



手征有效场论对正负电子湮没 核子-反核子对产生截面阈效应的描述

胡海明（高能物理研究所）

第十一届手征有效场论研讨会

2026年8月11-16日
兰州

主要内容

目的：探讨从基本理论理解核子-反核子产生截面阈效应

- 实验上观测到的重子-反重子产生截面阈效应
- 手征有效理论拉氏量
- 核子-反核子末态相互作用振幅
- 动量空间相互作用势
- 坐标空间相互作用势
- 薛定谔方程近似解析解
- Sommerfeld因子

核子产生截面阈效应

- $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow B\bar{B}$ 过程产生玻恩截面:

$$\sigma_{B\bar{B}}^0(s) = \frac{4\pi\alpha^2\beta}{3s} [|G_M(s)|^2 + \frac{1}{\tau} |G_E s|^2], \quad \tau = \frac{s}{4M^2}, \quad \beta = \sqrt{1 - 1/\tau}$$

截面特征：当质心能量趋于阈值，玻恩截面趋于零。

- 考虑末态修正:

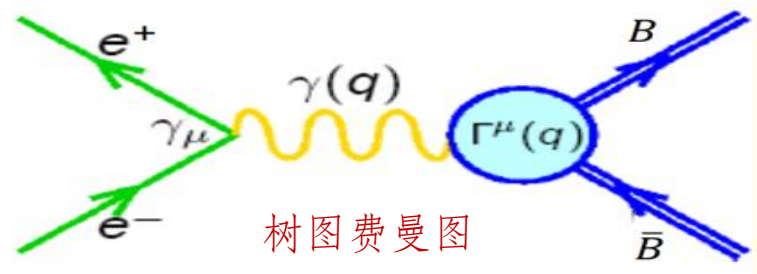
$$\sigma_{B\bar{B}}^*(s) = \frac{4\pi\alpha^2\beta F}{3s} [|G_M(s)|^2 + \frac{1}{\tau} |G_E s|^2]$$

$$F_C = \frac{|\psi_{Coulomb}(0)|^2}{|\psi_{free}(0)|^2} \quad (\text{求解零场和场库伦场薛定谔方程})$$

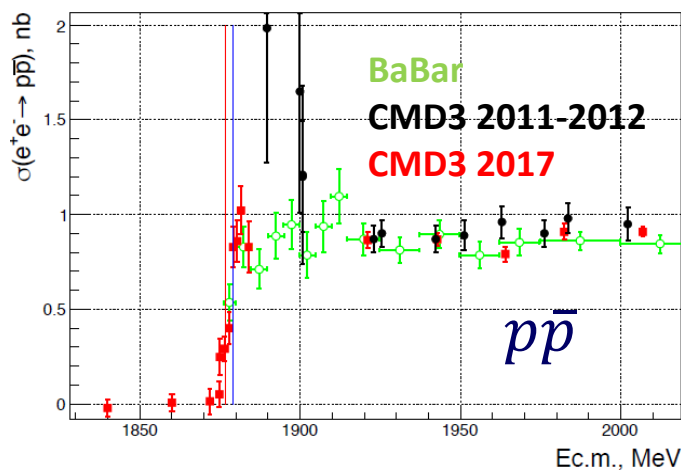
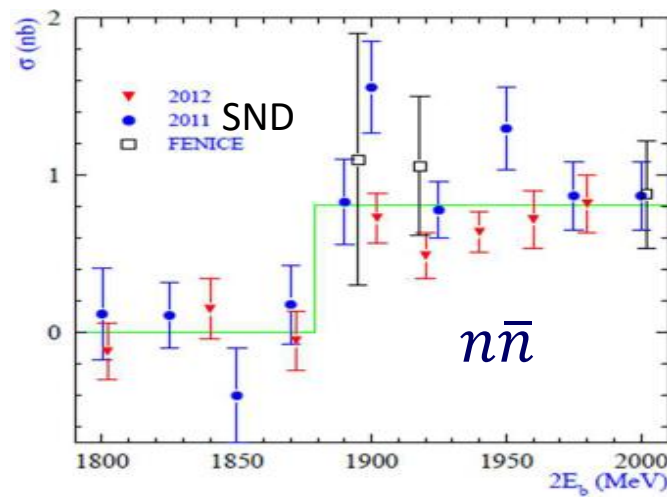
库伦修正 $F_C(s) = \begin{cases} 1 & (n\bar{n}) \\ \frac{\pi\alpha/\beta}{1-\exp(-\pi\alpha/\beta)} & (p\bar{p}) \end{cases}$

$$\beta F_C(s) = \begin{cases} \beta \rightarrow 0 & (n\bar{n}) \\ \frac{\pi\alpha}{1-\exp(-\pi\alpha/\beta)} \rightarrow \pi\alpha & (p\bar{p}) \end{cases}$$

