

多强子散射问题的格点量子色动力学研究

燕浩波

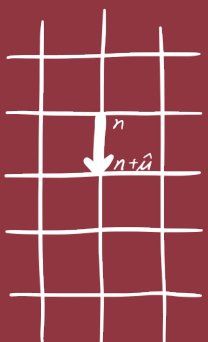
基于以下工作：

1. Haobo Yan et al., **Phys. Rev. D** 111 (2025) 014503 on $D\pi \rightarrow D_0^*(2300)$
2. Haobo Yan et al., **Phys. Rev. Lett** 133 (2024) 211906 on $\pi\pi\pi \rightarrow \omega(782)$ (**Editors' Suggestion**)
3. Haobo Yan et al., **Phys. Rev. Lett** 136 (2026) 141901 on $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$
4. Haobo Yan et al., **JHEP** 10 (2025) 210 on OpTion package



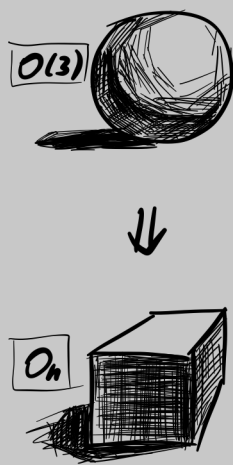
北京大学
PEKING UNIVERSITY

格点谱学
简介

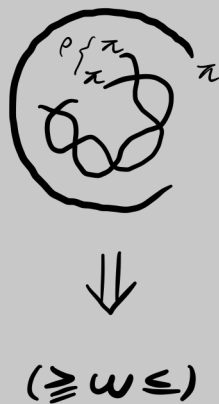


$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}U$
 $e^{-S_F - S_G}$

格点算符
构造方法



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \omega(782)$



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$

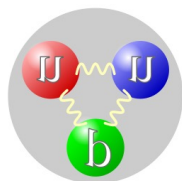


总结

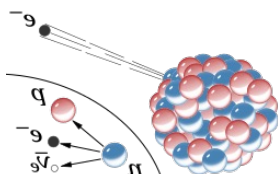
$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$
 $+ i \bar{\psi} \not{D} \psi + h.c.$
 $+ \psi_i y_j \psi_j \phi + h.c.$
 $+ 1/2 \phi^2 - V(\phi)$
 $+ ?$

格点谱学简介

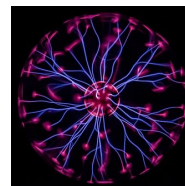
- 低能 QCD 的耦合常数很大，**微扰论失效**，强子谱学成为几个前沿之一，大部分方向由实验推动



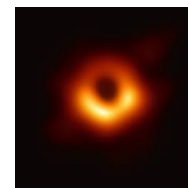
强相互作用
 $\mathcal{O}(1)$



弱相互作用
 $\mathcal{O}(10^{-13})$



电磁相互作用
 $\mathcal{O}(10^{-2})$

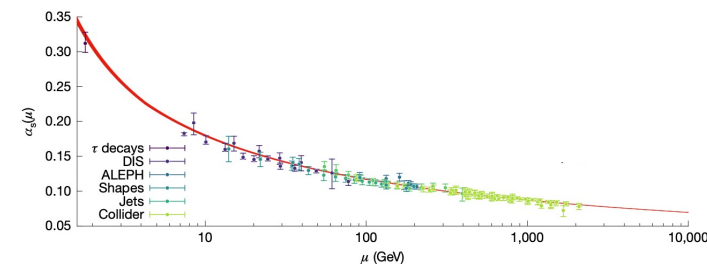


万有引力
 $\mathcal{O}(10^{-39})$

- 实验包括 BESIII、BelleII、LHCb，以及未来可能的 STCF 等，它们几乎每年都发现几个新粒子



- 格点场论生活在**离散的有限体积欧氏时空中**
- 第一性原理、非微扰、误差可持续改进
- 诸多低能关键物理量需要格点输入
- 例如缪子反常磁距、形状因子、强子共振态位置



Brida et al, Nature 652 (2026) 328

- 欧氏空间的路径积分写作 (以两点关联函数为例)

$$\langle \Omega | O(t) O^\dagger(0) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \mathcal{D}[U] e^{-S_F[\psi, \bar{\psi}, U] - S_G[U]} (O(t) O^\dagger(0))[\psi, \bar{\psi}, U]$$

- 费米子部分可积, 但剩余规范部分无法严格求解

$$\text{规范场 } U_\mu^{ab}(x) \sim 48^3 \times 96 \times 4 \times 3^2 \sim 10^9$$

体积 时间 洛伦兹 颜色

- 可按概率 $\det[S_F] e^{-S_G}$ 重点抽样组态 U

- 于是可以在组态上测量可观测量

$$\langle O \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{\substack{U_n \text{ with} \\ \text{probability} \\ \propto e^{-S[U_n]}}} O[U_n]$$

- 格点场论既是世界观 (非微扰的定义) 又是方法论 (非微扰的计算)

刘川《格点量子色动力学导论》

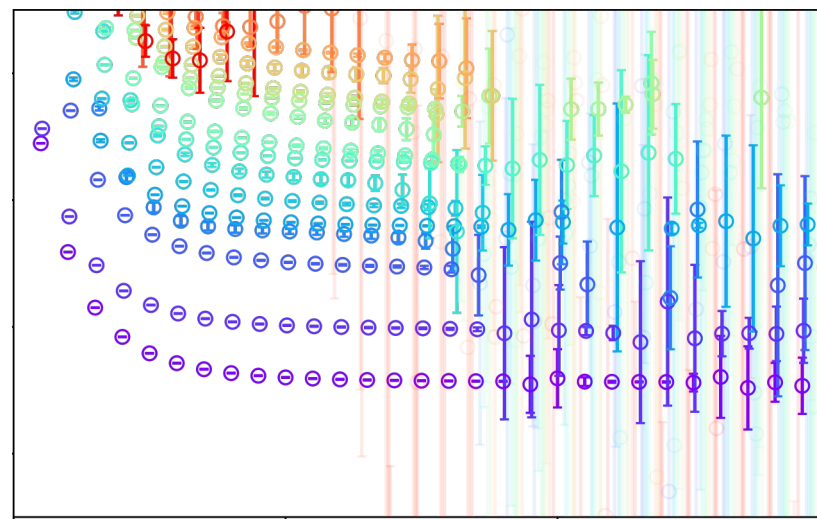
- 关联函数也可写作

$$\begin{aligned}\langle \Omega | O(t) O^\dagger(0) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | O(t) \sum_n \frac{1}{2E_n} | E_n \rangle \langle E_n | O^\dagger(0) | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{2E_n} |\langle \Omega | O(0) | E_1 \rangle|^2 e^{-E_1 t} + \text{激发态}\end{aligned}$$

- 基态能量 E_1 可由有效质量估计

$$\log \frac{C(t)}{C(t+1)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E_1$$

- 更高的激发态 E_n 可通过对角化关联函数矩阵获得



格点能谱示例

➤ **单粒子：**人们很早就可以以很高的精度得到各个基态强子的质量

➤ **两体散射问题**

1991: Lüscher 公式，人们开始理解如何在有限体积中计算散射问题

1992-2014: Lüscher 方法的各类推广

目前前沿：重子相关的散射

➤ **三体散射问题**

2014-2017: 三体形式理论开始

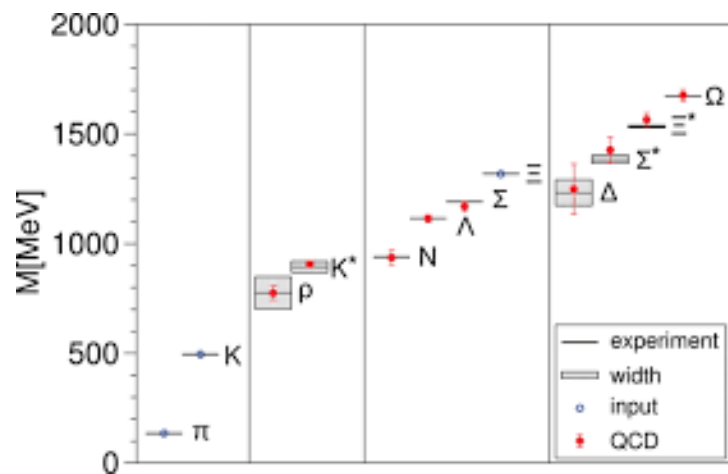
2021: 纯排斥道 $I = 3 \pi\pi\pi$

2021: 共振态 $\pi\pi\pi \rightarrow a_1(1260)$

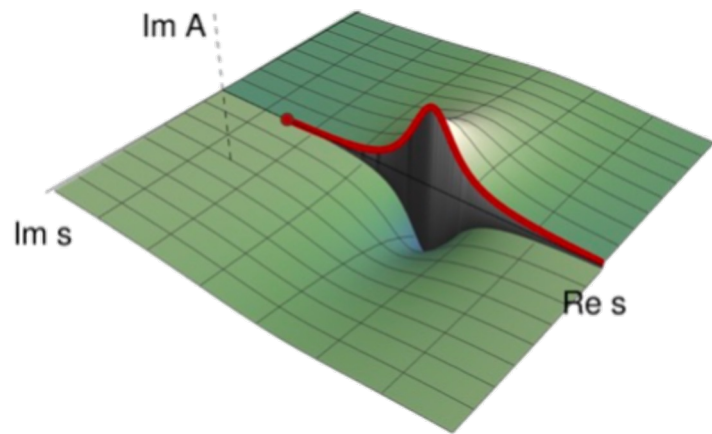
2021-至今：一些无共振态的三体道

目前前沿：寻找三体共振态

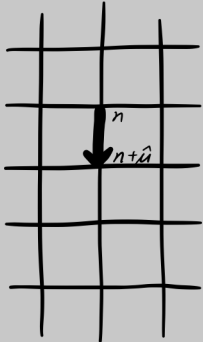
➤ 我们的愿望是从标准模型出发获得 PDG 的低激发态谱



Science 322 (2008) 1224



格点谱学 简介



$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}U$$

$$e^{-S_F - S_G}$$

格点算符 构造方法



三体散射问题 $\pi\pi\pi \rightarrow \omega(782)$

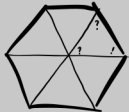


$$(\geq \omega \leq)$$

三体散射问题 $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$



$\pi(1300)$



总结

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$+ i\bar{\psi}\not{D}\psi + h.c.$$

$$+ \psi_i y_j \psi_j \phi + h.c.$$

$$+ |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

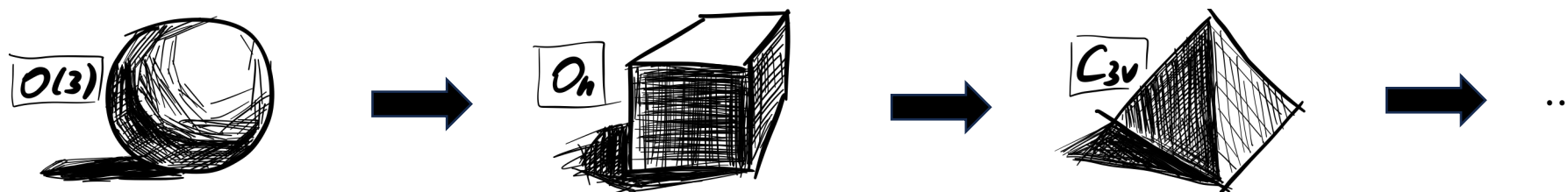
$$+ ?$$

格点算符构造方法 (OpTion)

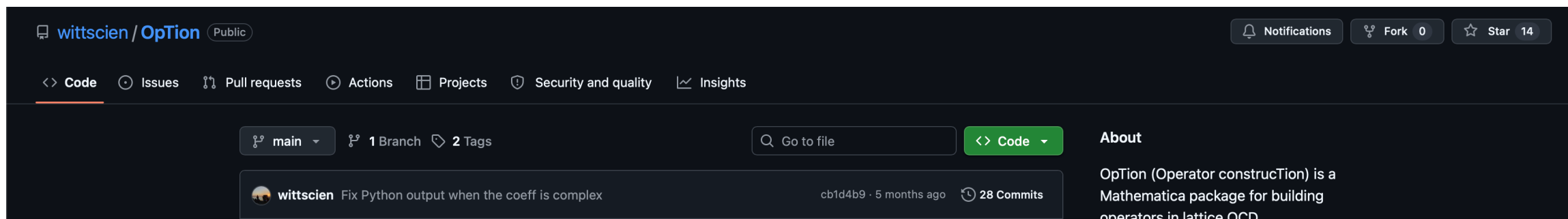
- 大部分的格点研究需要计算**多点关联函数**

$$C(t_1, \cdots, t_n) = \langle \Omega | O_1(t_1) O_2(t_2) \cdots O_n(t_n) | \Omega \rangle$$

- 对称性从连续空间的 $O(3)$ 破缺为**立方群** O_h 或更小的小群



- Mathematica 软件 OpTion 用以构造任意不可约表示下的**任意** N 体算符
- OpTion 成为了中国格点合作组 (CLQCD) 的常用工具
- 软件已开源: <https://github.com/wittscien/OpTion>



格点算符构造方法 (OpTion)

- Mathematica 软件 OpTion 用以构造任意不可约表示下的**任意** N 体算符
- OpTion 成为了中国格点合作组 (CLQCD) 的常用工具
- 软件已开源: <https://github.com/wittscien/OpTion>

wittscien / OpTion Public

<> Code

Issues

Pull requests

Actions

Projects

Security and quality

Insights

main 1 Branch 2 Tags

Go to file

<> Code

wittscien

Fix Python output when the coeff is complexcb1d4b9 · 5 months ago🕒 28 Commits

Manual	Update tutorials	6 months ago
OpTion	Fix Python output when the coeff is complex	5 months ago
Tests	Update tutorials	6 months ago
.gitignore	First commit.	2 years ago
LICENSE.md	First commit.	2 years ago
OpTion.wl	Add option to output Python input	5 months ago
README.md	Update the published paper link	7 months ago

README

MIT license

OpTion

About

OpTion (Operator construcTion) is a Mathematica package for building operators in lattice QCD.

physics

mathematica

lattice-qcd

Readme

MIT license

Activity

14 stars

1 watching

0 forks

Report repository

Releases 2

OpTion 1.1.0

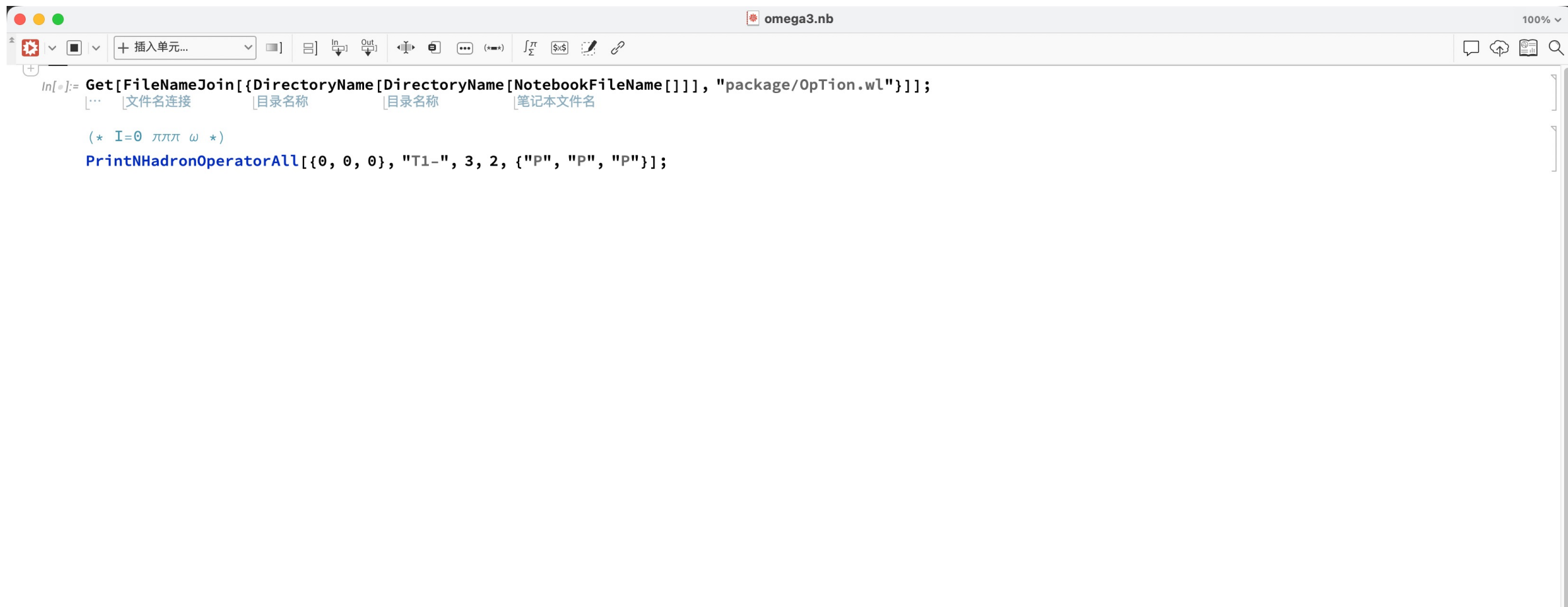
Latest

on Jul 24, 2025

+ 1 release

格点算符构造方法 (OpTion)

