

# Spectroscopy of fully-heavy hexaquark states within QCD sum rules

报告人：陈绪梁

Sun Yat-sen University

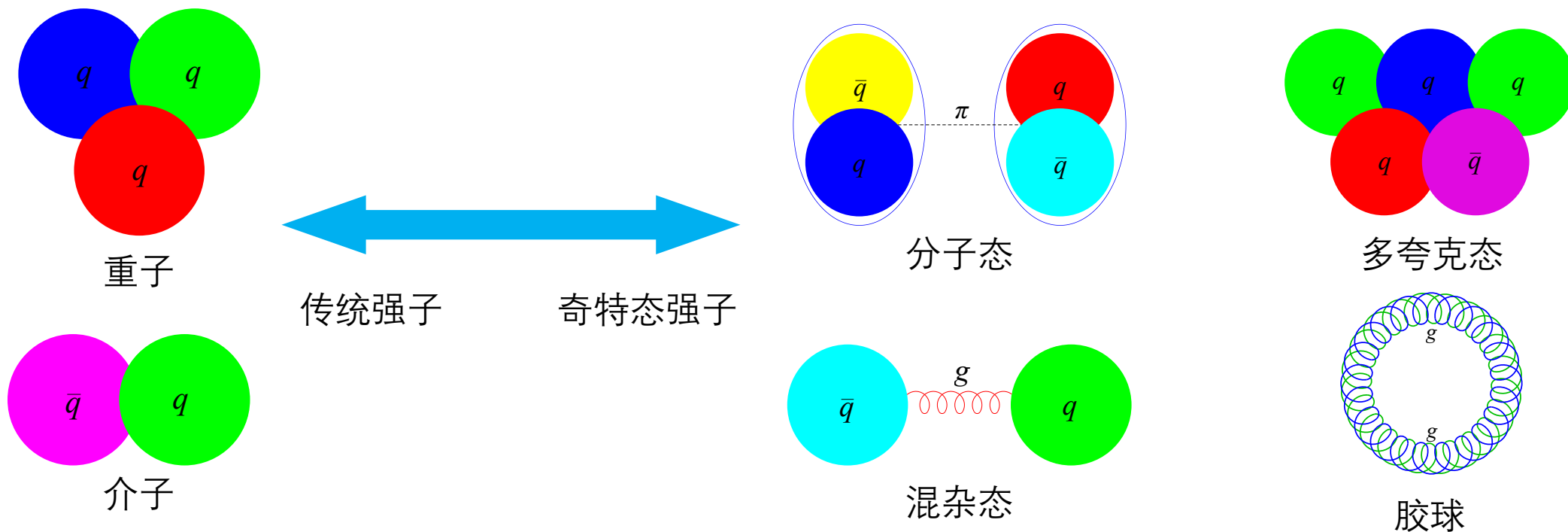
CPL 42 (2025) 070201 许国锋 陈绪梁 张锦鹏 李宁 陈伟

2602.21872 陈绪梁 张锦鹏 欧阳梓熙 陈伟 吴佳俊

第五届强子与重味物理理论与实验联合研讨会 2026. 03. 30 石家庄

# 夸克模型与奇特态强子

- 传统夸克模型：重子 $qqq$ ，介子 $\bar{q}q$
- 奇特态强子：超出传统夸克模型的强子，包括多夸克态、分子态、混杂态、胶球等



- 2020年LHCb在 $J/\psi J/\psi$ 不变质量谱中发现 $X(6900)$  Sci. Bull. 65 (2020) 1983，ATLAS和CMS也确认了 $X(6900)$ 的存在 PRL 131 (2023) 151902, PRL 132 (2024) 111901，CMS的测量表明 $X(6600), X(6900), X(7100)$ 的量子数很可能是 $2^{++}$  Nature 648 (2025) 8092

# 三粲偶素的产生

- 2021年CMS发现并测量了  
 $3J/\psi$ 的产生过程：

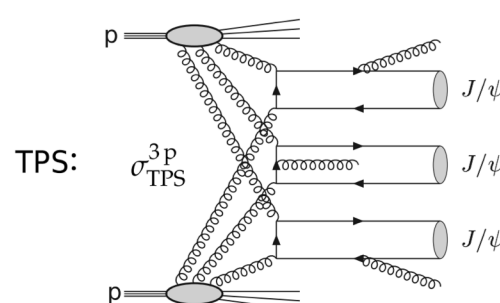
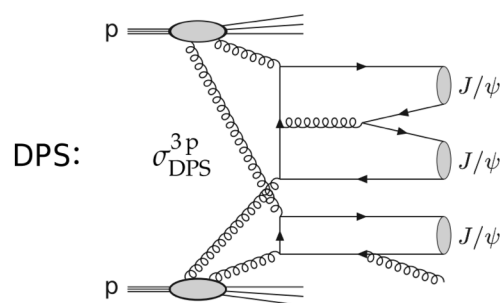
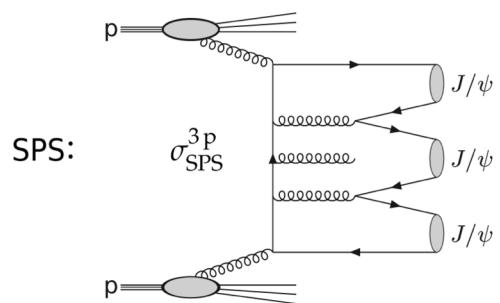
$$\sigma(pp \rightarrow J/\psi J/\psi J/\psi X)$$

