

2026年轻强子专题研讨会

# 裸态-耦合道框架下强子共振态

吴佳俊（中国科学院大学）

合作者：赵文泽，倪如辉，李严

arXiv: 2604.24270

Phys.Rev.D 105 (2022) 11, 116024

商丘师范学院

2026.5.17



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 目录

- 背景介绍
- 手征夸克模型—介子谱
- 含有裸态的逆散射问题— $\rho$  的解构
- 小结

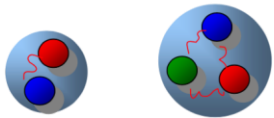




# 背景：强相互作用---强子谱

物理强子态：  
介子，重子//奇特态

conventional hadron



(q q̄)

(qqq)

夸克  
模型?

奇特态

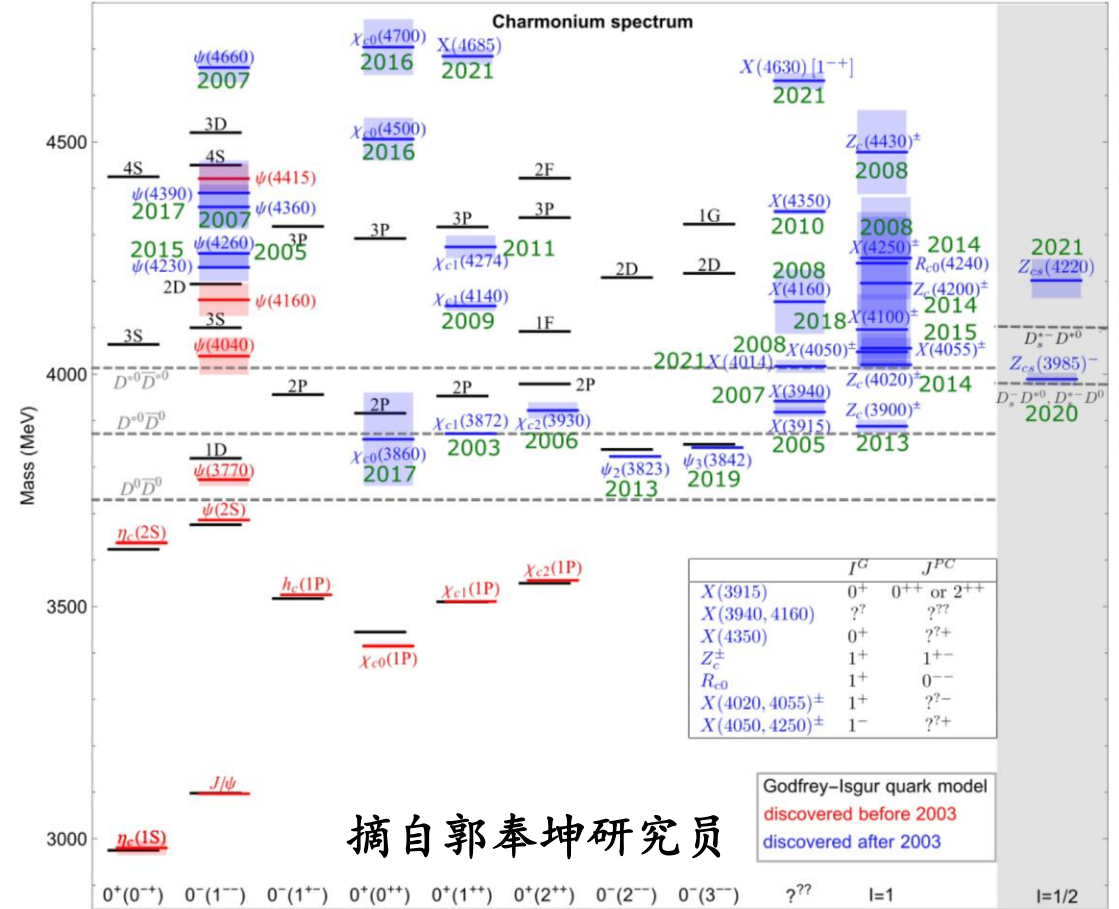
Hybrid    Glueball    Tetraquark



Pentaquark    Hadronic molecule

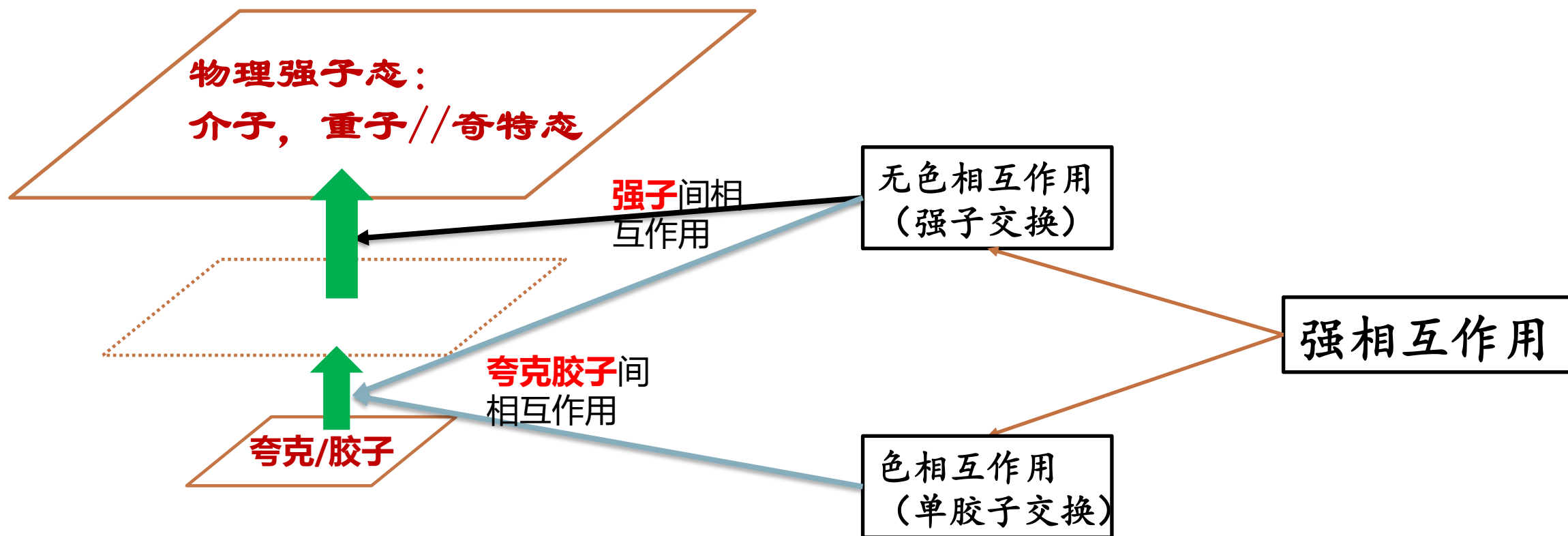


夸克/胶子

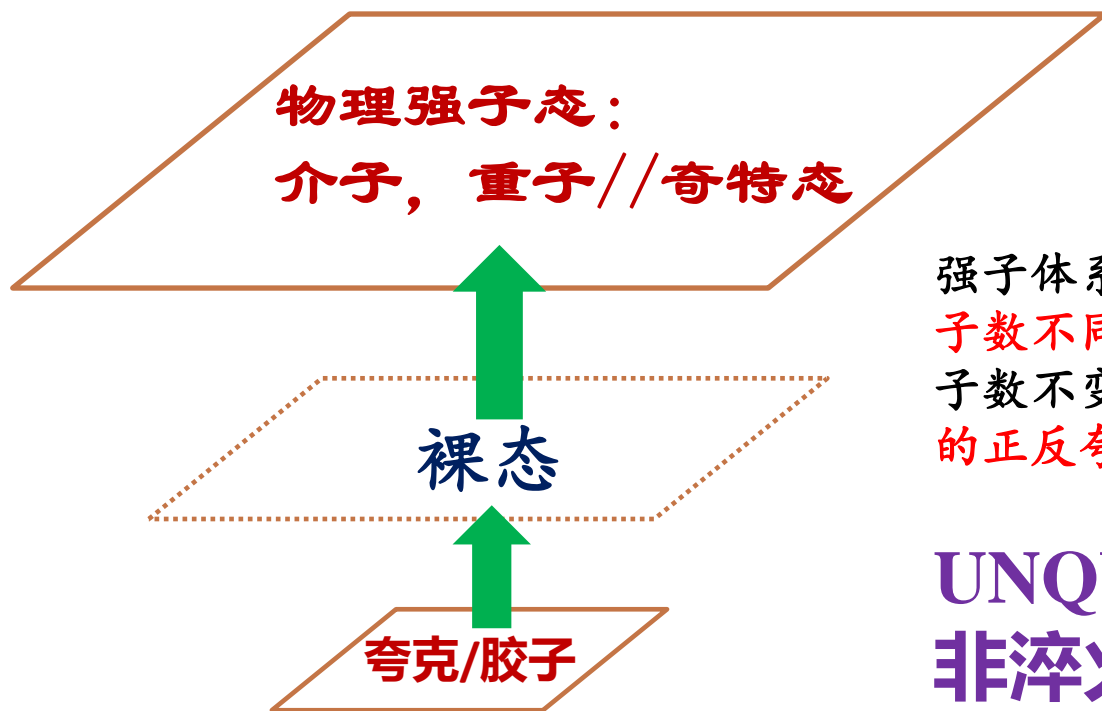


中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

# 背景：强相互作用---强子谱

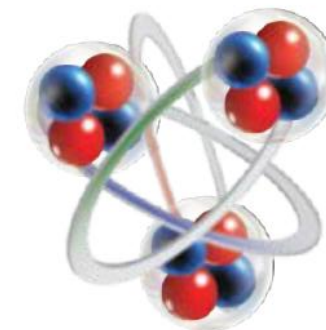


# 背景：强相互作用---强子谱



核物理中： $^{12}\text{C} \leq 6\text{p} \ \& \ 6\text{n}$   
 $\leq 3\alpha$  Cluster 原子团簇

