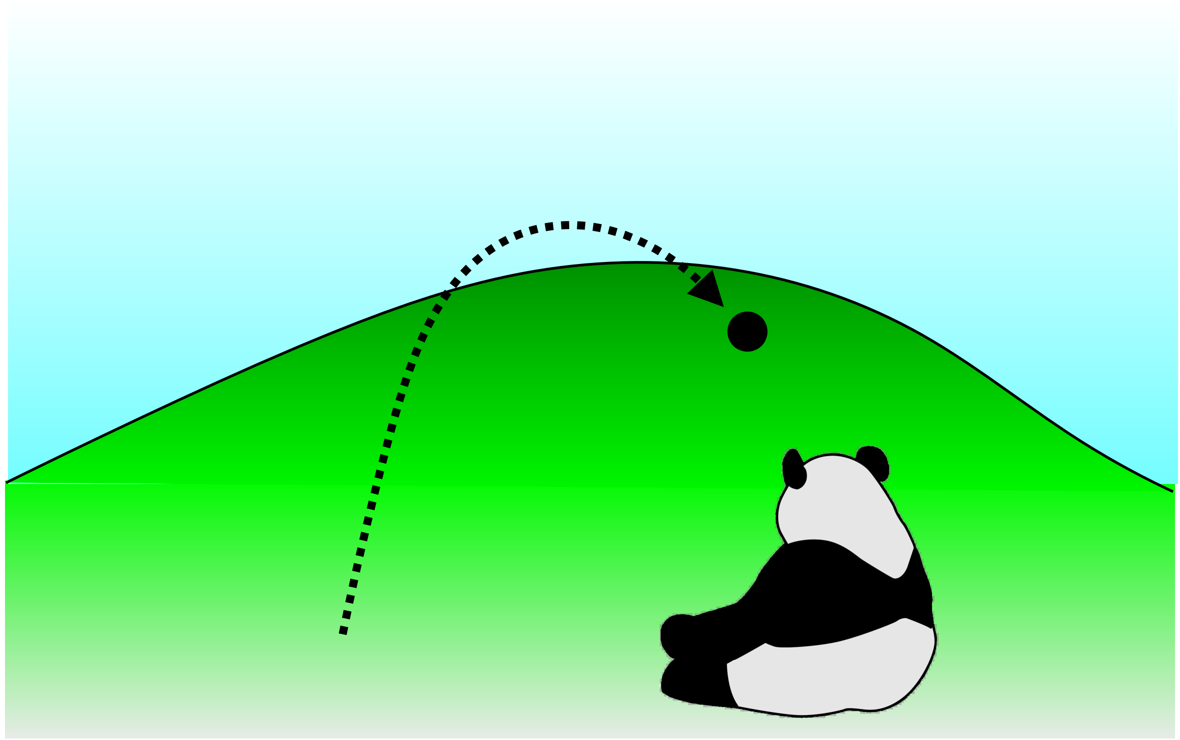
从电磁学开始
電磁気学から始めます



$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

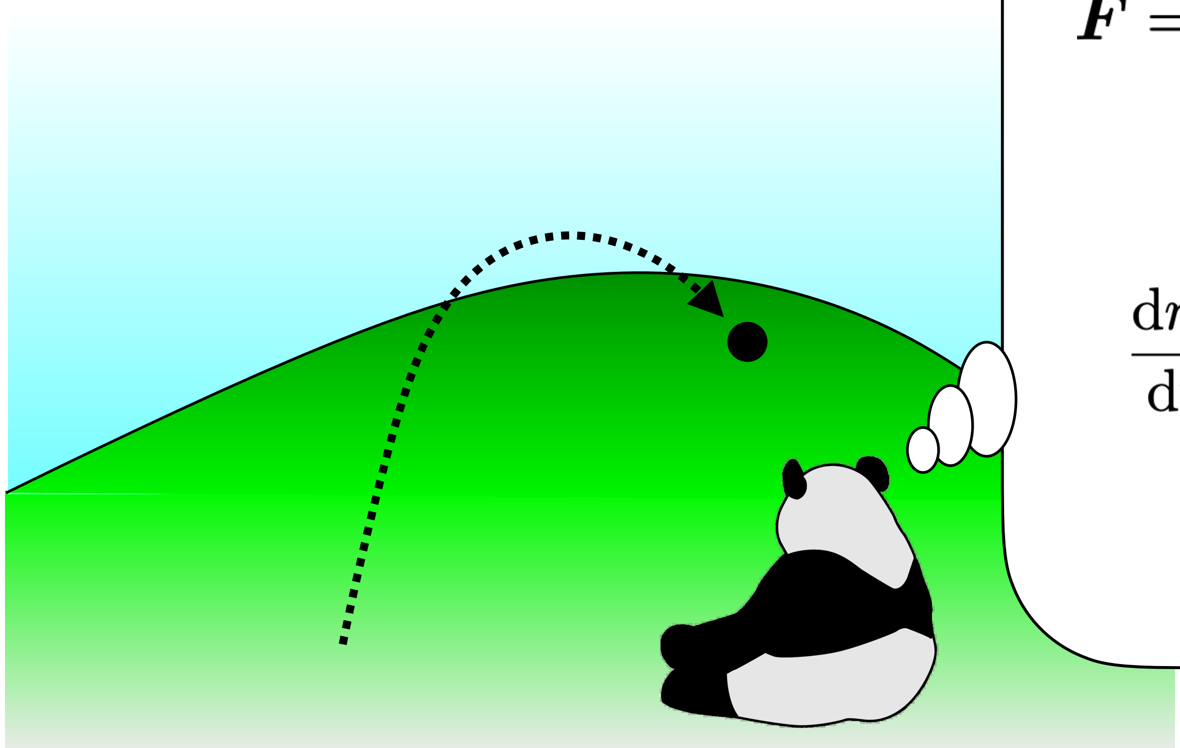
力　質量

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{wind}}\right)$$

重力　空気抵抗?

