

# 基于重要性截断组态相互作用方法研究 $^{48}\text{Ca}$ 的双贝塔衰变

连新

四川大学

合作者

丁晨蓉 中山大学

尧江明 中山大学

白春林 四川大学

第二届原子核从头计算与贝塔衰变前沿研讨会

2026 年 1 月 10-12 日, 重庆, 西南大学

# 目录

1 背景介绍

2 模型与方法

3 结果与讨论

4 总结与展望

# 无中微子双贝塔衰变 ( $0\nu\beta\beta$ )

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu} |M^{0\nu}|^2 \left( \frac{\langle m_{\beta\beta} \rangle}{m_e} \right)^2.$$

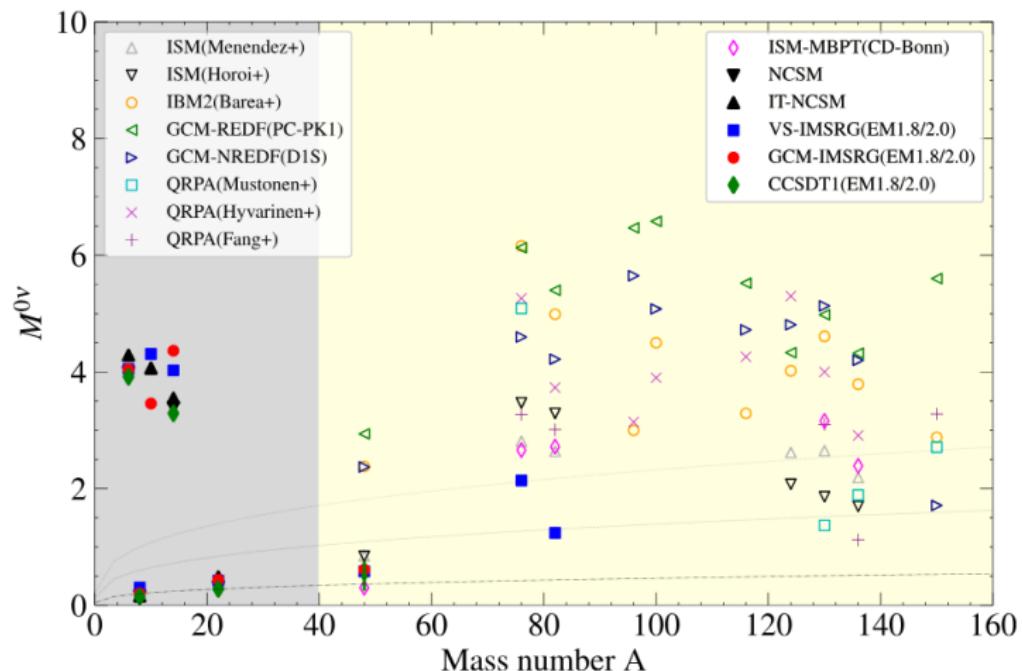
## • 物理意义

- 确认中微子是马约拉纳费米子。
- 轻子数不守恒的过程
- 提取中微子的质量
- 解释宇宙物质-反物质不对称性

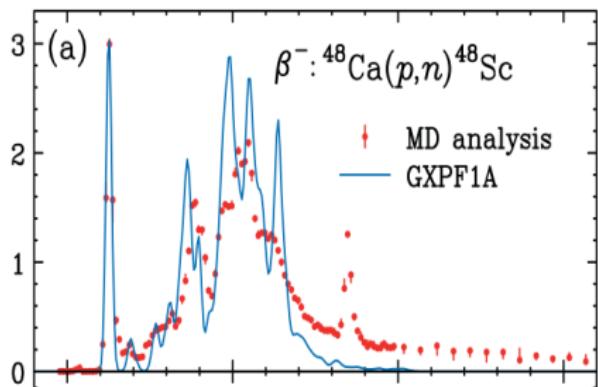
## • 实验现状：

- $^{48}\text{Ca}$  是最轻的双  $\beta$  衰变候选核，实验上已观测到  $2\nu\beta\beta$  衰变
- 当前半衰期下限： $T_{1/2}^{0\nu} \sim 10^{22} - 10^{23}$  年
- 下一代吨级实验：灵敏度提升数十倍至上百倍

