \mathcal{L}_a$$

其中 ψ 为夸克场, m_0 为流夸克质量, $\mathcal{L}_a$ 是破坏 CP 对称性的轴子贡献, $\mathcal{L}_q$ 是 NJL 模型的对称四费米相互作用项

$$\mathcal{L}_q = G_1[(\bar{\psi}\tau_k\psi)^2 + (\bar{\psi}\tau_k i\gamma_5\psi)^2], \mathcal{L}_a = \frac{g^2}{32\pi^2}\theta\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}$$

引入轴子场 $\theta = \frac{a}{f_a}$, 并对夸克场做角度为 θ 的手征转动可以将轴子项表示为轴子与

夸克的相互作用项

$$\mathcal{L}_a = 8G_2[e^{i\frac{a}{f_a}}\det(\bar{\psi}_R\psi_L) + e^{-i\frac{a}{f_a}}\det(\bar{\psi}_L\psi_R)]$$



理论推导

0

对夸克场的手征转动为:

$$\psi' \rightarrow e^{-i\theta\gamma_5}\psi, \bar{\psi}' \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\theta\gamma_5}$$

NJL 拉氏量的 det 项为

$$\mathcal{L}_{det} = 2G_2(\det(\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi) + \det(\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi))$$

代入转动后调整转角可以使系数为 $e^{i\frac{a}{f_a}}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{det} &= 2G_2(\det(\bar{\psi}e^{-i\theta\gamma_5}(1 + \gamma_5)e^{-i\theta\gamma_5}\psi) + \det(\bar{\psi}e^{-i\theta\gamma_5}(1 - \gamma_5)e^{-i\theta\gamma_5}\psi)) \\ &= 2G_2(\det(e^{-2i\theta}\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi) + \det(e^{2i\theta}\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi)) \\ &= 8G_2(e^{4i\theta}\det(\bar{\psi}_R\psi_L) + e^{-4i\theta}\det(\bar{\psi}_L\psi_R))\end{aligned}$$



理论推导

0

其中需要用到

$$(1 + \gamma_5)e^{i\gamma_5\theta} = (1 + \gamma_5)e^{i\theta}, (1 - \gamma_5)e^{i\gamma_5\theta} = (1 - \gamma_5)e^{-i\theta}$$

利用平均场近似可以推导热力学势，同位旋守恒时 $tr\tau_i = 0$ 只有两种平均场：

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \sigma, \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rangle = \eta$$

其中 σ 和 η 分别为手征凝聚和赝标量凝聚, $\det$ 的第一项可化为

$$\begin{aligned} \det(\langle \bar{\psi}\psi \rangle + \langle \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rangle) &= \det[(\bar{u}u + \bar{d}d) * I + (u\bar{d} + \bar{u}d) * I] \\ &= \det(\sigma - i\eta) = (\sigma - i\eta)^2 \end{aligned}$$



理论推导

0

同理可得

$$\det[\langle \bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi \rangle] = (\sigma + i\eta)^2$$

因此平均场近似下的 $\det$ 拉氏量为

$$\mathcal{L}_{det} = 2G_2 \cos\theta(\sigma^2 - \eta^2) + 4G_2 \sigma \eta \sin\theta$$

对称部分代入平均场为

$$\mathcal{L}_q = G_1(\sigma^2 + \eta^2)$$

拉氏量的动力学部分可以通过路径积分得到热力学势，轴子部分被手征转动后测度的变化抵消



理论推导

0

根据拉氏量写出配分函数

$$Z = \text{Tre}^{-\beta H} = \text{Tre}^{-\beta(i\Pi \frac{\partial \psi}{\partial t} - L)}$$

其中 Tr 是对味道、颜色、自旋空间求迹, $\Pi = i\bar{\psi}^\dagger$ 是 ψ 的共轭, 通过路径积分配分函数可写为

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\psi][d\Pi][da] e^{\int_0^\beta d\tau \int dx^3 (i\Pi) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \mathcal{L}} \\ &= 4N_c V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [\beta\omega + 2\ln(1 + e^{-\beta\omega})] - \beta G_1(\sigma^2 + \eta^2) + 2\beta G_2[\cos\theta(\sigma^2 - \eta^2) + 2\sigma\eta\sin\theta] \end{aligned}$$



理论推导

0

热力学势为 $\Omega = \frac{-T \ln Z}{V}$ 因此可以得到

$$\Omega = \Omega_q + G_1(\sigma^2 + \eta^2) - G_2(\eta^2 - \sigma^2) \cos\left(\frac{a}{f_a}\right) - 2G_2\eta\sigma \sin\left(\frac{a}{f_a}\right)$$