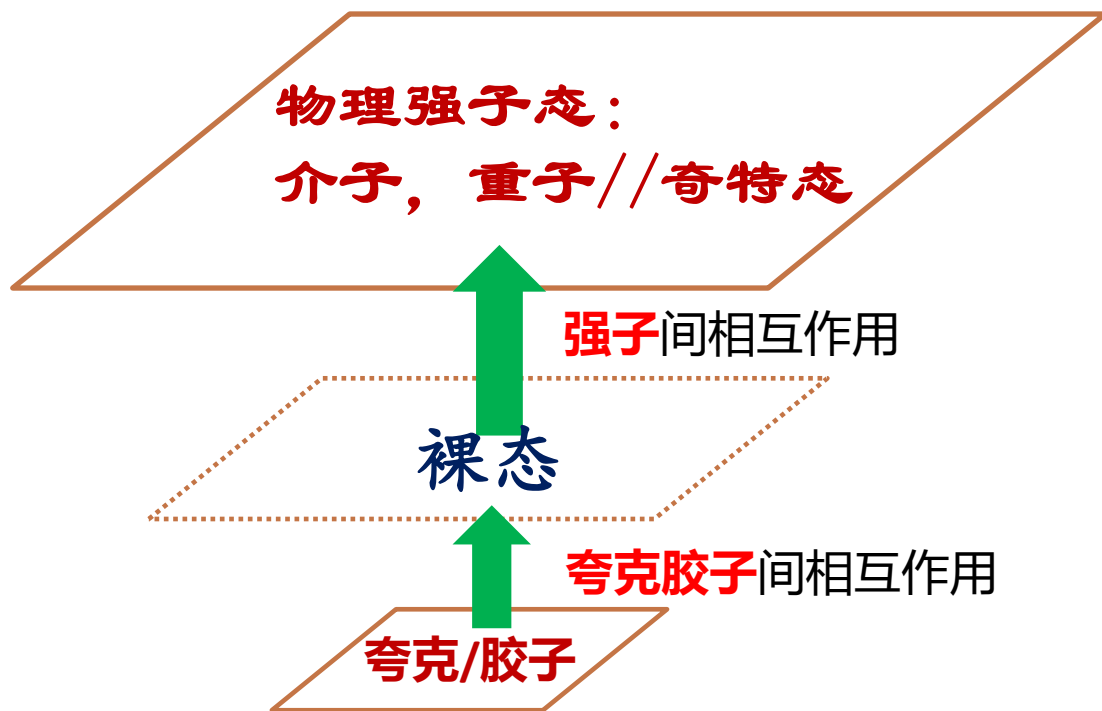
强子体系与原子核的最大差异：基础单元的**粒子数不同**！**夸克数**是可以涨落的，只是夸克量子数不变，而**核子数**是不变的。体现了**真空中的正反夸克对的涨落**，当然还可以是**胶球**。



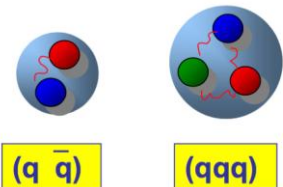
**UNQUENCHED quark model**  
**非淬火夸克模型**