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ?$$

α は定数?



公理

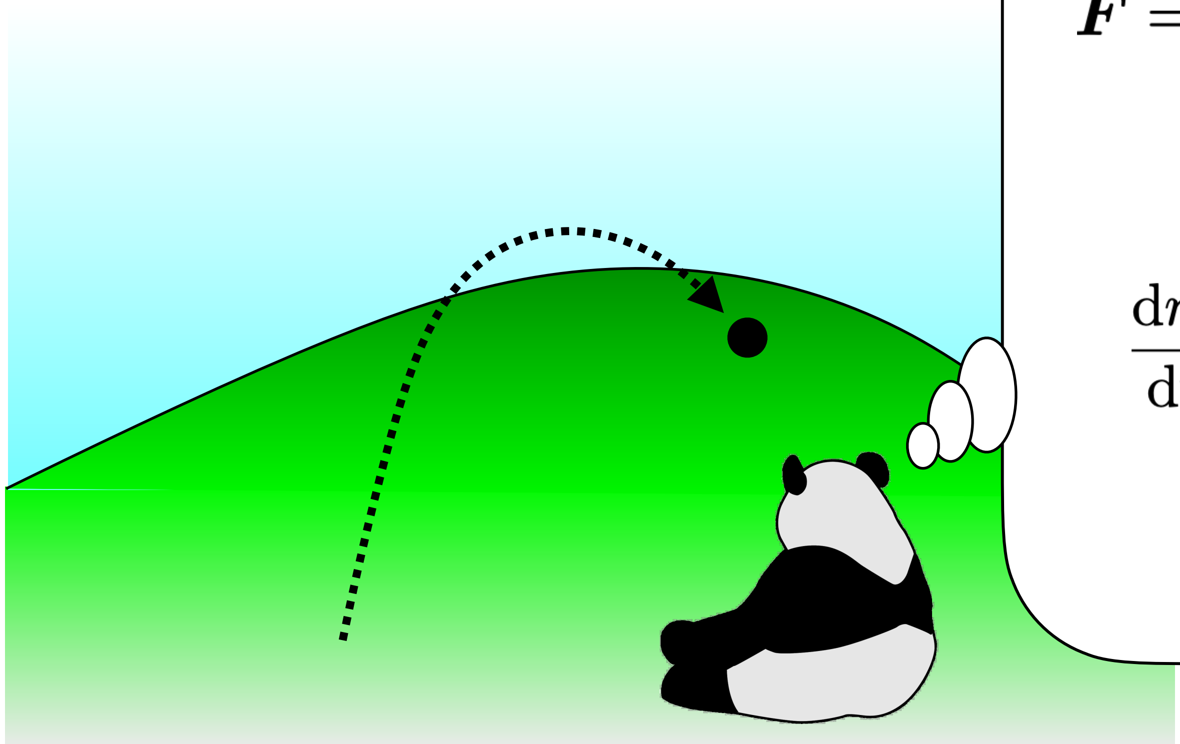
推論

定理

推論

推論

定理



$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

力　　質量

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{wind}}\right)$$

重力　　空気抵抗?