不能解释 $n\bar{n}$ 的阈效应
能解释 $p\bar{p}$ 的阈效应

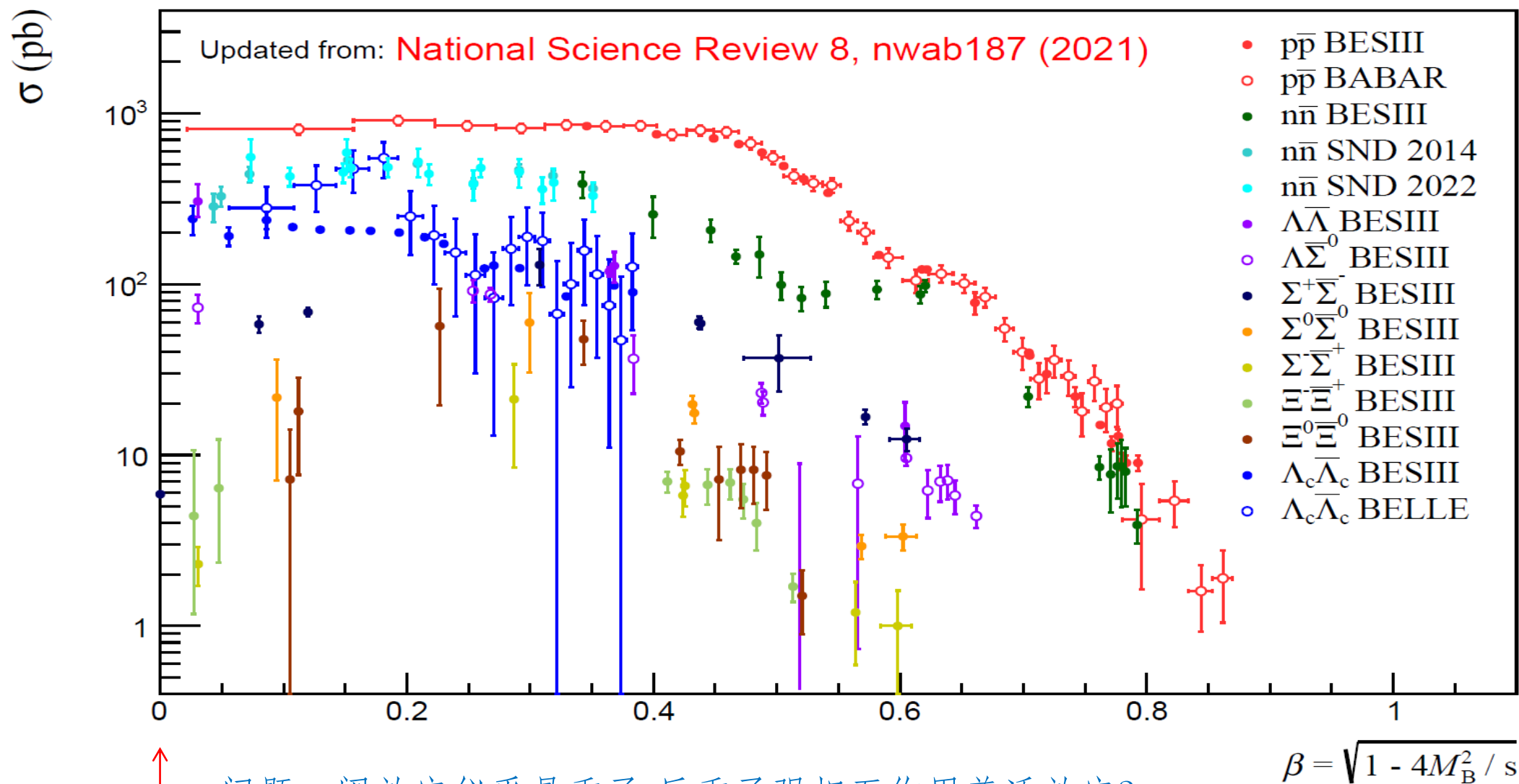


树图费曼图



实验表明：
核子-反核子之间除了存在库伦电磁相互作用外，还存在非库伦相互作用导致产生截面的阈效应。

多个重子道均观测到产生截面阈值增强效应



问题：阈效应似乎是重子-反重子强相互作用普适效应？

阈 理论解释：？

正负电子湮没产生核子-反核子对

e^+e^- 湮没产生核子-反核子同位旋二重态 $N\bar{N}$:

$$e^+e^- \rightarrow |N\bar{N}\rangle = \begin{pmatrix} p\bar{p} \\ n\bar{n} \end{pmatrix}, \quad (I = \frac{1}{2}, \quad I_3 = \pm \frac{1}{2})$$

核子-反核子相互作用

$N\bar{N}$ 系统可通过交换介子发生相互作用:

$$|\pi\rangle = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}, \quad |\rho\rangle = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^- \end{pmatrix}, \quad |\sigma\rangle, \quad |\omega\rangle, \quad |\phi\rangle.$$

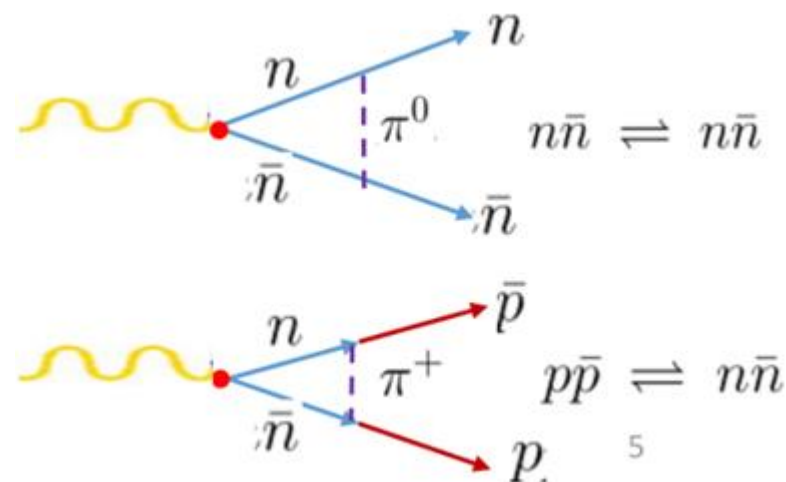
- 当 N 与 $\bar{N}$ 间交换 $\pi^0, \sigma, \omega, \rho^0$, 只传递相互作用, 并不改变 $N\bar{N}$ (弹性散射):

$$p\bar{p} \rightleftharpoons p\bar{p}, \quad n\bar{n} \rightleftharpoons n\bar{n}$$

- 当 N 与 $\bar{N}$ 之间交换 $\pi^\pm, \rho^\pm$ 时, 将发生非弹性过程:

$$p\bar{p} \rightleftharpoons n\bar{n}$$

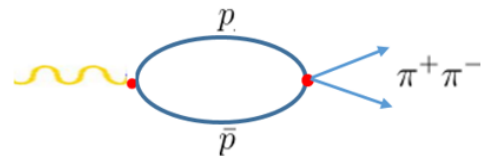
即 N 和 $\bar{N}$ 内部夸克通过交换带电介子重新组合。



$N\bar{N}$ 湮灭为介子态

在产生阈附近, $N\bar{N}$ 发生湮灭为其它介子末态过程:

$$p\bar{p}, n\bar{n} \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0, \eta\pi^+\pi^-, \eta\pi^0\pi^0, K^+K^-, K^0\bar{K}^0$$



这是核子-反核子之间一种特殊相互作用。

手征有效场论

手征有效场论(χ EFT)是描述低能强相互作用的标准理论框架, 是QCD在低能区的有效版本。 χ EFT通过将原来QCD以夸克和胶子为自由度的复杂问题转化为以强子为自由度的可计算问题。 χ EFT的基础是有效拉氏量, 其核心原理是:

- 基于QCD手征对称性及其自发破缺(Goldstone玻色子, π 介子)。
- 有效自由度: 核子场 $N(x)$ (同位旋二重态, $N = (p, n)^T$)、反核子场 $\bar{N}(x)$ 、轻介子场(赝标量Goldstone玻色子 $\vec{\pi}$ 和矢量介子 ρ, ω)。
- 手征对称性: 通过非线性实现 $U = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}/f_\pi)$, 以及矢量介子的隐藏规范场方式引入。
- 对称性约束: Lorentz, C, P, G, I 。
- 导数耦合: Goldstone玻色子的低能定律。
- 幂次计数: 所有算符按质量维度展开, 耦合常数由手征标度 Λ_χ 控制。

$e^+e^- \rightarrow N\bar{N}$ 的同位旋

在QED中，带电粒子间电磁相互作用库伦势基本图像是通过交换 γ^* 传递。 γ^* 同位旋性质需从夸克电磁流在同位旋空间中变换行为来分析。

电磁流同位旋结构

电磁流算符 J_μ^{em} 在夸克同位旋 $q=(u,d)$ 层次为：

$$J_\mu^{em} = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d = \frac{1}{6}\bar{q}\gamma_\mu q + \frac{1}{2}\bar{q}\gamma_\mu \tau^3 q$$

第一项是同位旋标量($I=0$ ，单态)，来源于 $\bar{q}\gamma_\mu q$ 项；第二项是同位旋矢量($I=1, I_3=0$ ，三重态)，来源于 $\bar{q}\gamma_\mu \tau^3 q$ 项。

虚光子同位旋

虚光子与夸克电磁流耦合，其量子数与电磁流相同。因此，虚光子是同位旋单态 $I=0$ 和三重态($I=1, I_3=0$)的混合。这表明电磁相互作用破坏同位旋守恒：电磁力不区分质子和中子质量，但区分它们的电荷。

手征有效场论相互作用拉氏量(LO阶)

散射道

赝标介子 $\pi(I=1, J^P=0^-, G_\pi=-1)$ 交换拉氏量

π 在 $N\bar{N}$ 系统中的拉氏量厄米形式为：

$$\mathcal{L}_{\pi N\bar{N}} = -\frac{g_\pi}{2m_N}(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi^c - \bar{\psi}^c\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi)\cdot\partial_\mu\vec{\phi}_\pi$$

g_π ：耦合常数； m_N ：核子质量； $\vec{\tau}=(\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ ：同位旋泡利矩阵； ψ ：核子场， ψ^c 反核子场； $\vec{\phi}_\pi$ ： π 介子赝标量场(同位旋三重态)。

矢量介子 $\rho(I=1, J^{PC}=1^{--}, G_\rho=+1)$ 交换拉氏量

ρ 在 $N\bar{N}$ 系统中的拉氏量厄米形式为：

$$\mathcal{L}_{\rho N\bar{N}} = g_\rho (\bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi^c + \bar{\psi}^c \gamma^\mu \vec{\tau} \psi) \cdot \vec{\phi}_{\rho, \mu}$$

$\vec{\phi}_{\rho, \mu}$ ： ρ 矢量场(同位旋三重态)。

赝标介子 $\eta(I=0, J^P=0^-, G_\eta=+1)$ 交换拉氏量

η 在 $N\bar{N}$ 系统中的拉氏量厄米形式为：

$$\mathcal{L}_{\eta N\bar{N}} = -\frac{g_\eta}{2m_N} (\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi^c - \bar{\psi}^c \gamma^5 \gamma^\mu \psi) \partial_\mu \phi_\eta$$

ϕ_η ： η 介子赝标量场(同位旋单态，无 $\vec{\tau}$ 矩阵)；负号来源于赝矢量耦合标准形式。

矢量介子 $\phi, \omega(I=0, J^{PC}=1^{--}, G_\phi=+1)$ 交换拉氏量

ϕ 在 $N\bar{N}$ 系统中拉氏量(仅考虑矢量耦合，忽略张量项)为：

$$\mathcal{L}_\phi = g_\phi (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi^c + \bar{\psi}^c \gamma^\mu \psi) \phi_\mu$$

ϕ_μ ： ϕ 介子的矢量场(同位旋单态，无 $\vec{\tau}$ 矩阵)。

湮没道

总拉氏量包括 $N\bar{N}$ 湮没的所有末态：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi^+\pi^-} = & -4g_S \frac{1}{f_\pi^2} (N\bar{N})(\pi^+\pi^-) \quad (\pi\pi \text{道}) \\ & + -ig_P \frac{1}{f_\pi^3} (\bar{N}\gamma_5 N)(\pi^+\pi^-\pi^0) \quad (3\pi \text{道}) \\ & + g_V \frac{1}{\Lambda_\chi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\bar{N}\gamma^\mu N) \partial^\nu \omega^\alpha \partial^\beta \pi^0 \quad (\omega\pi \text{道}) \\ & + g_\rho \frac{1}{\Lambda_\chi} (\bar{N}\gamma^\mu \vec{\tau} N) \cdot (\rho_\mu \vec{\pi}) \quad (\rho\pi \text{道}) \\ & + (K\bar{K} \text{等道})\end{aligned}$$

- g_S, g_P, g_V, g_ρ : 复数耦合常数, 其虚部对应湮没道宽度 ($g_i = a_i - iw_i/2$)
- $\Lambda_\chi \sim 1\text{GeV}$, 手征截断标度, 保证量纲正确
- ϵ : 完全反对称张量(源自手征反常, 描述 $\omega\pi$ 道)
- 狄拉克矩阵结构: $\gamma^\mu, \gamma_5, \gamma^\mu \gamma_5, 1$ 等

动量空间散射振幅

根据费曼规则写出

赝标介子 π 交换振幅

在非相对论近似下散射振幅为：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\pi N\bar{N}} &= -\left(\frac{g_\pi}{2m_N}\right)^2 [\bar{u}(p_3)\gamma^5\gamma^\mu u(p_1)] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_\pi^2}\right) [\bar{v}(p_2)\gamma^5\gamma^\nu v(p_4)] \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle \\ &\approx -i \frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{\vec{q}^2}{4m_N^2} \frac{1}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle\end{aligned}$$