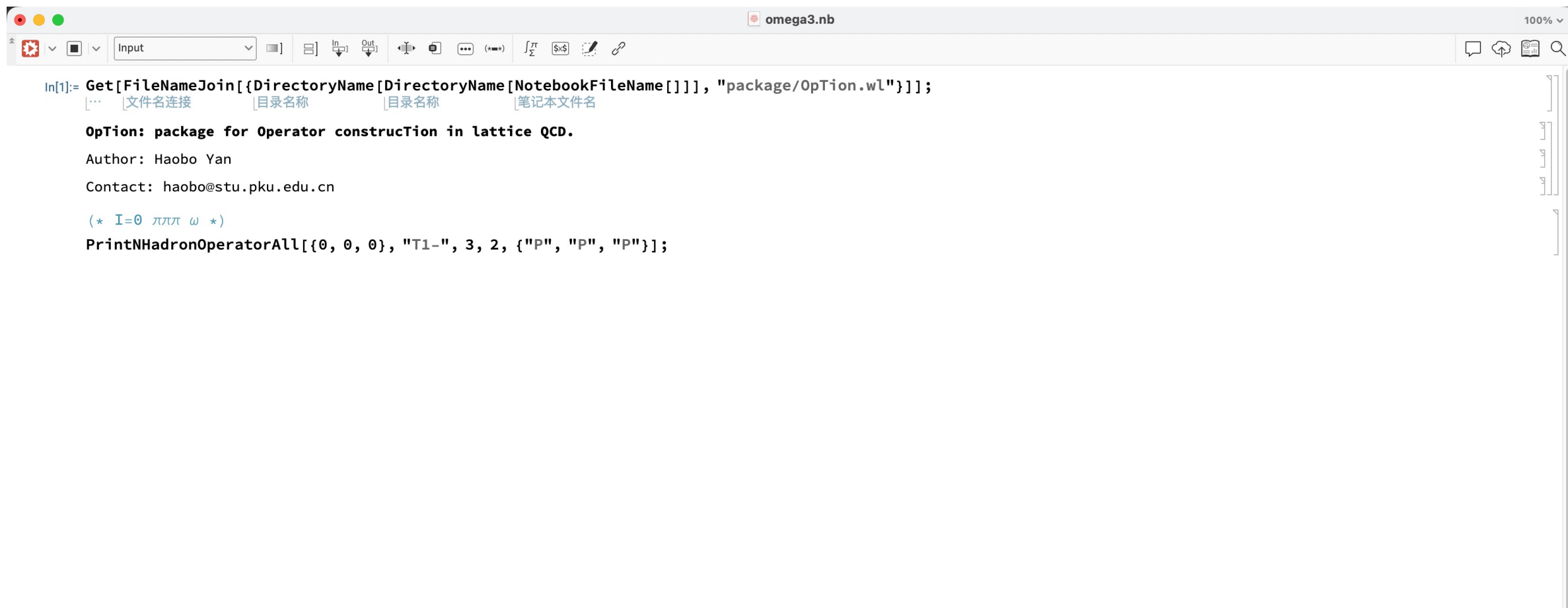
- Mathematica 软件 OpTion 用以构造任意不可约表示下的**任意** N 体算符
- OpTion 成为了中国格点合作组 (CLQCD) 的常用工具
- 软件已开源: <https://github.com/wittscien/OpTion>



```
In[*]:= Get[FileNameJoin[{DirectoryName[DirectoryName[NotebookFileName[]]], "package/OpTion.wl"}]];
(* I=0  $\pi\pi\pi$   $\omega$  *)
PrintNHadronOperatorAll[{0, 0, 0}, "T1-", 3, 2, {"P", "P", "P"}];
```

格点算符构造方法 (OpTion)

- Mathematica 软件 OpTion 用以构造任意不可约表示下的**任意** N 体算符
- OpTion 成为了中国格点合作组 (CLQCD) 的常用工具
- 软件已开源: <https://github.com/wittscien/OpTion>



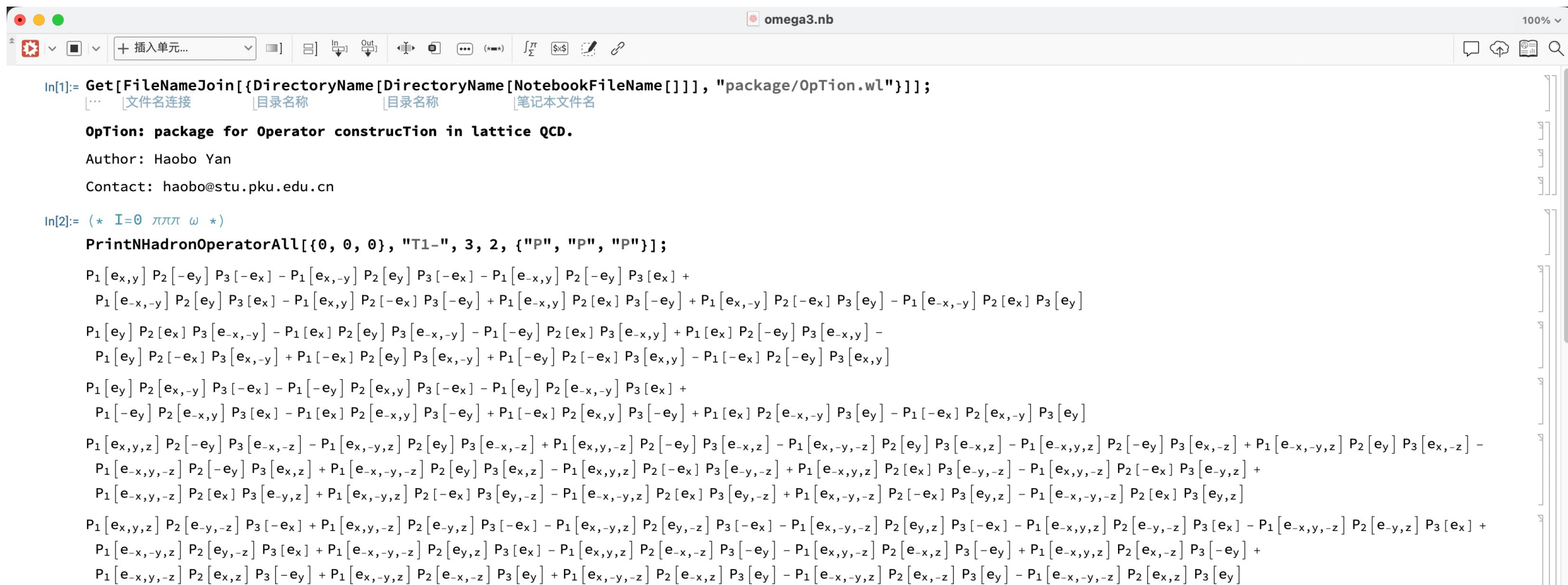
```
In[1]:= Get[FileNameJoin[{DirectoryName[DirectoryName[NotebookFileName[]]], "package/OpTion.wl"}]];
[... 文件名连接      目录名称      目录名称      笔记本文件名]

OpTion: package for Operator construcTion in lattice QCD.
Author: Haobo Yan
Contact: haobo@stu.pku.edu.cn

(* I=0  $\pi\pi\pi$   $\omega$  *)
PrintNHadronOperatorAll[{0, 0, 0}, "T1-", 3, 2, {"P", "P", "P"}];
```

格点算符构造方法 (OpTion)

- Mathematica 软件 OpTion 用以构造任意不可约表示下的任意 N 体算符
- OpTion 成为了中国格点合作组 (CLQCD) 的常用工具
- 软件已开源: <https://github.com/wittscien/OpTion>



```
In[1]:= Get[FileNameJoin[{DirectoryName[DirectoryName[NotebookFileName[]]], "package/OpTion.wl"}]];
(* 文件名连接 目录名称 目录名称 笔记本文件名 *)

OpTion: package for Operator construction in lattice QCD.

Author: Haobo Yan
Contact: haobo@stu.pku.edu.cn

In[2]:= (* I=0  $\pi\pi\pi$   $\omega$  *)
PrintNHadronOperatorAll[{0, 0, 0}, "T1-", 3, 2, {"P", "P", "P"}];

P1[ex,y] P2[-ey] P3[-ex] - P1[ex,-y] P2[ey] P3[-ex] - P1[-ex,y] P2[-ey] P3[ex] +
P1[-ex,-y] P2[ey] P3[ex] - P1[ex,y] P2[-ex] P3[-ey] + P1[-ex,y] P2[ex] P3[-ey] + P1[ex,-y] P2[-ex] P3[ey] - P1[-ex,-y] P2[ex] P3[ey]

P1[ey] P2[ex] P3[-ex,-y] - P1[ex] P2[ey] P3[-ex,-y] - P1[-ey] P2[ex] P3[-ex,y] + P1[ex] P2[-ey] P3[-ex,y] -
P1[ey] P2[-ex] P3[ex,-y] + P1[-ex] P2[ey] P3[ex,-y] + P1[-ey] P2[-ex] P3[ex,y] - P1[-ex] P2[-ey] P3[ex,y]

P1[ey] P2[ex,-y] P3[-ex] - P1[-ey] P2[ex,y] P3[-ex] - P1[ey] P2[-ex,-y] P3[ex] +
P1[-ey] P2[-ex,y] P3[ex] - P1[ex] P2[-ex,y] P3[-ey] + P1[-ex] P2[ex,y] P3[-ey] + P1[ex] P2[-ex,-y] P3[ey] - P1[-ex] P2[ex,-y] P3[ey]

P1[ex,y,z] P2[-ey] P3[-ex,-z] - P1[ex,-y,z] P2[ey] P3[-ex,-z] + P1[ex,y,-z] P2[-ey] P3[-ex,z] - P1[ex,-y,-z] P2[ey] P3[-ex,z] - P1[-ex,y,z] P2[-ey] P3[ex,-z] + P1[-ex,-y,z] P2[ey] P3[ex,-z] -
P1[-ex,y,-z] P2[-ey] P3[ex,z] + P1[-ex,-y,-z] P2[ey] P3[ex,z] - P1[ex,y,z] P2[-ex] P3[-ey,-z] + P1[-ex,y,z] P2[ex] P3[-ey,-z] - P1[ex,y,-z] P2[-ex] P3[-ey,z] +
P1[-ex,y,-z] P2[ex] P3[-ey,z] + P1[ex,-y,z] P2[-ex] P3[ey,-z] - P1[-ex,-y,z] P2[ex] P3[ey,-z] + P1[ex,y,-z] P2[-ex] P3[ey,z] - P1[-ex,-y,-z] P2[ex] P3[ey,z]

P1[ex,y,z] P2[-ey,-z] P3[-ex] + P1[ex,y,-z] P2[-ey,z] P3[-ex] - P1[ex,-y,z] P2[ey,-z] P3[-ex] - P1[ex,-y,-z] P2[ey,z] P3[-ex] - P1[-ex,y,z] P2[-ey,-z] P3[ex] - P1[-ex,y,-z] P2[-ey,z] P3[ex] +
P1[-ex,-y,z] P2[ey,-z] P3[ex] + P1[-ex,-y,-z] P2[ey,z] P3[ex] - P1[ex,y,z] P2[-ex,-z] P3[-ey] - P1[ex,y,-z] P2[-ex,z] P3[-ey] + P1[-ex,y,z] P2[ex,-z] P3[-ey] +
P1[-ex,y,-z] P2[ex,z] P3[-ey] + P1[ex,-y,z] P2[-ex,-z] P3[ey] + P1[ex,-y,-z] P2[-ex,z] P3[ey] - P1[-ex,-y,z] P2[ex,-z] P3[ey] - P1[-ex,-y,-z] P2[ex,z] P3[ey]
```

格点算符构造方法 (OpTion)

- Mathematica 软件 OpTion 用以构造任意不可约表示下的任意 N 体算符
- OpTion 成为了中国格点合作组 (CLQCD) 的常用工具
- 软件已开源: <https://github.com/wittscien/OpTion>

```
omega3.nb
100%

In[1]:= Get[FileNameJoin[{DirectoryName[DirectoryName[NotebookFileName[]]], "package/OpTion.wl"}]];
...  [文件名连接]  [目录名称]  [目录名称]  [笔记本文件名]

OpTion: package for Operator construction in lattice QCD.

Author: Haobo Yan
Contact: haobo@stu.pku.edu.cn

In[2]:= (* I=0  $\pi\pi\pi$   $\omega$  *)
PrintNHadronOperatorAll[{0, 0, 0}, "T1-", 3, 2, {"P", "P", "P"}];

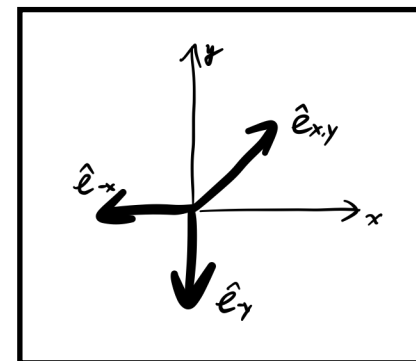
P1[ex,y] P2[-ey] P3[-ex] - P1[ex,y] P2[ey] P3[-ex] - P1[ex,y] P2[-ey] P3[ex] +
P1[-ex,y] P2[ey] P3[ex] - P1[ex,y] P2[-ex] P3[-ey] + P1[-ex,y] P2[ex] P3[-ey] + P1[ex,y] P2[-ex] P3[ey] - P1[-ex,y] P2[ex] P3[ey]

P1[ey] P2[ex] P3[-ex,y] - P1[ex] P2[ey] P3[-ex,y] - P1[-ey] P2[ex] P3[-ex,y] + P1[ex] P2[-ey] P3[-ex,y] -
P1[ey] P2[-ex] P3[ex,y] + P1[-ex] P2[ey] P3[ex,y] + P1[-ey] P2[-ex] P3[ex,y] - P1[-ex] P2[-ey] P3[ex,y]

P1[ey] P2[ex,y] P3[-ex] - P1[-ey] P2[ex,y] P3[-ex] - P1[ey] P2[-ex,y] P3[ex] +
P1[-ey] P2[-ex,y] P3[ex] - P1[ex] P2[-ex,y] P3[-ey] + P1[-ex] P2[ex,y] P3[-ey] + P1[ex] P2[-ex,y] P3[ey] - P1[-ex] P2[ex,y] P3[ey]

P1[ex,y,z] P2[-ey] P3[ex,z] - P1[ex,y,z] P2[ey] P3[ex,z] + P1[ex,y,z] P2[-ey] P3[-ex,z] - P1[ex,y,z] P2[ey] P3[-ex,z] - P1[-ex,y,z] P2[-ey] P3[ex,z] + P1[-ex,y,z] P2[ey] P3[ex,z] -
P1[-ex,y,z] P2[-ey] P3[ex,z] + P1[-ex,y,z] P2[ey] P3[ex,z] - P1[ex,y,z] P2[-ex] P3[-ey,z] + P1[-ex,y,z] P2[ex] P3[-ey,z] - P1[ex,y,z] P2[-ex] P3[ey,z] +
P1[-ex,y,z] P2[ex] P3[ey,z] - P1[ex,y,z] P2[-ex] P3[ey,z] + P1[ex,y,z] P2[ex] P3[ey,z] - P1[-ex,y,z] P2[ex] P3[ey,z]

P1[ex,y,z] P2[-ey,z] P3[-ex] + P1[ex,y,z] P2[ey,z] P3[-ex] - P1[ex,y,z] P2[-ey,z] P3[-ex] - P1[ex,y,z] P2[ey,z] P3[-ex] - P1[-ex,y,z] P2[-ey,z] P3[ex] - P1[-ex,y,z] P2[ey,z] P3[ex] +
P1[-ex,y,z] P2[ey,z] P3[ex] + P1[-ex,y,z] P2[ey,z] P3[ex] - P1[ex,y,z] P2[-ex,z] P3[-ey] - P1[ex,y,z] P2[-ex,z] P3[-ey] + P1[-ex,y,z] P2[ex,z] P3[-ey] +
P1[-ex,y,z] P2[ex,z] P3[-ey] + P1[ex,y,z] P2[-ex,z] P3[ey] + P1[ex,y,z] P2[ex,z] P3[ey] - P1[-ex,y,z] P2[ex,z] P3[ey] - P1[-ex,y,z] P2[ex,z] P3[ey]
```