$$= 272_{-104}^{+141}(\text{stat}) \pm 17(\text{syst}) \text{ fb}$$

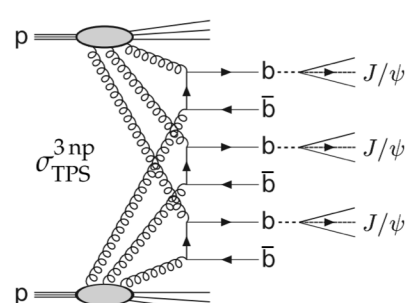
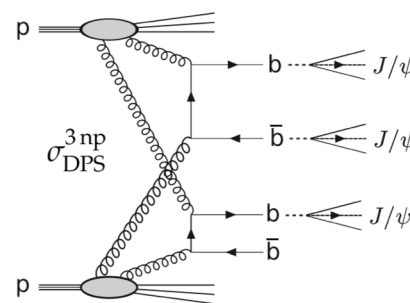
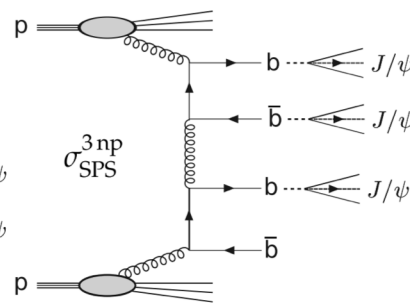
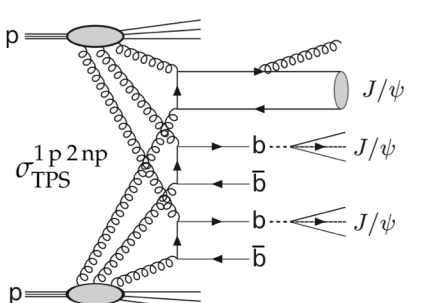
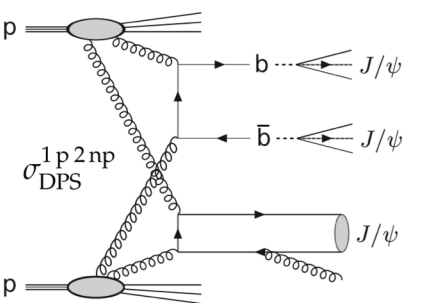
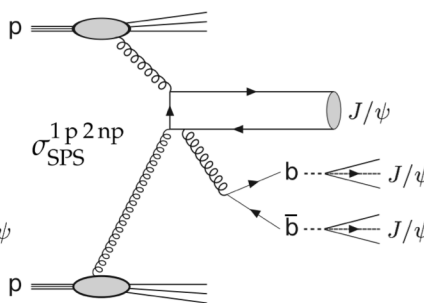
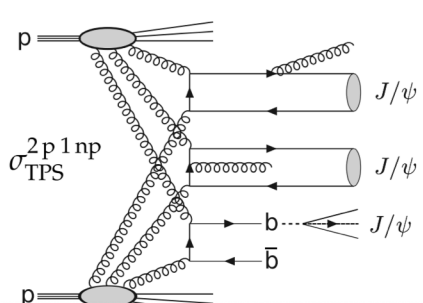
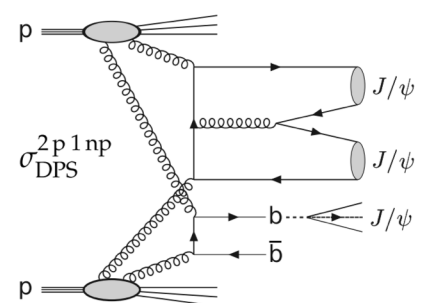
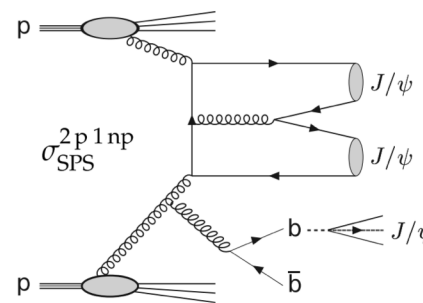
*Nature Phys.* 19 (2023) 3, 338-350

- 三粲偶素的束缚态如果存在，  
在实验上是有可能产生的

Pure prompt production:



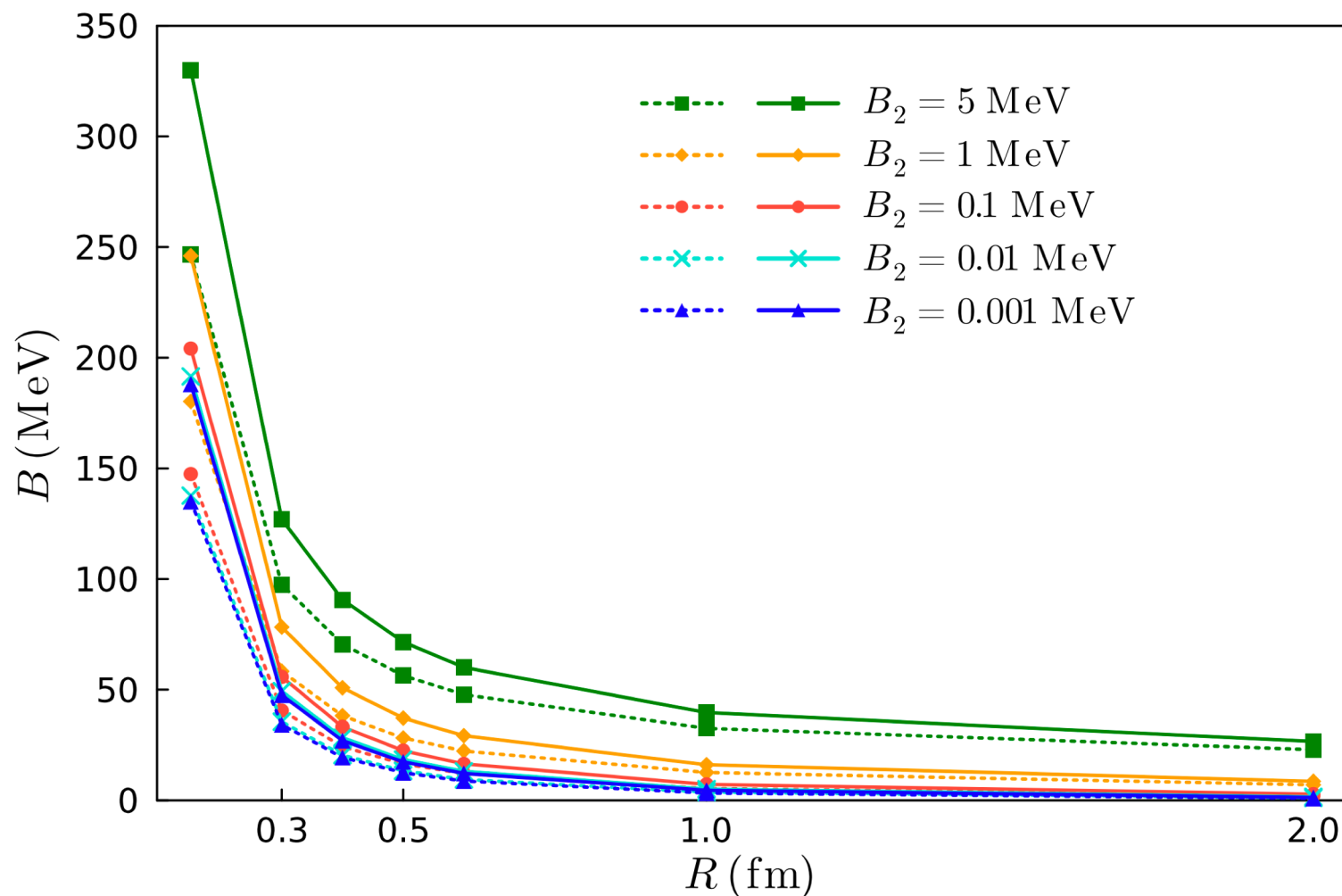
Nonprompt contributions:



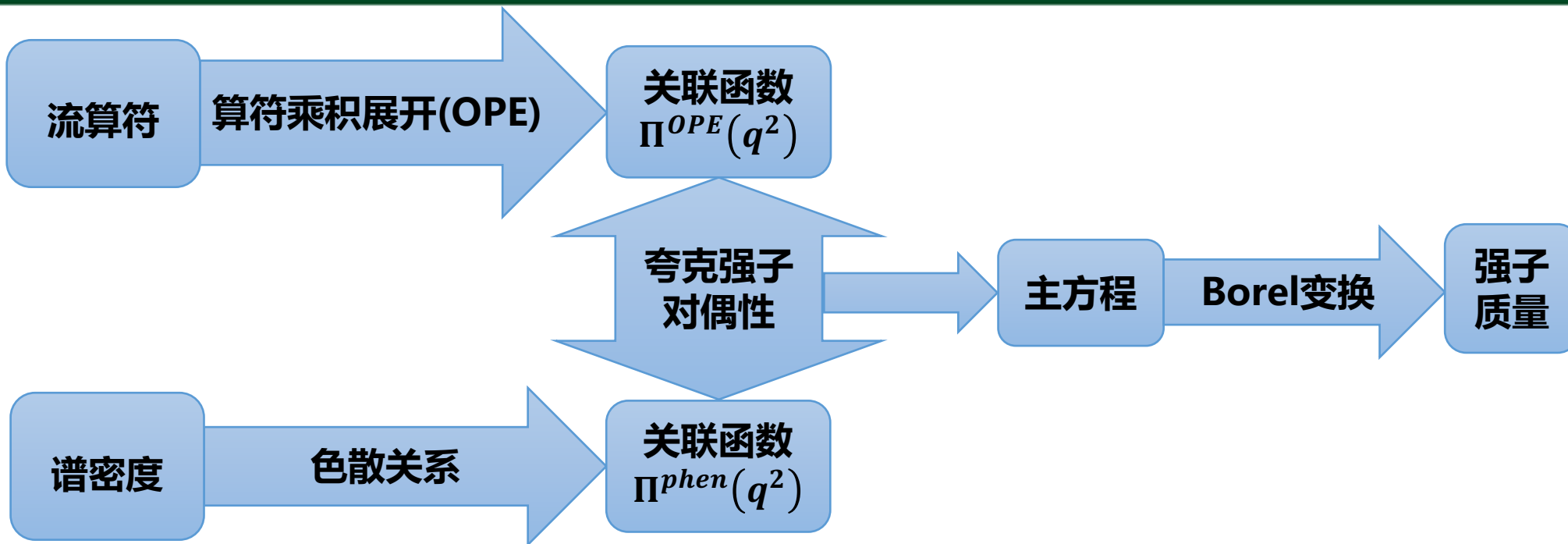
- Ya-Wen Pan等人使用高斯展开法对  $3J/\psi$  体系进行了计算。作者发现无论  $J/\psi - J/\psi$  两体吸引势如何微弱，都存在  $3J/\psi$  的束缚态，结合能约为  $1\sim 330\text{MeV}$