其中夸克部分 $\Omega_q = -8N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_p}{2} + T \ln(1 + e^{-E_p/T}) \right]$, $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$, 有效质量为 $M = \sqrt{(m_0 + \alpha_0)^2 + \beta_0^2}$ 由轴子场 a 、手征凝聚 σ 和赝标量凝聚 η 相关, 参数 α_0 和 β_0 为

$$\alpha_0 = -2(G_1 + G_2 \cos \frac{a}{f_a})\sigma + 2G_2\eta \sin \frac{a}{f_a}$$

$$\beta_0 = -2(G_1 - G_2 \cos \frac{a}{f_a})\eta + 2G_2\sigma \sin \frac{a}{f_a}$$



理论推导

0

热力学势的极小值点可以求出 σ 和 η

$$\frac{\partial \Omega(\sigma, \eta, \frac{a}{f_a})}{\partial \sigma} \Big|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ \eta=\eta_0}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega(\sigma, \eta, \frac{a}{f_a})}{\partial \eta} \Big|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ \eta=\eta_0}} = 0$$

轴子质量定义为 $m_a^2 = \frac{d^2 \Omega}{da^2} \Big|_{a=0} = \frac{\chi_{top}}{f_a^2}$, 由于 $\theta = \frac{a}{f_a}$, $\chi_{top} = \frac{d^2 \Omega}{d\theta^2} \Big|_{a=0}$ 不依赖于能标 f_a 。
轴子的耦合系数由热力学势的四阶导数定义:

$$\lambda_a = \frac{d^4 \Omega}{da^4} \Big|_{a=0}$$



理论推导

0

若考虑 z 轴方向的磁场需要增加修正项

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g_{\gamma a}\frac{a}{4}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$$

后一项在磁场为 z 方向消失，磁场会带来朗道能级修正

$$E'_p(B) = [M^2 + p_z^2 + (2lq_f B)]^{1/2}$$

其中 q_f 是不同味道夸克所带电荷的绝对值，对于 u 夸克 $q_f = 2/3$ ，对于 d 夸克 $q_f = 1/3$ ，朗道能级的简并度为 $(2 - \delta_{l,0})$ ，对横向动量的积分化为无穷级数求和

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(E_p) &\rightarrow \frac{q_f B}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} f(E'_p(B)) \\ &\rightarrow \frac{q_f B}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l,0}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} f(E_p(B)).\end{aligned}$$



理论推导

0

夸克部分热力学势简化为

$$\Omega_q(B, T) = -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{l,f} q_f B (2 - \delta_{l,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \left\{ \frac{E_p(B)}{2} + T \ln[1 + e^{-E_p(B)/T}] \right\}$$

总热力学势可以分解为真空、磁场和温度部分

$$\Omega(B, T) = \Omega_V + \Omega_B(B) + \Omega_M(B, T)$$

对真空部分需要做截断 Λ

$$\Omega_V = G_1(\sigma^2 + \eta^2) - G_2(\eta^2 - \sigma^2) \cos\left(\frac{a}{f_a}\right) - 2G_2\eta\sigma \sin\left(\frac{a}{f_a}\right) - 4N_c \int_{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p$$



理论推导

0

Ω_B 是包含磁场的项, Ω_M 同时有温度磁场

$$\Omega_B = -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_f (q_f B)^2 \times \left[\zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f + \frac{x_f^2}{4} \right],$$

$$\Omega_M = -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{l,f} (2 - \delta_{l,0}) q_f B \times \int_{-\infty}^{\infty} dp_z T \ln[1 + e^{-E_p(B)/T}], \text{ 其中}$$

$$x_f = M^2/(2q_f B), \zeta'(-1, x_f) = \zeta'(-1, 0) + \frac{x_f^2}{2} - \frac{x_f}{2}[1 + \ln(2\pi)] + \psi^{(-2)}(x_f).$$



参数

数值模拟所用参数

Sets	Input parameters	Output parameters
I	$f_\pi = 93 \text{ MeV}$	$\Lambda = 650 \text{ MeV}$
Ref. [53,59]	$m_\pi = 140 \text{ MeV}$	$G_s = 2.122/\Lambda^2$
	$\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{\frac{1}{3}} = -250 \text{ MeV}$	$m_0 = 5.5 \text{ MeV}$
II	$f_\pi = 92.6 \text{ MeV}$	$\Lambda = 590 \text{ MeV}$
Ref. [24,46]	$m_\pi = 140.2 \text{ MeV}$	$G_s = 2.435/\Lambda^2$
	$\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{\frac{1}{3}} = -241.5 \text{ MeV}$	$m_0 = 6 \text{ MeV}$
III	$f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$	$\Lambda = 664.3 \text{ MeV}$
Ref. [45]	$m_\pi = 135 \text{ MeV}$	$G_s = 2.06/\Lambda^2$
	$\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{\frac{1}{3}} = -250.8 \text{ MeV}$	$m_0 = 5 \text{ MeV}$