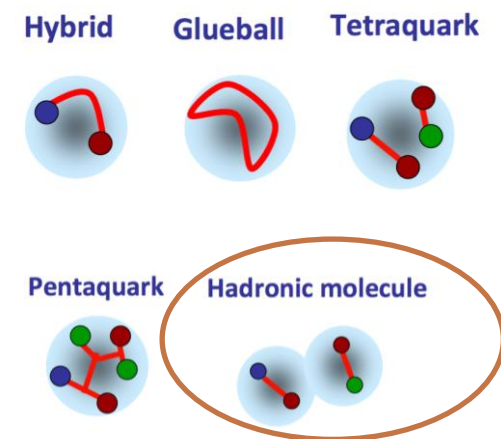
# 背景：强相互作用---强子谱



conventional hadron

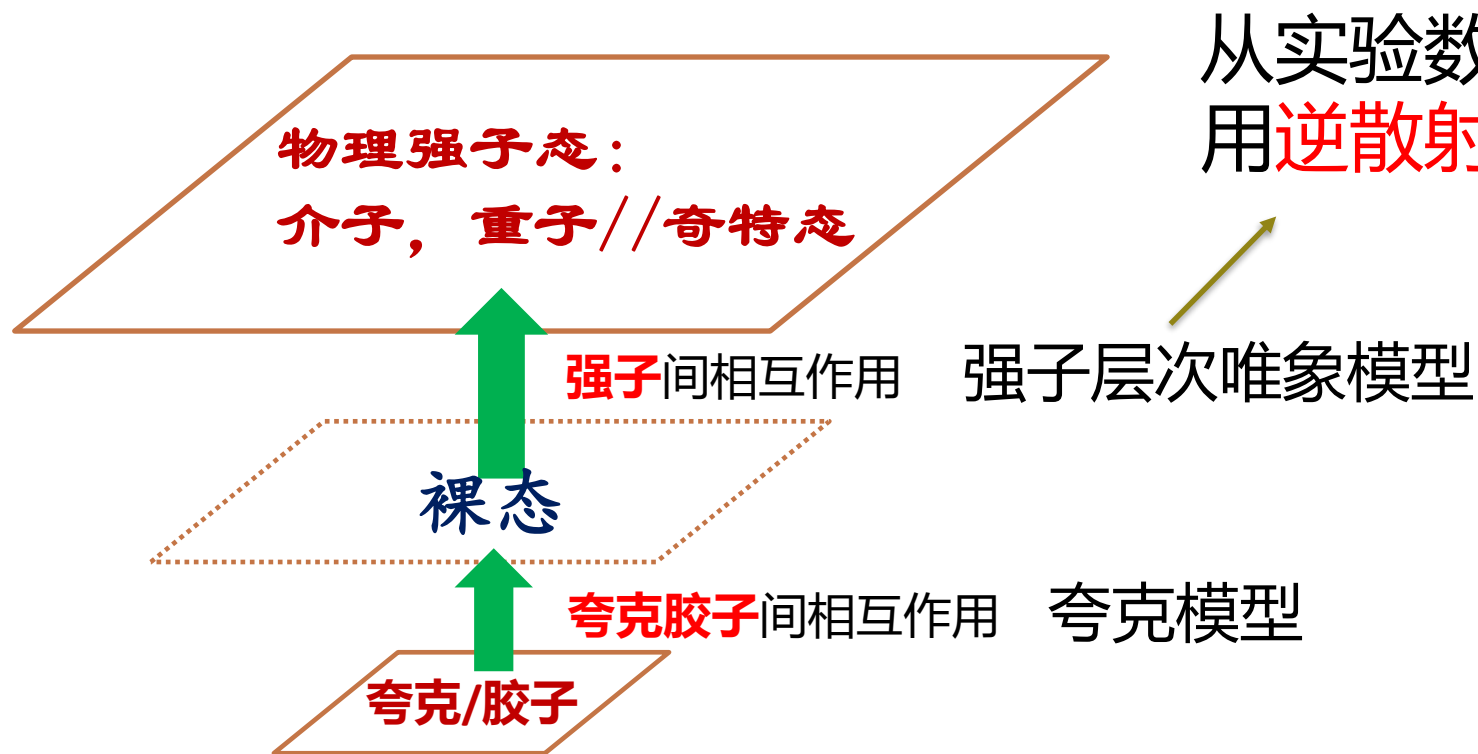


## 奇特态



UNQUENCHED quark model  
非淬火夸克模型

# 背景：强相互作用---强子谱

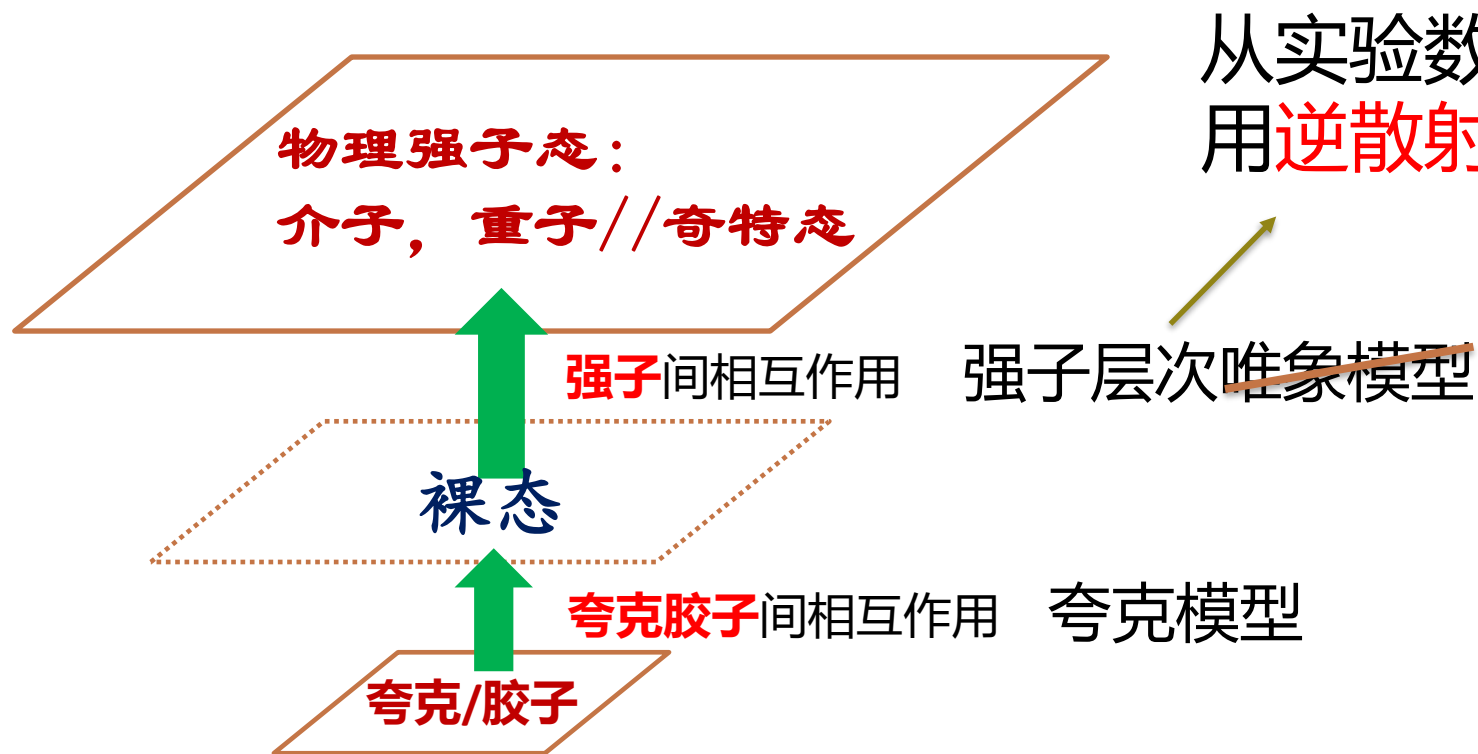


从实验数据出发  
用逆散射来求解

按照这套逻辑理解共振态，对于质量比较大的共振态粒子，很难说存在一个纯粹的某个态，一定或多或少是几种同一个量子数下成分的混合。

裸态(单粒子态)+  
耦合道(多强子态)

# 背景：强相互作用---强子谱



从实验数据出发  
用逆散射来求解

按照这套逻辑理解共振态，对于质量比较大的共振态粒子，很难说存在一个纯粹的某个态，一定或多或少是几种同一个量子数下成分的混合。

裸态(单粒子态)+  
耦合道(多强子态)

# 手征夸克模型

J Vijande et al JPG: Nucl. Part. Phys. 31 481 (2005)

$$H = \sum_i \left( m_i + \frac{p_i^2}{2m_i} \right) - T_{CM} + V_{CON}(\vec{r}_{ij}) + V_{OGE}(\vec{r}_{ij}) + V_\chi(\vec{r}_{ij}),$$

其中,  $m_i$  和  $p_i$  分别是第  $i$  个夸克的质量和动量,  $T_{CM}$  是系统的质心动能,  $\chi = \pi, K, \eta, \sigma$ 。

$V_{CON}(\vec{r}_{ij}), V_{OGE}(\vec{r}_{ij}), V_\chi(\vec{r}_{ij})$  分别是禁闭势、单胶子交换势和介子交换势。

$$V_{OGE}^C(\vec{r}_{ij}) = \frac{\alpha_s}{4} \vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c \left[ \frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{6m_i m_j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \frac{e^{-r_{ij}/r_0(\mu)}}{r_{ij} r_0^2(\mu)} \right] \quad V_{OGE}^T(\vec{r}_{ij}) = -\frac{\alpha_s}{16m_i m_j} \vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c \left[ \frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{e^{-r_{ij}/r_g(\mu)}}{r_{ij}} \left( \frac{1}{r_{ij}^2} + \frac{1}{3r_g^2(\mu)} + \frac{1}{r_{ij} r_g(\mu)} \right) \right] S_{ij},$$

$$V_{OGE}^{SO}(\vec{r}_{ij}) = -\frac{\alpha_s}{16m_i^2 m_j^2} \vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c \left[ \frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{e^{-r_{ij}/r_g(\mu)}}{r_{ij}^3} \left( 1 + \frac{r_{ij}}{r_g(\mu)} \right) \right] V_1$$

$$V_1 = \left[ ((m_i + m_j)^2 + 2m_i m_j) \vec{S}_+ \cdot \vec{L} + (m_j^2 - m_i^2) \vec{S}_- \cdot \vec{L} \right], \quad S_{ij} = 3(\vec{\sigma}_i \cdot \hat{r}_{ij})(\vec{\sigma}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$$

$$V_2 = \left[ ((m_i^2 + m_j^2)(1 - 2a_s) + 4m_i m_j(1 - a_s)) \vec{S}_+ \cdot \vec{L} + (m_j^2 - m_i^2)(1 - 2a_s) \vec{S}_- \cdot \vec{L} \right],$$

$$V_{CON}^C(\vec{r}_{ij}) = [-a_c(1 - e^{-\mu_c r_{ij}}) + \Delta] (\vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c), \quad V_{CON}^{SO}(\vec{r}_{ij}) = -(\vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c) \frac{a_c \mu_c e^{-\mu_c r_{ij}}}{4m_i^2 m_j^2 r_{ij}} V_2,$$

$$W_\pi = \sum_{a=1}^3 (\lambda_i^a \lambda_j^a), \quad W_K = \sum_{a=4}^7 (\lambda_i^a \lambda_j^a), \quad W_\eta = (\cos\theta_P \lambda_i^8 \cdot \lambda_j^8 - \sin\theta_P \lambda_i^0 \cdot \lambda_j^0).$$

$$V_{\chi=\pi,K,\eta}^C(\vec{r}_{ij}) = \frac{g_{ch}^2}{4\pi} \frac{m_\chi^3}{12m_i m_j} \frac{\Lambda_\chi^2}{\Lambda_\chi^2 - m_\chi^2} \left[ Y(m_\chi r_{ij}) - \frac{\Lambda_\chi^3}{m_\chi^3} Y(\Lambda_\chi r_{ij}) \right] (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) W_\chi \quad V_\sigma^C(\vec{r}_{ij}) = -\frac{g_{ch}^2}{4\pi} \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 - m_\sigma^2} m_\sigma \left[ Y(m_\sigma r_{ij}) - \frac{\Lambda_\sigma}{m_\sigma} Y(\Lambda_\sigma r_{ij}) \right],$$

$$V_\chi^T(\vec{r}_{ij}) = \frac{g_{ch}^2}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{12m_i m_j} \frac{\Lambda_\chi^2}{\Lambda_\chi^2 - m_\chi^2} m_\chi \left[ H(m_\chi r_{ij}) - \frac{\Lambda_\chi^3}{m_\chi^3} H(\Lambda_\chi r_{ij}) \right] S_{ij} W_\chi, \quad V_\sigma^{SO}(\vec{r}_{ij}) = -\frac{g_{ch}^2}{4\pi} \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 - m_\sigma^2} \frac{m_\sigma^3}{2m_i m_j} \left[ G(m_\sigma r_{ij}) - \frac{\Lambda_\sigma^3}{m_\sigma^3} G(\Lambda_\sigma r_{ij}) \right] \vec{L} \cdot \vec{S},$$



# 手征夸克模型

采用多高斯展开法处理夸克模型中涉及空间波函数的计算。该方法通过将径向波函数展开为一组高斯基函数的线性组合，把原本薛定谔方程转化为矩阵本征值问题。空间波函数由下式给出，

$$\Psi_{lm}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{n_{max}} c_{nl} \phi_{nlm}^G(\vec{r}), \quad \phi_{nlm}^G(\vec{r}) = \phi_{nl}^G(r) Y_{lm}(\hat{r}), \quad \phi_{nl}^G(r) = N_{nl} r^l e^{-v_n r^2},$$
$$N_{nl} = \left( \frac{2^{l+2} (2v_n)^{l+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} (2l+1)!!} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v_n = \frac{1}{r_n^2}, \quad r_n = r_1 a^{n-1}, \quad a = \left( \frac{r_{n_{max}}}{r_1} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