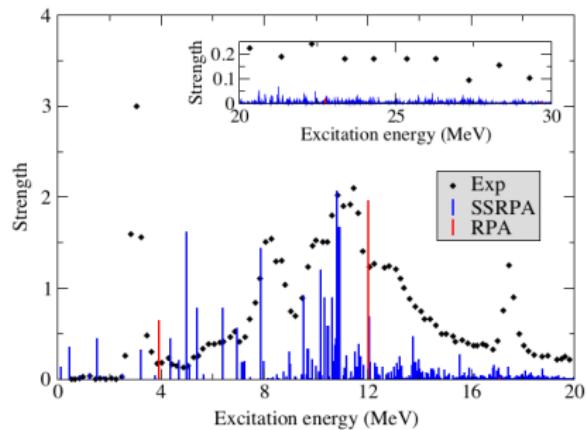
# 核矩阵元素计算的不确定性



# $B(GT^-) : {}^{48}\text{Ca} \rightarrow {}^{48}\text{Sc}$



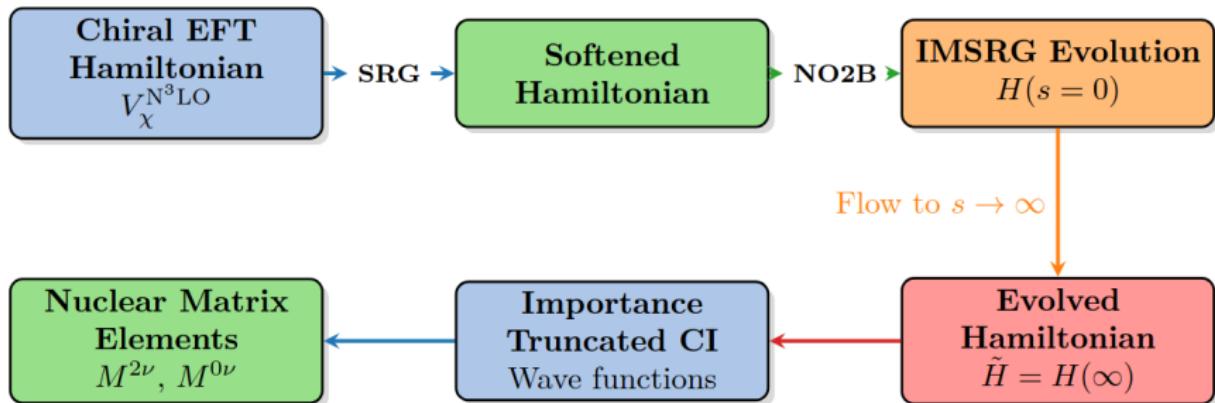
K. Yako et al., Phys. Rev. Lett. 103, 012503 (2009).



D. Gambacurta, M. Grasso, and J. Engel, Phys. Rev. Lett. 125, 212501 (2020).

- GXPF1A (小模型空间 + 充分多体关联): 基本重现峰位置, 高估强度。
- SRPA (大模型空间 + 一定多体关联): 未能重现低能峰, 强度接近实验。

# 理论框架概览



- ① **SRG**: 削弱高动量和低动量的耦合，在较大模型空间得到软化后的核力
- ② **NO2B**: 正规排序保留两体部分，简化三体力
- ③ **IMSRG**: 基态与激发态解耦
- ④ **Importance Truncated CI**: 组态空间构建与哈密顿量对角化

# 约化两体哈密顿量

$$\begin{aligned}
 H &= T + V_2 + V_3 \\
 &= \sum_{ij} t_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_l c_k + \frac{1}{36} \sum_{ijklmn} V_{ijklmn} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger c_n c_m c_l
 \end{aligned}$$

$H$  对参考态  $|\Phi\rangle$  做正规排序, 截断三体项后再恢复正常排序:

$$H_{\text{eff}} = \tilde{E}_0 + \sum_{ij} \tilde{T}_{ij} a_i^\dagger a_j + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \tilde{V}_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$$

三体力贡献通过约化密度矩阵  $\rho_{mn}, \lambda_{jkmn}$  进入有效两体力:

$$\tilde{E}_0 = \frac{1}{12} \sum_{ijklmn} V_{ijklmn} (2\rho_{il}\rho_{jm}\rho_{kn} - 3\rho_{il}\lambda_{jkmn})$$