Figure: 三种参数

$eB \text{ (GeV)}$	$b \text{ (GeV)}$	$T_a \text{ (GeV)}$	$s \text{ (GeV)}$	$\beta \text{ (GeV)}$
0.0	0.9	0.168	3.731	40.0
0.2	1.226	0.168	3.262	34.117
0.4	1.769	0.169	2.294	22.988

Figure: 随能标跑动耦合系数的参数

能标跑动的耦合系数为 $G_s(eB, T) = b(1 - \frac{1}{1+e^{\beta(T_a-T)}} + s)$, 当温度为零有
 $G_0(eB, T=0) = 1.44173 + 3.06 * e^{-1.31*(eB)^2}$



$eB=0$ 的数值结果

0

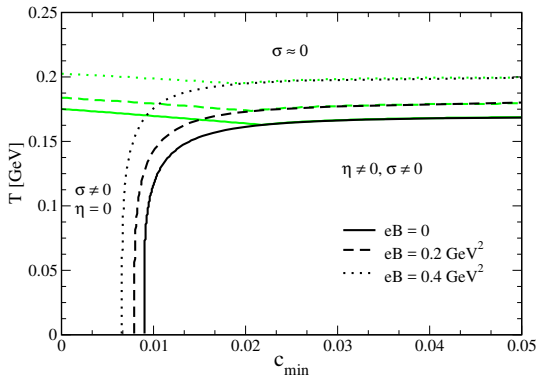
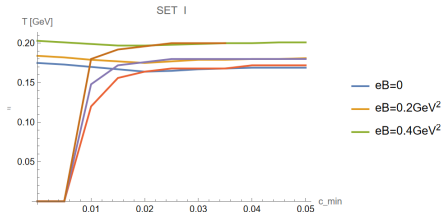


Figure: 参数 SET1 下 $c_{\min}$ 与临界温度的关系



$eB=0$ 的数值结果

0

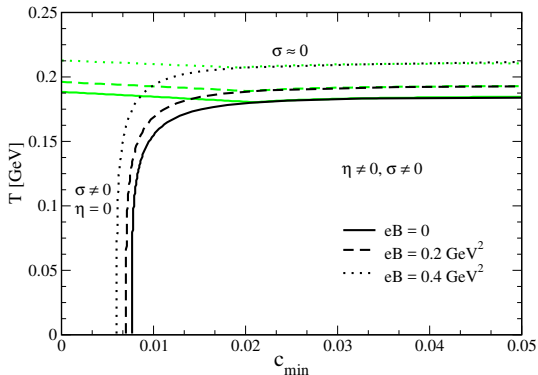
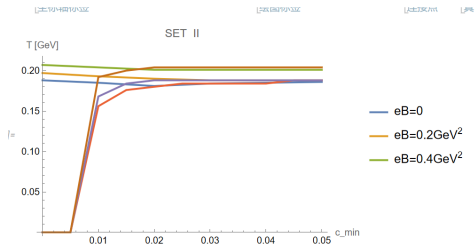


Figure: 参数 SET2 下 $c_{\min}$ 与临界温度的关系



$eB=0$ 的数值结果

0

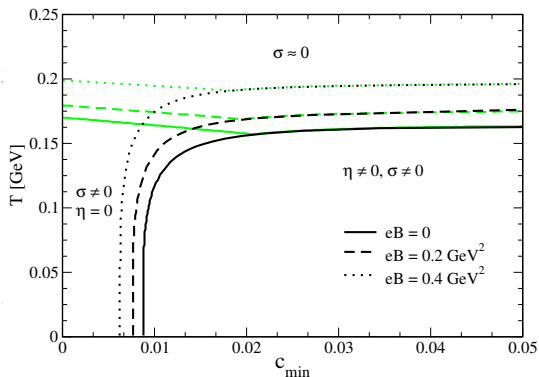
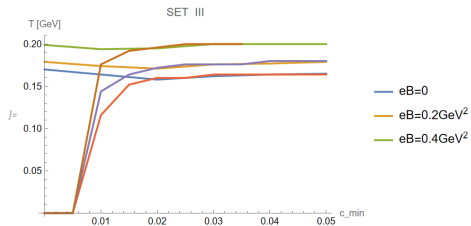