矢量介子 ρ 交换振幅

ρ 介子在 $N\bar{N}$ 系统中的振幅为：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\rho N\bar{N}}(\vec{q}) &= g_\rho [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_\rho^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu v(p_4)] \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle \\ &\approx -ig_\rho^2 \frac{1}{\vec{q}^2 + m_\rho^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle\end{aligned}$$

赝标介子 η 交换振幅

在非相对论近似下 χ EFT散射振幅为：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\eta N\bar{N}} &= \left(\frac{g_\eta}{2m_N}\right)^2 [\bar{u}(p_3)\gamma^5\gamma^\mu u(p_1)] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_\eta^2}\right) [\bar{v}(p_2)\gamma^5\gamma^\nu v(p_4)] \\ &\approx -i \frac{g_\eta^2}{4\pi} \frac{1}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + m_\eta^2}\end{aligned}$$

矢量介子 ϕ, ω 交换振幅

在非相对论近似下散射振幅为：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\phi N\bar{N}} &= g_{\phi}^2 [\bar{u}(p_3) \gamma^{\mu} u(p_1)] \left(\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 - m_{\phi}^2} \right) [\bar{v}(p_2) \gamma^{\nu} v(p_4)] \\
&\approx -i \frac{g_{\phi}^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + m_{\phi}^2}
\end{aligned}$$

动量空间湮没道振幅

湮没道拉氏量与湮没道振幅的关系

$N\bar{N}$ 湮没为若干介子的过程拉氏量可统一写为：

$$\mathcal{L}_{ann} = \sum_M \frac{C_M}{\Lambda_{\chi}^{d_M-4}} \bar{N} \Gamma_M N \mathcal{O}_M$$

其中， C_M 是耦合常数； $\mathcal{O}_M$ 是介子场组合； d_M 是算符质量维度。湮灭道拉氏量与湮没振幅关系为：

$$-i\mathcal{M}_{N\bar{N} \rightarrow M} = \frac{iC_M}{\Lambda_{\chi}^{d_M-4}} [\bar{u}(p_1) \Gamma_M v(p_2)] [\text{介子波函数与动量因子组合}]$$

用同位旋态表示(采用标准同位旋基矢)

- $N\bar{N}$ 二重态同位旋分解:

$$|N\bar{N}; I=0, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\bar{p}\rangle - |n\bar{n}\rangle), \quad |N\bar{N}; I=1, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle)$$

$$|N\bar{N}; I=1, I_3=+1\rangle = |p\bar{n}\rangle, \quad |N\bar{N}; I=1, I_3=-1\rangle = |n\bar{p}\rangle$$

- $\pi\pi$ 同位旋三重态同位旋分解:

$$|\pi\pi; I=0, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle - |\pi^0\pi^0\rangle)$$

$$|\pi\pi; I=1, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle)$$

$$|\pi\pi; I=2, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle + 2|\pi^0\pi^0\rangle)$$

用同位旋态表示湮没振幅

由于同位旋守恒, $\mathcal{T}$ 在总同位旋 I 的基矢下是对角的:

$$\begin{aligned}\langle \pi^+\pi^- | \mathcal{T} | N\bar{N} \rangle &= \sum_{I=0,1} \langle \pi^+\pi^- | I, I_3=0 \rangle \langle I, I_3=0 | \mathcal{T} | N\bar{N} \rangle \\ &= \langle \pi^+\pi^- | I=0 \rangle \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=0} + \langle \pi^+\pi^- | I=1 \rangle \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=1}\end{aligned}$$

用物理态表示湮没振幅

$$\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{T} | p \bar{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(+\frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=1} \right)$$

$$\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{T} | n \bar{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=1} \right)$$

$$\mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=0} = \frac{8\sqrt{3}M_N g_S}{f^2}, \quad \mathcal{A}_{\pi\pi}^{I=1} = \frac{8\sqrt{2}M_N g_S}{f^2}$$

$N \bar{N} \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 湮没道振幅

$$\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{T} | N \bar{N} \rangle = \frac{8M_N g_S}{f_\pi^2} \left(\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{16M_N g_S}{f_\pi^2}$$

$N \bar{N} \rightarrow \rho^+ \pi^-$ 湮没道振幅

$$\langle \rho^+ \pi^- | \mathcal{T} | N \bar{N} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \mathcal{M}_{\rho\pi}^{(0)} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \mathcal{M}_{\rho\pi}^{(0)} \right) = 2 \mathcal{M}_{\rho\pi}^{(0)}$$

坐标空间的散射势

动量空间散射振幅与坐标空间势函数的关系由傅里叶变换相联系：

$$V(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{q} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \mathcal{M}(\vec{q})$$

赝标介子 π 交换势

对 $N\bar{N}$ 散射 π 振幅作傅里叶变换：

$$\begin{aligned} V_{\pi}(r) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{q} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(-i \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} \frac{\vec{q}^2}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{1}{\vec{q}^2 + m_{\pi}^2} \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle \right) \\ &\approx -i \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} \frac{m_{\pi}^2}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_{\pi}r}}{r} \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle \end{aligned}$$

即同位旋二重态 $N\bar{N}$ 交换同位旋三重态 $\pi = (\pi^+ \pi^0, \pi^-)$ 的势函数(2×2矩阵形式)。交换 π^0 发生弹性散射过程 $p\bar{p} \leftrightarrow p\bar{p}, n\bar{n} \leftrightarrow n\bar{n}$ ，交换 $\pi^{\pm}$ 发生非弹性过程 $p\bar{p} \leftrightarrow n\bar{n}$ 。

对于 $N\bar{N}$ 系统， $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ 在物理态 $|p\bar{p}\rangle$ 和 $|n\bar{n}\rangle$ 的矩阵元为：

$$\langle p\bar{p} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | p\bar{p} \rangle = -1, \quad \langle n\bar{n} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | n\bar{n} \rangle = -1,$$

$$\langle p\bar{p} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | n\bar{n} \rangle = -2, \quad \langle n\bar{n} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | p\bar{p} \rangle = -2.$$

π 介子交换势在同位旋基下的矩阵为：

$$\mathbf{V}_{\pi}^I(r) = \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} \frac{m_{\pi}^2}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_{\pi}r}}{r} \cdot \mathbf{T}_I$$