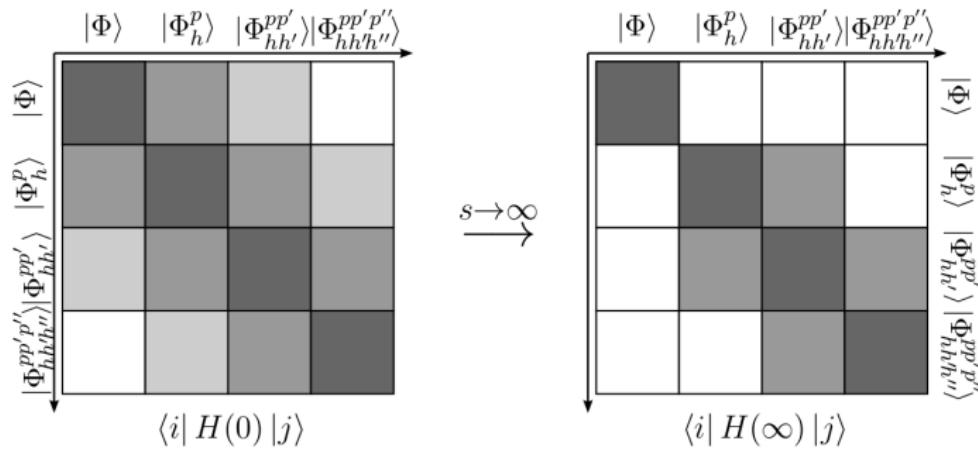
$$\tilde{T}_{ij} = t_{ij} + \frac{1}{4} \sum_{klmn} V_{iklmn} (\lambda_{klmn} - 2\rho_{km}\rho_{ln}) \quad \tilde{V}_{ijkl} = V_{ijkl} + \sum_{mn} V_{ijmklm} \rho_{mn}$$

# 介质相似重整化群 (IMSRG)

通过连续幺正变换驱动哈密顿量到特定形式：

$$\frac{dH(s)}{ds} = [\eta(s), H(s)], \quad H(0) = H_{\text{eff}}$$

其中  $\eta(s)$  为反厄米生成元



# 组态相互作用 (CI) 方法

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= D_0|\Phi\rangle + \sum_{mi} D_i^m |\Phi_i^m\rangle + \frac{1}{4} \sum_{mniij} D_{ij}^{mn} |\Phi_{ij}^{mn}\rangle + \dots \\
 &\approx \sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{\substack{m_1 \dots m_k \\ i_1 \dots i_k}} D_{i_1 \dots i_k}^{m_1 \dots m_k} |\Phi_{i_1 \dots i_k}^{m_1 \dots m_k}\rangle
 \end{aligned}$$

- $|\Phi\rangle$ : 参考态 (Slater 行列式)
- $|\Phi_i^m\rangle = a_m^\dagger a_i |\Phi\rangle$ : 1p1h 激发
- $|\Phi_{ij}^{mn}\rangle = a_m^\dagger a_n^\dagger a_j a_i |\Phi\rangle$ : 2p2h 激发
- ...

## M-scheme

- $J_z$ : 角动量 z 分量
- $\tau_z$ : 同位旋 z 分量
- $\Pi$ : 宇称

完整 CI: 组态数  $\sim \binom{N}{A}$ , 指数增长

粒子空穴截断后的组态数仍然巨大, 需要进一步减少计算量

# 重要性截断 (IT) 方法

对于组态  $|\Phi_v\rangle$ , 其相对于若干参考状态的重要性度量因子  $\kappa_v$  定义为:

$$\kappa_v = \sum_{k \in \mathcal{M}_{\text{ref}}} \left| \frac{\langle \Phi_v | H | \Psi_k^{\text{ref}} \rangle}{\epsilon_v - E_k^{(0)}} \right|$$

其中:

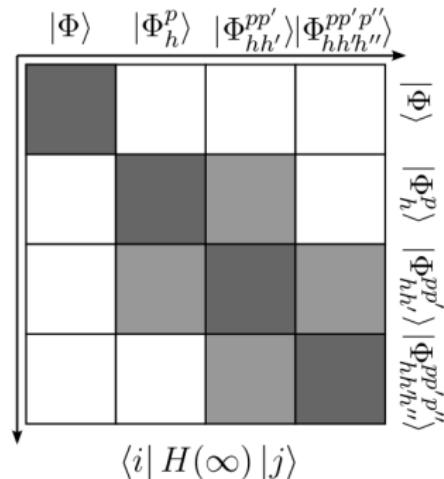
- $\mathcal{M}_{\text{ref}}$ : 当前参考空间
- $|\Psi_k^{\text{ref}}\rangle$ : 参考空间中的本征态
- $E_k^{(0)}$ : 参考态能量
- $\epsilon_v = \langle \Phi_v | H | \Phi_v \rangle$ : 组态对角元