Figure: 参数 SET3 下 $c_{\min}$ 与临界温度的关系



$eB=0$ 的数值结果

0

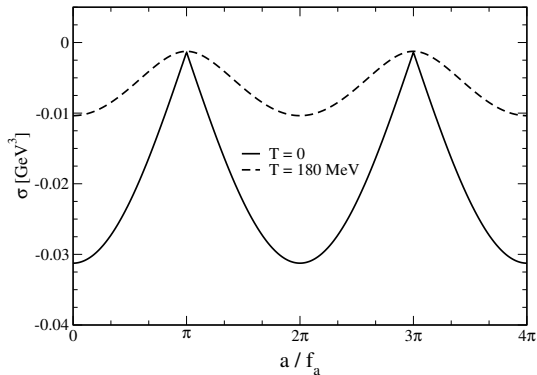
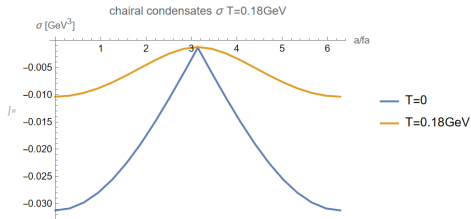


Figure: 使用参数 SET1 计算的夸克凝聚 σ 随轴子场的变化



$eB=0$ 的数值结果

0

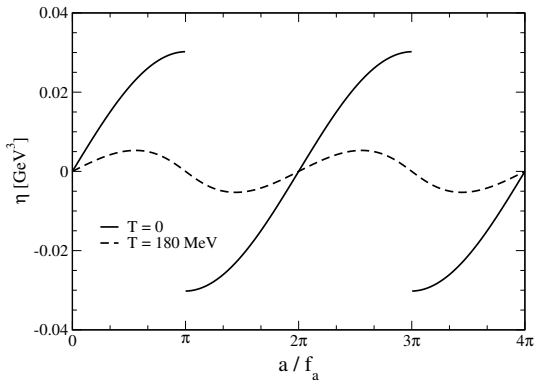
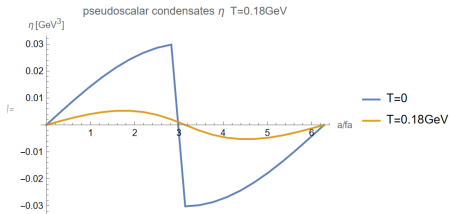


Figure: 使用参数 SET1 计算的赝标量凝聚 η 随轴子场的变化



$eB=0$ 的数值结果

0

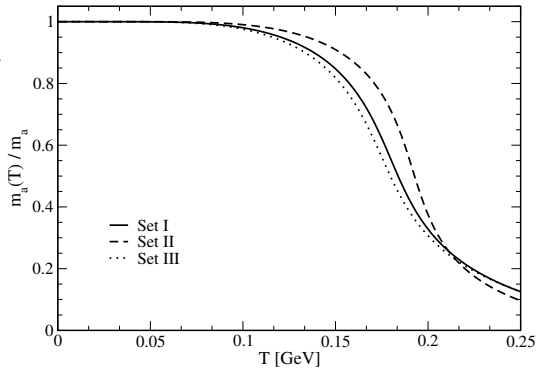
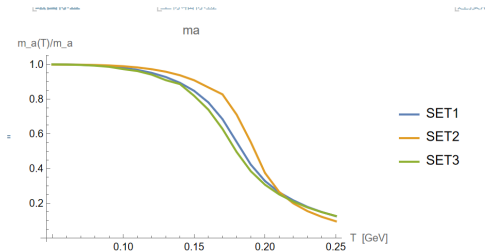


Figure: 使用不同参数计算有限温度轴子质量 $m_a(T)/m_a$



$eB=0$ 的数值结果

0

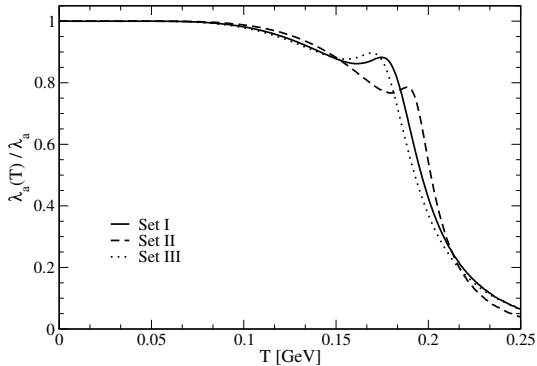
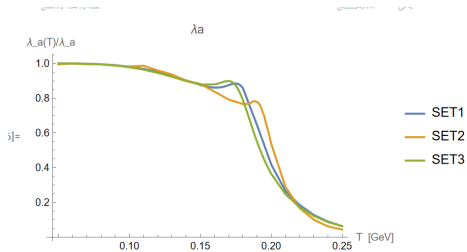