其中， $lm$ 取决于总角动量 $J$ 、其第三分量 $J_z$ 和自旋 $S$ ； $n_{max}$ 是高斯函数的数量，其取值决定了展开的精度与收敛性。由 $r_N$ 和 $r_1$ 确定高斯宽度 $v_n$  ( $n = 1, \dots, N$ )，这种几何级数分布的选取能够使基函数在短程和长程区域都得到较好的覆盖，从而有效描述束缚态波函数在不同距离尺度上的行为。

本征能量和高斯系数可利用Rayleigh-Ritz变分原理确定，

$$\sum_{n'=1}^{n_{max}} [(T_{nn'} + V_{nn'}) - EN_{nn'}] c_{n'l} = 0.$$

*E. Hiyama, Y. Kino, M. Kamimura PPNP 51 (2003), 223-307*



# 手征夸克模型

	Model 1	Model 2	Model 3
<b>Quark masses</b>			
$m_u = m_d$ (MeV)	295	295	295
$m_s$ (MeV)	440	440	440
$m_c$ (MeV)	1674.5	1658	1674.5
$m_b$ (MeV)	5039.6	5022	5035.4

质量参数吸收了  
部分相对论效应

	Model 1	Model 2	Model 3
<b>Confinement</b>			
$a_c$ (MeV)	327.2	322.8	326.135
$\mu_c$ (fm <sup>-1</sup> )	1.256	1.290	1.2576
$\Delta$ (MeV)	172.5	166.8	170.568
$a_s$	0.714	0.72	0.71476

唯象禁闭势能

	Model 1	Model 2	Model 3
<b>Goldstone bosons</b>			
$m_\pi$ (fm <sup>-1</sup> )		0.70 (fixed)	
$m_\eta$ (fm <sup>-1</sup> )		2.77 (fixed)	
$m_K$ (fm <sup>-1</sup> )		2.51 (fixed)	
$\Lambda_\pi = \Lambda_\sigma$ (fm <sup>-1</sup> )		4.20 (fixed)	
$\Lambda_\eta = \Lambda_K$ (fm <sup>-1</sup> )		5.20 (fixed)	
$m_\sigma$ (fm <sup>-1</sup> )	4.15	2.60	3.5935
$g_{ch}^2/(4\pi)$	0.4452	0.4451	0.44892
$\theta_P$ (°)	-21	-20	20.6
$\theta_P$ (°)-calculated	-20.9632	-20.0646	-20.5874

无色相互作用

交换势能:

同位旋=0: 交换 $\eta$ 和 $\sigma$ ;

同为旋=1: 交换 $\pi$ ;

同位旋=1/2: 交换 $K$ 。

$$m_\omega = m_\rho ?$$

	Model 1	Model 2	Model 3
<b>OGE</b>			
$\hat{r}_0$ (MeV fm)	35.284	37.480	35.739
$\hat{r}_g$ (MeV fm)	25.081	26.166	25.298
$\alpha_0$	3.00	2.093	0.56337
$\Lambda_0$ (MeV)	128.10	56.12	258.92
$c_1$ (MeV)	1237.9	1221.5	1232.95
$c_2$ (MeV)	1364.9	1247.7	1401.52
$\alpha_1$	4.540	-	-
$\mu_0$ (MeV)	-	265.0	-
$k$	-	-	0.4689

单胶子交换势

arXiv: 2604.24270



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 手征夸克模型

$$Q = \mu + \mu e^{-(m_i^2 + m_j^2)/c_1^2} + \mu e^{-(\mu - c_2)^2/c_2^2}$$

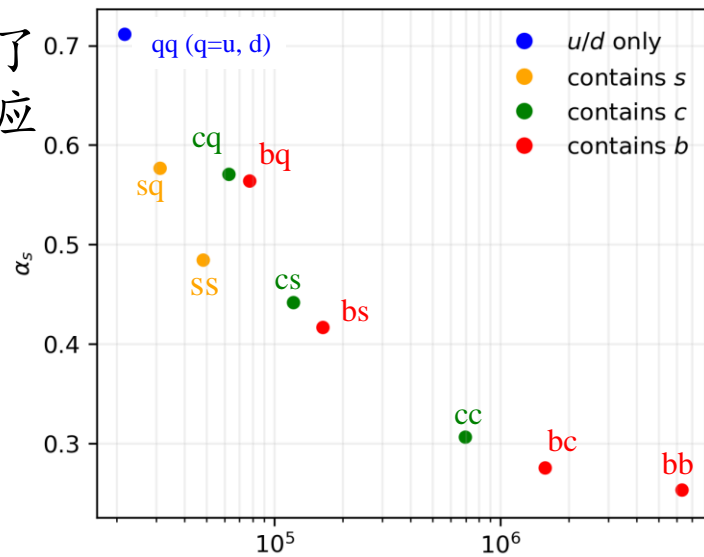
	Model 1	Model 2	Model 3
<b>Quark masses</b>			
$m_u = m_d$ (MeV)	295	295	295
$m_s$ (MeV)	440	440	440
$m_c$ (MeV)	1674.5	1658	1674.5
$m_b$ (MeV)	5039.6	5022	5035.4
<b>Confinement</b>			
$a_c$ (MeV)	327.2	322.8	326.135
$\mu_c$ (fm <sup>-1</sup> )	1.256	1.290	1.2576
$\Delta$ (MeV)	172.5	166.8	170.568
$a_s$	0.714	0.72	0.71476
<b>Goldstone bosons</b>			
$m_\pi$ (fm <sup>-1</sup> )	0.70 (fixed)		
$m_\eta$ (fm <sup>-1</sup> )	2.77 (fixed)		
$m_K$ (fm <sup>-1</sup> )	2.51 (fixed)		
$\Lambda_\pi = \Lambda_\sigma$ (fm <sup>-1</sup> )	4.20 (fixed)		
$\Lambda_\eta = \Lambda_K$ (fm <sup>-1</sup> )	5.20 (fixed)		
$m_\sigma$ (fm <sup>-1</sup> )	4.15	2.60	3.5935
$g_{ch}^2/(4\pi)$	0.4452	0.4451	0.44892
$\theta_P$ (°)	-21	-20	20.6
$\theta_P$ (°)-calculated	-20.9632	-20.0646	-20.5874
<b>OGE</b>			
$\hat{r}_0$ (MeV fm)	35.284	37.480	35.739
$\hat{r}_g$ (MeV fm)	25.081	26.166	25.298
$\alpha_0$	3.00	2.093	0.56337
$\Lambda_0$ (MeV)	128.10	56.12	258.92
$c_1$ (MeV)	1237.9	1221.5	1232.95
$c_2$ (MeV)	1364.9	1247.7	1401.52
$\alpha_1$	4.540	-	-
$\mu_0$ (MeV)	-	265.0	-
$k$	-	-	0.4689

质量参数吸收了部分相对论效应

唯象禁闭势能

无色相互作用

单胶子交换势

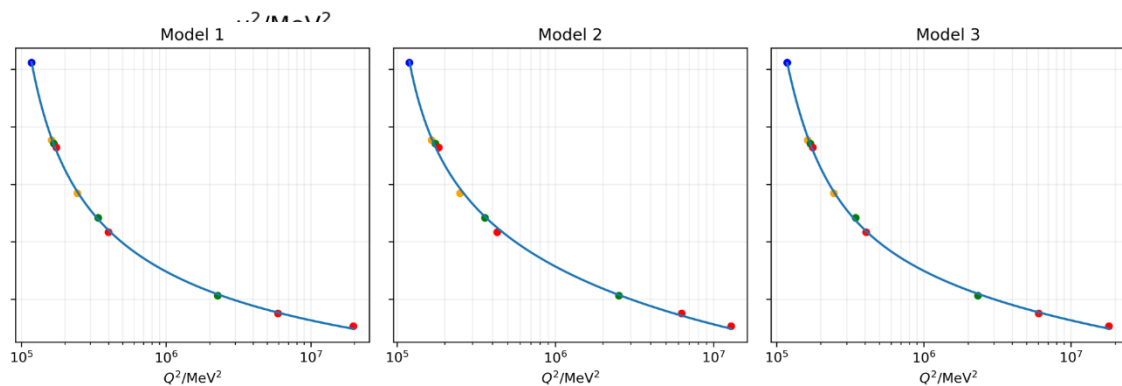


Model 1:  $\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_0}{\ln^k(Q^2/\Lambda_0^2)}$ ,

Model 2:  $\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_0}{\ln((Q^2 - \mu_0^2)/\Lambda_0^2)}$ ,

Model 3:

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_0}{\ln(Q^2/\Lambda_0^2)} - \frac{\alpha_1 \ln(\ln(Q^2/\Lambda_0^2))}{\ln^2(Q^2/\Lambda_0^2)}$$