格点算符构造方法 (OpTion)

- Mathematica 软件 OpTion 用以构造任意不可约表示下的任意 N 体算符
- OpTion 成为了中国格点合作组 (CLQCD) 的常用工具
- 软件已开源: <https://github.com/wittscien/OpTion>

```
omega3.nb
100%

In[1]:= Get[FileNameJoin[{DirectoryName[DirectoryName[NotebookFileName[]]], "package/OpTion.wl"}]];
... [文件名连接] [目录名称] [目录名称] [笔记本文件名]

OpTion: package for Operator construction in lattice QCD.
Author: Haobo Yan
Contact: haobo@stu.pku.edu.cn

In[2]:= (* I=0  $\pi\pi\pi$   $\omega$  *)
PrintNHadronOperatorAll[{0, 0, 0}, "T1-", 3, 2, {"P", "P", "P"}];

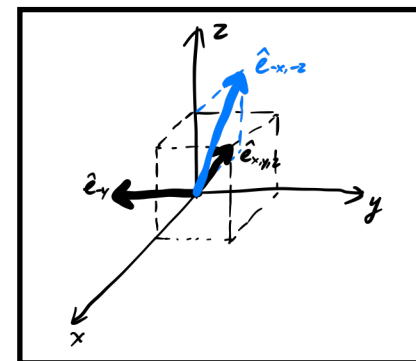
P1[ex,y] P2[-ey] P3[-ex] - P1[ex,-y] P2[ey] P3[-ex] - P1[-ex,y] P2[-ey] P3[ex] +
P1[-ex,-y] P2[ey] P3[ex] - P1[ex,y] P2[-ex] P3[-ey] + P1[-ex,y] P2[ex] P3[-ey] + P1[ex,-y] P2[-ex] P3[ey] - P1[-ex,-y] P2[ex] P3[ey]

P1[ey] P2[ex] P3[-ex,-y] - P1[ex] P2[ey] P3[-ex,-y] - P1[-ey] P2[ex] P3[-ex,y] + P1[ex] P2[-ey] P3[-ex,y] -
P1[ey] P2[-ex] P3[ex,-y] + P1[-ex] P2[ey] P3[ex,-y] + P1[-ey] P2[-ex] P3[ex,y] - P1[-ex] P2[-ey] P3[ex,y]

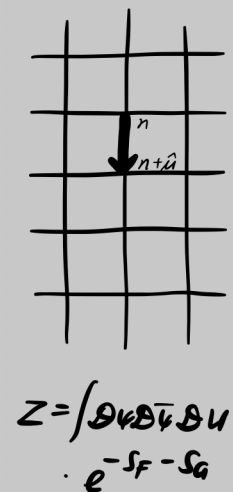
P1[ey] P2[ex,-y] P3[-ex] - P1[-ey] P2[ex,y] P3[-ex] - P1[ey] P2[-ex,-y] P3[ex] +
P1[-ey] P2[-ex,y] P3[ex] - P1[ex] P2[-ex,y] P3[-ey] + P1[-ex] P2[ex,y] P3[-ey] + P1[ex] P2[-ex,-y] P3[ey] - P1[-ex] P2[ex,-y] P3[ey]

P1[ex,y,z] P2[-ey] P3[ex,-z] - P1[ex,-y,z] P2[ey] P3[ex,-z] + P1[ex,y,-z] P2[-ey] P3[ex,-z] - P1[ex,-y,-z] P2[ey] P3[ex,-z] - P1[-ex,y,z] P2[-ey] P3[ex,-z] + P1[-ex,-y,z] P2[ey] P3[ex,-z] -
P1[-ex,y,-z] P2[-ey] P3[ex,z] + P1[-ex,-y,-z] P2[ey] P3[ex,z] - P1[ex,y,z] P2[-ex] P3[-ey,-z] + P1[-ex,y,z] P2[ex] P3[-ey,-z] - P1[ex,y,-z] P2[-ex] P3[-ey,z] +
P1[-ex,y,-z] P2[ex] P3[-ey,z] + P1[ex,-y,z] P2[-ex] P3[ey,-z] - P1[-ex,-y,z] P2[ex] P3[ey,-z] + P1[ex,-y,-z] P2[-ex] P3[ey,z] - P1[-ex,-y,-z] P2[ex] P3[ey,z]

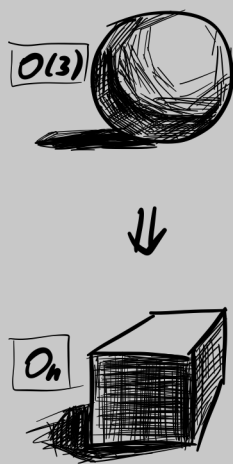
P1[ex,y,z] P2[-ey,-z] P3[-ex] + P1[ex,y,-z] P2[-ey,z] P3[-ex] - P1[ex,-y,z] P2[ey,-z] P3[-ex] - P1[ex,-y,-z] P2[ey,z] P3[-ex] - P1[-ex,y,z] P2[-ey,-z] P3[ex] - P1[-ex,y,-z] P2[-ey,z] P3[ex] +
P1[-ex,-y,z] P2[ey,-z] P3[ex] + P1[-ex,-y,-z] P2[ey,z] P3[ex] - P1[ex,y,z] P2[-ex,-z] P3[-ey] - P1[ex,y,-z] P2[-ex,z] P3[-ey] + P1[-ex,y,z] P2[ex,-z] P3[-ey] +
P1[-ex,y,-z] P2[ex,z] P3[-ey] + P1[ex,-y,z] P2[-ex,-z] P3[ey] + P1[ex,-y,-z] P2[-ex,z] P3[ey] - P1[-ex,-y,z] P2[ex,-z] P3[ey] - P1[-ex,-y,-z] P2[ex,z] P3[ey]
```



格点谱学
简介



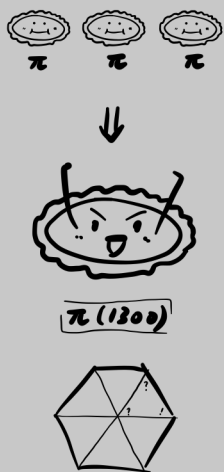
格点算符
构造方法



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \omega(782)$



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$



总结

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$+ i \bar{\psi} \not{D} \psi + h.c.$$

$$+ \psi_i y_j \psi_j \phi + h.c.$$

$$+ 12 \phi^2 - V(\phi)$$

$$+ ?$$

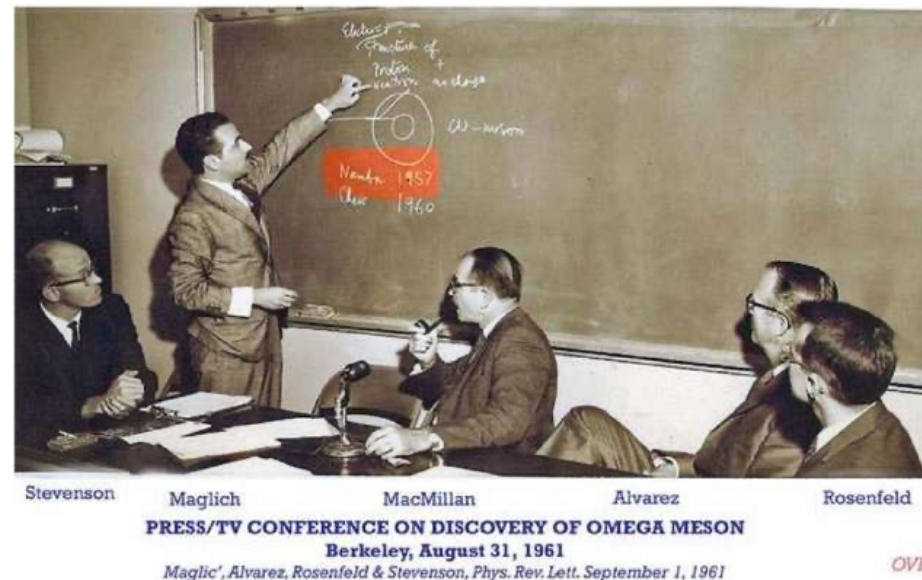
三体 $\pi\pi\pi \rightarrow \omega(782)$ 散射

➤ 诸多**非微扰**强相互作用难题与三体问题相关

1. Roper 共振态: Burkert and Roberts, RMP 2019
2. T_{cc} 奇特强子态: Hansen, Romero-López, Sharpe, JHEP 2024
($T_{cc}(3875)$ 可在非物理 M_π 下由 DD^* 研究)

➤ 三体问题共振态的研究还很初步

➤ **三体问题**的理论研究相对困难



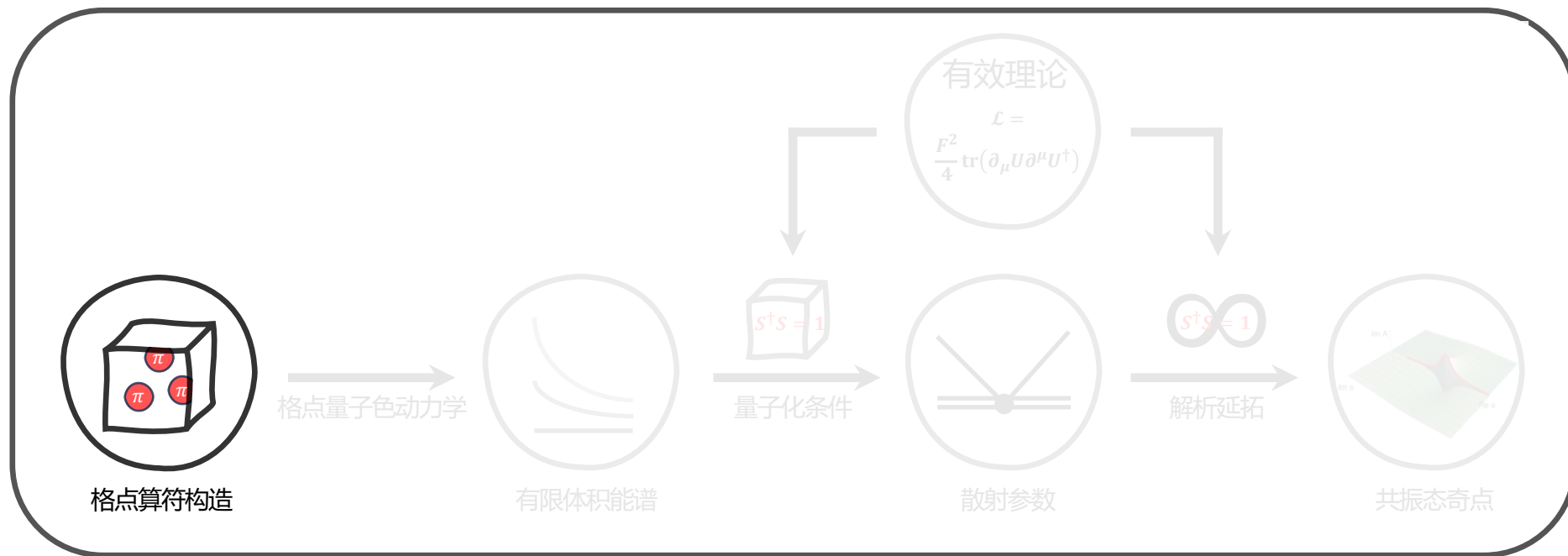
ω 介子的发现

Maglic et al (1961)

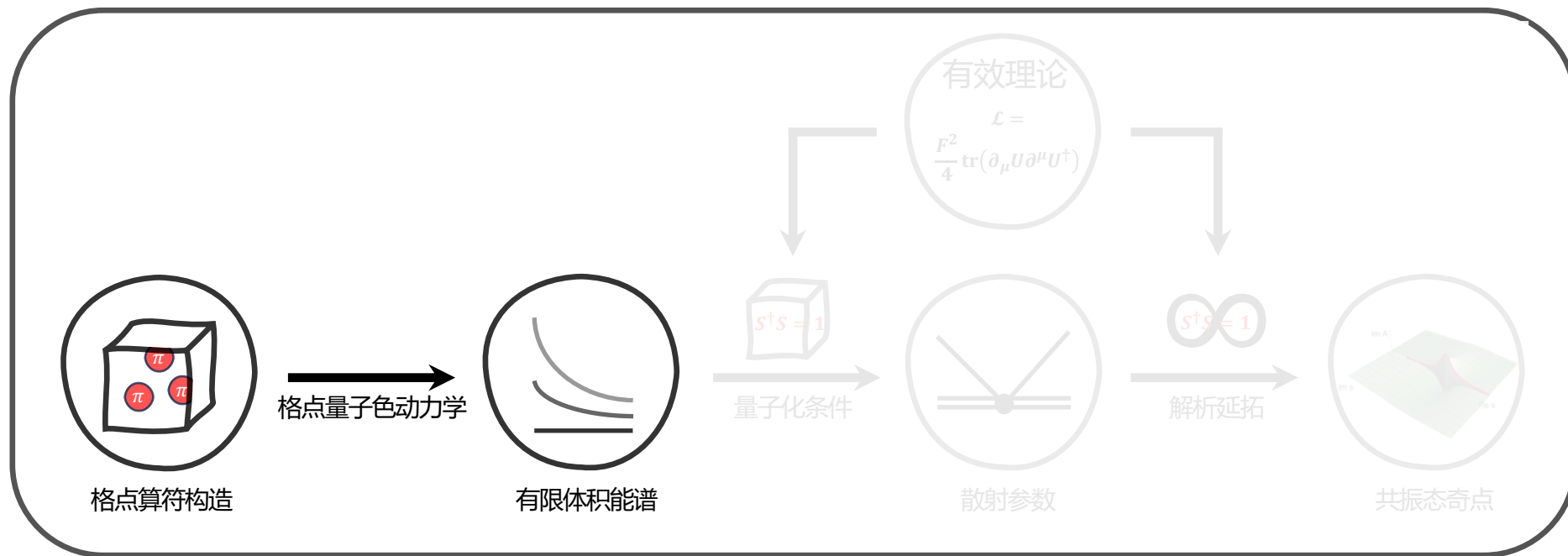
➤ 考察 $\pi\pi\pi$ 散射，寻找其中的 ω 介子

- ω 是最轻的会衰变到三体末态的强子（同位旋守恒）
- ω 在唯象上有重要意义，例如核子间小于 1 fm 时的排斥相互作用、缪子反常磁距...