Figure: 使用不同参数计算有限温度轴子耦合系数 $\lambda_a(T)/\lambda_a$



eB=0 的数值结果

0

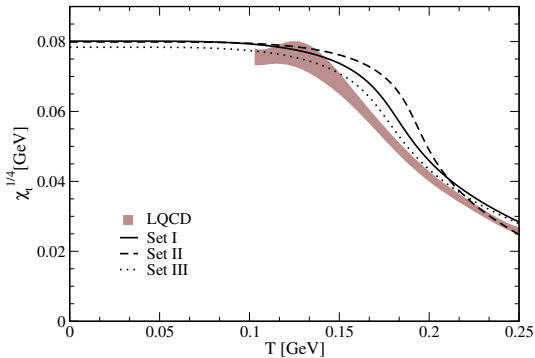
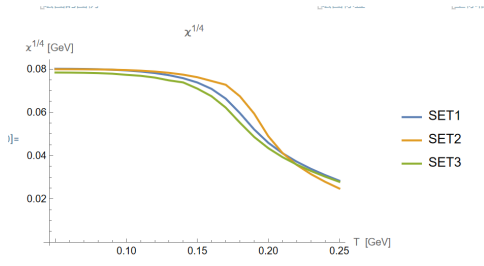


Figure: 使用不同参数计算有限温度拓扑磁化率 $\chi_t^{1/4}$



$eB \neq 0$ 且 G_s 固定为 SET1 的数值结果

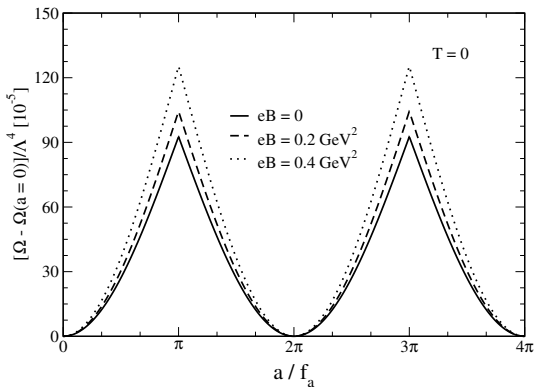
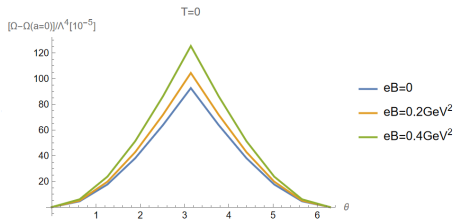


Figure: 使用参数 SET1 计算零温时热力学势 $\Omega(T)$ 随轴子场的变化



$eB \neq 0$ 且 G_s 固定为 SET1 的数值结果

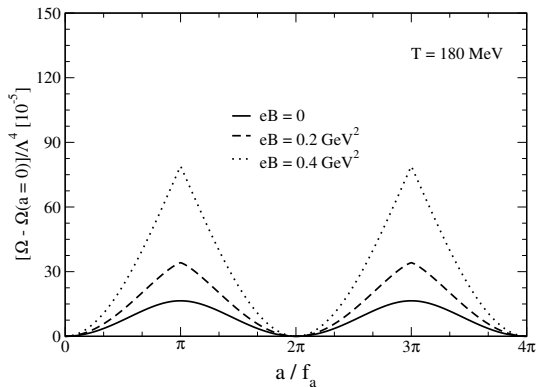
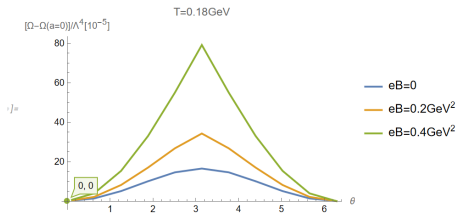