组分夸克的单胶子交换和流夸克的单胶子交换不同。组分夸克近似减少了系统自由度，但是其使得跑动耦合常数 $\alpha_s$ 变复杂。

arXiv: 2604.24270



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 手征夸克模型

	Model 1	Model 2	Model 3
<b>Quark masses</b>			
$m_u = m_d$ (MeV)	295	295	295
$m_s$ (MeV)	440	440	440
$m_c$ (MeV)	1674.5	1658	1674.5
$m_b$ (MeV)	5039.6	5022	5035.4
<b>Confinement</b>			
$a_c$ (MeV)	327.2	322.8	326.135
$\mu_c$ (fm <sup>-1</sup> )	1.256	1.290	1.2576
$\Delta$ (MeV)	172.5	166.8	170.568
$a_s$	0.714	0.72	0.71476
<b>Goldstone bosons</b>			
$m_\pi$ (fm <sup>-1</sup> )		0.70 (fixed)	
$m_\eta$ (fm <sup>-1</sup> )		2.77 (fixed)	
$m_K$ (fm <sup>-1</sup> )		2.51 (fixed)	
$\Lambda_\pi = \Lambda_\sigma$ (fm <sup>-1</sup> )		4.20 (fixed)	
$\Lambda_\eta = \Lambda_K$ (fm <sup>-1</sup> )		5.20 (fixed)	
$m_\sigma$ (fm <sup>-1</sup> )	4.15	2.60	3.5935
$g_{ch}^2/(4\pi)$	0.4452	0.4451	0.44892
$\theta_P$ (°)	-21	-20	20.6
$\theta_P$ (°)-calculated	-20.9632	-20.0646	-20.5874
<b>OGE</b>			
$\hat{r}_0$ (MeV fm)	35.284	37.480	35.739
$\hat{r}_g$ (MeV fm)	25.081	26.166	25.298
$\alpha_0$	3.00	2.093	0.56337
$\Lambda_0$ (MeV)	128.10	56.12	258.92
$c_1$ (MeV)	1237.9	1221.5	1232.95
$c_2$ (MeV)	1364.9	1247.7	1401.52
$\alpha_1$	4.540	-	-
$\mu_0$ (MeV)	-	265.0	-
$k$	-	-	0.4689

质量参数吸收了部分相对论效应

唯象禁闭势能

无色相互作用

单胶子交换势

$(nL)J^{PC}$	State	Model 1	Model 2	Model 3	Ref. [7]	Exp
$(1S)0^{-+}$	$\pi$	136.1	136.4	135.7	150	135
$(1S)0^{-+}$	$\eta$	548.0	545.7	547.4	520	548
$(1S)1^{--}$	$\rho$	845.5	848.9	846.8	770	775
$(1S)1^{--}$	$\omega$	779.8	777.8	779.6	780	783
$(1S)0^{-+}$	$\eta'$	956.9	958.8	957.5	960	958
$(1S)1^{--}$	$\phi$	1022.8	1023.8	1022.7	1020	1019
$(1S)0^{-}$	$K$	495.8	497.4	497.0	470	498
$(1S)1^{-}$	$K^*$	948.6	954.1	950.4	900	896
$(1S)0^{-}$	$D$	1863.1	1864.6	1863.5	1880	1865
$(1S)1^{-}$	$D^*$	2026.1	2030.0	2027.2	2040	2007
$(1S)0^{-}$	$D_s$	1973.6	1968.5	1971.5	1980	1968
$(1S)1^{-}$	$D_s^*$	2112.2	2114.2	2112.3	2130	2112
$(1S)0^{-+}$	$\eta_c$	2983.7	2982.4	2984.1	2970	2984
$(1S)1^{--}$	$J/\psi$	3096.6	3095.2	3096.8	3100	3097
$(1P)0^{++}$	$\chi_{c0}$	3414.8	3414.8	3414.8	3440	3415
$(1P)1^{++}$	$\chi_{c1}$	3509.4	3510.3	3509.6	3510	3511
$(1P)1^{+-}$	$h_c$	3528.6	3529.3	3528.7	3520	3525
$(1P)2^{++}$	$\chi_{c2}$	3553.7	3554.7	3553.8	3550	3556
$(2S)1^{--}$	$\psi$	3685.3	3683.7	3684.9	3680	3686
$(1S)0^{-+}$	$\eta_b$	9394.9	9395.7	9394.9	9400	9399
$(1S)1^{--}$	$\Upsilon$	9465.3	9464.0	9465.2	9460	9460
$(1P)0^{++}$	$\chi_{b0}$	9858.6	9858.7	9858.6	9850	9859
$(1P)1^{++}$	$\chi_{b1}$	9890.2	9890.0	9890.3	9880	9893
$(1P)1^{+-}$	$h_b$	9898.5	9898.2	9898.6	9880	9899
$(1P)2^{++}$	$\chi_{b2}$	9909.4	9909.0	9909.5	9900	9912
$(2S)1^{--}$	$\Upsilon$	10035.6	10034.8	10035.3	10000	10023
$(1S)0^{-}$	$B$	5275.4	5276.4	5275.7	5310	5280
$(1S)1^{-}$	$B^*$	5332.8	5334.8	5333.5	5370	5325
$(1S)0^{-}$	$B_s$	5363.7	5360.5	5362.7	5390	5367
$(1S)1^{-}$	$B_s^*$	5414.0	5413.5	5413.8	5450	5415
$(1S)0^{-}$	$B_c$	6274.9	6279.7	6275.1	6270	6274
$(1D)2^{--}$	$\Upsilon_2$	10158.0	10157.6	10157.8	-	10164

仅仅选取了不能进行强衰变的介子作为拟合值，而三个矢量介子是可以衰变的，其裸态质量和物理测量会有偏差。

$\rho$ : 848 MeV vs 775 MeV  
 $K^*$ : 950 MeV vs 896 MeV  
 $D^*$ : 2040 MeV vs 2010 MeV

其余各介子的拟合偏差在 5MeV 左右。

利用夸克模型  
决定了裸质量

arXiv: 2604.24270



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 含有裸态的逆散射问题

$$H = H_0 + V = H_0 + \hat{g} + \hat{v}$$

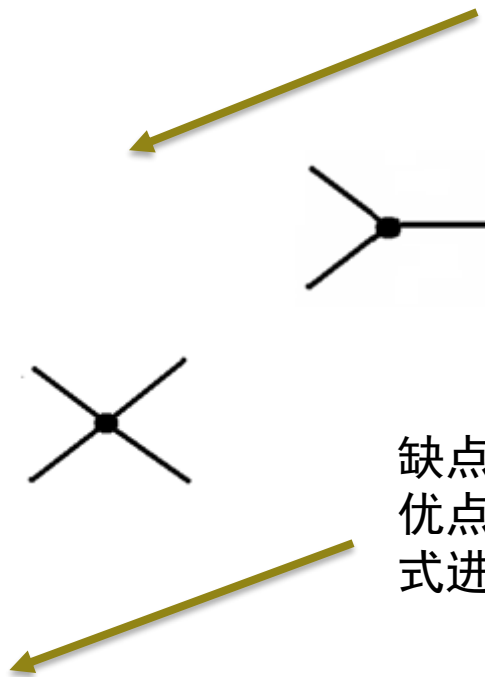
$$H_0 = |b\rangle m_b \langle b| + \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} |p\rangle h(p) \langle p|$$

$$\hat{g} = \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \lambda_b [ |p\rangle f(p) \langle b| + |b\rangle f(p) \langle p| ]$$

$$\hat{v} = \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \lambda_c [ |p\rangle \tilde{f}(p, k) \langle k| ]$$

这里我们介绍一种能够得到通解形式  
即  $\tilde{f}(p, k) = f(p)f(k)$ , 即形状因子相同。

逆散射问题比较复杂，  
我们现阶段只考虑了只  
含有**一个分波**，且含有  
**单个裸态**和**单个耦合道**  
的过程



缺点是模型的假设，**分离势能**。  
优点没有对形状因子的具体形  
式进行假定。



# 含有裸态的逆散射问题

$$H = H_0 + V = H_0 + \hat{g} + \hat{v}$$

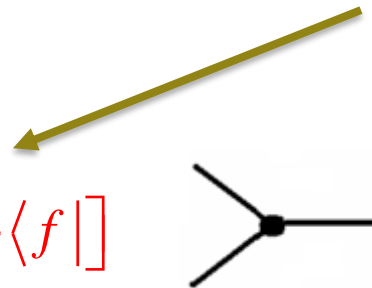
$$H_0 = |b\rangle m_b \langle b| + \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} |p\rangle h(p) \langle p|$$

$$\hat{g} = \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \lambda_b [|p\rangle f(p) \langle b| + |b\rangle f(p) \langle p|] = \lambda_b [|f\rangle \langle b| + |b\rangle \langle f|]$$

$$\hat{v} = \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \lambda_c [|p\rangle \tilde{f}(p, k) \langle k|] = \lambda_c |f\rangle \langle f|$$

这里我们介绍一种能够得到通解形式  
即  $\tilde{f}(p, k) = f(p)f(k)$ , 即形状因子相同。

逆散射问题比较复杂，  
我们现阶段只考虑了只  
含有**一个分波**，且含有  
**单个裸态**和**单个耦合道**  
的过程



缺点是模型的假设，**分离势能**。  
优点没有对形状因子的具体形  
式进行假定。

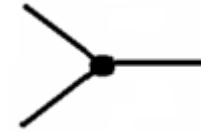
$$|f\rangle \equiv \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} f(p) |p\rangle$$