Sakurai (1960); Erkelenz (1974); Brown and Jackson (1976); Barkov et al., 1985; Connell et al. (1997); Bazavov et al. (2021)



➤ 利用软件 OpTion 构造多体算符



- 利用软件 OpTion 构造多体算符
- 选择作用量，生成组态，求解夸克传播子

组态名	体积	a / fm	β	$\tilde{m}_l^b$	$\tilde{m}_s^b$	M_π / MeV	$M_\pi L$
C24P34	$24^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2770	-0.2310	340	4.38
C24P29	$24^3 \times 72$	0.10530(18)	6.200	-0.2770	-0.2400	292	3.75
C32P29	$32^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2770	-0.2400	292	5.01
C24P23	$24^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2790	-0.2400	230	2.93
C32P23	$32^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2790	-0.2400	228	3.91
C48P23	$48^3 \times 96$	0.10530(18)	6.200	-0.2790	-0.2400	225	5.79
C48P14	$48^3 \times 96$	0.10530(18)	6.200	-0.2825	-0.2310	133	3.56
C48P14	$64^3 \times 128$	0.10530(18)	6.200	-0.2825	-0.2310	133	4.63
E28P35	$28^3 \times 64$	0.08973(20)	6.308	-0.2490	-0.2170	351	4.46
E32P29	$32^3 \times 64$	0.08973(20)	6.308	-0.2490	-0.2170	287	4.19
E32P22	$32^3 \times 96$	0.08973(20)	6.308	-0.2490	-0.2170	215	3.14
F24P30	$24^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2295	-0.2050	303	2.86
F32P30	$32^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2295	-0.2050	303	3.81
F48P30	$48^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2295	-0.2050	305	5.72
F32P21	$32^3 \times 64$	0.07746(18)	6.410	-0.2320	-0.2050	210	2.67
F48P21	$48^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2320	-0.2050	208	3.91
F64P14	$64^3 \times 128$	0.07746(18)	6.410	-0.2320	-0.2050	136	3.41
G32P35	$32^3 \times 96$	0.06887(12)	6.498	-0.2150	-0.1926	352	3.94
G36P29	$36^3 \times 108$	0.06887(12)	6.498	-0.2150	-0.1926	297	3.73
H48P32	$48^3 \times 144$	0.05187(26)	6.72	-0.1850	-0.1700	321	4.06
I64P31	$64^3 \times 128$	0.03761(08)	7.020	-0.1569	-0.1475	312	3.81
I64P19	$64^3 \times 128$	0.03761(08)	7.020	-0.1585	-0.1475	188	2.29

➤ 中国格点合作组产生的 Wilson-Clover 组态



Hu et al, PRD 09 (2024) 054507

➤ $N_f = 2 + 1$

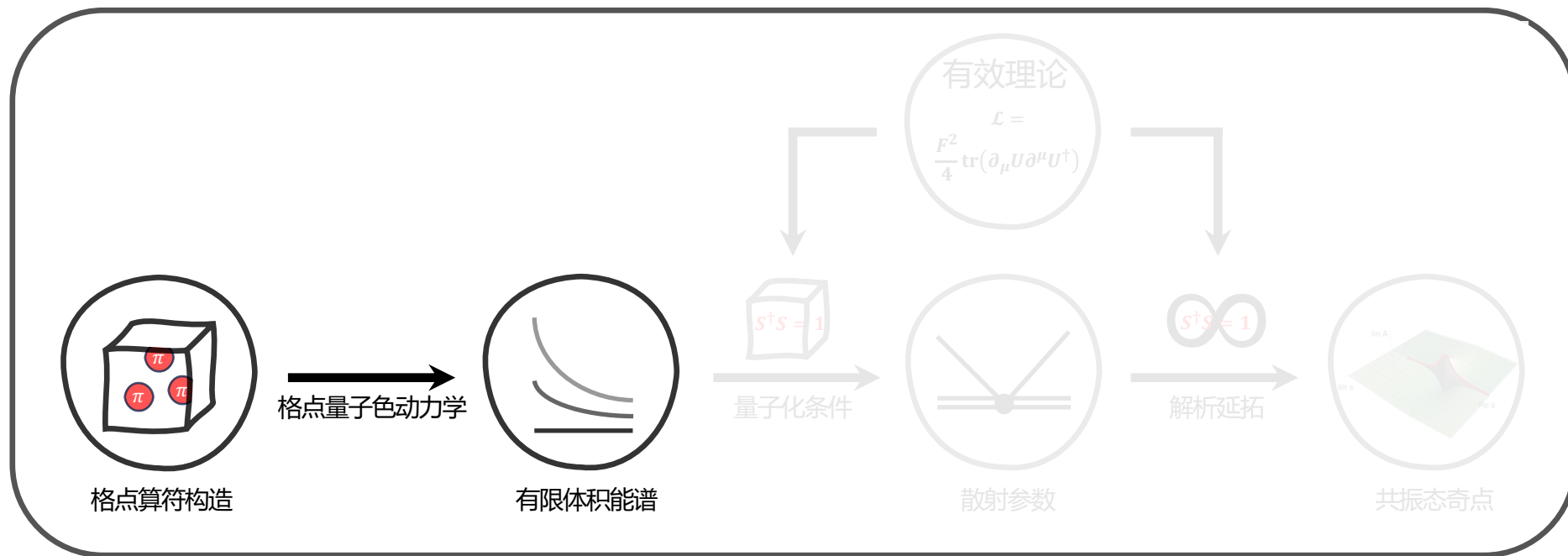
组态名	体积	a / fm	β	$\tilde{m}_l^b$	$\tilde{m}_s^b$	M_π / MeV	$M_\pi L$
C24P34	$24^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2770	-0.2310	340	4.38
C24P29	$24^3 \times 72$	0.10530(18)	6.200	-0.2770	-0.2400	292	3.75
C32P29	$32^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2770	-0.2400	292	5.01
C24P23	$24^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2790	-0.2400	230	2.93
C32P23	$32^3 \times 64$	0.10530(18)	6.200	-0.2790	-0.2400	228	3.91
C48P23	$48^3 \times 96$	0.10530(18)	6.200	-0.2790	-0.2400	225	5.79
C48P14	$48^3 \times 96$	0.10530(18)	6.200	-0.2825	-0.2310	133	3.56
C48P14	$64^3 \times 128$	0.10530(18)	6.200	-0.2825	-0.2310	133	4.63
E28P35	$28^3 \times 64$	0.08973(20)	6.308	-0.2490	-0.2170	351	4.46
E32P29	$32^3 \times 64$	0.08973(20)	6.308	-0.2490	-0.2170	287	4.19
E32P22	$32^3 \times 96$	0.08973(20)	6.308	-0.2490	-0.2170	215	3.14
F24P30	$24^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2295	-0.2050	303	2.86
F32P30	$32^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2295	-0.2050	303	3.81
F48P30	$48^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2295	-0.2050	305	5.72
F32P21	$32^3 \times 64$	0.07746(18)	6.410	-0.2320	-0.2050	210	2.67
F48P21	$48^3 \times 96$	0.07746(18)	6.410	-0.2320	-0.2050	208	3.91
F64P14	$64^3 \times 128$	0.07746(18)	6.410	-0.2320	-0.2050	136	3.41
G32P35	$32^3 \times 96$	0.06887(12)	6.498	-0.2150	-0.1926	352	3.94
G36P29	$36^3 \times 108$	0.06887(12)	6.498	-0.2150	-0.1926	297	3.73
H48P32	$48^3 \times 144$	0.05187(26)	6.72	-0.1850	-0.1700	321	4.06
I64P31	$64^3 \times 128$	0.03761(08)	7.020	-0.1569	-0.1475	312	3.81
I64P19	$64^3 \times 128$	0.03761(08)	7.020	-0.1585	-0.1475	188	2.29