Figure: 使用参数 SET1 计算有限温度 $\Omega(T)$ 随轴子场的变化



$eB \neq 0$ 且 G_s 固定为 SET1 的数值结果

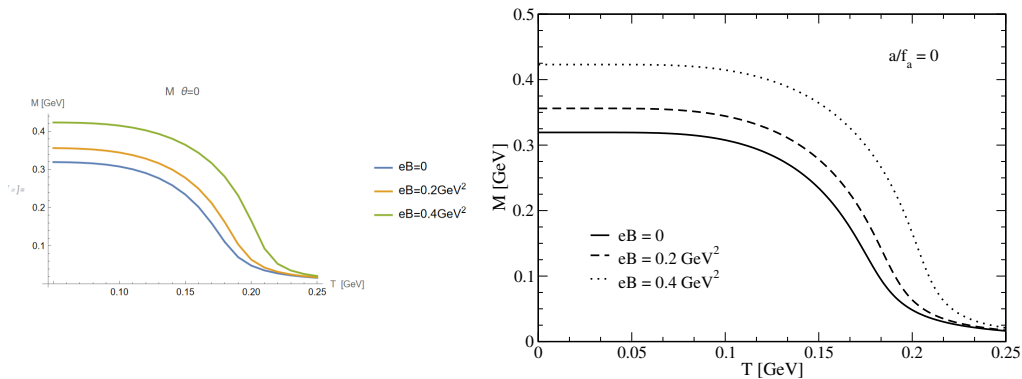


Figure: 使用参数 SET1 计算轴子场为零时组分夸克质量 M 随温度变化



$eB \neq 0$ 且 G_s 固定为 SET1 的数值结果

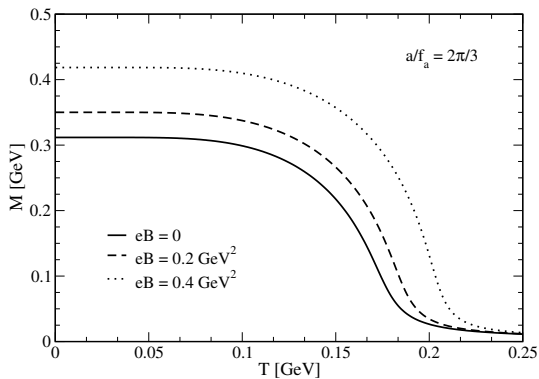
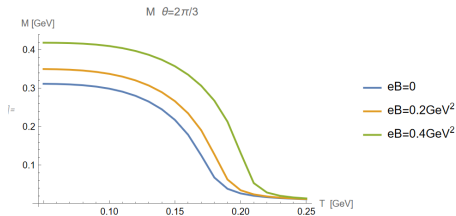


Figure: 使用参数 SET1 计算轴子场不为零时组分夸克质量 M 随温度变化



$eB \neq 0$ 且 G_s 固定为 SET1 的数值结果

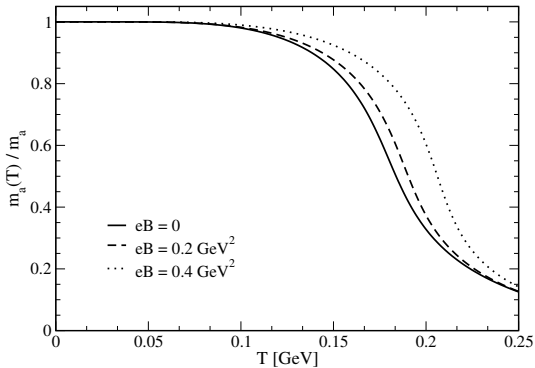
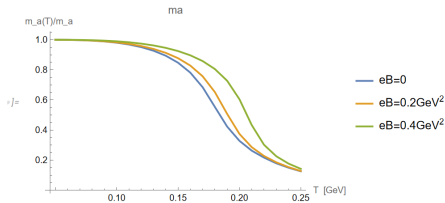


Figure: 使用参数 SET1 计算有磁场时轴子质量 $m_a(T)/m_a$ 随温度变化



$eB \neq 0$ 且 G_s 固定为 SET1 的数值结果

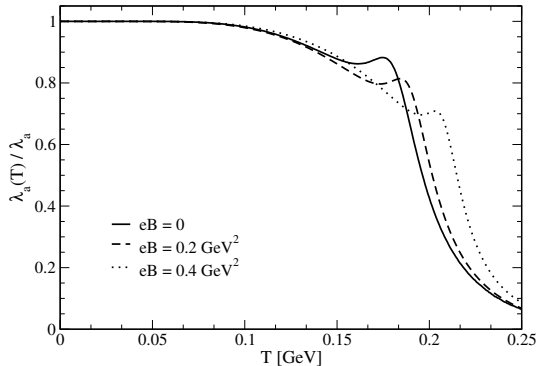
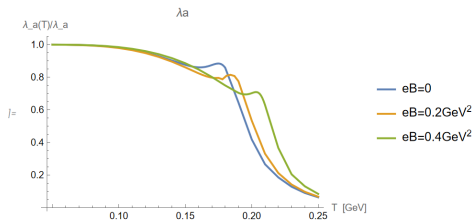


Figure: 使用参数 SET1 计算有磁场时轴子耦合系数 $\lambda_a(T)/\lambda_a$ 随温度变化



$eB \neq 0$ 且 G_s 固定为 SET1 的数值结果

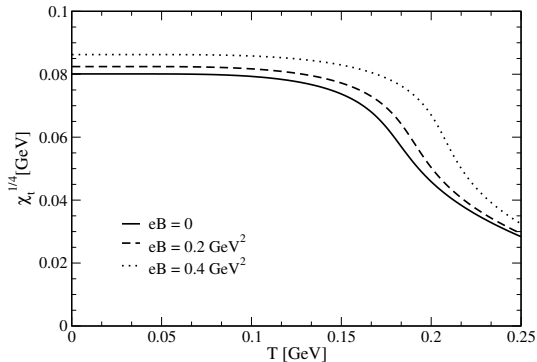
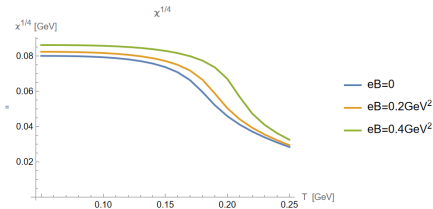