# 含有裸态的逆散射问题

$$H = H_0 + \hat{g} + \hat{v} \quad H_0 = |b\rangle m_b \langle b| + \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} |p\rangle h(p) \langle p| \quad \hat{g} = \lambda_b [ |f\rangle \langle b| + |b\rangle \langle f| ] \quad \hat{v} = \lambda_c |f\rangle \langle f|$$

逆散射问题一般解法，根据弗雷德霍尔姆行列式 (Fredholm determinant) ，



$$D(W) \equiv \det \left( 1 - \frac{1}{W - H_0} V \right) = 1 - \left( \frac{\lambda_b^2}{W - m} + \lambda_c \right) F(W) \quad F(W) = \left\langle f \left| \frac{1}{W - H_0} \right| f \right\rangle$$

为了避免一些W奇点 (裸质量点) 和零点 (束缚态质量点) ，

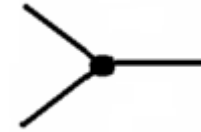
$$C(W) \equiv \frac{\prod_{i=1}^{N_B} \frac{W - E_{B_i}}{W - E_{t_i}}}{\prod_{i=1}^{N_b} \frac{W - m_{b_i}}{W - E_{t_i}}} \quad \delta(E) = -\arg \frac{D(E + i\epsilon)}{C(E + i\epsilon)}$$



# 含有裸态的逆散射问题

$$H = H_0 + \hat{g} + \hat{v} \quad H_0 = |b\rangle m_b \langle b| + \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} |p\rangle h(p) \langle p| \quad \hat{g} = \lambda_b [ |f\rangle \langle b| + |b\rangle \langle f| ] \quad \hat{v} = \lambda_c |f\rangle \langle f|$$

逆散射问题一般解法，根据弗雷德霍尔姆行列式 (Fredholm determinant) ，



$$D(W) \equiv \det \left( 1 - \frac{1}{W - H_0} V \right) = 1 - \left( \frac{\lambda_b^2}{W - m} + \lambda_c \right) F(W) \quad F(W) = \left\langle f \left| \frac{1}{W - H_0} \right| f \right\rangle$$

为了避免一些W奇点 (裸质量点) 和零点 (束缚态质量点) ，

$$C(W) \equiv \frac{\prod_{i=1}^{N_B} \frac{W - E_{B_i}}{W - E_{th}}}{\prod_{i=1}^{N_b} \frac{W - m_{b_i}}{W - E_{th}}} \quad \delta(E) = -\arg \frac{D(E + i\epsilon)}{C(E + i\epsilon)}$$

## 列文森定理 (Levinson theorem)

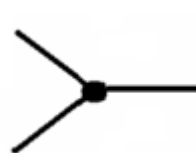
$$\delta(\infty) - \delta(E_{th}) = -\pi(N_B - N_b)$$

F. Vidal and J. LeTourneux, PRC 45, 418 (1992)



# 含有裸态的逆散射问题

$$H = H_0 + \hat{g} + \hat{v} \quad H_0 = |b\rangle m_b \langle b| + \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} |p\rangle h(p) \langle p| \quad \hat{g} = \lambda_b [ |f\rangle \langle b| + |b\rangle \langle f| ] \quad \hat{v} = \lambda_c |f\rangle \langle f|$$



逆散射问题一般解法，根据弗雷德霍尔姆行列式 (Fredholm determinant) ，

$$D(W) \equiv \det \left( 1 - \frac{1}{W - H_0} V \right) = 1 - \left( \frac{\lambda_b^2}{W - m} + \lambda_c \right) F(W) \quad F(W) = \langle f | \frac{1}{W - H_0} | f \rangle$$

为了避免一些W奇点 (裸质量点) 和零点 (束缚态质量点) ，

$$C(W) \equiv \frac{\prod_{i=1}^{N_B} \frac{W - E_{B_i}}{W - E_{th}}}{\prod_{i=1}^{N_b} \frac{W - m_{b_i}}{W - E_{th}}} \quad \delta(E) = -\arg \frac{D(E + i\epsilon)}{C(E + i\epsilon)}$$

## 列文森定理 (Levinson theorem)

$$\delta(\infty) - \delta(E_{th}) = -\pi(N_B - N_b)$$

F. Vidal and J. LeTourneux, PRC 45, 418 (1992)

标准的色散分析  $\ln \frac{D(W)}{C(W)} = -\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E - W} \longrightarrow$

$$D(W) = C(W) e^{-\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E - W}}$$

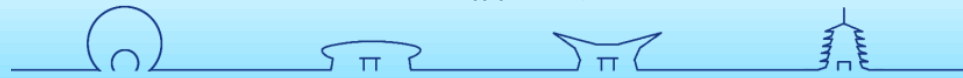
$$-\text{Tr} V = \lim_{|W| \rightarrow \infty} W \ln D(W) = \frac{1}{\pi} \int dE \delta(E) - \sum_{i=1}^{N_B} (E_{B_i} - E_{th}) + \sum_{i=1}^{N_b} (m_{b_i} - E_{th})$$

仅仅针对 $\pi\pi$ 的P波散射，考虑 $\rho$ 的共振能区，根据Levinson定理，裸态是一定需要，而 $\pi\pi$ 直接散射 $v$ 的部分可以忽略。即 $\lambda_c = 0$ ，即忽略耦合道的相互作用。

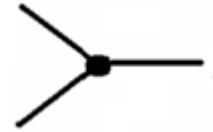
Phys.Rev.D 105 (2022) 11, 116024



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 含有裸态的逆散射问题



$$\lambda_c = 0$$

$$H = H_0 + V \quad H_0 = |b\rangle m_b \langle b| + \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} |p\rangle h(p) \langle p| \quad V = \hat{g} = \lambda_b [ |f\rangle \langle b| + |b\rangle \langle f| ]$$

$$D(W) = 1 - \left( \frac{\lambda_b^2}{W - m} + \cancel{\lambda_c} \right) \langle f | \frac{1}{W - H_0} | f \rangle \quad \text{Im } D(h_p + i\epsilon) = \frac{\lambda_b^2}{h_p - m} \pi \langle f | \delta(h_p - H_0) | f \rangle = \frac{\pi p^2}{(2\pi)^3 h'_p} \frac{\lambda_b^2 f^2(p)}{h_p - m}$$

$$D(W) = C(W) e^{-\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E - W}}$$

$$\lambda_b^2 f^2(p) = \frac{(2\pi)^3 h'_p}{\pi p^2} e^{-\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E - h_p}} |\sin \delta(h_p)| (h_p - E_{th})$$

$$-\text{Tr } V = \frac{1}{\pi} \int dE \delta(E) - \sum_{i=1}^{N_B} (E_{B_i} - E_{th}) + \sum_{i=1}^{N_b} (m_{b_i} - E_{th}) = 0$$

$$m = E_{th} - \frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \delta(E)$$

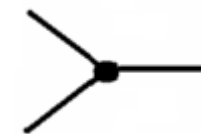
Phys.Rev.D 105 (2022) 11, 116024



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 含有裸态的逆散射问题



$$\lambda_c = 0$$

$$H = H_0 + V \quad H_0 = |b\rangle m_b \langle b| + \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} |p\rangle h(p) \langle p| \quad V = \hat{g} = \lambda_b [ |f\rangle \langle b| + |b\rangle \langle f| ]$$

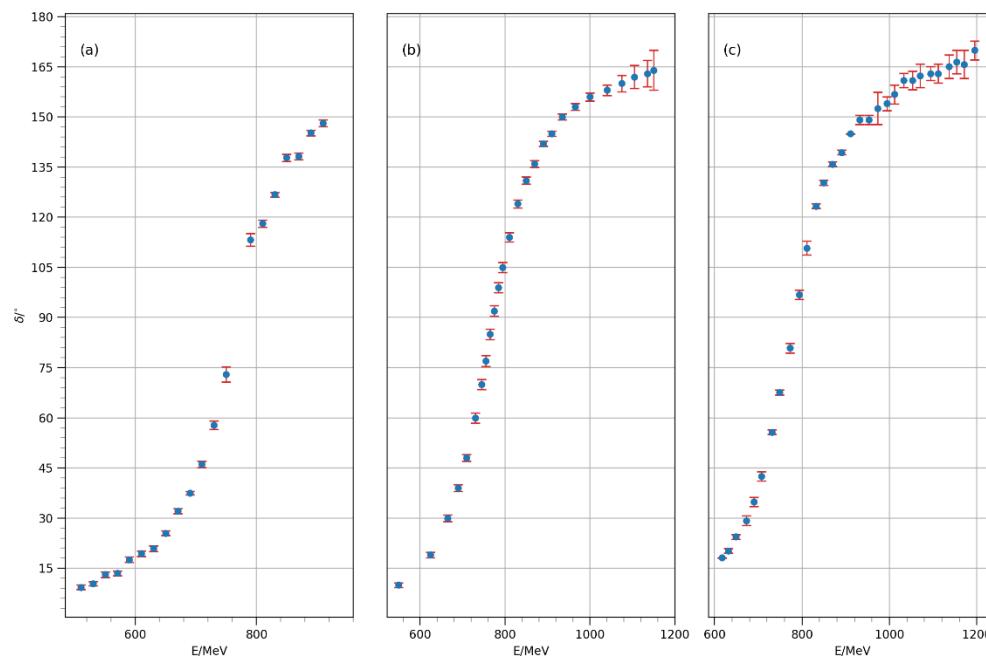
$$D(W) = 1 - \left( \frac{\lambda_b^2}{W - m} + \lambda_c \right) \langle f | \frac{1}{W - H_0} | f \rangle \quad \text{Im } D(h_p + i\epsilon) = \frac{\lambda_b^2}{h_p - m} \pi \langle f | \delta(h_p - H_0) | f \rangle = \frac{\pi p^2}{(2\pi)^3 h'_p} \frac{\lambda_b^2 f^2(p)}{h_p - m}$$