PRD, 110(9):094004

- 作者认为  $3J/\psi$  体系可能存在 Efimov 效应。如果两粒子通过短程吸引势在阈值附近可以形成束缚态、共振态或虚态，那么将会产生长程的三体吸引相互作用



	体系	理论方法	主要结论
<i>EPJC</i> 84 (2024) 2, 126	Fully-heavy dibaryons	extended chromo-magnetic model	无束缚态
2208.03041	Fully-heavy hexaquarks	constituent quark model	无束缚态
<i>PRL</i> 124 (2020) 21, 212001	$bbbccc$	constituent quark model	无束缚态
<i>EPJC</i> 82 (2022) 9, 805	Fully-heavy dibaryons	constituent quark model	$J^P = 0^+$ $\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}/\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$ 浅束缚
<i>CPL</i> 38 (2021) 10, 101201	$\Omega_{ccc}\Omega_{ccc} \Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$	extended OBE model	$J^P = 0^+$ $\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}/\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$ 浅束缚
<i>PRD</i> 108 (2023) 5, 054037	$\Omega_{ccc}\Omega_{ccc} \Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$	Gaussian expansion method	$^1S_0$ $\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}/\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$ 浅束缚
<i>PRL</i> 127 (2021) 7, 072003	$\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$	HAL QCD	$^1S_0$ $\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$ 浅束缚
<i>PRD</i> 109 (2024) 9, 094032	Hidden/open-charm hexaquarks	diffusion Monte Carlo	$cccccc$ 9.6~9.9 GeV $ccc\bar{c}\bar{c}$ 9.3~9.6 GeV
<i>PRL</i> 130 (2023) 11, 111901	$\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$	Lattice QCD	$^1S_0$ 81 MeV
<i>IJMPA</i> 37 (2022) 26, 2250166	$cccccc bbbbbb$	QCD Sum Rules	$J^P = 1^-/0^+$ $cccccc$ 9.50/9.39 GeV $J^P = 1^-/0^+$ $bbbbbb$ 28.50/28.39 GeV
.....			



• 流算符：

$$3\eta_c : J(x) = (\bar{c}_a i\gamma_5 c_a)(\bar{c}_b i\gamma_5 c_b)(\bar{c}_c i\gamma_5 c_c) \quad J^{PC} = 0^{-+}$$

$$3J/\psi : J_\mu(x) = (\bar{c}_a \gamma_\mu c_a)(\bar{c}_b \gamma_\nu c_b)(\bar{c}_c \gamma^\nu c_c) \quad J^{PC} = 1^{--}, (0^{+-})$$

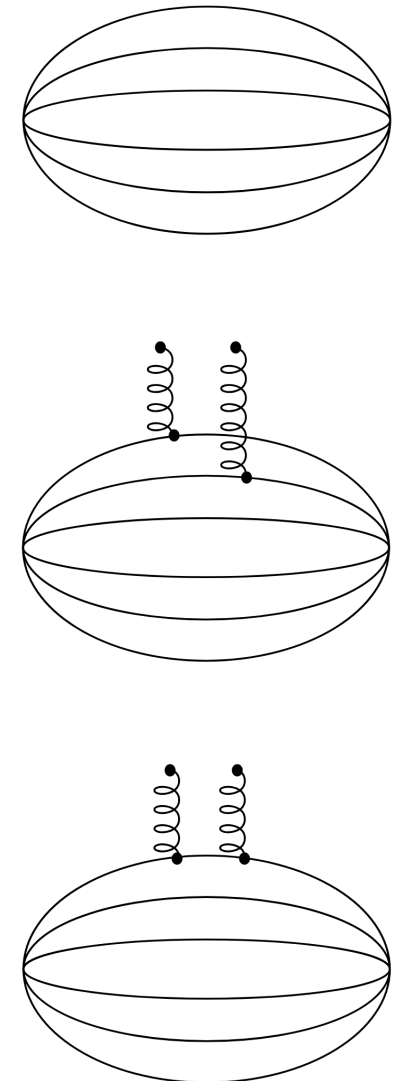
$$\Omega_{QQQ}\Omega_{QQQ} : J_{\mu\nu}(x) = \epsilon^{i_1 j_1 k_1} \epsilon^{i_2 j_2 k_2} [Q_{i_1}^T C \gamma_\mu Q_{j_1}] Q_{k_1}^T C \gamma_5 Q_{k_2} [Q_{i_2}^T C \gamma_\nu Q_{j_2}] \quad J^P = 0^+/2^+$$