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ?$$

α は定数?

$$\begin{tikzcd} & \text{原理} \arrow[dl, "\text{数学}"'] \arrow[dd, "\text{数学}"] \\ \text{法則} \arrow[dr, "\text{数学}"'] & \\ & \text{予測} \end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

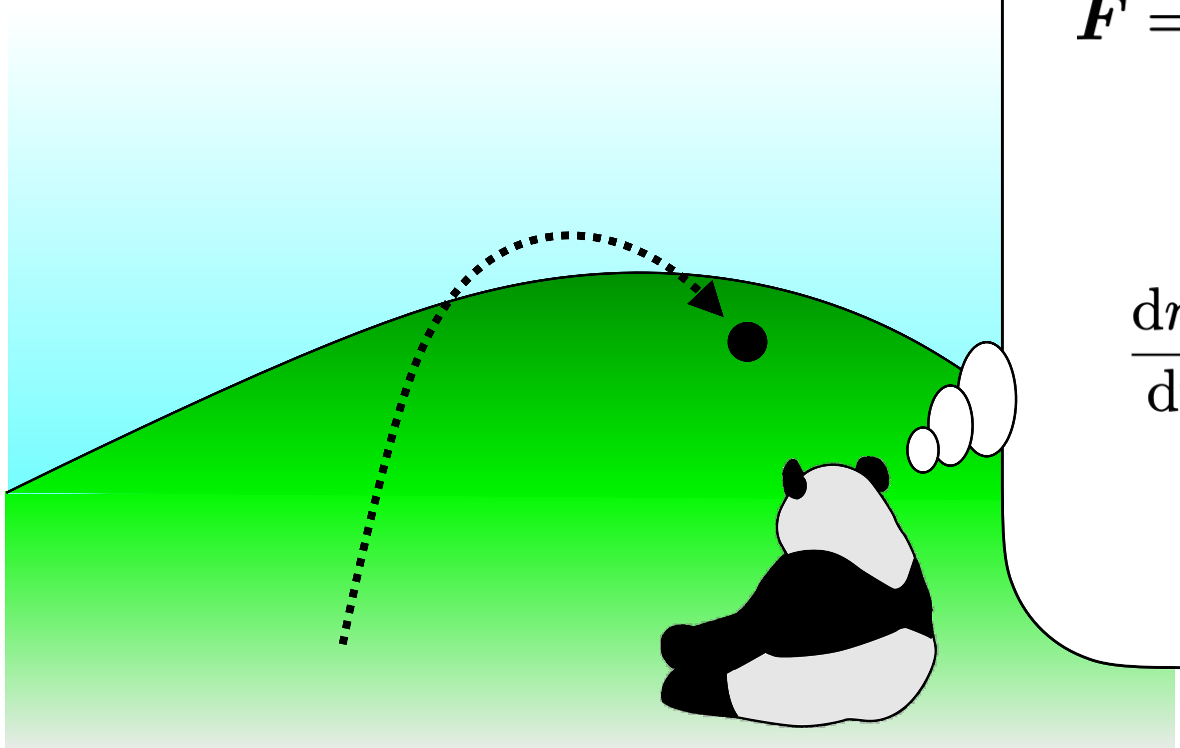
力　　質量

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{wind}}\right)$$

重力　　空気抵抗?

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ?$$

α は定数?