$$D(W) = C(W) e^{-\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E - W}}$$

$$\lambda_b^2 f^2(p) = \frac{(2\pi)^3 h'_p}{\pi p^2} e^{-\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E - h_p}} |\sin \delta(h_p)| (h_p - E_{th})$$

$$-\text{Tr } V = \frac{1}{\pi} \int dE \delta(E) - \sum_{i=1}^{N_B} (E_{B_i} - E_{th}) + \sum_{i=1}^{N_b} (m_{b_i} - E_{th}) = 0$$

$$m = E_{th} - \frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \delta(E)$$



NPB 79 (1974), 301-316; PRD 7 (1973), 1279; NPB 64 (1973), 134-162

Phys.Rev.D 105 (2022) 11, 116024



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 含有裸态的逆散射问题

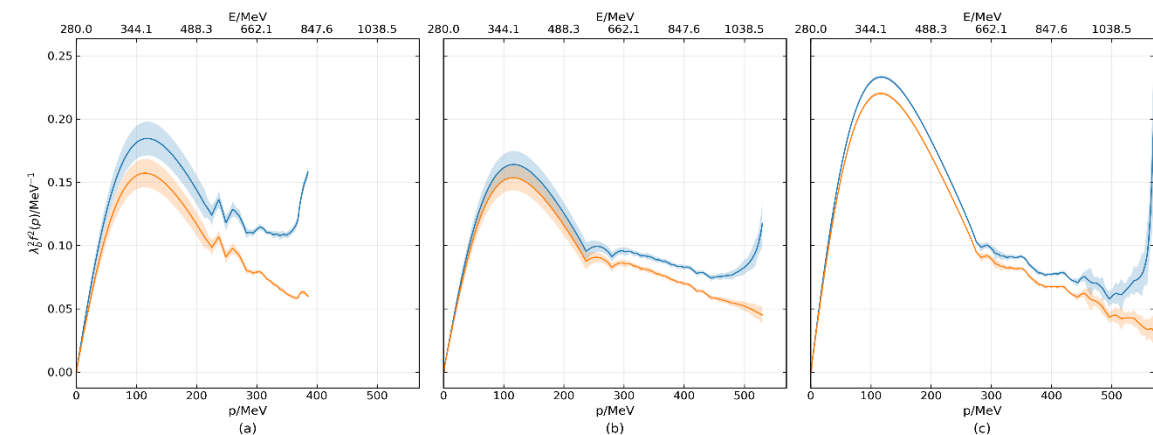
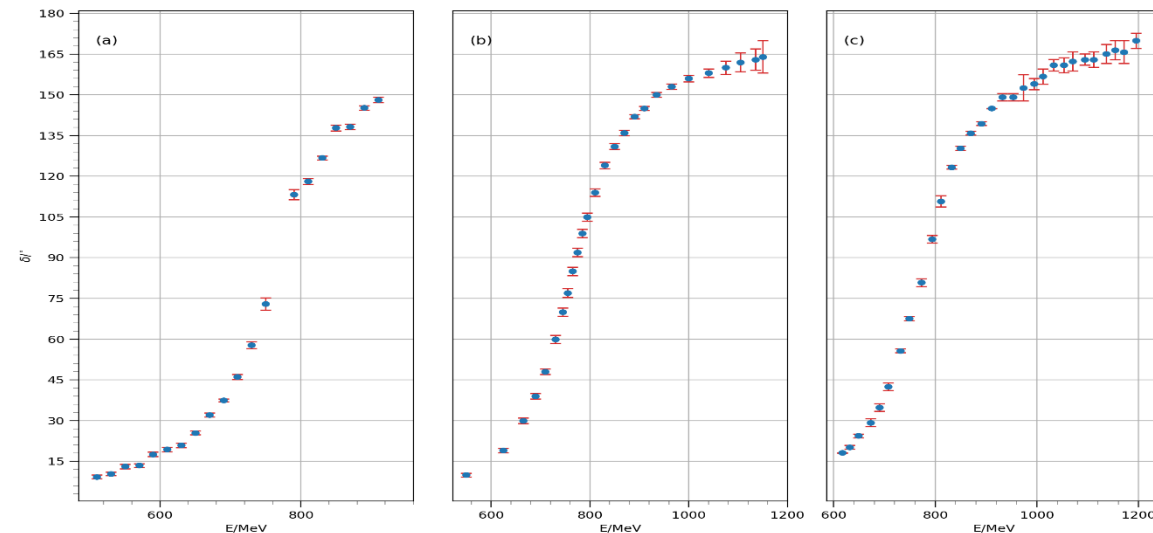
$$D(W) = C(W) e^{-\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E-W}}$$

$$\lambda_b^2 f^2(p) = \frac{(2\pi)^3 h'_p}{\pi p^2} e^{-\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E-h_p}} |\sin \delta(h_p)| (h_p - E_{th})$$

$$-\text{Tr} V = \frac{1}{\pi} \int dE \delta(E) - \sum_{i=1}^{N_B} (E_{B_i} - E_{th}) + \sum_{i=1}^{N_b} (m_{b_i} - E_{th}) = 0$$

$$m = E_{th} - \frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \delta(E)$$

$$\mathcal{P} \int_{E_{th}}^{\Lambda} dE \frac{\delta(E)}{E-h_p} > \mathcal{P} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E-h_p} > \mathcal{P} \int_{E_{th}}^{\Lambda} dE \frac{\delta(E)}{E-h_p} + \frac{\pi(E_{th} - m_0) - \int_{E_{th}}^{\Lambda} dE \delta(E)}{\Lambda - h_p}$$



# 含有裸态的逆散射问题

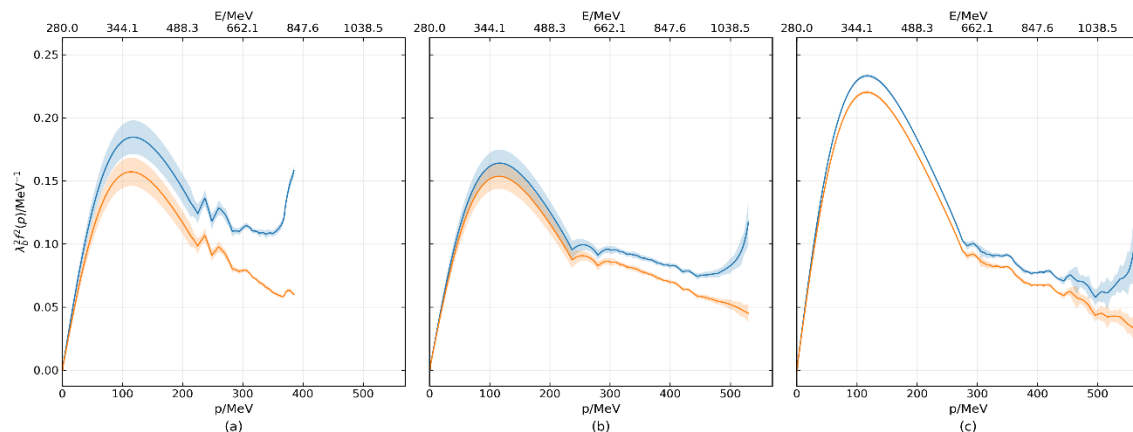
$$\lambda_b^2 f^2(p) = \frac{(2\pi)^3 h'_p}{\pi p^2} e^{-\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E-h_p}} |\sin \delta(h_p)| (h_p - E_{th})$$

求宽度

$$\langle q | T(E + i\epsilon) | q \rangle = \frac{\lambda_b^2 f^2(q)}{E - m_0 - \mathcal{P} \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{\lambda_b^2 f^2(k)}{E-h_k} + i\pi \frac{q^2 \lambda_b^2 f^2(q)}{(2\pi)^3 h'_q}}$$

$$\Gamma_0^{\text{BW}}(q) = \frac{\pi q^2}{(2\pi)^2 h'_q} \lambda_b^2 f^2(q) = 2 \exp\left(\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int dE \frac{\delta(E)}{h_q - E}\right) |\sin \delta(h_q)| (h_q - E_{th}).$$