- OPE需要计算五圈香蕉图，为提升计算效率，我们使用色散关系迭代法计算
- 香蕉积分定义：

$$B_{n_0 n_1 \dots n_L}(q^2; \mathbf{m}) = \int \prod_{i=1}^L \left( \frac{d^D k_i}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{\mathcal{D}_i^{n_i}} \right) \frac{1}{\mathcal{D}_0^{n_0}}$$

$$\mathcal{D}_i = k_i^2 - m_i^2, k_0 \equiv q - \sum_{i=1}^L k_i$$

- 色散关系： $B(q^2) = \int_{s_N}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2}$ ,  $\rho(s) \equiv \pi^{-1} \text{Im} B(s)$ 
  - 注意 $(s - q^2)^{-1}$ 具有传播子的形式，并且 $\rho(s)$ 中不含圈动量
- 色散关系迭代法：先计算一圈图，得到其色散关系表示，色散关系中的 $(s - q^2)^{-1}$ 可以作为传播子参与下一圈的积分，下一圈依然是一圈图，如此反复 E. Remiddi and L. Tancredi NPB 907, 400 (2016)



- 但是对于高幂次传播子，直接使用色散关系可能会导致错误的结果 *CPL* 41 (2024) 111101

- 考虑积分 
$$B_{2,1}(q^2) = \int \frac{d^2k}{i\pi} \frac{1}{[(q-k)^2-1](k^2-1)}$$

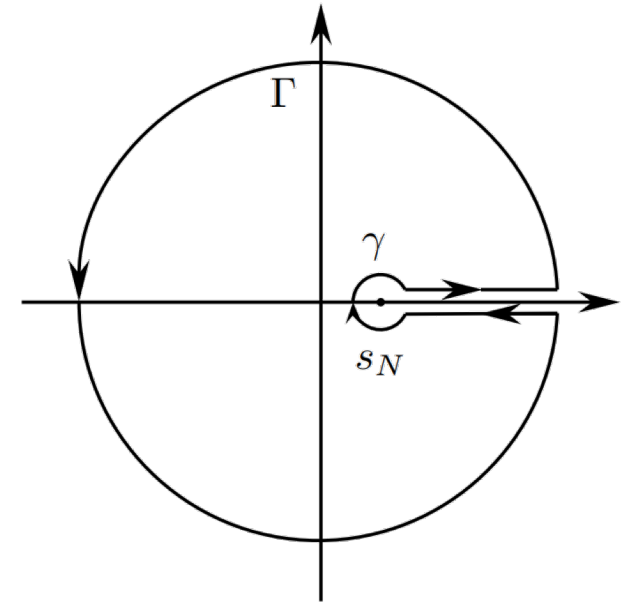
- 直接使用色散关系得到: 
$$B_{2,1}(q^2) = \int_4^\infty ds \frac{2}{s-q^2} (s-4)^{-\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{2}}$$

收敛的积分得到了发散的结果！

- 这是因为推导色散关系时没有考虑小圆弧 $\gamma$ 的贡献
- Generalized dispersion relation(GDR) ( $n_{\Gamma/\gamma}$ 是大/小圆弧减除次数) :

$$\Pi(q^2) = \sum_{i=0}^{n_{\Gamma}-1} \frac{(q^2-a)^i [(q^2-s_N)^{n_{\gamma}} \Pi(q^2)]^{(i)}}{\Gamma(i+1)(q^2-s_N)^{n_{\gamma}}} \Big|_{q^2=a} + \int_{s_N}^\infty \frac{ds}{\pi} \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s-q^2} \left(\frac{q^2-a}{s-a}\right)^{n_{\Gamma}} \left(\frac{s-s_N}{q^2-s_N}\right)^{n_{\gamma}}$$

- 使用GDR得到: 
$$B_{2,1}(q^2) = \frac{2}{q^2-4} + 2 \int_4^\infty ds \frac{1}{s-q^2} \left(\frac{q^2}{s}\right) \left(\frac{s-4}{q^2-4}\right) (s-4)^{-\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{2}}$$



- 重夸克传播子中含有高幂次传播子：

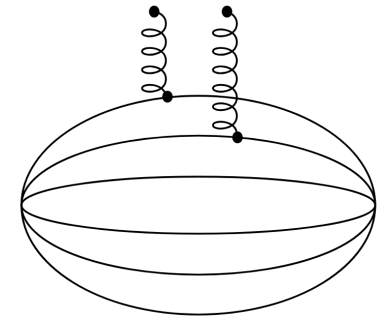
$$S_{ij}(p) = \frac{i(\hat{p}+m)\delta^{ij}}{p^2-m^2} - \frac{ig_s}{4} G_{\mu\nu}^a T_{ij}^a \frac{(\hat{p}+m)\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}(\hat{p}+m)}{(p^2-m^2)^2} + \frac{i\delta^{ij}}{12} \langle g_s^2 GG \rangle \frac{m(p^2+m\hat{p})}{(p^2-m^2)^4} + \dots$$