$\kappa_v$  正比于组态  $|\Phi_v\rangle$  对参考态能量的二阶微扰修正

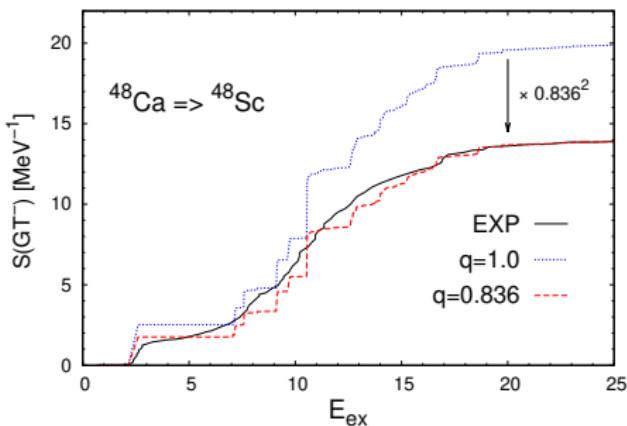
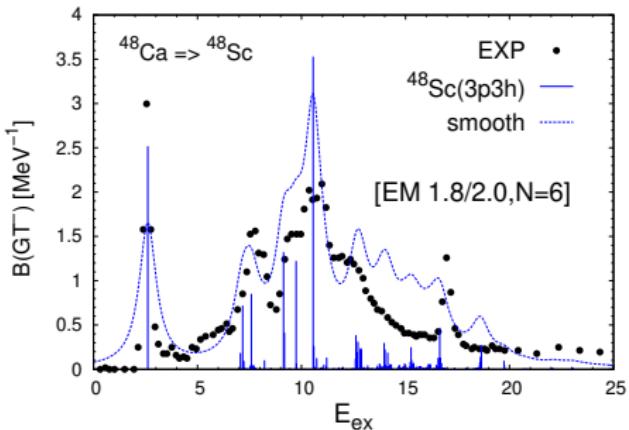
# 重要性截断迭代算法

- ① 初始化参考空间  $\mathcal{M}_{\text{ref}}^{(0)}$  (如 1p1h 空间)
- ② 对角化  $H$  获得  $\{|\Psi_k^{\text{ref}}\rangle, E_k^{(0)}\}$
- ③ 对所有候选组态计算  $\kappa_v$
- ④ 选择  $\kappa_v > \kappa_{\min}$  的组态
- ⑤ 扩展空间:  $\mathcal{M}_{\text{ref}}^{(n+1)} = \mathcal{M}_{\text{ref}}^{(n)} \cup \{\text{重要组态}\}$
- ⑥ 重复 2-5 直到所需粒子空穴截断

- 截断阈值:  $\kappa_{\min} = 1.0 \times 10^{-5}$
- 每次迭代只增加高一阶的激发 (如 1p1h  $\rightarrow$  2p2h)
- 最终组态数量约为截断前的 1-2%



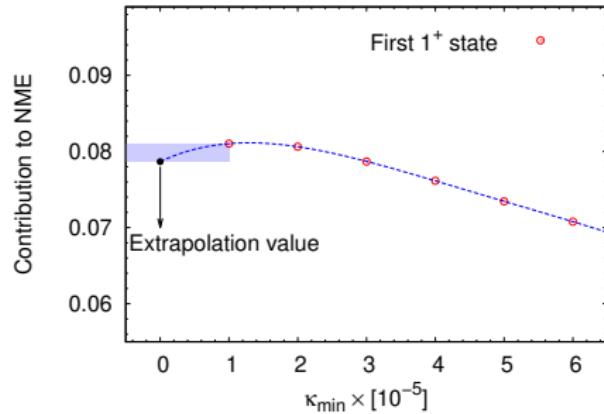
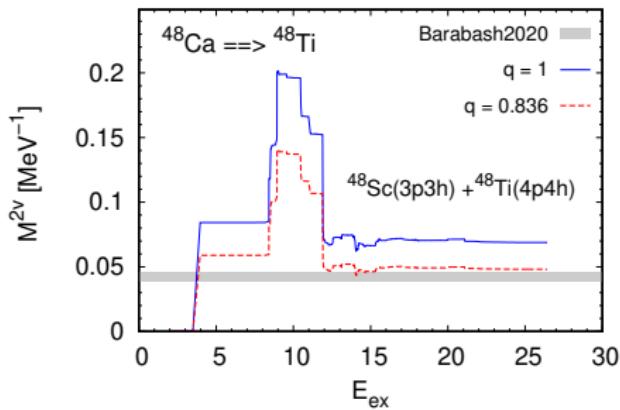
# $B(GT^-) : {}^{48}\text{Ca} \rightarrow {}^{48}\text{Sc}$