Figure: 使用参数 SET1 计算有磁场时轴子拓扑磁化率 $\chi_t^{1/4}$ 随温度变化



随能标跑动的耦合系数 $G_s(eB, T)$ 数据结果

0

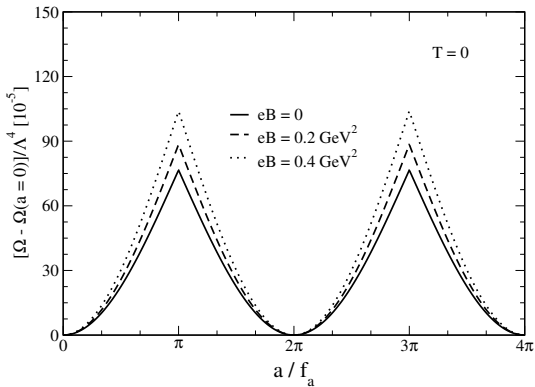
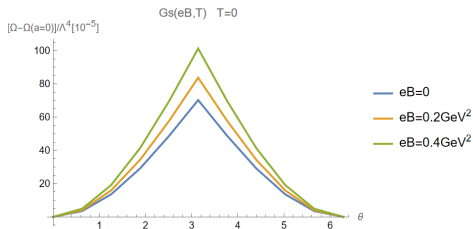


Figure: 零温使用除了 G_s 的参数 SET1 计算 Ω 随轴子场的变化



随能标跑动的耦合系数 $G_s(eB, T)$ 数据结果

O

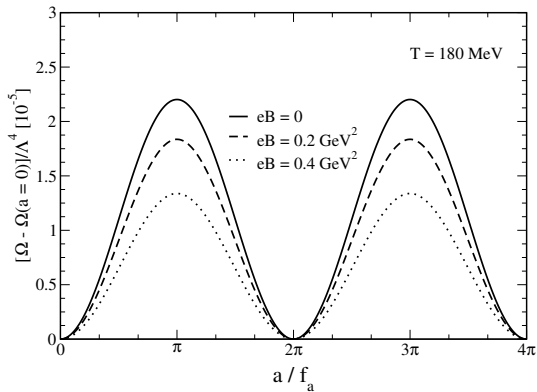
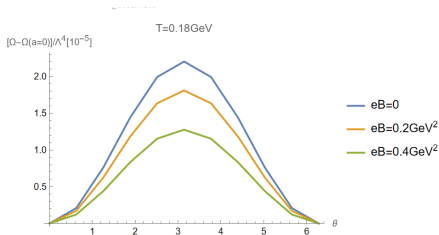


Figure: 有限温度使用除了 G_s 的参数 SET1 计算 Ω 随轴子场的变化



随能标跑动的耦合系数 $G_s(eB, T)$ 数据结果

0

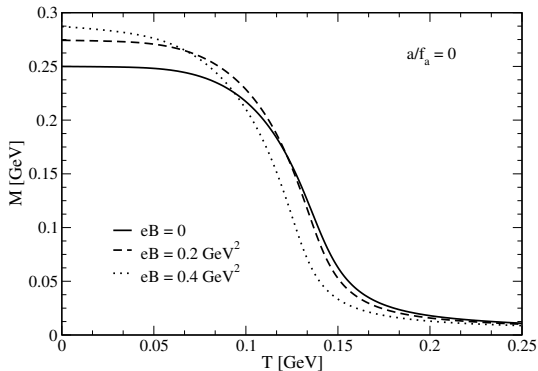
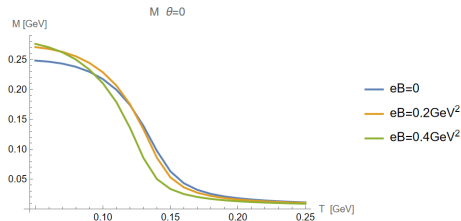