同位旋矩阵为：

$$\mathbf{T}_I = \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle = \begin{pmatrix} \langle p\bar{p} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | p\bar{p} \rangle & \langle p\bar{p} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | n\bar{n} \rangle \\ \langle n\bar{n} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | p\bar{p} \rangle & \langle n\bar{n} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | n\bar{n} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

自旋算符点积 $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ 在总自旋 S 的本征态上是对角的。自旋单态 $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle = -3$ ，自旋三重态 $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle = +1$ 。

矢量介子 ρ 交换势

对 $N\bar{N}$ 散射 ρ 振幅作傅里叶变换：

$$\mathbf{V}_\rho^I(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(-ig_\rho^2 (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{1}{\vec{q}^2 + m_\rho^2} \langle \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \rangle \right) = \frac{g_\rho^2}{4\pi} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\rho r}}{r} \mathbf{T}_I$$

自旋算符的点积 $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ 和 ρ 介子同位旋算符矩阵与 π 相同。

标量介子 η 交换势

对 $N\bar{N}$ 散射 η 振幅作傅里叶变换：

$$\mathbf{V}_\eta(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(-i \frac{g_\eta^2}{4\pi} \frac{1}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + m_\eta^2} \right) \approx \frac{g_\eta^2}{4\pi} \frac{m_\eta^2}{16\mu^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\eta r}}{r} \mathbf{I}$$

矢量介子 ϕ, ω 交换势

对 $N\bar{N}$ 散射 ϕ 和 ω 振幅作傅里叶变换：

$$\mathbf{V}_\phi(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(-i \frac{g_\phi^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + m_\eta^2} \right) \approx -\frac{g_\phi^2}{4\pi} \frac{m_\phi^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\phi r}}{r} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{V}_\omega(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(-i \frac{g_\omega^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + m_\omega^2} \right) \approx -\frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{m_\omega^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\omega r}}{r} \mathbf{I}$$

坐标空间的湮没势

一般关系

湮没势是一个复数(虚部=吸收)。湮没振幅与湮没势的关系为：

$$\text{Im}\tilde{V}_{\text{ann}} = -\frac{1}{2} \sum_M \int d\Phi_M |\mathcal{M}_{N\bar{N} \rightarrow M}|^2, \quad V_{\text{ann}}(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{iq \cdot r} \tilde{V}_{\text{ann}}(q)$$

$N\bar{N} \rightarrow \pi^+\pi^-$ 道

$$\text{Im}\tilde{V}_{\text{ann}}^{(\pi^+\pi^-)}(\vec{q}) = -\frac{32M_N^2 |g_S|^2 |\vec{k}_\pi|}{\pi f_\pi^4 \sqrt{s}}, \quad |\vec{k}_\pi| = \frac{\sqrt{s-4m_\pi^2}}{2}$$

$N\bar{N} \rightarrow \rho^+\pi^-$ 道

$$\text{Im}\tilde{V}_{\text{ann}}^{(\rho^+\pi^-)}(\vec{q}) = -\frac{3M_N^2 |g_\rho|^2 |\vec{k}_\rho|}{2\pi \Lambda_\chi^2 \sqrt{s}}, \quad |\vec{k}_\rho| = \frac{\sqrt{[s-(m_\rho+m_\pi)^2][s-(m_\rho-m_\pi)^2]}}{2\sqrt{s}}$$

零程近似

上面计算得知，所有道的 $\text{Im}\tilde{V}_{\text{ann}}(\vec{q})$ 都与动量转移 $\vec{q}$ 无关，即

$$\text{Im}\tilde{V}_{\text{ann}}(\vec{q}) \approx -iW_0, \quad (\text{常数})$$

$$W_0 = \frac{M_N^2}{\pi \sqrt{s}} \left[\frac{40|g_S|^2 |\vec{k}_\pi|}{f_\pi^4} + \frac{15|g_\rho|^2 |\vec{k}^3|}{2\Lambda_\chi^2} + \frac{|g_V|^2 m_\omega^2 |\vec{k}^3|}{2\Lambda_\chi^2} \right]$$

作傅里叶变换即得坐标空间的湮没势函数：

$$V_{\text{ann}}(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \tilde{V}_{\text{ann}}(\vec{q}) = -iW_0 \delta^{(3)}(\vec{r}) \equiv -iW(\vec{r})$$

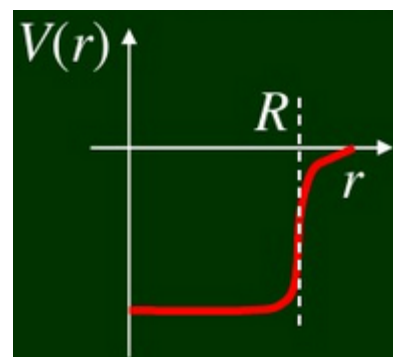
$W(r)$ 的唯象短程势

- 高斯型:

$$W(r) = -W_0 \exp(-r^2/\beta^2)$$

- Woods-Saxon型:

$$W(r) = -\frac{W_0}{1 + \exp[(r - R)/a]}$$



$N\bar{N}$ 之间库仑势

$N\bar{N}$ 还存在库仑相互作用, 为与交换介子散射统一考虑, 需对其作同位旋分解。

库仑势的同位旋分解

设库仑势在 $I=0,1$ 道分别为 $V_0^C(r)$ 和 $V_1^C(r)$, 则:

$$V_{p\bar{p}}^C(r) = V_0^C(r) + V_1^C(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$V_{n\bar{n}}^C(r) = V_0^C(r) - V_1^C(r) = 0$$

$$V_0^C(r) = V_1^C(r) = -\frac{\alpha}{2}$$

库仑势在物理基和同位旋基下的表示

介子交换势在物理基 $|p\bar{p}\rangle, |n\bar{n}\rangle$ 下表示为 2×2 矩阵:

$$\mathbf{V}_{\gamma^*}(r) = -\frac{\alpha}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{r} \cdot \mathbf{T}_C, \quad \mathbf{T}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N\bar{N}$ 系统物理基与同位旋基关系为：

$$\begin{pmatrix} p\bar{p} \\ n\bar{n} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |I=1\rangle \\ |I=0\rangle \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$$