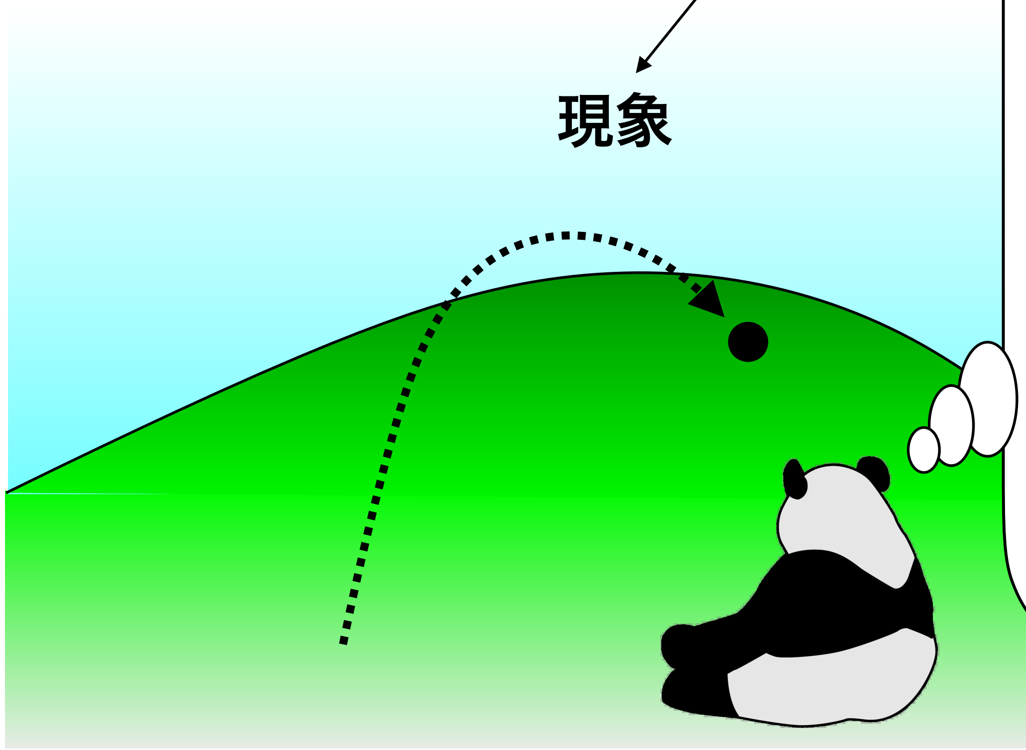
原理

数学 → 法則

数学 → 予測（原理から）

法則 → 数学 → 予測

予測 ↔ 現象



$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

力　　質量

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{wind}}\right)$$

重力　　空気抵抗?

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ?$$

α は定数?

発見？

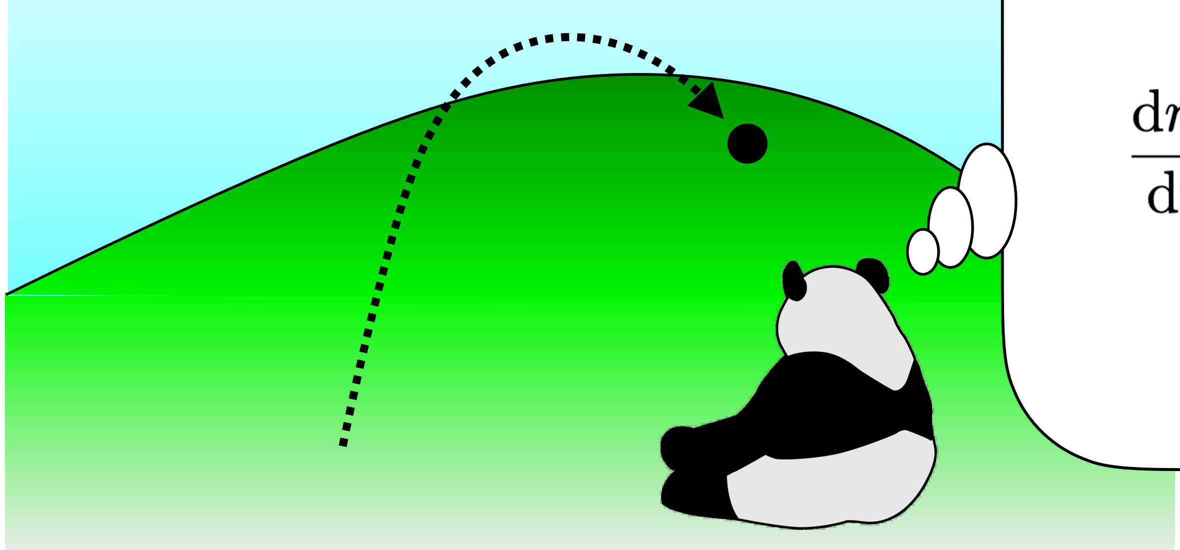
原理

数学 → 法則

数学 → 予測

原理 → 予測（数学）

予測 ↔ 現象



$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

力　　質量

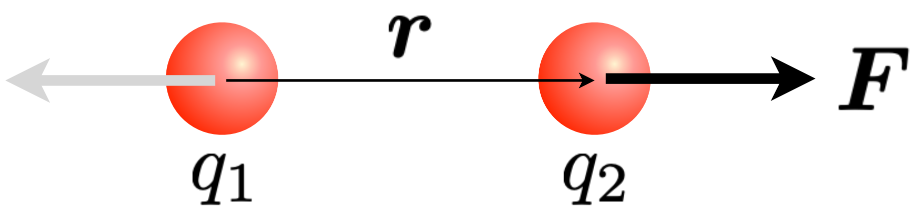
$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{wind}}\right)$$

重力　　空気抵抗?