- 重现实验低能  $1^+$  和 GT 巨共振主峰位置
- 累积强度:  $S_{GT^-} \approx 20$ , 重现实验强度需引入 quenching 因子  $q = 0.836$

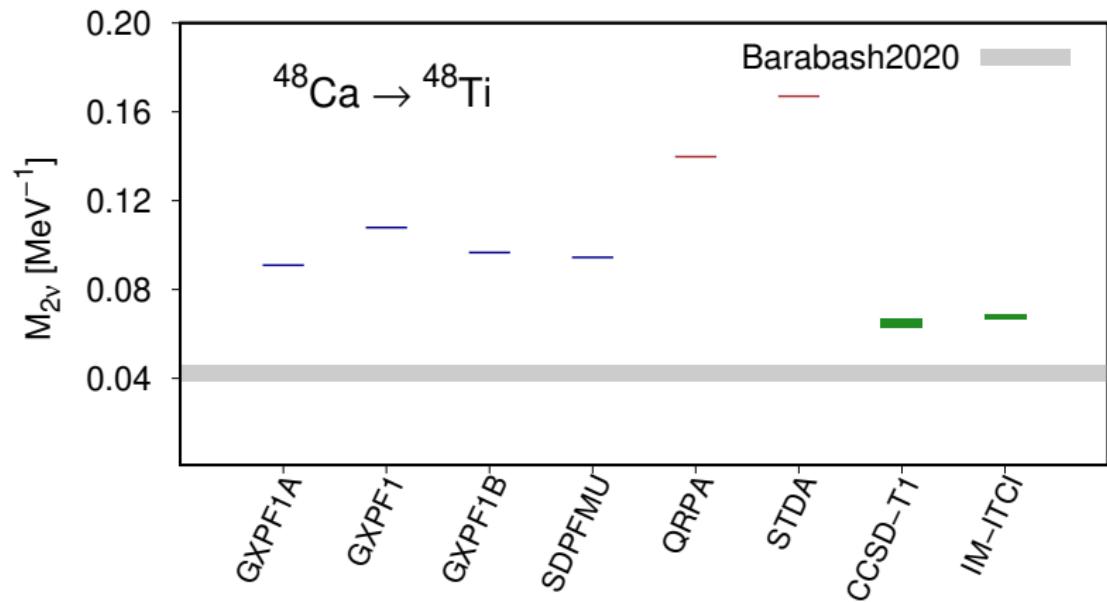
# $2\nu\beta\beta$ 衰变矩阵元素

$$M^{2\nu} = \sum_m \frac{\langle 0_f^+ || \sigma\tau^- || 1_m^+ \rangle \langle 1_m^+ || \sigma\tau^- || 0_i^+ \rangle}{E(1_m^+) - [E(0_i^+) + E(0_f^+)]/2}$$



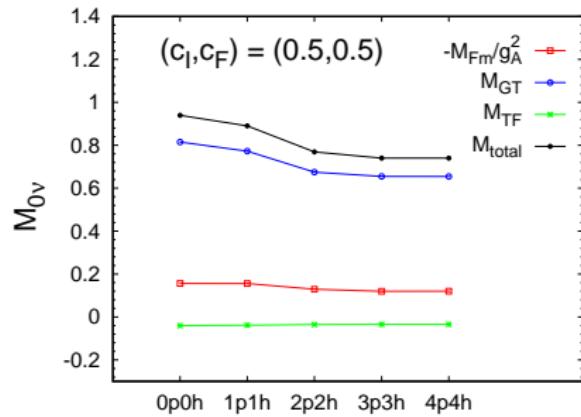
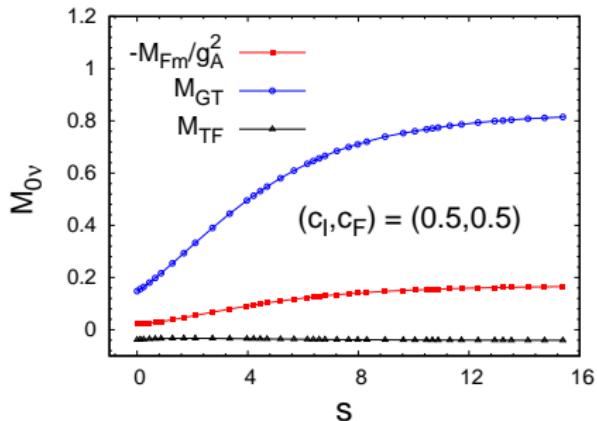
- $q = 0.836$  时与实验值基本吻合
- 通过外推最低的  $1^+$  态对 NME 的贡献估计误差