库伦势在物理基下不对称，其变换到同位旋基为：

$$V_C^I(r) = U^\dagger V_C(r) U = -\frac{\alpha}{r} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$$

即库伦势在同位旋基下存在非对角元。

$N\bar{N}$ 交换各种介子和虚光子的总势

$N\bar{N}$ 在同位旋基下相互作用的总势函数为：

$$V(r) = \mathbf{V}_M(r) + \mathbf{V}_C^I(r) = [\mathbf{V}_\pi(r) + \mathbf{V}_\rho(r) + \mathbf{V}_\eta(r) + \mathbf{V}_\phi(r) + \mathbf{V}_\omega(r)] + \mathbf{V}_C^I(r)$$

问题：在实际计算时，是同时考虑交换所有介子的总势 $\mathbf{V}_I(\mathbf{r})$ ？
还是逐次考虑每个介子交换势的效应，然后把所有结果作统计平均？

$N\bar{N}$ 在产生阈附近的散射与湮灭

复势模型是用复数势函数 $U(r)$ 等效地描述 $N\bar{N}$ 系统包括散射和湮灭的相互作用：

$$U(r) = V(r) + iW(r)$$

- **实部 $V(r)$** ：源于 $N\bar{N}$ 交换 π, ρ, σ, η 等传递强相互作用，描述 $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ 的弹性散射过程。
- **虚部 $W(r)$** ：源于 $N\bar{N}$ 相遇后内部夸克和反夸克重新组合并转化为轻介子的湮灭过程； $W(r) < 0$ 表示部分概率流通过虚部描述的“吸收”进入湮灭道的损失，可解释低能 $N\bar{N}$ 总截面往往远大于弹性截面。

薛定谔方程

将复势代入薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r) + U(r) \psi(r) = E \psi(r)$$

其求解出的波函数 $\psi(r)$ 自然包含了散射和湮灭两种效应的结果。

$N\bar{N}$ 相互作用势的同位旋表示汇集

因 $N\bar{N}$ 之间与交换介子和虚光子直接相关的是其同位旋态。把 $N\bar{N}$ 交换各种介子和光子的势函数汇集如下，以便统一写成一个表达式：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\pi(r) &= +\frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}_\rho(r) &= +\frac{g_\rho^2}{4\pi} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\rho r}}{r} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_\eta(r) &= +\frac{g_\eta^2}{4\pi} \frac{m_\eta^2}{16\mu^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\eta r}}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{V}_\phi(r) &= -\frac{g_\phi^2}{4\pi} \frac{m_\phi^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\phi r}}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{V}_\omega(r) &= -\frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{m_\omega^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\phi r}}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{V}_{\gamma^*}^I(r) &= -\frac{\alpha}{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

总交换势矩阵可以写为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_I(r) &= V_\pi(r) + V_\rho(r) + V_\eta(r) + V_\phi(r) + V_\omega(r) + V_{\gamma^*}^I = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} V_1 - \frac{\alpha}{r} & -\frac{\alpha}{r} \\ -\frac{\alpha}{r} & V_0 - \frac{\alpha}{r} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

非对角 $\mathbf{V}_I(r)$ 表示同位旋 I 在电磁作用下不守恒。如忽略库伦作用，只剩强相互作用， $\mathbf{V}_I(r)$ 只有同位旋表示的对角元，同位旋守恒。

注：虽然 $\mathbf{V}_I(r)$ 在数学上四个矩阵元都有库仑项，计算证明通过基矢线性组合物理上保证只有 $p\bar{p}$ 成分感受到库仑力，而 $n\bar{n}$ 不受库仑力影响。

物理基下与同位旋基下势矩阵的关系

$$\mathbf{V}^{phys}(r) = U \mathbf{V}^I(r) U, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger = U$$

计算可得：

$$\mathbf{V}^{phys}(r) = \begin{pmatrix} V_1 + V_0 & V_1 - V_0 \\ V_1 - V_0 & V_1 + V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 + V_0 & 0 \\ 0 & V_1 + V_0 \end{pmatrix}, \quad V_1 = V_0$$

$N\bar{N}$ 相互作用本征态与物理本征态

$N\bar{N}$ 交换介子势函数具有同位旋结构，形成同位旋 $I=1,0$ 二重态本征态。但实验观测的物理态为 $p\bar{p}$ 和 $n\bar{n}$ ，可通过对角化得到两个独立的同位旋道。

将物理基波函数变换到同位旋基波函数：

$$\Phi_I = \begin{pmatrix} \phi_{I=1} \\ \phi_{I=0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{p\bar{p}} \\ \psi_{n\bar{n}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \Psi_{N\bar{N}}$$

作逆变换可得物理本征态：

$$\Psi_{N\bar{N}} = \begin{pmatrix} \psi_{p\bar{p}} \\ \psi_{n\bar{n}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{I=1} \\ \phi_{I=0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \Phi_I$$

$N\bar{N}$ 系统在末态相互作用下的薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Phi_I+V_I(r)\Phi_I=E\Phi_I$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\begin{pmatrix}\phi_{I=1}\\\phi_{I=0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{I=1}\\\phi_{I=0}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\phi_{I=1}\\\phi_{I=0}\end{pmatrix}$$

薛定谔方程求解

对于中心势，波函数可分离变量为：

$$\Phi_I(\vec{r})=\frac{u_l(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

径向波函数满足：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u_l(r)}{dr^2}+\left[V_I(r)+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r)=Eu_l(r)$$

对于s波，方程化为：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u_0(r)}{dr^2}+V_I(r)u_0(r)=Eu_0(r)$$

$u_0(r)$ 为同位旋二重态径向波函数，把势能写为同位旋矩阵形式，计算可得耦合方程组：

$$u_0(r)=\begin{pmatrix}\phi_{I=1}\\\phi_{I=0}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_0\end{pmatrix},\quad\mathbf{V}_I(r)=\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_0\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_0\end{pmatrix}$$

计算可得耦合方程组：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix}$$

将其展开为两个耦合方程：

对于I=1分量波函数：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_1}{dr^2} + V_{11}(r) \phi_{I=1} + V_{12}(r) \phi_0 = E \phi_1$$