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ?$$

α は定数?

库仑定律
クーロンの法則



$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\boxed{4\pi}\boxed{\varepsilon}} \frac{q_1 q_2}{r^3} \boldsymbol{r}$$

介电常数
誘電率

真空介电常数
真空の誘電率

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} [\mathrm{C^2 N^{-1} m^{-2}}]$$

真空导磁率
真空の透磁率

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\mathrm{Wb^2\, N^{-1}\, m^{-2}}]$$

真空中的光速
真空中の光速度

$$c = 299792458\, [\mathrm{m\, s^{-1}}]$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

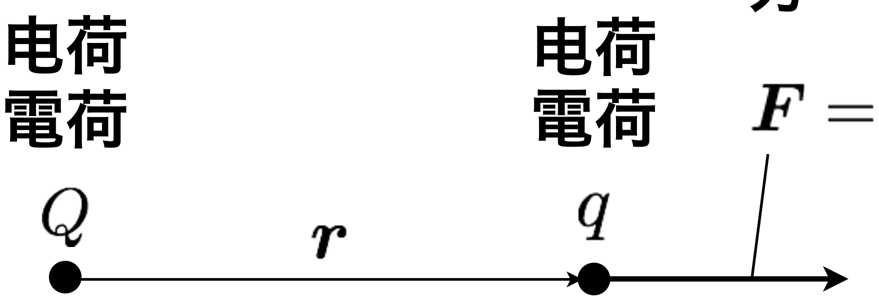
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9876 \times 10^9\, [\mathrm{N\, m^2\, C^{-2}}]$$

查尔斯・奥古斯丁・德・库仑
シャルル-オーギュスタン・ド・クーロン
Charles-Augustin de Coulomb

1736/06/14-1806/08/23

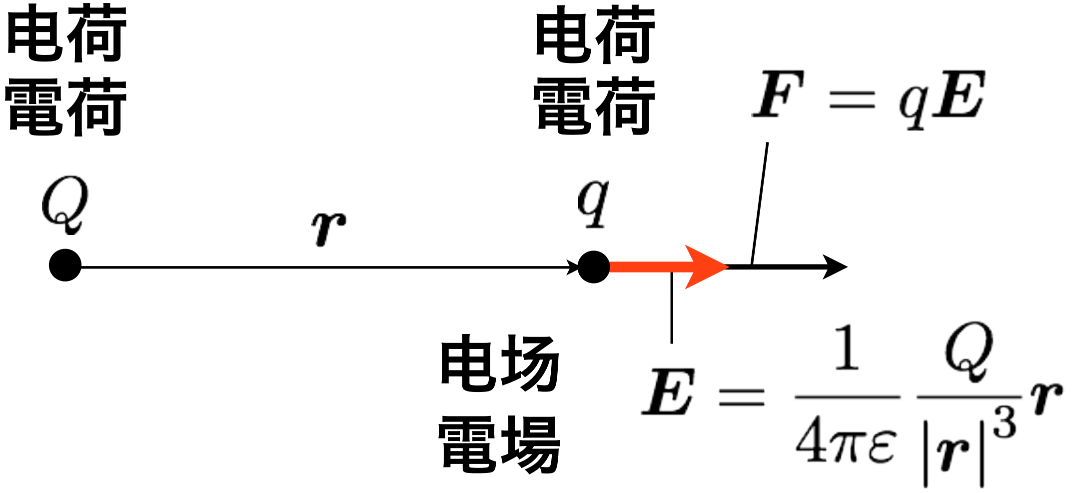
电场
電場
electric field

场 場 (Field)



$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

场 場 (Field)

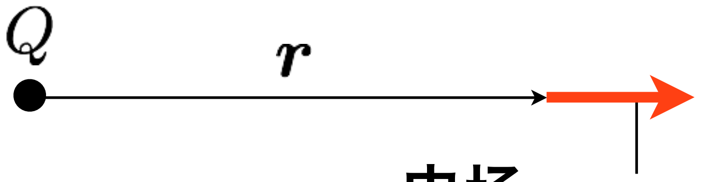


力(Force)=荷(Charge)×场(Field)