➤ 中国格点合作组产生的 Wilson-Clover 组态

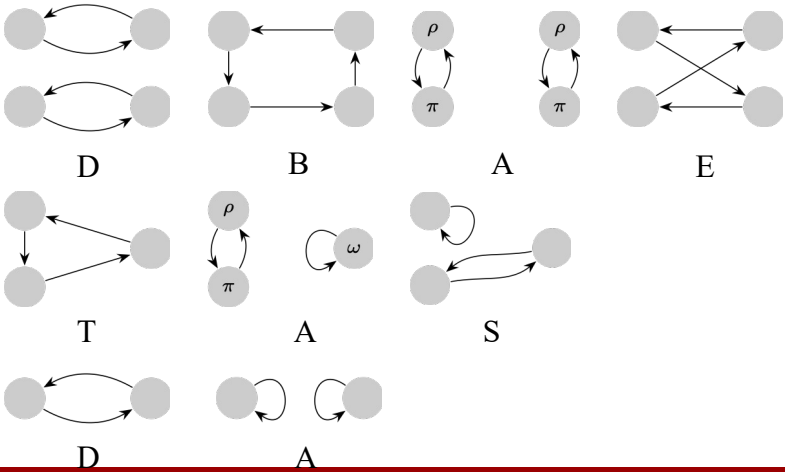


Hu et al, PRD 09 (2024) 054507

- $N_f = 2 + 1$
- 采用 2 个不同的 M_π 来探索手征行为



- 利用软件 OpTion 构造多体算符
- 选择作用量，生成组态，求解夸克传播子
- 维克收缩，计算两点关联函数

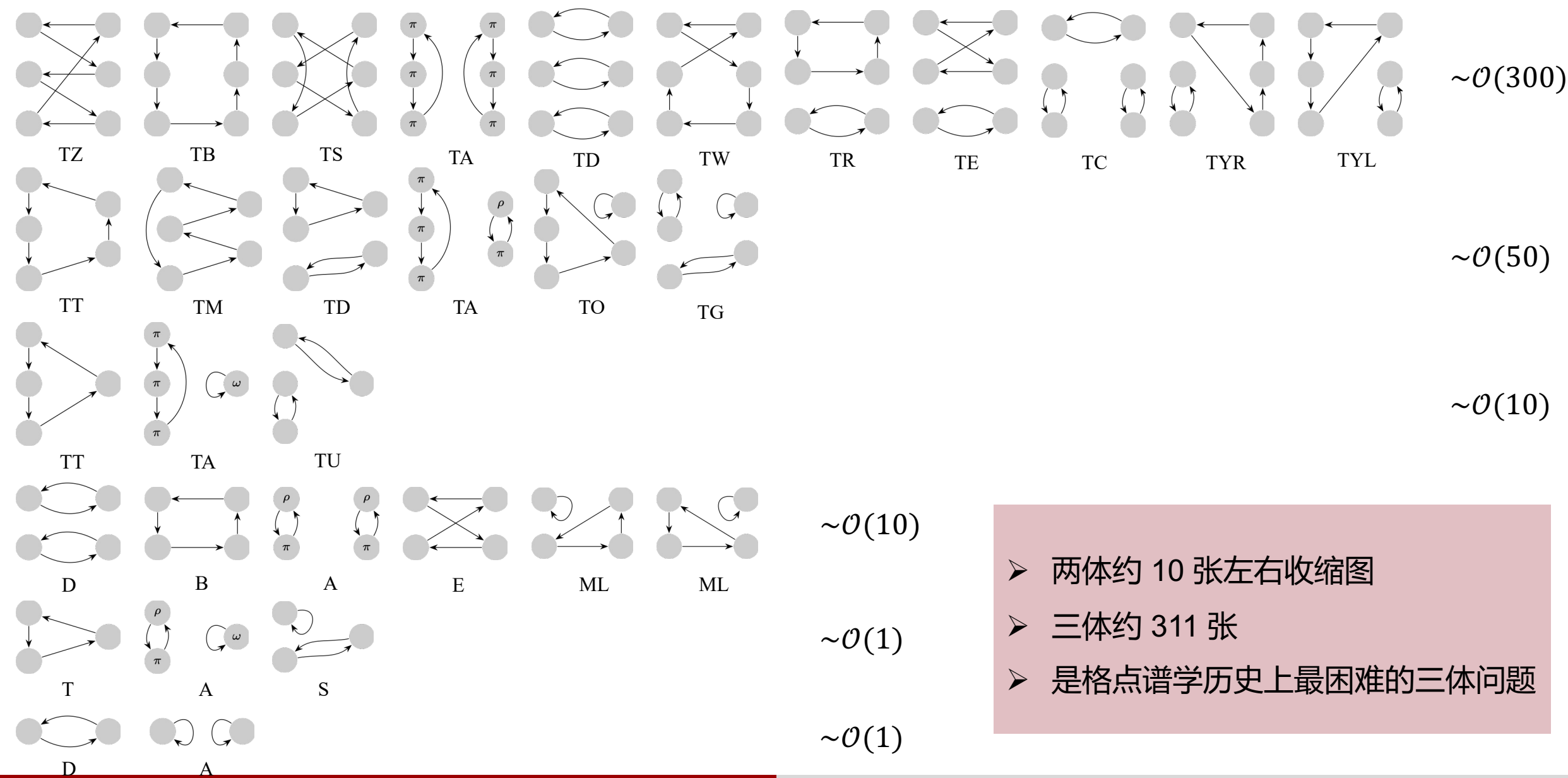


$\sim \mathcal{O}(10)$

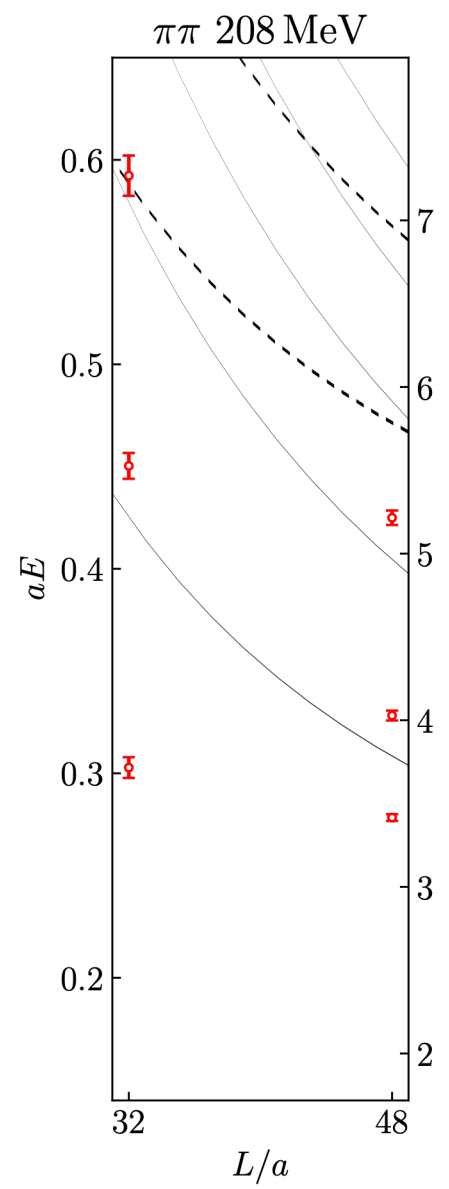
$\sim \mathcal{O}(1)$

$\sim \mathcal{O}(1)$

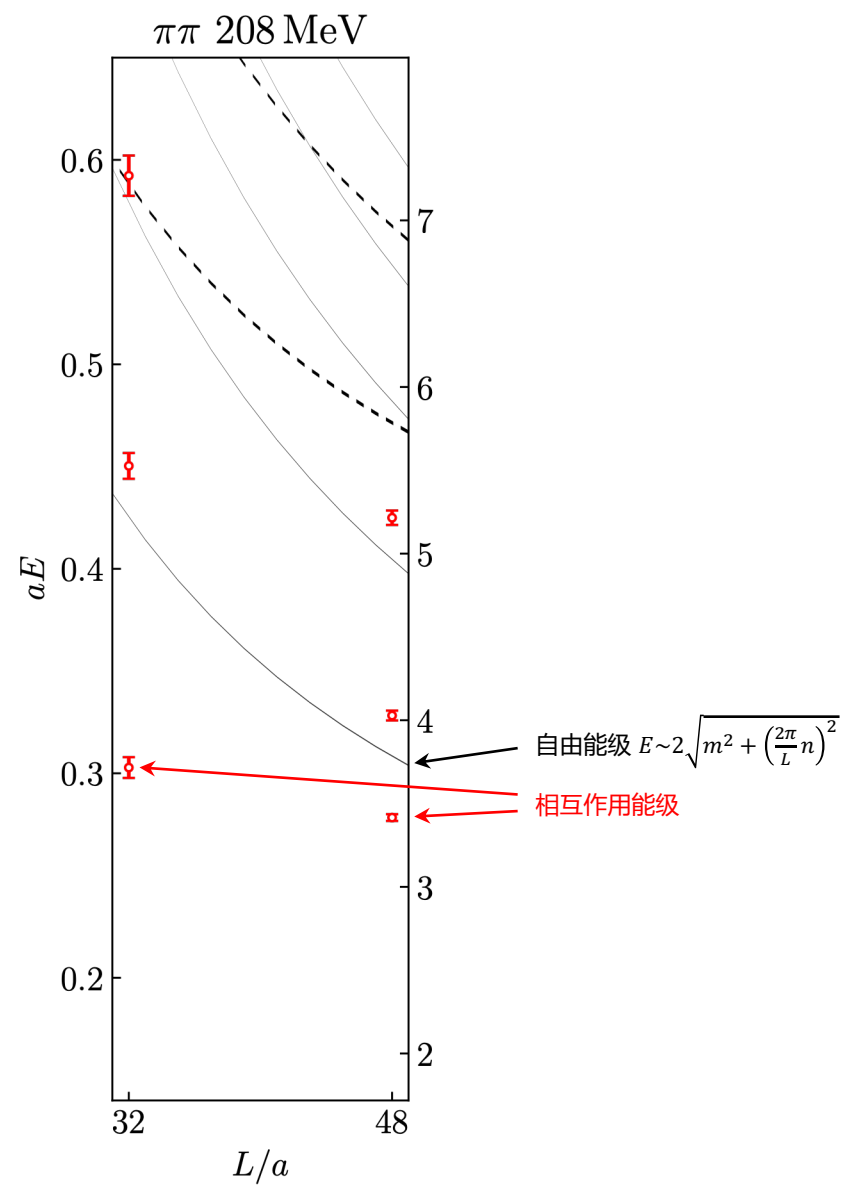
维克收缩



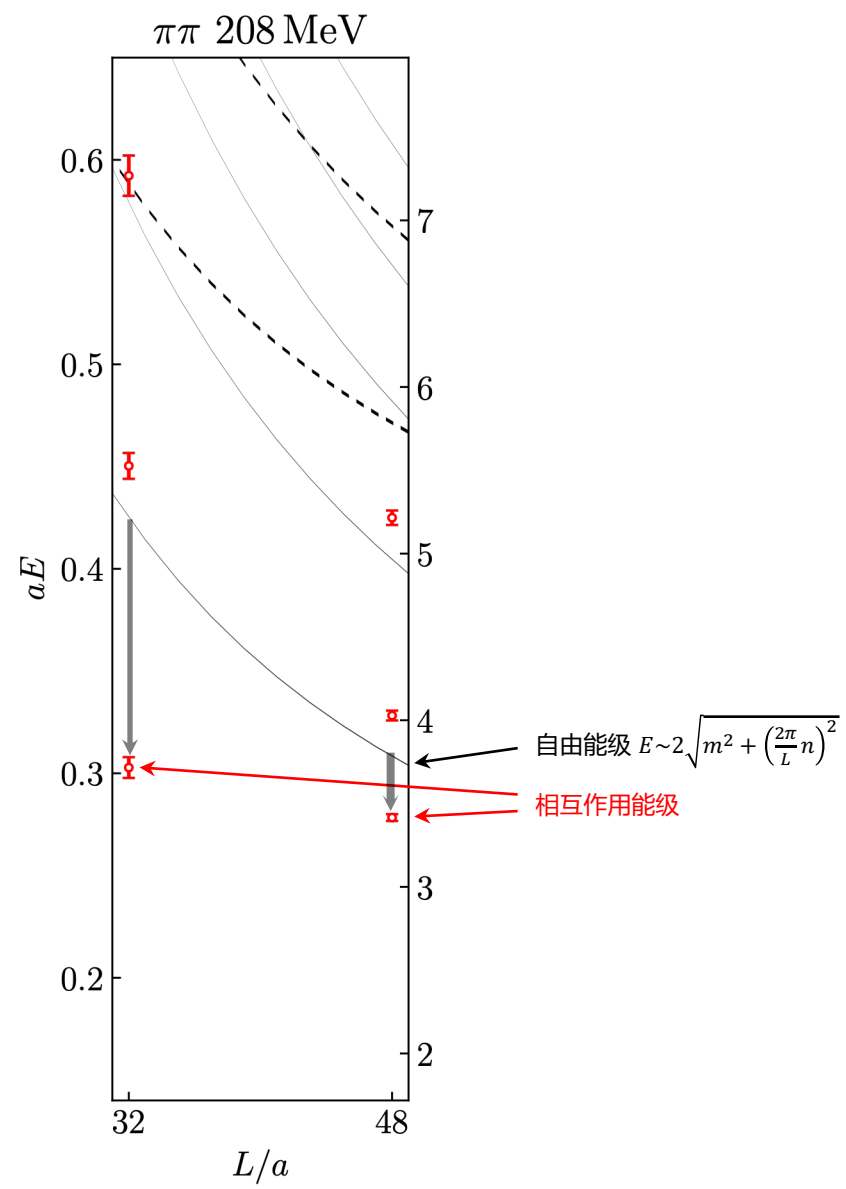
- 两体约 10 张左右收缩图
- 三体约 311 张
- 是格点谱学历史上最困难的三体问题



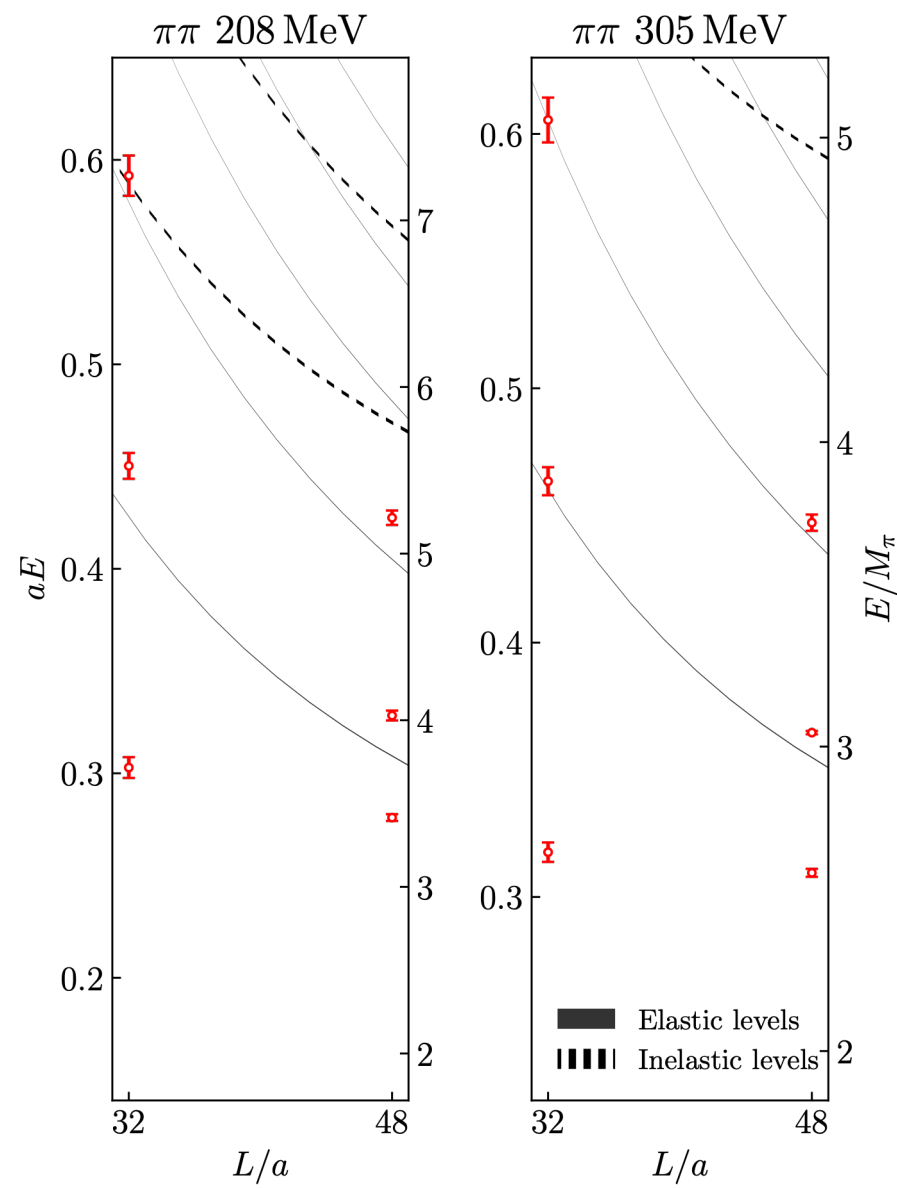
➤ 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$



➤ 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$

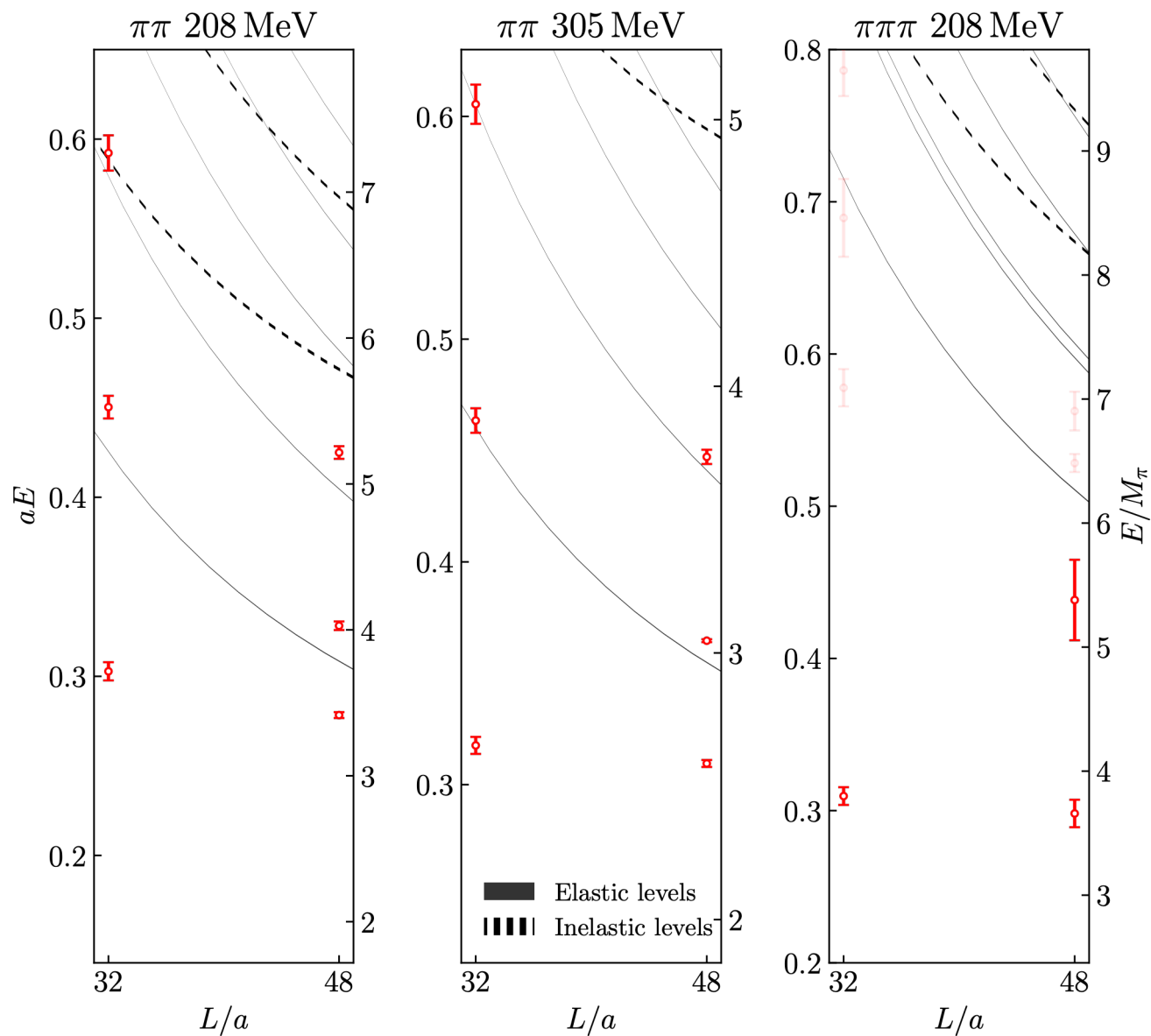


- 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$
- 吸引相互作用



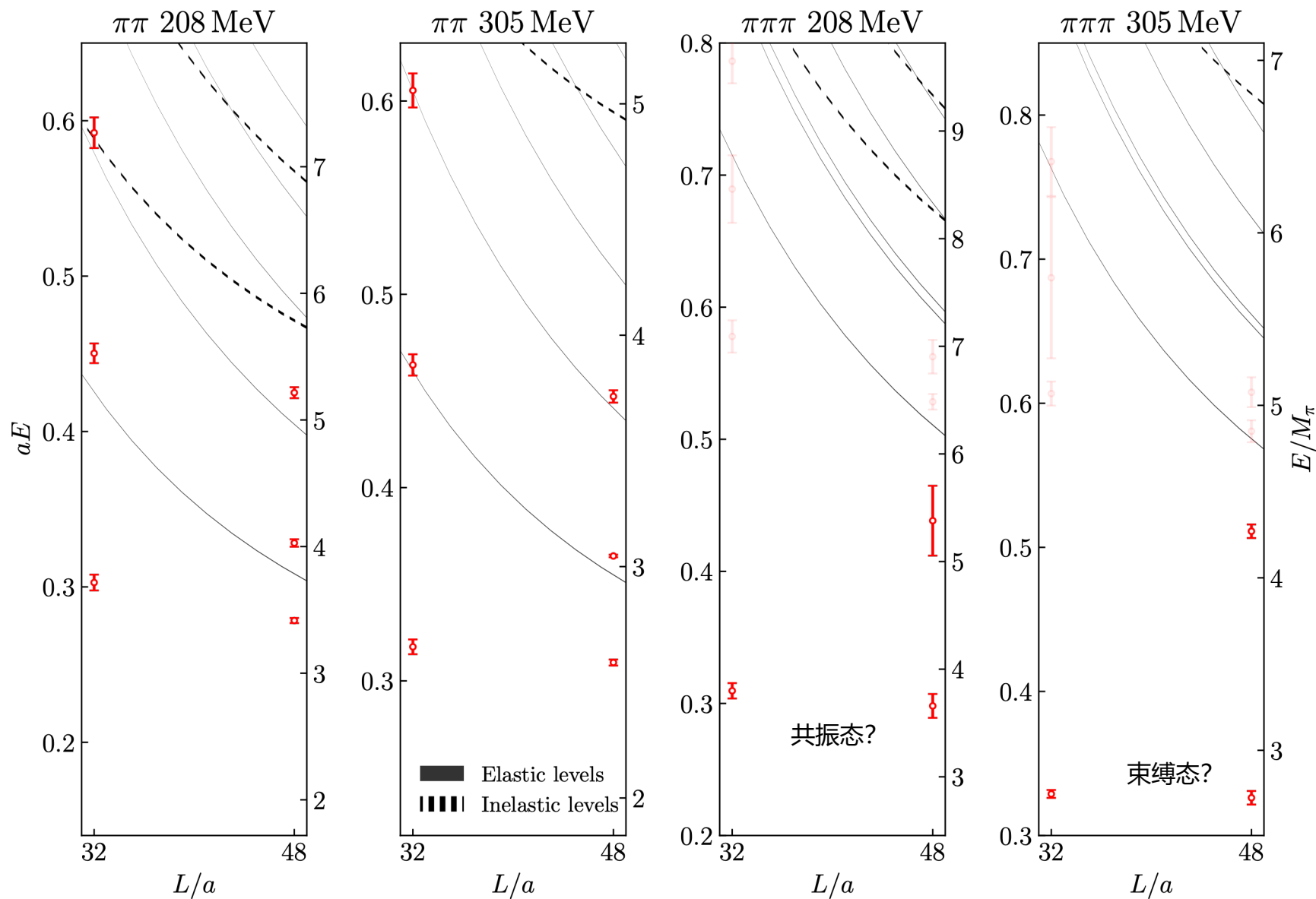
- 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$
- 吸引相互作用
- $M_\pi = 200, 300 \text{ MeV}$