# $2\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元素



不同理论模型得到的  $2\nu\beta\beta$  衰变核矩阵元素，所有结果都取  $q = 1$

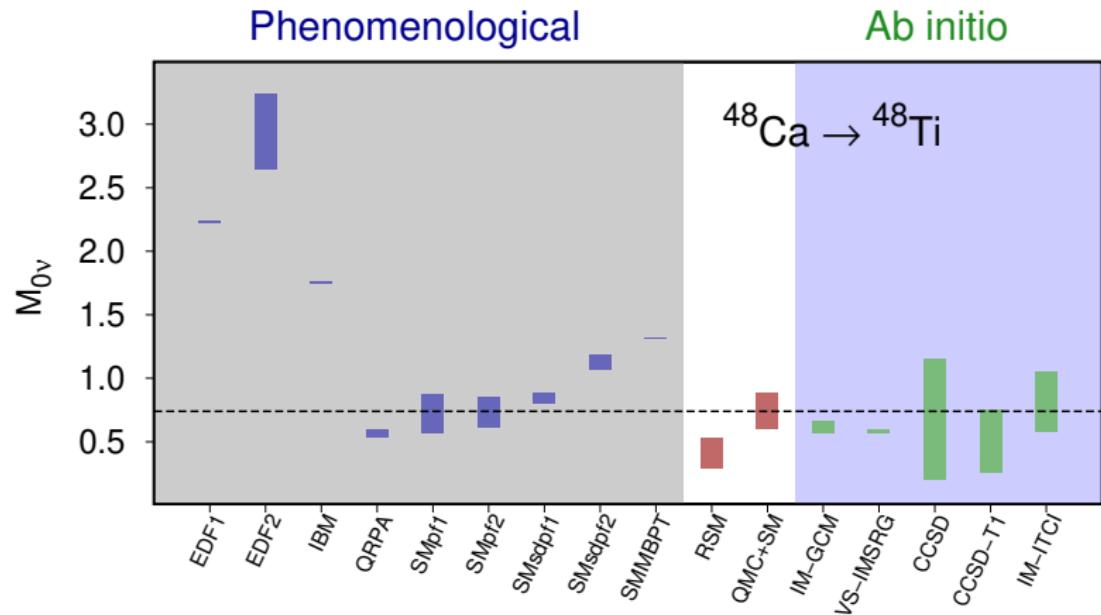
# 0νββ 衰变核矩阵元素



$$\frac{dT_{12}}{ds} = \sum_{q=I,F} c_q \left( \frac{df_{12}^q}{ds} - \sum_a n_a^q \frac{d\Gamma_{1a2a}^q}{ds} \right)$$

$$\frac{dV_{1234}}{ds} = \sum_{q=I,F} c_q \frac{d\Gamma_{1234}^q}{ds}$$

# 0 $\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元素



不同理论模型预测的 0 $\nu\beta\beta$  衰变核矩阵元素

# 结果总结

## 多体计算方案

- 发展了 IMSRG 与 CI 的混合方法
- 利用重要性截断在保持较高精度的前提下减少了计算量
- 为第一性原理 NME 计算提供新的方案

## 物理结果

- 较为准确的描述  $^{48}\text{Ca}$  的 GT<sup>-</sup> 低能峰和主峰位置
- $q = 0.836$  时可以同时重现  $^{48}\text{Ca}$  的实验 GT<sup>-</sup> 总强度和  $2\nu\beta\beta$  NME
- 评估了  $0\nu\beta\beta$  NME 的范围, 与其他第一性原理方案在一定误差内保持一致

# 未来展望

## 方法发展

- 多参考态的演化 (MR-IMSRG)
- 更高阶截断 (IMSRG(3))
- 在 ITCI 中直接处理三体相互作用
- 广义 Lanczos 技术加速计算

## 展望

- 计算所有候选核的 NME
- 包含两体弱流贡献
- 评估理论方法的系统性误差
- 探索非标准机制的衰变

目标：减少理论计算的不确定度，为  $0\nu\beta\beta$  衰变实验提供可靠的理论输入

谢谢！