力(Force)=荷(Charge)×場(Field)

场 場 (Field)

电荷
電荷



电场
電場

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

电荷 ⟷ 电场 → 电力=电荷×电场
電荷 ⟷ 電場 → 電気力=電荷×電場

电荷
電荷

$$\boxed{\boldsymbol{F}} = \boxed{q} \boxed{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}$$

电力 电荷 电场

電気力 電荷 電場

力 = 荷 × 场

力 = 荷 × 場

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

场的叠加
場の重ね合わせ

(点电荷集合)
(点電荷のあつまり)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

(连续分布电荷)
(分布した電荷)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

电荷密度
電荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r}) \quad [\mathrm{C\,m^{-3}}]$$

约翰・卡尔・弗里德里希・高斯

ヨハン・カール・フリードリヒ・ガウス

Johann Carl Friedrich Gauss

-

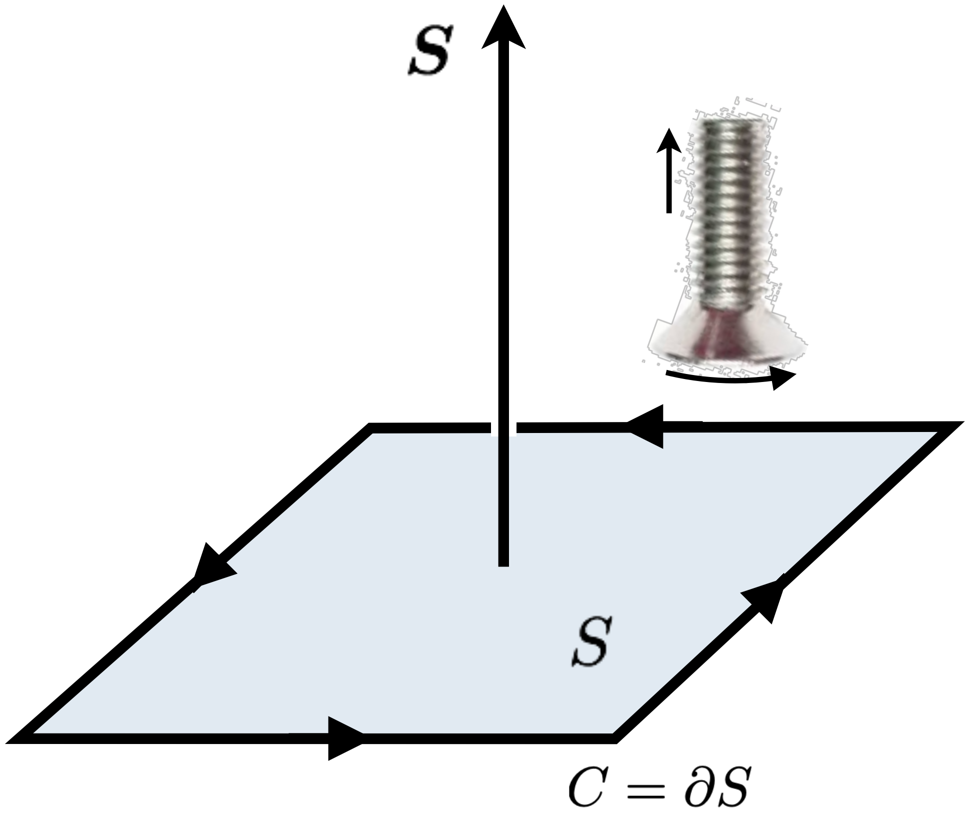
Gaussの定理

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \int_{S=\partial V}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

高斯定理(积分形式)
ガウスの法則(積分形)