Figure: 零轴子场组分夸克质量 M 随温度变化



随能标跑动的耦合系数 $G_s(eB, T)$ 数据结果

O

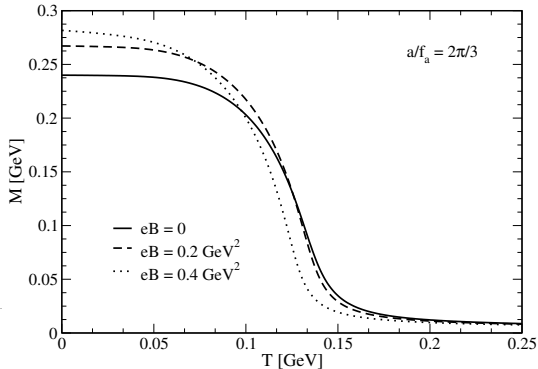
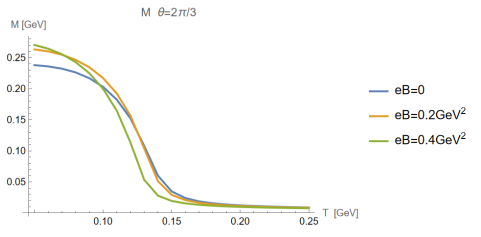


Figure: 有轴子场组分夸克质量 M 随温度变化



随能标跑动的耦合系数 $G_s(eB, T)$ 数据结果

0

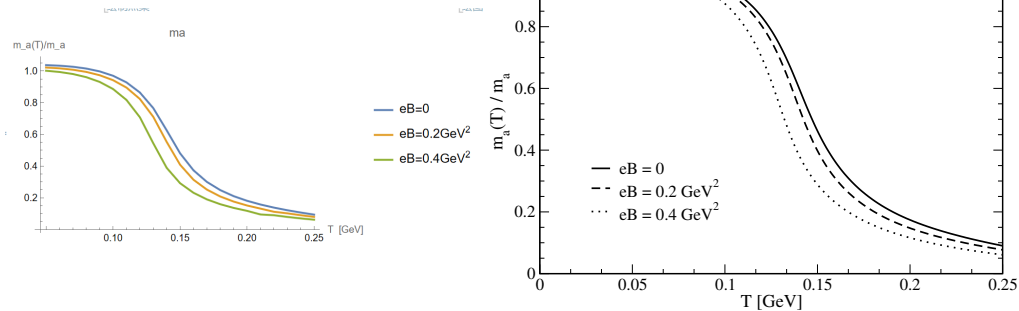


Figure: G_s 随能标跑动时轴子质量 m_a 随温度变化



随能标跑动的耦合系数 $G_s(eB, T)$ 数据结果

0

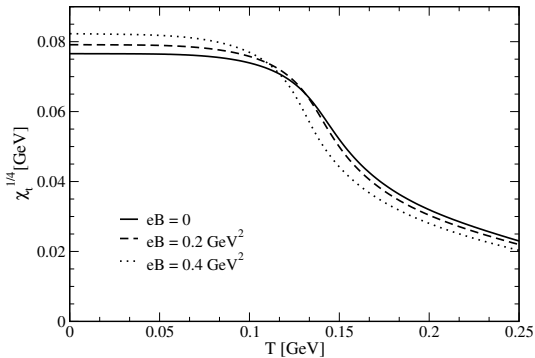
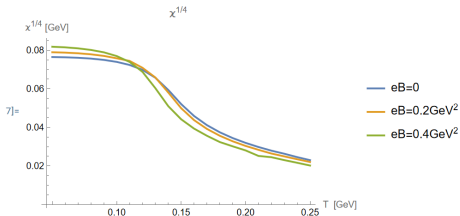


Figure: G_s 随能标跑动时拓扑磁化率 $\chi_t^{1/4}$ 随温度变化



随能标跑动的耦合系数 $G_s(eB, T)$ 数据结果

0

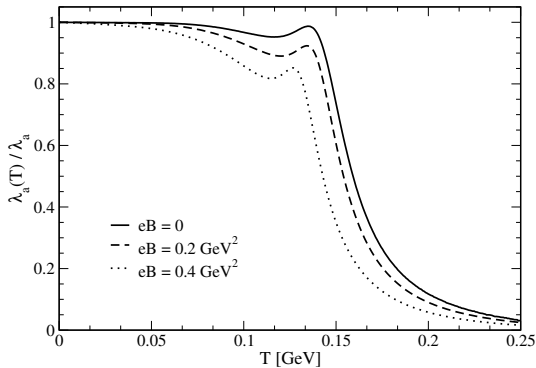
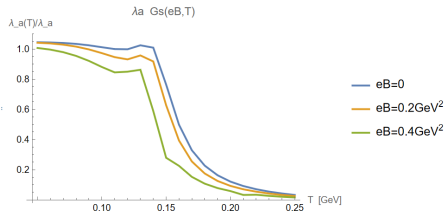


Figure: G_s 随能标跑动时轴子耦合系数 λ_a 随温度变化