- 对于  $D = 4$  的含质量的标准量Bubble积分  $B_{n_0 n_1}(q^2) = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{D_0^{n_0} D_1^{n_1}}$ ，当  $n_0 + n_1 \geq 4$  时

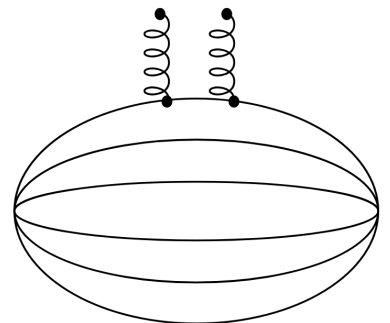
需要使用GDR

- 但GDR计算通常较为繁琐，为了回避GDR，我们采取如下策略：

- (b)图会在第一圈出现  $n_0 = n_1 = 2$  的积分，交换积分次序使  $n_0 = 2, n_1 = 1$  即可回避GDR
- (c)图会在第一圈出现  $n_0 = 4, n_1 = 1$  的积分，此时前三圈使用费曼参数法求出虚部，得到前三圈的色散关系表示，后两圈再使用色散关系迭代法计算



(b)



(c)

# 三粲偶素质量谱分析

• 参数： $m_c = 1.27 \pm 0.02 \text{ GeV}$ ,  $\langle g_s^2 GG \rangle = (0.48 \pm 0.14) \text{ GeV}^4$

• 强子质量 $m_X$ 依赖于连续谱阈值参数 $s_0$ 和Borel质量 $M_B^2$ ：

$$\mathcal{L}_k(s_0, M_B^2) \equiv f_X^2 (m_X^2)^k e^{-m_X^2/M_B^2} = \int_{36m_Q^2}^{s_0} e^{-s/M_B^2} s^k \rho^{\text{OPE}}(s) ds$$
$$m_X^2 = \mathcal{L}_1(s_0, M_B^2) / \mathcal{L}_0(s_0, M_B^2)$$

•  $M_B^2$ 的上下限分别由极点贡献(PC)和收敛性(CV)确定： $\text{PC} \geq 40\%$ ,  $\text{CV} \equiv \frac{\Pi_{\text{Pert}}(s_0, M_B^2)}{\Pi_{GG}(s_0, M_B^2)} \geq 3$

•  $s_0$ 的确定：

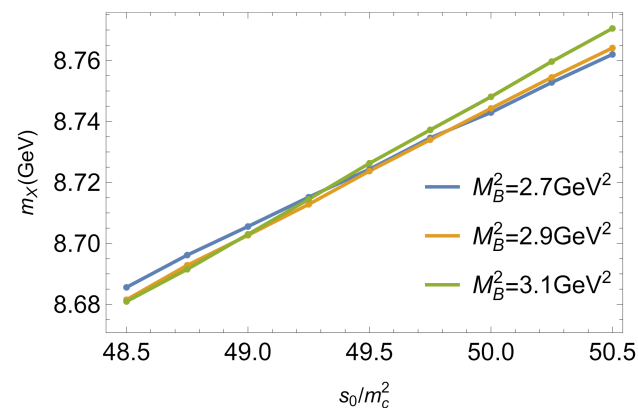
定义 $\chi^2(s_0) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{m_X(s_0, M_{B,i}^2)}{m_X(s_0)} - 1 \right]^2$ ,  $\chi^2(s_0)$ 越小说明 $m_X$ 对 $M_B^2$ 依赖性越小。选择一个试探的 $M_B^2$ 平台, 用 $\chi^2(s_0)$ 的极小值可以确定一个 $s_0$ , 检验此平台下是否所有的点都满足PC和CV, 同时要求平台尽可能宽, 如此可以唯一确定 $s_0$ 和 $M_B^2$ 平台

# 三粲偶素质量谱分析

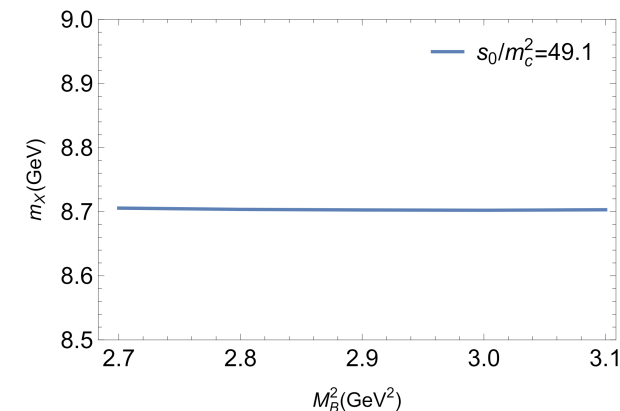
	$J^{PC}$	质量[GeV]	阈值[GeV]	结合能[GeV]
$3\eta_c$	$0^{-+}$	$8.71 \pm 0.09$	8.95	$0.24 \pm 0.09$
$3J/\psi$	$1^{--}$	$9.17 \pm 0.20$	9.29	$0.12 \pm 0.20$