面積ベクトル

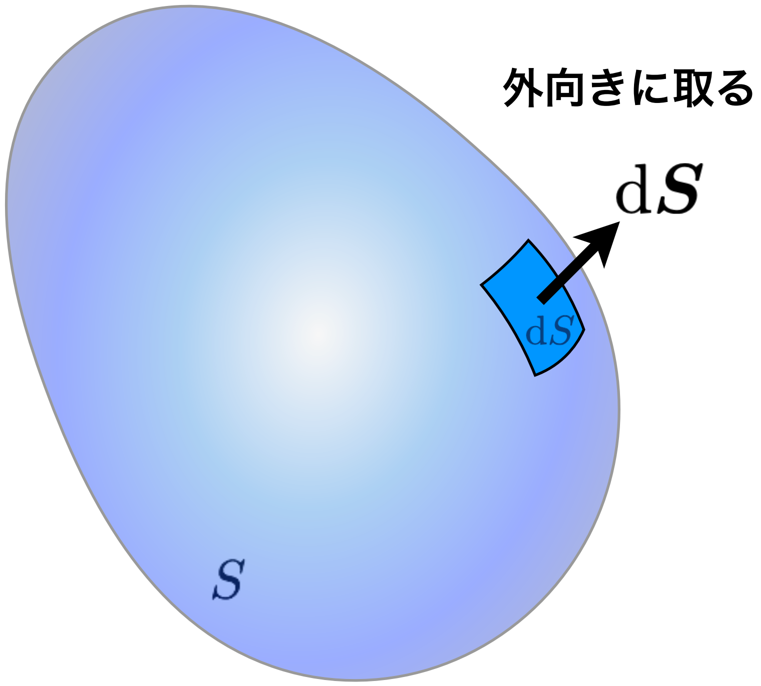
$\boldsymbol{S}$ は S に垂直で長さが S の面積に等しい



辺縁を周回する向きを定義し

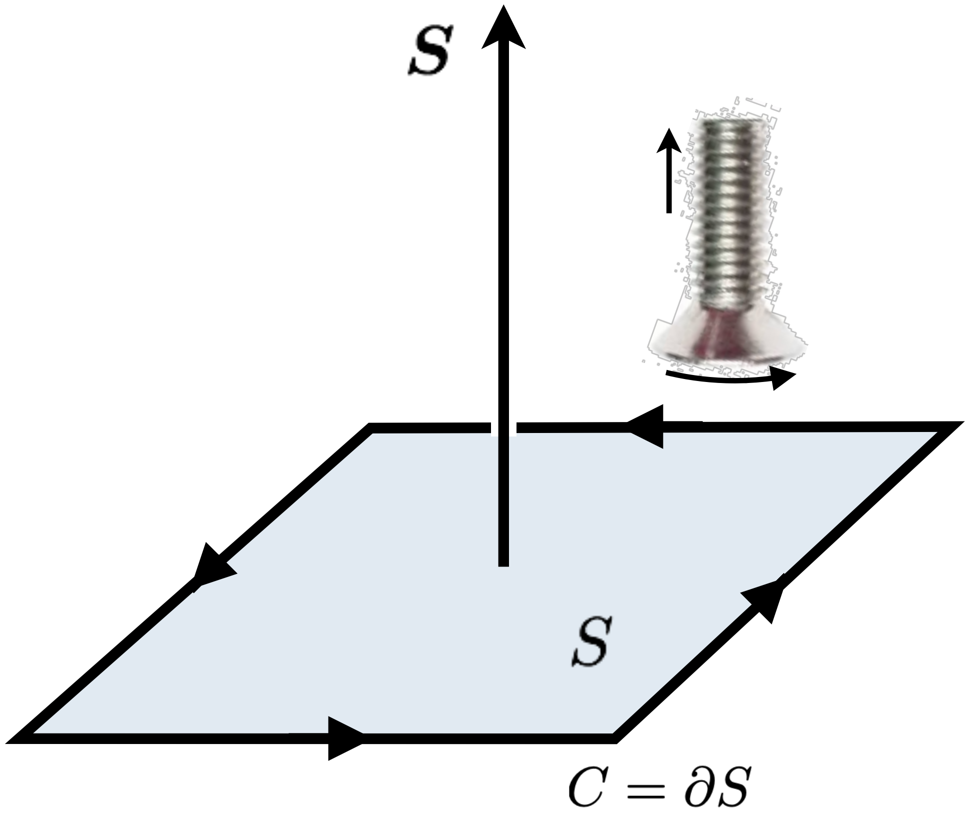
右ねじの進行方向に取るのが標準的

S が閉曲面の場合



面積ベクトル

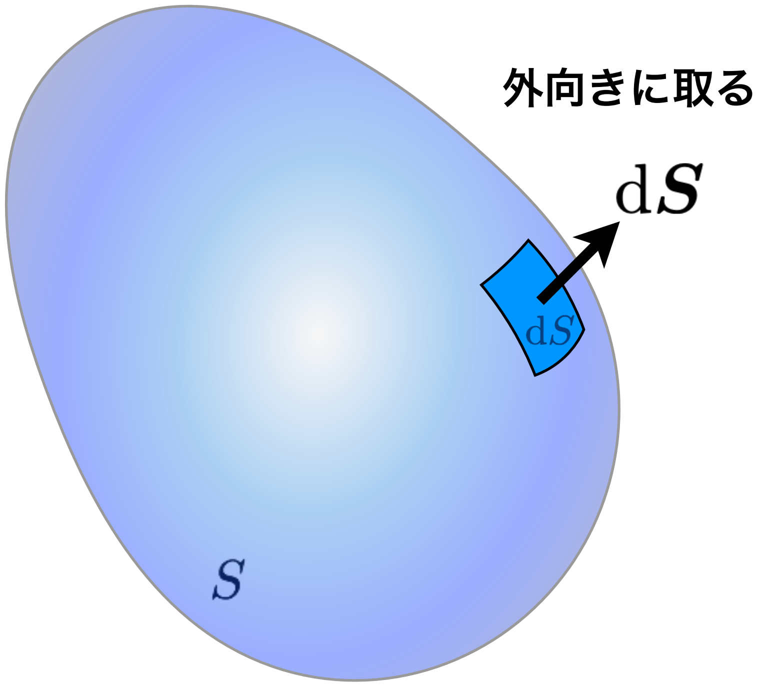
$\boldsymbol{S}$ は S に垂直で長さが S の面積に等しい