有限体积能谱

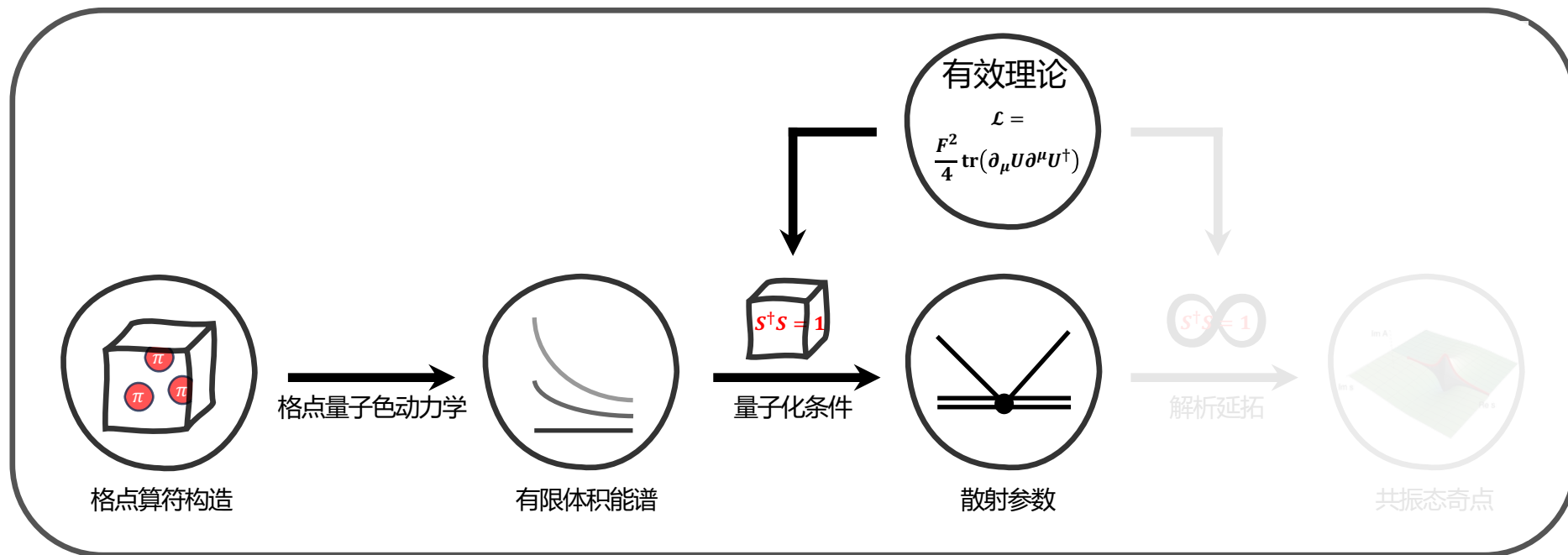


- 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$
- 吸引相互作用
- $M_\pi = 200, 300$ MeV
- 三体 $\pi\pi\pi$ 有非平凡的结构
- 是否存在 ω 共振态?

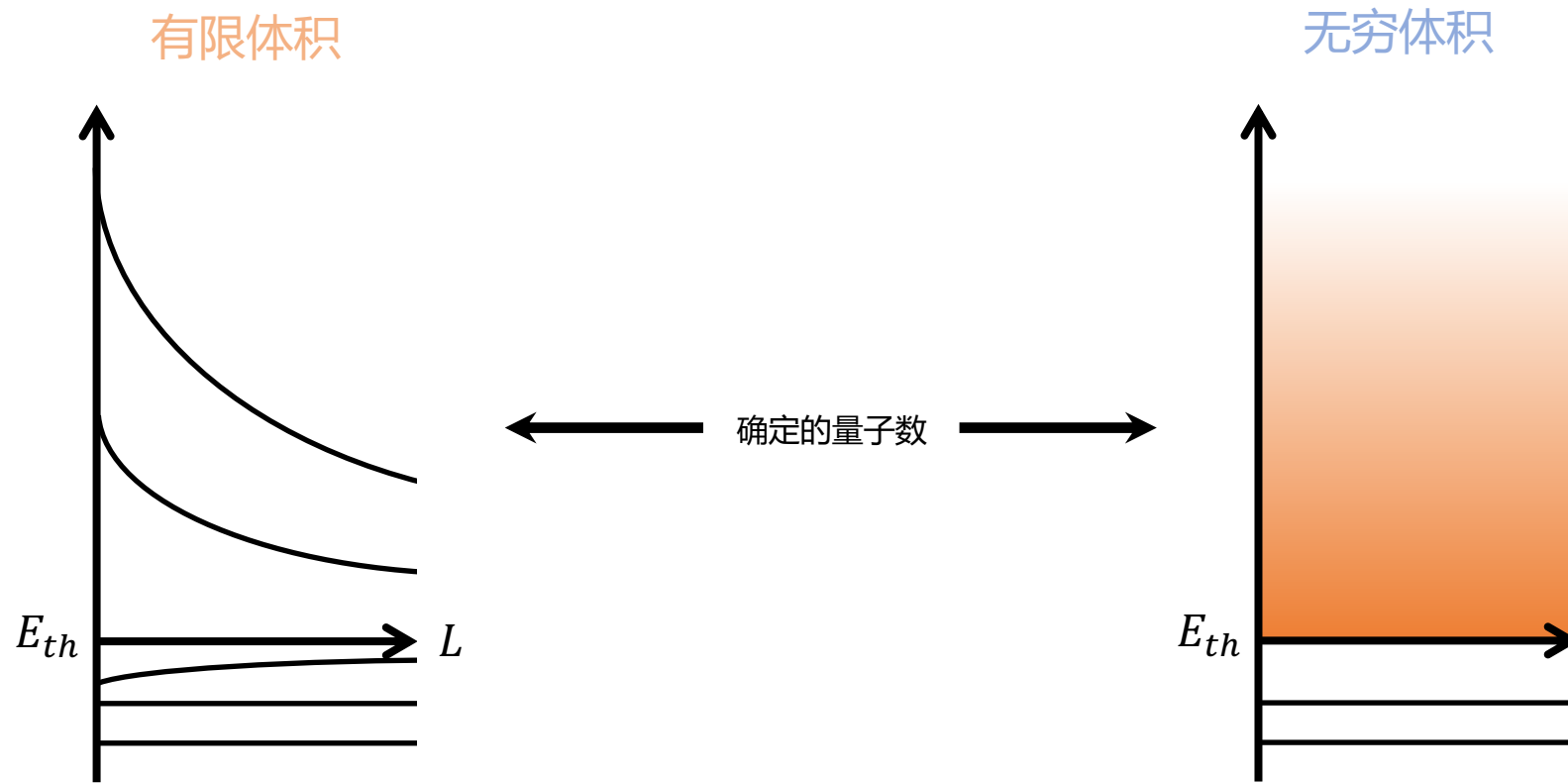
有限体积能谱



- 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$
- 吸引相互作用
- $M_\pi = 200, 300 \text{ MeV}$
- 三体 $\pi\pi\pi$ 有非平凡的结构
- 是否存在 ω 共振态?



- 利用软件 OpTion 构造多体算符
- 选择作用量，生成组态，求解夸克传播子
- 维克收缩，计算两点关联函数
- 应用量子化条件，从能谱中抽取散射参数

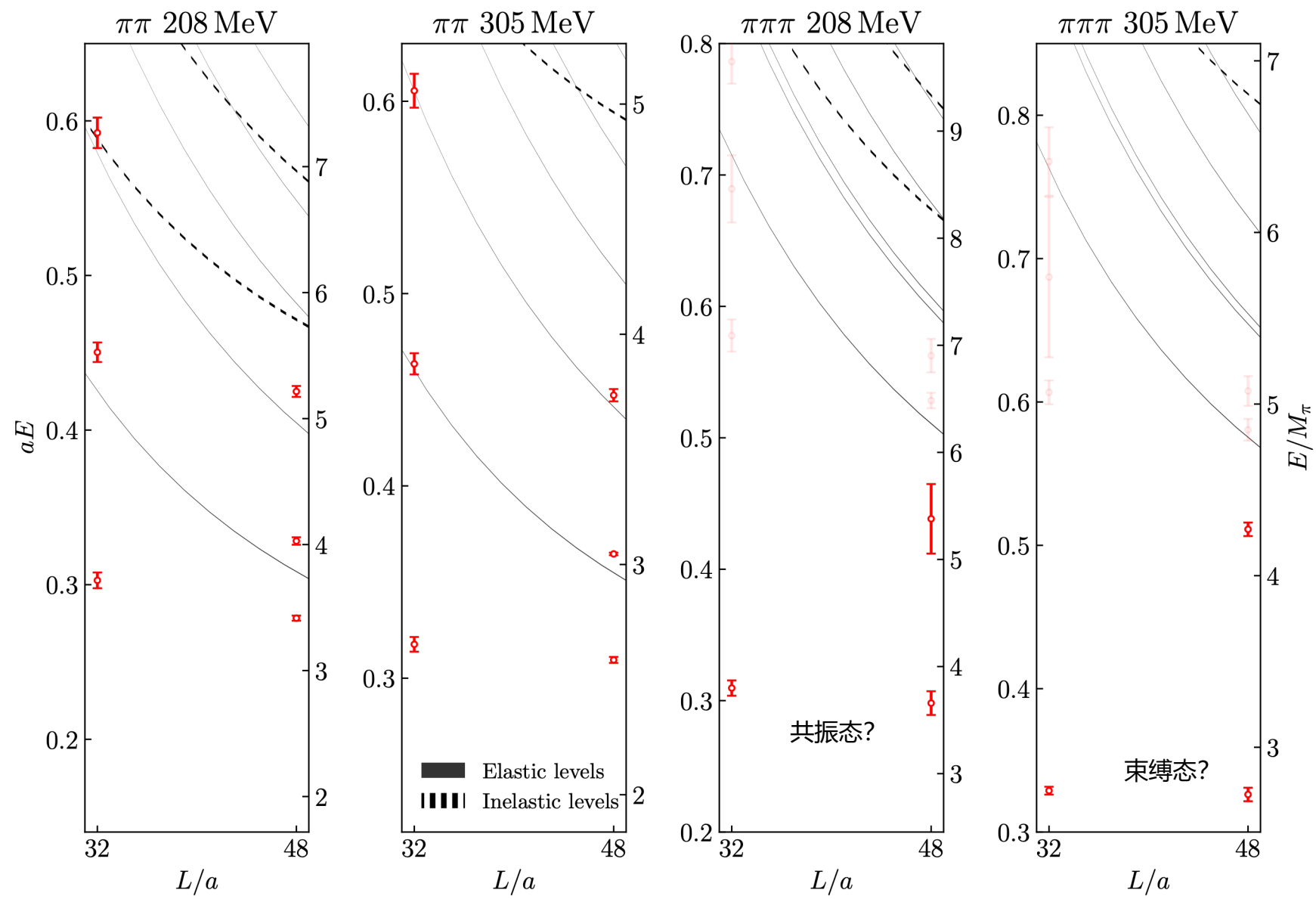


- 从有限体积能谱中抽取无穷体积散射振幅

➔ 量子化条件: $f(\mathcal{M}(E_n), \mathcal{F}(E_n, L)) = 0$

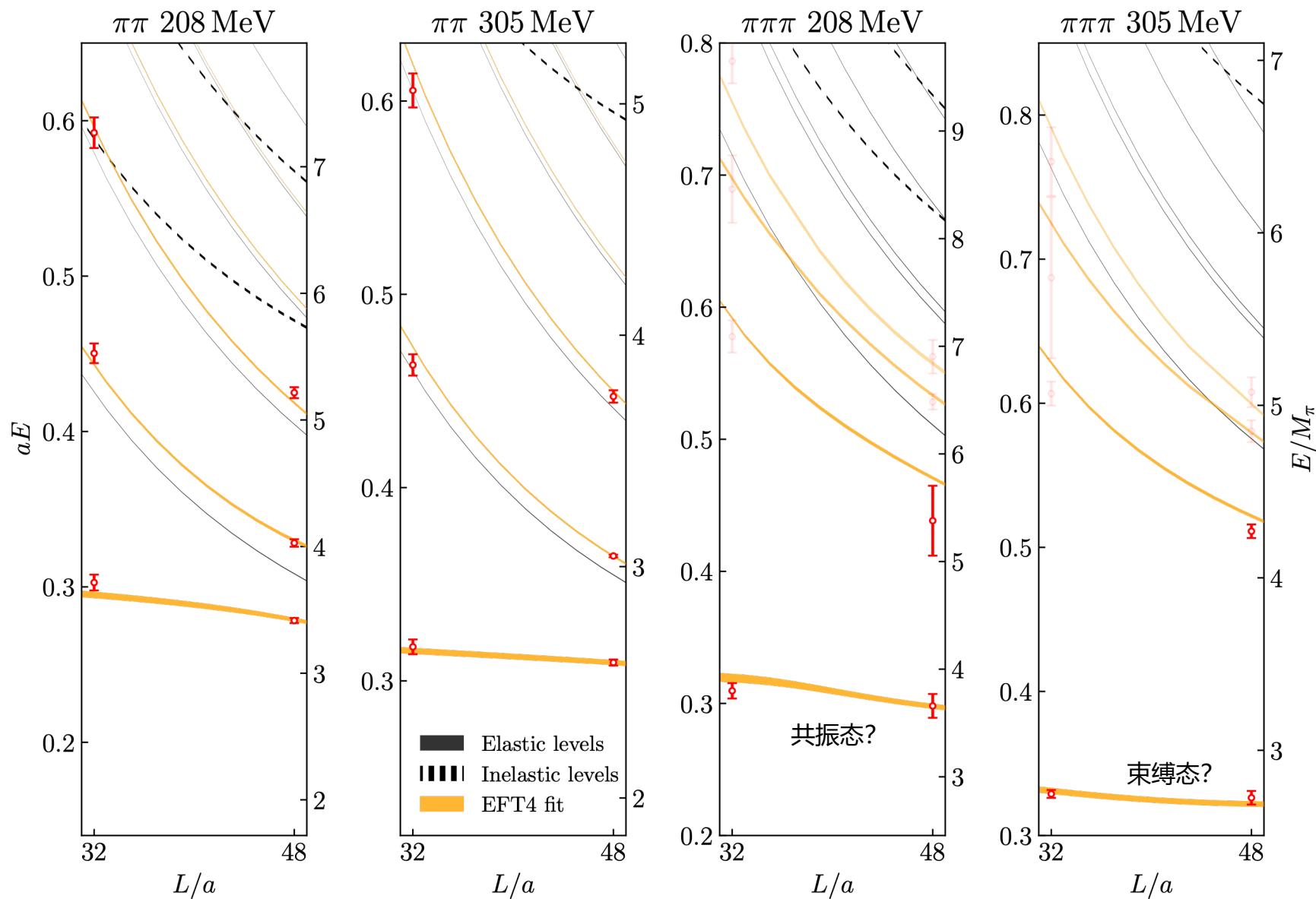
- 对三体问题, 推导相应的有限体积形式理论 (FVU, **F**inite-**V**olume **U**nitarity)