	$s_0/m_c^2$	$M_B^2[\text{GeV}^2]$	PC[%]
$3\eta_c$	49.1	2.7~3.1	47
$3J/\psi$	54.9	3.4~3.8	43

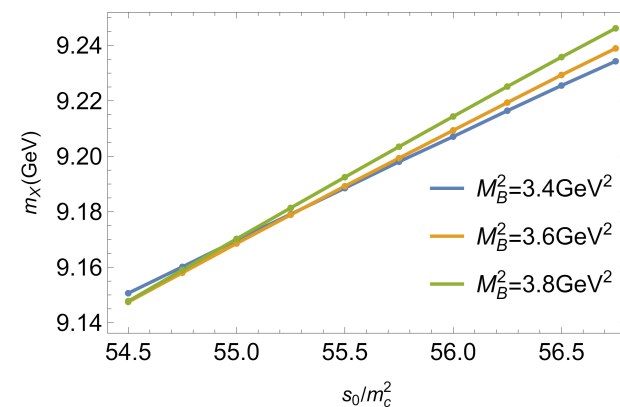
- 我们的计算支持 $3\eta_c$ 和 $3J/\psi$ 束缚态的存在，并且 $3\eta_c$ 可能束缚更深



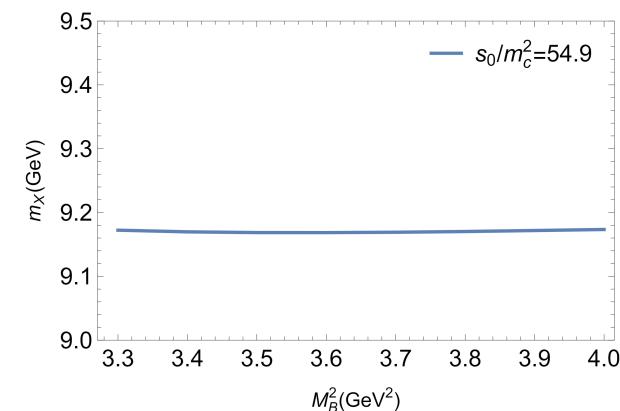
(a)  $3\eta_c$  system



(a)  $3\eta_c$  system



(b)  $3J/\psi$  system



(b)  $3J/\psi$  system

# $\Omega_{QQQ}\Omega_{QQQ}$ 质量谱分析

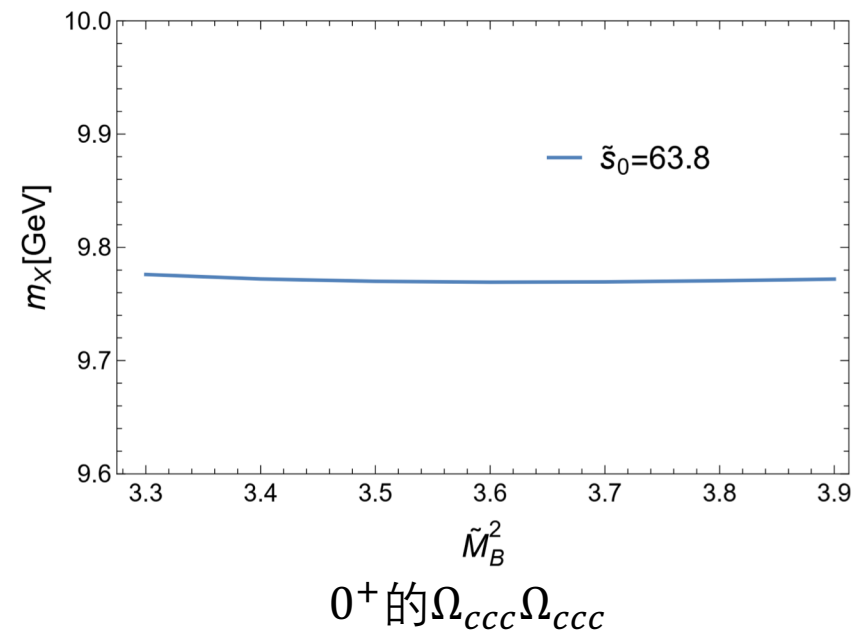
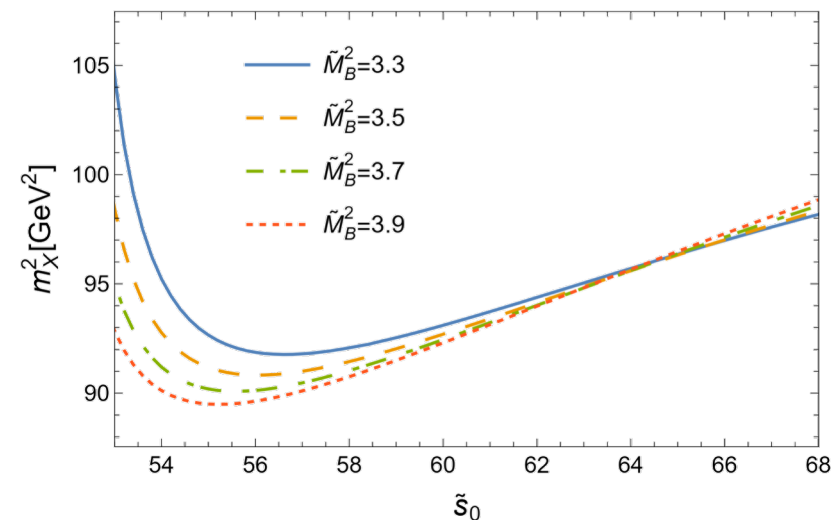
- $m_c = 1.273 \pm 0.0046\text{GeV}$ ,  $m_b = 4.183 \pm 0.007\text{GeV}$ ,  $\langle \alpha_s GG \rangle = (6.35 \pm 0.35) \times 10^{-2} \text{GeV}^4$ ,  $\text{PC} \geq 40\%$ ,  $\text{CV} \leq 30\%$