对于I=0分量波函数：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_0}{dr^2} + V_{21}(r) \phi_1 + V_{22}(r) \phi_0 = E \phi_0$$

在同位旋基 $|I=1\rangle, |I=0\rangle$ 下，只考虑交换介子的势矩阵 $\mathbf{V}(r)$ 是对角的：

$$\mathbf{V}_I(r) = \begin{pmatrix} V_1(r) & 0 \\ 0 & V_0(r) \end{pmatrix}, \quad (V_{12} = V_{21} = 0)$$

得到两个独立的退耦方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_1}{dr^2} + V_1(r) \phi_1 = E \phi_1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_0}{dr^2} + V_0(r) \phi_0 = E \phi_0$$

只考虑交换介子的强相互作用

忽略库伦相互作用和湮没道时， $N\bar{N}$ 相互作用只是交换介子的作用势：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_I(r) &= [V_\eta(r) + V_\phi(r) + V_\omega(r)] + [V_\pi(r) + V_\rho(r)] \\ &= \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = A(r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + B(r) \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}A(r) &= +\frac{g_\eta^2}{4\pi} \frac{m_\eta^2}{16\mu^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\eta r}}{r} - \frac{g_\phi^2}{4\pi} \frac{m_\phi^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\phi r}}{r} - \frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{m_\omega^2}{m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\phi r}}{r} \\ B(r) &= +\frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} + \frac{g_\rho^2}{4\pi} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\rho r}}{r}\end{aligned}$$

$$V_{11}(r) = A(r) - B(r), \quad V_{22}(r) = A(r) - B(r), \quad V_{12}(r) = -2B(r), \quad V_{21}(r) = -2B(r)$$

总势函数矩阵为：

$$V_I(r) = \begin{pmatrix} A(r) - B(r) & -2B(r) \\ -2B(r) & A(r) - B(r) \end{pmatrix}$$

势函数的对角化

由于 $V_{11}=V_{22}$, $V_{12}=V_{21}$, 矩阵具有对称形式, 可通过酉矩阵对角化。取

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger \quad (\text{实对称})$$

先计算

$$\begin{aligned} V_I(r)U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A(r)-B(r) & -2B(r) \\ -2B(r) & A(r)-B(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A(r)-3B(r) & A(r)+B(r) \\ A(r)-3B(r) & -A(r)-B(r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

再计算

$$\begin{aligned} U^\dagger V_I(r)U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(r)-3B(r) & A(r)+B(r) \\ A(r)-3B(r) & -A(r)-B(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(r)-3B(r) & 0 \\ 0 & A(r)+B(r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

介子交换势对角化后的薛定谔方程

在同位旋基下，波函数为：

$$\Phi(I) = \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_0(r) \end{pmatrix}$$

径向薛定谔方程为：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_0(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1(r) & 0 \\ 0 & V_0(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_0(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_0(r) \end{pmatrix}$$

由于势矩阵是对角的，两个通道完全独立，方程组退化为：

I=1道：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_1(r)}{dr^2} + V_1(r) \phi_1(r) = E \phi_1(r)$$

I=0道：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_0(r)}{dr^2} + V_0(r) \phi_0(r) = E \phi_0(r)$$

只考虑交换 π 时薛定谔方程求解

当只考虑 $N\bar{N}$ 之间交换 $\pi = (\pi^-, \pi^0, \pi^+)$ 时，上面定义的

$$A(r) = 0, \quad B(r) = \frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^{-m_\pi r}}{r}$$

即对角化后：

$$\tilde{V}_I(r) = \begin{pmatrix} V_1(r) & 0 \\ 0 & V_0(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3B(r) & 0 \\ 0 & +B(r) \end{pmatrix}$$

薛定谔方程近似解析解

令

$$f_{\pi} = \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} \frac{m_{\pi}^2}{4m_N^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2), \quad B(r) = f_{\pi} \frac{e^{-m_{\pi}r}}{r}$$

则

$$V_1(r) = -3f_{\pi} \frac{e^{-m_{\pi}r}}{r}, \quad V_0(r) = +1f_{\pi} \frac{e^{-m_{\pi}r}}{r}$$

薛定谔方程组为：

I=1道：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_1(r)}{dr^2} - 3f_{\pi} \frac{e^{-m_{\pi}r}}{r} \phi_1(r) = E \phi_1(r)$$

I=0道：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \phi_0(r)}{dr^2} + f_{\pi} \frac{e^{-m_{\pi}r}}{r} \phi_0(r) = E \phi_0(r)$$

汤川势可用Hulthen势近似

$$\frac{e^{-m_{\pi}r}}{r} \approx \frac{m_{\pi} e^{-m_{\pi}r}}{1 - e^{-m_{\pi}r}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \quad \text{无量纲变量: } x = m_{\pi}r$$

● **I=1道方程化为：**

$$-\frac{d^2 \phi_1}{dx^2} - 2\beta_1 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \phi_1 = \epsilon \phi_1, \quad \beta_1 = \frac{3f_{\pi}\mu}{m_{\pi}}, \quad \epsilon = \frac{2\mu E}{m_{\pi}^2} = \left(\frac{k}{m_{\pi}} \right)^2$$

● **I=0道方程化为：**

$$-\frac{d^2 \phi_0}{dx^2} + 2\beta_0 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \phi_0 = \epsilon \phi_0, \quad \beta_0 = \frac{f_{\pi}\mu}{m_{\pi}}$$

变量代换, 令:

$$y = 1 - e^{-x}, \quad \text{则} \quad e^{-x} = 1 - y, \quad x = -\ln(1 - y), \quad \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - y}{y}$$

导数变换为:

$$\frac{d}{dx} = (1 - y) \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = (1 - y)^2 \frac{d^2}{dy^2} - (1 - y) \frac{d}{dy}$$

• I=1道方程变为:

$$(1 - y)^2 \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} - (1 - y) \frac{d\phi_1}{dy} + \left[\epsilon + 2\beta_1 \frac{1 - y}{y} \right] \phi_1 = 0$$

设试探解:

$$\phi_1(y) = y(1 - y)^{-i\kappa} w(y), \quad \text{其中} \quad \kappa = \sqrt{\epsilon}$$