有限体积能谱

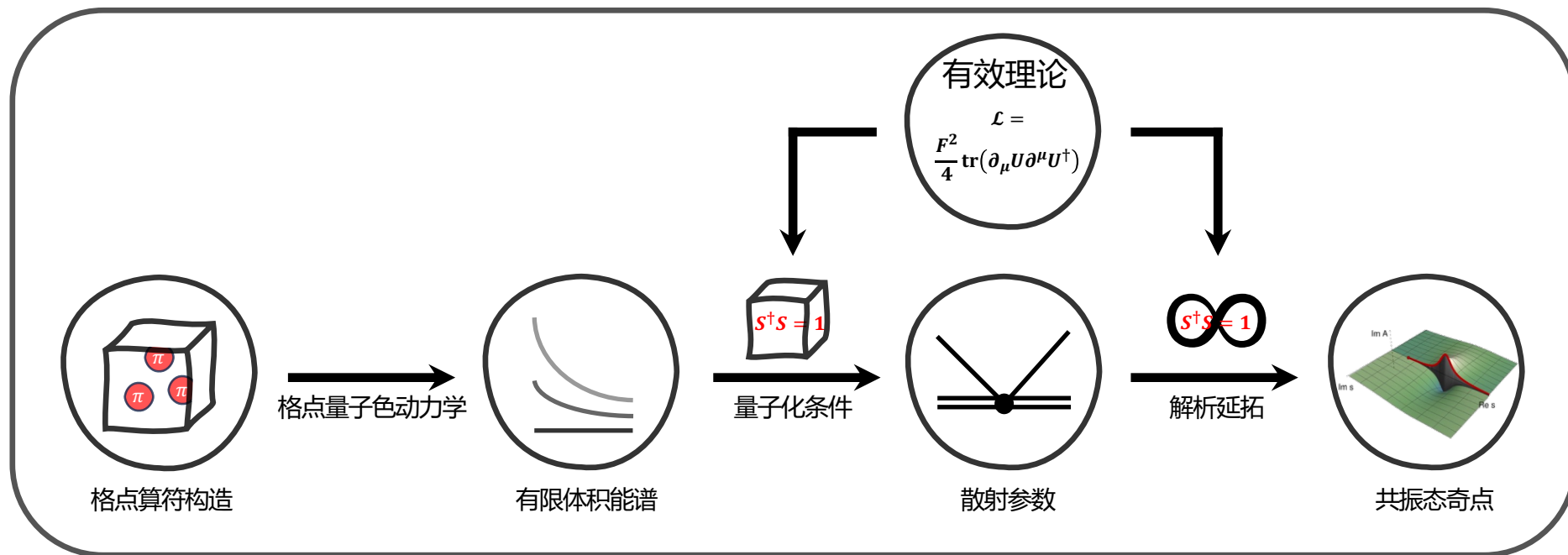


- 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$
- 吸引相互作用
- $M_\pi = 200, 300 \text{ MeV}$
- 三体 $\pi\pi\pi$ 有非平凡的结构
- 是否存在 ω 共振态?

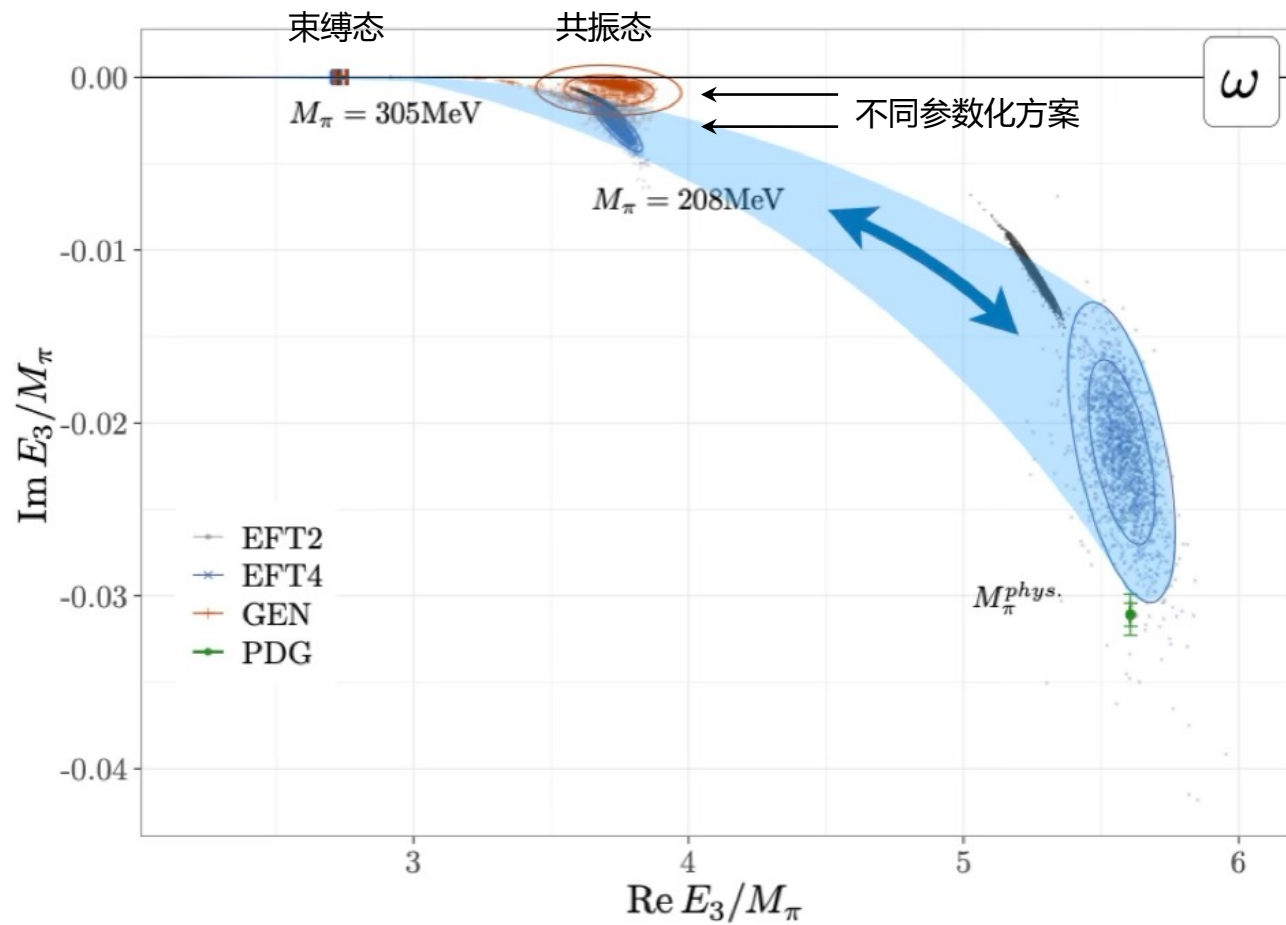
有限体积能谱



- 两体 $I = 1 \pi\pi \rightarrow \rho$
- 吸引相互作用
- $M_\pi = 200, 300 \text{ MeV}$
- 三体 $\pi\pi\pi$ 有非平凡的结构
- 是否存在 ω 共振态?



- 利用软件 OpTion 构造多体算符
- 选择作用量，生成组态，求解夸克传播子
- 维克收缩，计算两点关联函数
- 应用量子化条件，从能谱中抽取散射参数
- 将散射振幅解析延拓到复黎曼面，寻找奇点



➤ 不同参数化方案相符

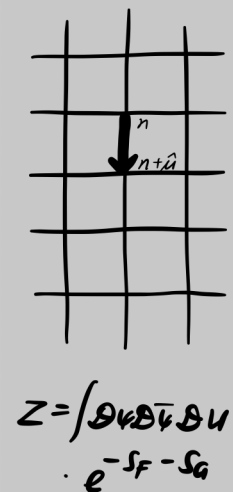
➤ 外推到物理 M_π

$$M_{\omega(782)} = (778.0 \pm 11.2) - i(3.0 \pm 5) \text{ MeV}$$

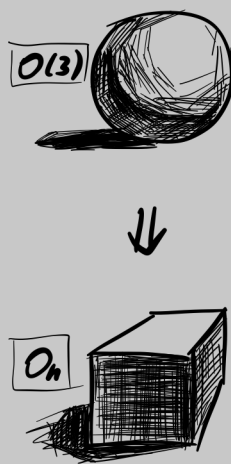
➤ 可改进：格距误差、 $\omega - \phi$ 混合问题

➤ 正在考虑 $\omega - \phi$ 混合问题

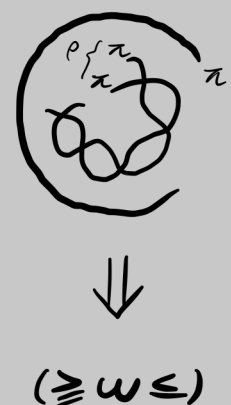
格点谱学
简介



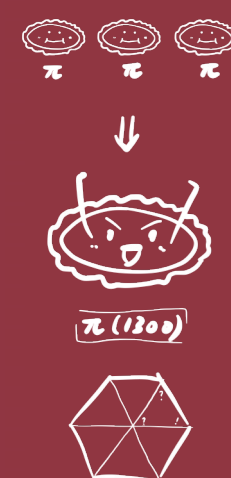
格点算符
构造方法



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \omega(782)$



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$



总结

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

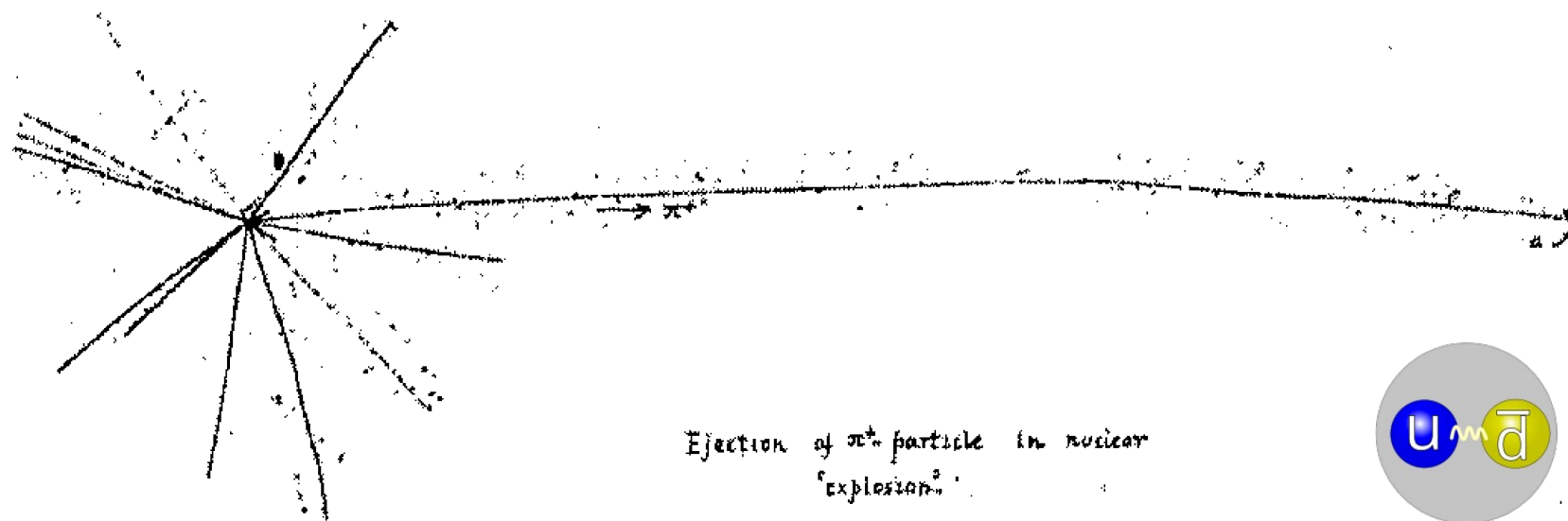
$$+ i \bar{\psi} \not{D} \psi + h.c.$$

$$+ \psi_i y_j \psi_j \phi + h.c.$$

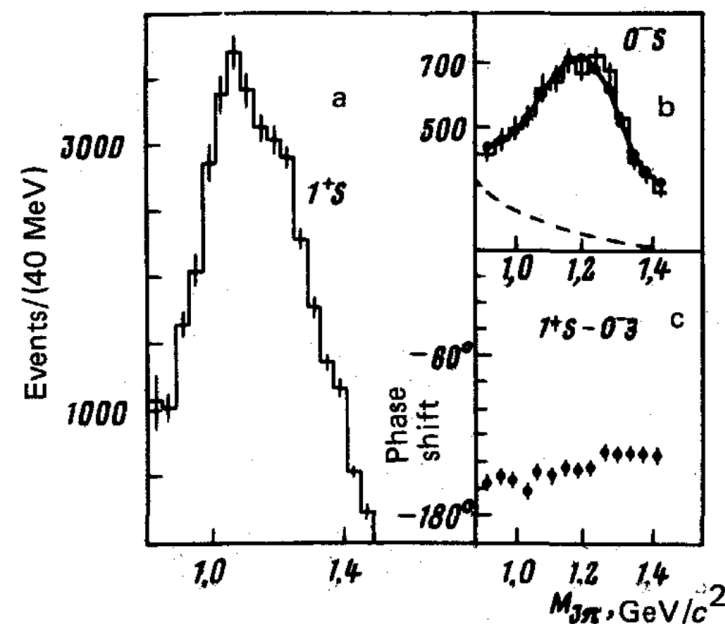
$$+ |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

$$+ ?$$

三体 $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$ 散射



π 介子的发现

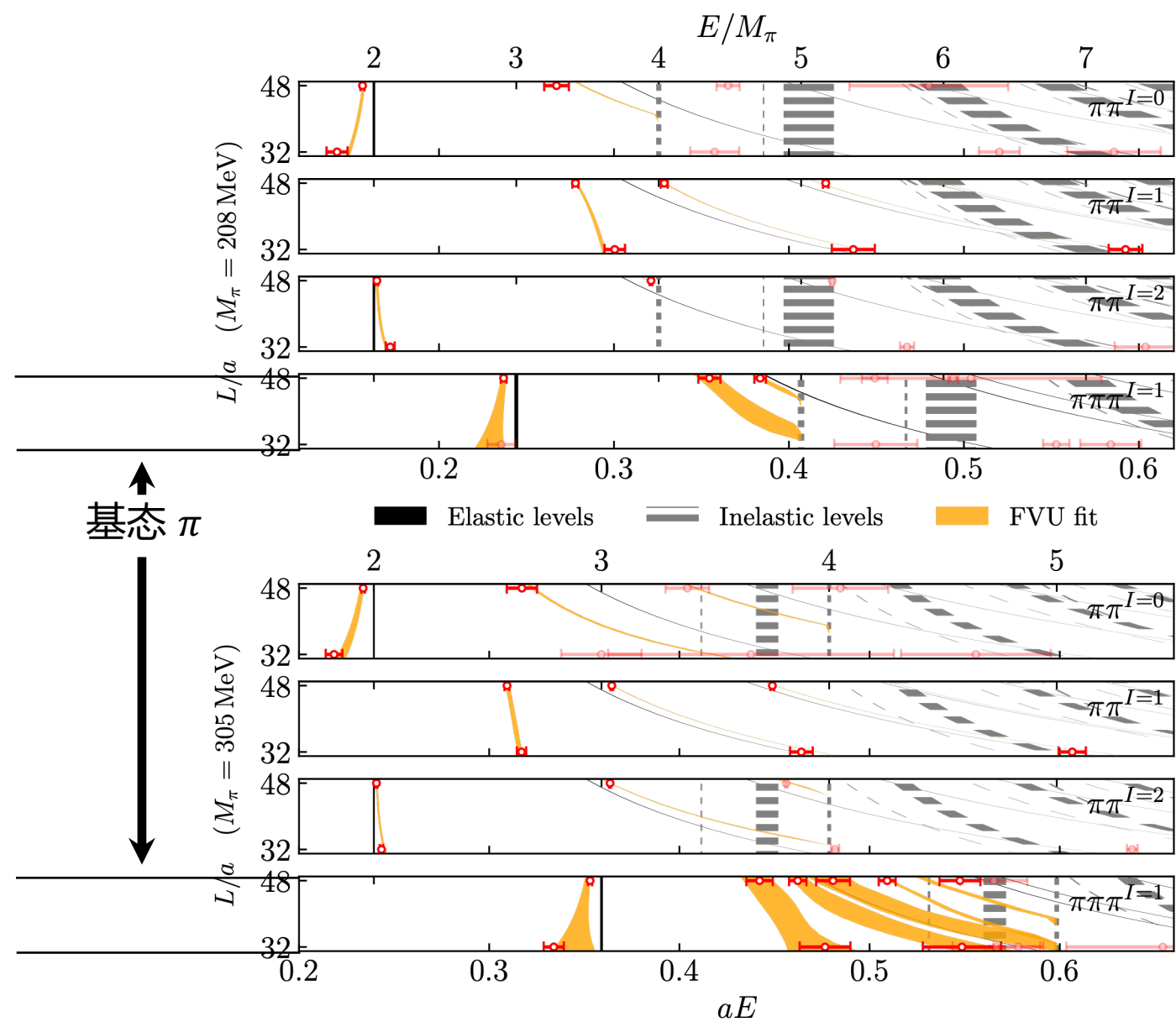


$\pi(1300)$ 的证据

Bellini et al (1961)