- 无量纲化的关联函数非常便于数据处理

$$\Pi^{\text{Pert}}(q^2) = m_Q^{14} \tilde{\Pi}^{\text{Pert}}(\tilde{q}^2), \quad \Pi^{GG}(q^2) = m_Q^{10} \tilde{\Pi}^{GG}(\tilde{q}^2), \quad \tilde{q}^2 \equiv q^2/m_Q^2$$

- 格点给出  $\Omega_{ccc}$  和  $\Omega_{bbb}$  质量约为  $4.8\text{GeV}$  PRL130 (2023) 111901 和  $14.4\text{GeV}$  PRD 112 (2025) L111501, 对应阈值  $9.6\text{GeV}$  和  $28.8\text{GeV}$

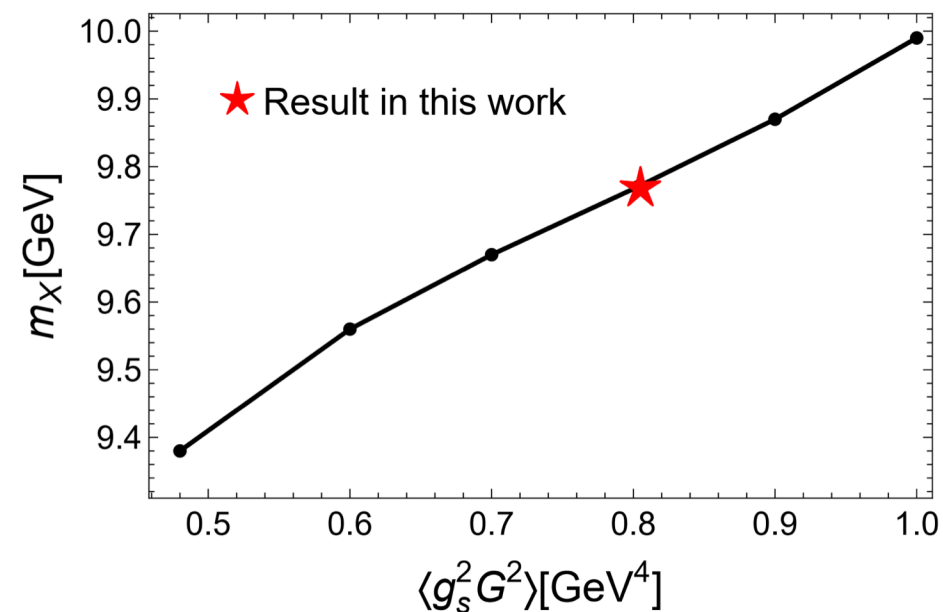
	$J^P$	质量[GeV]
$\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$	$0^+$	$9.77 \pm 0.04$
$\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$	$2^+$	$10.45 \pm 0.04$
$\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$	$0^+$	$26.60 \pm 0.05$
$\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$	$2^+$	$27.05 \pm 0.06$



# $\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$ 质量谱分析

不同理论对 $0^+$ 的 $\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$ 的预言

方法	$\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$ (MeV)	$\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$ (MeV)	Ref.
LQCD	9585.52	/	PRL 127 (2021) 072003
LQCD	$\Delta E = -39(27)$	$28651_{-17}^{+16}(15)$	PRL 130 (2023) 111901 PRD 112 (2025) 054501
QM	9621.09	28825.62	PRD 111 (2025) 054002
QM	$9735.1 \pm 2.7$	$29780.6 \pm 4.2$	EPJC 82 (2022) 805
QM	9684.8	28680.7	EPJC 84 (2024) 126
QM	9960	29167	2208.03041
QM	9904	29114	PRD 106 (2022) 114028
QM	$\Delta E \approx -1$	$\Delta E \approx -1$	PRD 108 (2023) 5 054037
OBE	9585.7	28736.3	CPL 38 (2021) 101201
QCDSR	$9770 \pm 40$	$26600 \pm 50$	This work



- $0^+$ 双重子的质量都低于 $2^+$ 双重子
- $0^+$ 和 $2^+$ 的 $\Omega_{ccc}\Omega_{ccc}$ 质量都高于两体阈值， $\Omega_{bbb}\Omega_{bbb}$ 质量都低于两体阈值
- 全重六夸克体系对高圈计算的技术提出了新的挑战

Thanks!