代入后化为超几何方程:

$$y(1 - y) \frac{d^2 w}{dy^2} + [c - (a + b + 1)y] \frac{dw}{dy} - abw = 0$$

参数为:

$$c = 2, \quad a = 1 - i\kappa + i\sqrt{2\beta_1 - \kappa^2}, \quad b = 1 - i\kappa - i\sqrt{2\beta_1 - \kappa^2}$$

$$\phi_1(r) = N_1 y(1 - y)^{-i\kappa} {}_2F_1(a, b; 2; y), \quad y = 1 - e^{-m_\pi r}$$

• $I=0$ 道方程变为:

$$(1-y)^2 \frac{d^2 \phi_0}{dy^2} - (1-y) \frac{d\phi_0}{dy} + \left[\epsilon - 2\beta_0 \frac{1-y}{y} \right] \phi_0 = 0$$

设:

$$\phi_0(y) = y(1-y)^{-i\kappa} w(y)$$

代入后得到超几何方程, 参数为:

$$c=2, \quad a=1-i\kappa+i\sqrt{2\beta_0-\kappa^2}, \quad b=1-i\kappa-i\sqrt{2\beta_0-\kappa^2}$$

Sommerfeld因子

定义: 存在相互作用与无相互作用时概率密度在原点处的比值:

$$S = \frac{|\psi(0)|^2}{|\psi_{free}(0)|^2}$$

Hulthen势近似:

• $I=1$ 道:

$$S_1 = \frac{2\pi\eta_1}{1-e^{-2\pi\eta_1}}, \quad \eta_1 = \frac{a_1}{v}, \quad a_1 = \frac{2\beta_1}{\pi} = \frac{6f_\pi\mu}{\pi m_\pi}, \quad v = \frac{k}{\mu} \approx \beta$$

• $I=0$ 道:

$$S_0 = \frac{2\pi\eta_0}{e^{2\pi\eta_0} + 1}, \quad \eta_0 = \frac{a_0}{v}, \quad a_0 = \frac{2\beta_0}{\pi} = \frac{2f_\pi\mu}{\pi m_\pi}$$

其中:

$$f_\pi = \frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2}{4m_N^2} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle$$

不同同位旋态下自旋因子的影响

自旋单态($S=0$): $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle = -3$; 自旋三重态($S=1$): $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle = +1$

● 自旋单态, f_π 为负值:

$$I=1 \text{道: } V_1(r) = -3f_\pi \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (\text{排斥} \rightarrow \text{无阈效应})$$

$$I=0 \text{道: } V_0(r) = +f_\pi \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (\text{吸引} \rightarrow \text{有阈效应})$$

● 自旋三重态, f_π 为正值:

$$I=1 \text{道: } V_1(r) = -3f_\pi \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (\text{吸引} \rightarrow \text{有阈效应})$$

$$I=0 \text{道: } V_0(r) = +f_\pi \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (\text{排斥} \rightarrow \text{无阈效应})$$

性质:

- $N\bar{N}$ 间交换 π 的强作用势(有无阈效应)取决于 $N\bar{N}$ 的同位旋和自旋三重态或单态。
- 原则上, 如果实验很精确, 可从拟合实验数据阈效应的强弱推测 $N\bar{N}$ 的同位旋态和自旋态成分比例。

有效Sommerfeld因子

对于 $N\bar{N}$ 系统，实验观测的是物理态 $|p\bar{p}\rangle$ 和 $|n\bar{n}\rangle$ 是 $I=1$ 和 $I=0$ 态的混合：

$$|p\bar{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I=1\rangle + |I=0\rangle)$$

$$|n\bar{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|I=1\rangle - |I=0\rangle)$$

因此，观测到的振幅是 $N\bar{N}$ 两同位旋态的相干叠加：

$$\mathcal{M}_{obs}(p\bar{p}) = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_0})\mathcal{M}_p + (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_0})\mathcal{M}_n \right]$$

$$\mathcal{M}_{obs}(n\bar{n}) = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_0})\mathcal{M}_p + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_0})\mathcal{M}_n \right]$$

物理态的有效Sommerfeld因子为：

$$S_{p\bar{p}}^{eff} = \left| \frac{1}{2}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_0}) \right|^2$$

$$S_{n\bar{n}}^{eff} = \left| \frac{1}{2}(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_0}) \right|^2$$

性质：实验观测的Sommerfeld因子还依赖于系统的自旋态。在非极化实验中，需对自旋单态和三重态进行统计平均。

有效Sommerfeld因子

考虑末态相互作用修正后的实验观测态的截面为：

$$\sigma_{p\bar{p}}^*(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \beta S_{p\bar{p}}^{\text{eff}} \left[|G_M^{p\bar{p}}(s)|^2 + \frac{1}{\tau} |G_E^{p\bar{p}}(s)|^2 \right]$$
$$\sigma_{n\bar{n}}^*(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \beta S_{n\bar{n}}^{\text{eff}} \left[|G_M^{n\bar{n}}(s)|^2 + \frac{1}{\tau} |G_E^{n\bar{n}}(s)|^2 \right]$$

完整考虑散射与湮没时的有效Sommerfeld因子

当求解采用完整的基于手征有效理论拉氏量得到的末态相互作用势求解薛定谔方程，

$$U(r) = V(r) - iW_0\delta(r)$$

并采取某些近似方法时，解析求解薛定谔方程，可以得到总的Sommerfeld因子

$$S_{tot}(s) = S^{eff}(s) \cdot \frac{1}{1 + C(s)W_0^2}$$

其中， $C(s)$ 是包含各参数的正定的解析函数：

$$C(s) = \frac{\sinh^2(2\pi/m_\pi \sqrt{M_N \alpha_\pi - k^2}) (\pi M_N / m_\pi^2 \sqrt{M_N \alpha_\pi - k^2})}{[\cosh(2\pi/m_\pi \sqrt{M_N \alpha_\pi - k^2}) - \cos(2\pi k / m_\pi)]^2}$$

小结

- 实验上测量核子-反核子产生截面的阈效应的目的是要从物理(理论)上去理解它;
- 核子-反核子产生截面的阈效应的强作用因素可统一地由有效手征理论描述和计算;
- 要把弹性散射道、非弹性散射道及湮没道同时考虑;
- 从实验测量数据拟合核子-反核子截面阈效应应该考虑 $p\bar{p}$ 和 $n\bar{n}$ 耦合道效应。