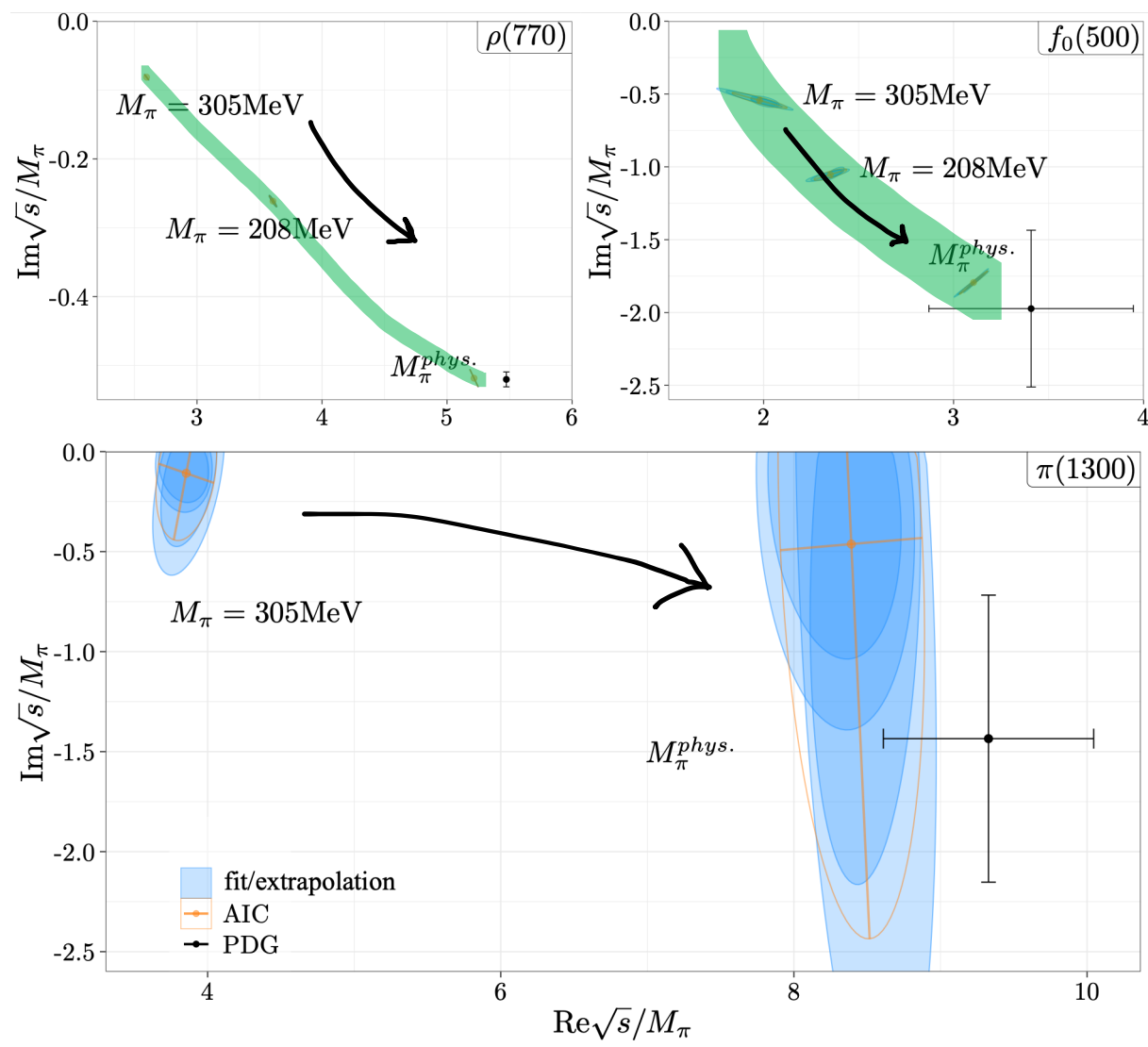
- 另一个同样重要但更困难的问题： $\pi(1300)$ 是基态 π 的**激发态**，重了将近 10 倍
- 超越对已知共振态的事后验证
- 是对软 π 定理的验证；可能存在 $\bar{q}qg$ 混杂态成分

三体 $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$ 散射



- 熟悉的 $I = 0, 1, 2$ $\pi\pi$ 能级
 - 三体 $\pi\pi\pi$ 有大量的新能级聚集
- ↓
- 暗示着非平庸的结构: 0^- 的共振态

$\pi(1300)$ 奇点位置



- 主要的结论是 $M_\pi = 300\text{ MeV}$ 时存在 $\pi(1300)$
- 朴素地外推到物理点

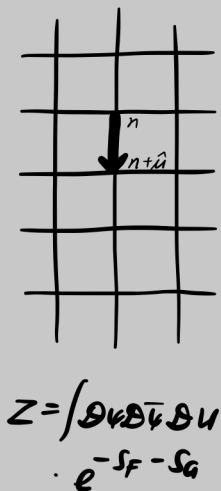
$$M_{\pi(1300)} = (1169 \pm 46) - i(62 \pm 169)\text{ MeV}$$

$$M_{\rho(770)} = (727 \pm 3) - i(72 \pm 1)\text{ MeV}$$

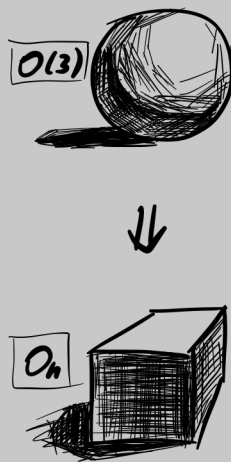
$$M_{f_0(500)} = (433 \pm 7) - i(250 \pm 7)\text{ MeV}$$

- 容易推广到其他径向激发态

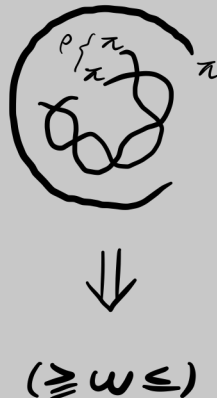
格点谱学
简介



格点算符
构造方法



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \omega(782)$



三体散射问题
 $\pi\pi\pi \rightarrow \pi(1300)$



总结

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$+ i \bar{\psi} \not{D} \psi + h.c.$$

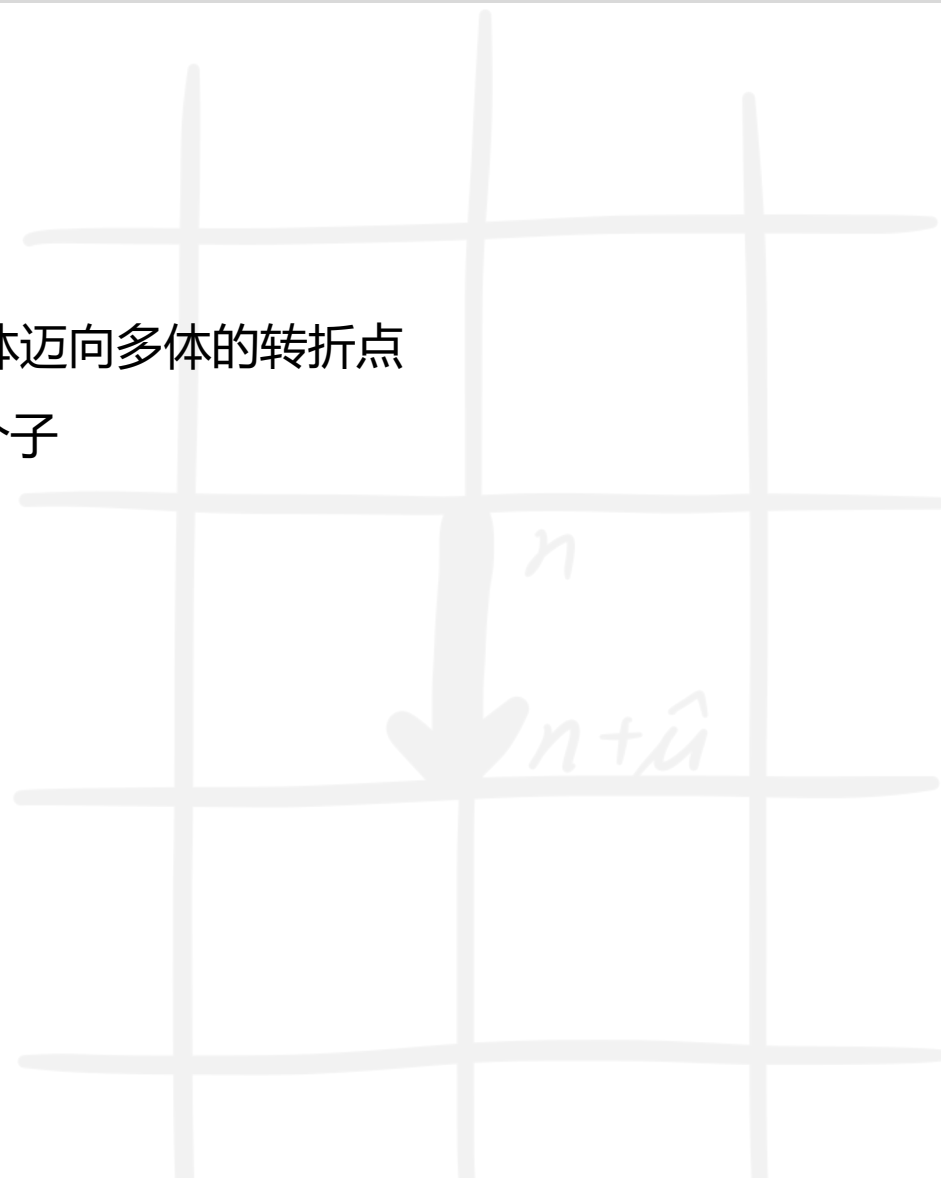
$$+ \psi_i \psi_j \psi_j \phi + h.c.$$

$$+ 12 \phi^2 - V(\phi)$$

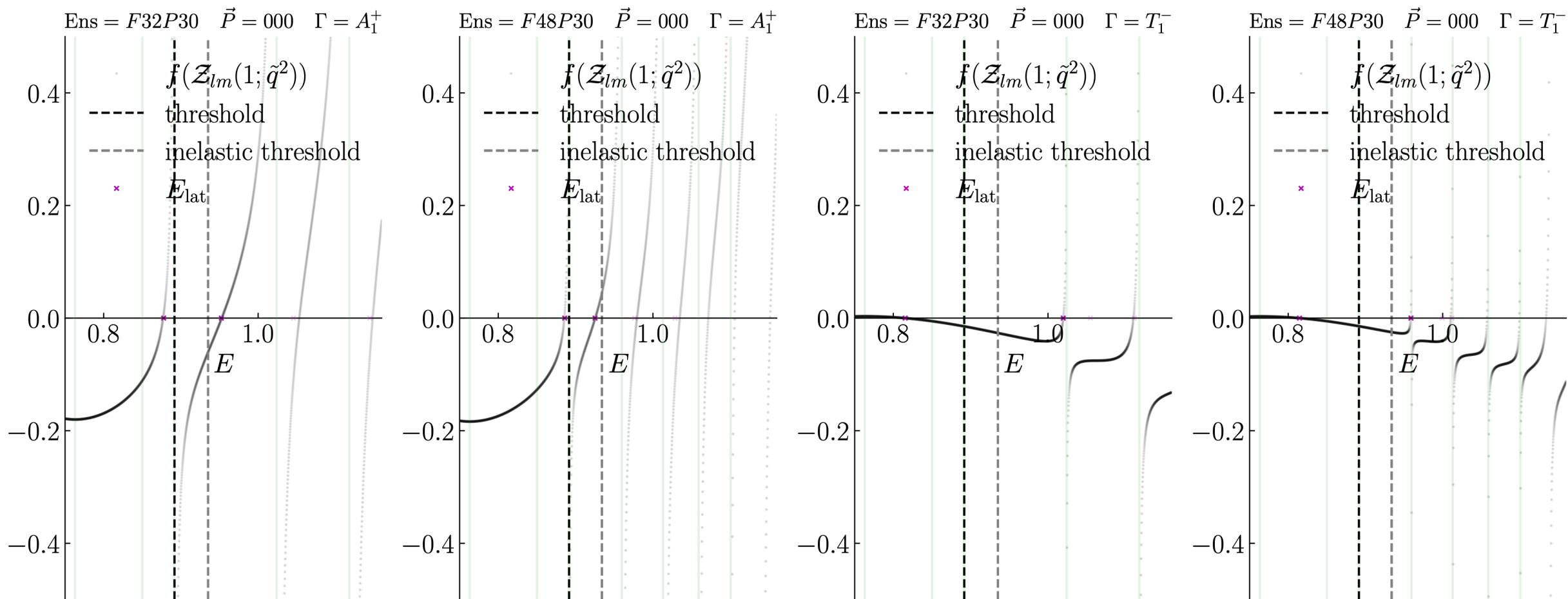
$$+ ?$$

- 格点场论是研究强子谱学强大的方法，我们正处于格点场论由两体迈向多体的转折点
- 第一性原理计算表明 QCD 可以涌现出 $\omega(782)$ 介子和 $\pi(1300)$ 介子
- 相比实验观测，格点知道得还很少

谢谢！

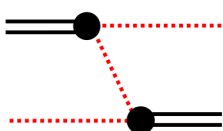


Eg: Finite-volume spectra at $m_\pi \approx 305$ MeV



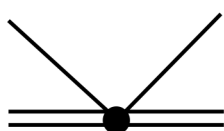
➤ 有限体积幺正化理论 (FVU, Finite-Volume Unitarity)

$$\begin{cases} \tilde{K}^{-1}(\sigma) - \Sigma^{FV}(\sigma) = 0 \\ \det[(\tilde{K}^{-1}(s) - \Sigma^{FV}(s))E_L - (\tilde{B}(s) + \tilde{C}(s))] = 0 \end{cases}$$



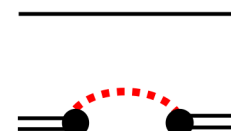
B

幺正性固定



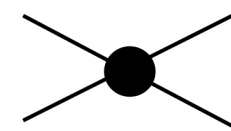
C

三体力



Σ

幺正性固定



$\tilde{K}^{-1}$

两体力

$$\begin{cases} \text{Diagram B} \sim a_0 + a_1 \sigma + \dots \\ \text{Diagram C} \sim \frac{c_0}{s - M_\omega^2} + c_1 + \dots \end{cases}$$

洛朗展开

$$\begin{cases} \text{Diagram B} \sim \frac{\sigma - M_\rho^2}{g^2} \\ \text{Diagram C} \sim \frac{s(M_\rho^2 - \sigma_q + 6g^2 f_\pi^2)(M_\rho^2 - \sigma_p + 6g^2 f_\pi^2)}{g^2 f_\pi^6 (s - M_\omega^2)} \end{cases}$$

有效理论形式 (隐对称性方法)

其他形式理论

- FVU [Mai and Döring, 2017]
- RFT [Hansen and Sharpe, 2014]
- NREFT [Hammer, Pang, and Rusetsky, 2017]