Solution	$\Gamma_1^{\text{BW}} \pm \Delta\Gamma_1^{\text{BW}}$ (MeV)	$ \langle \rho   \rho_0 \rangle ^2 \pm \Delta  \langle \rho   \rho_0 \rangle ^2$
Lower	$104.0 \pm 2.5$	$0.31 \pm 0.0036$
Upper	$192.0 \pm 4.6$	$0.82 \pm 0.0028$
Lower	$135.1 \pm 2.8$	$0.72 \pm 0.0042$
Upper	$154.9 \pm 3.4$	$0.88 \pm 0.0023$
Lower	$135.3 \pm 2.7$	$0.75 \pm 0.0030$
Upper	$151.9 \pm 3.0$	$0.89 \pm 0.0018$



求成分

$$|\rho\rangle = \int dE \sqrt{\frac{2\Gamma}{\pi}} \frac{E}{|E^2 - m_\rho^2 + im_\rho\Gamma|} |\psi_{\pi\pi}^+(E)\rangle,$$

$$|\psi_{\pi\pi}^+(E)\rangle = \frac{\sqrt{E^2 - 4m_\pi^2}}{2(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{E}{2\sqrt{E^2 - 4m_\pi^2}}\right)^{1/2} |p^+\rangle$$

$$|p^+\rangle = |p\rangle + \frac{c_1}{h_p - m} |b\rangle + \frac{c_2}{h_p - H_0} |f\rangle, \quad c_1 = \frac{\lambda_b f(p)}{D(h_p + i\epsilon)}, \quad c_2 = \frac{c_1 - \lambda_b f(p)}{\lambda_b F(h_p + i\epsilon)}.$$

$$|\langle \rho_0 | p^+ \rangle|^2 = \frac{(2\pi)^3 h'_p}{\pi p^2} \exp\left(\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int dE \frac{\delta(E)}{E - h_p}\right) \frac{|\sin \delta(h_p)|}{h_p - E_{th}}.$$

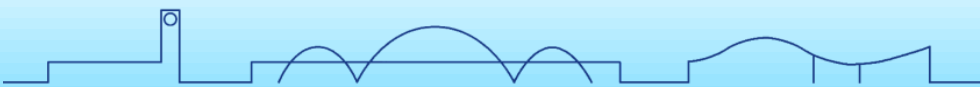


# 小结

- 由于夸克模型中的相互作用仅涉及夸克-胶子层面，因此我们将计算得到的强子质量视为裸质量。我们将此质量作为输入参数，结合实验散射相移数据，代入基于逆散射理论构建的模型中，以获得  $\rho$  介子的物理宽度、裸态成分等信息。
- 先重新拟合夸克模型的参数，获得了  $\rho$  介子的裸质量。
- 再根据  $\pi\pi$  散射相移和裸质量，约束  $\rho\pi\pi$  相互作用的强度
- 最后，根据相互作用强度获得  $\rho$  介子的宽度和成分。
- 推广： $K^*$  介子呢？介子的径向激发态呢？



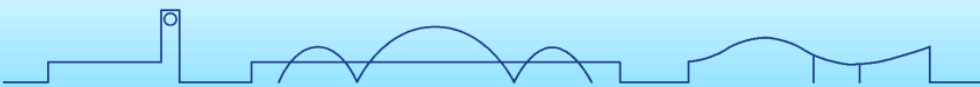
# 谢谢



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# Backup



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences



# 含有裸态的逆散射问题

$$\lambda_b^2 f^2(p) = \frac{(2\pi)^3 h'_p}{\pi p^2} e^{-\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E-h_p}} |\sin \delta(h_p)| (h_p - E_{th})$$

求宽度

$$\langle q | T(E + i\varepsilon) | q \rangle = \frac{\lambda_b^2 f^2(q)}{E - m_0 - \mathcal{P} \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{\lambda_b^2 f^2(k)}{E-h_k} + i\pi \frac{q^2 \lambda_b^2 f^2(q)}{(2\pi)^3 h'_q}}$$

$$\Gamma_0^{BW}(q) = \frac{\pi q^2}{(2\pi)^2 h'_q} \lambda_b^2 f^2(q) = 2 \exp\left(\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int dE \frac{\delta(E)}{h_q - E}\right) |\sin \delta(h_q)| (h_q - E_{th}).$$

$$T(E) \simeq \frac{1}{A'(M)(E - M) + iB(M)} = \frac{1}{A'(M)} \frac{1}{(E - M) + i \frac{B(M)}{A'(M)}}.$$

$$A(E) = \frac{E - m_0 - \mathcal{P} \int \frac{k^2 dk \lambda_b^2 f^2(k)}{(2\pi)^3 E - h_k}}{\lambda_b^2 f^2(q)}, \quad B(E) = \pi \frac{q^2}{(2\pi)^3 h'_q}$$

$$\text{对比 } T_{BW}(E) = \frac{g}{(E-M) + i\Gamma/2}, \quad \frac{\Gamma}{2} = \frac{B(M)}{A'(M)} = \frac{\Gamma_0^{BW}(M)}{2A'(M)\lambda_b^2 f^2}$$

$$A'(M)\lambda_b^2 f^2 = 1 - \frac{d}{dE} \left( \mathcal{P} \int \frac{k^2 dk \lambda_b^2 f^2(k)}{(2\pi)^3 E - h_k} \right) \Big|_{E=M}$$

是裸耦合和dressed耦合的比值

$$\frac{d}{dE} \left( \mathcal{P} \int_0^{k_\Lambda} \frac{k^2 dk \lambda_b^2 f^2(k)}{(2\pi)^3 E - h_k} \right) > \frac{d}{dE} \left( \mathcal{P} \int \frac{k^2 dk \lambda_b^2 f^2(k)}{(2\pi)^3 E - h_k} \right) > \frac{d}{dE} \left( \mathcal{P} \int_0^{k_\Lambda} \frac{k^2 dk \lambda_b^2 f^2(k)}{(2\pi)^3 E - h_k} \right) + \left[ E - m_0 - \mathcal{P} \int \frac{k^2 dk \lambda_b^2 f^2(k)}{(2\pi)^3 E - h_k} \right] \frac{1}{\Lambda - E}$$

这个求导的范围：实验1约为-0.62 ~ -0.55；实验2约为0.032 ~ 0.045；实验3约为-0.029 ~ -0.028。

$$\Gamma \sim \Gamma_0^{BW}$$



# D/C色散关系的简单推导

$$\delta(E) = -\arg \frac{D(E + i\epsilon)}{C(E + i\epsilon)}$$

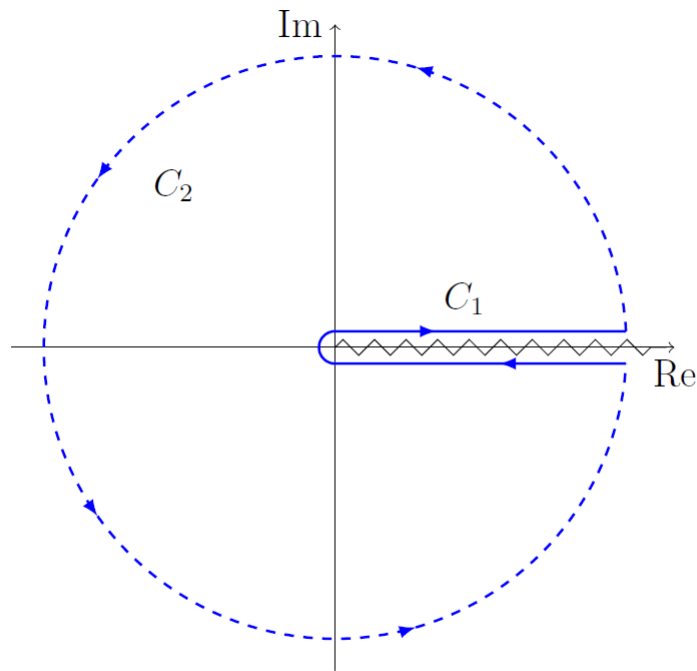


Figure 1: The contour  $C = C_1 + C_2$  in the complex plane

$$\begin{aligned} \ln \frac{D(W)}{C(W)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{\ln \frac{D(z)}{C(z)}}{(z - W)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} dz \frac{\ln \frac{D(z)}{C(z)}}{(z - W)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\ln \frac{D(E + i\epsilon)}{C(E + i\epsilon)}}{(E + i\epsilon - W)} + \int_{\infty}^{E_{th}} dE \frac{\ln \frac{D(E - i\epsilon)}{C(E - i\epsilon)}}{(E - i\epsilon - W)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\ln \frac{D(E + i\epsilon)}{C(E + i\epsilon)}}{(E + i\epsilon - W)} - \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\ln \frac{D(E - i\epsilon)}{C(E - i\epsilon)}}{(E - i\epsilon - W)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{2 \ln \frac{D(E + i\epsilon)}{C(E + i\epsilon)}}{(E + i\epsilon - W)} \right) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{-2i\delta(E)}{(E + i\epsilon - W)} \right) \end{aligned}$$

$$\ln \frac{D(W)}{C(W)} = -\frac{1}{\pi} \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\delta(E)}{E - W}$$