辺縁を周回する向きを定義し

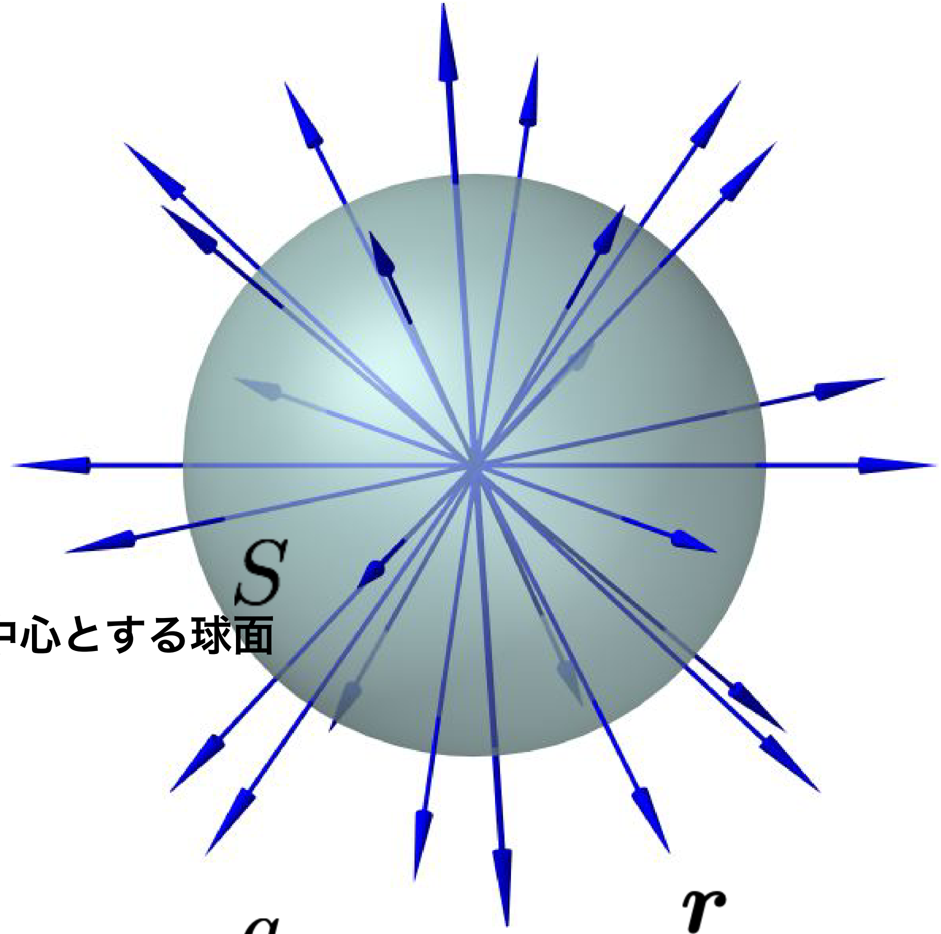
右ねじの進行方向に取るのが標準的

S が閉曲面の場合



ガウスの法則　Gauss' law

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$



$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

球面に垂直な成分の合計　　電荷

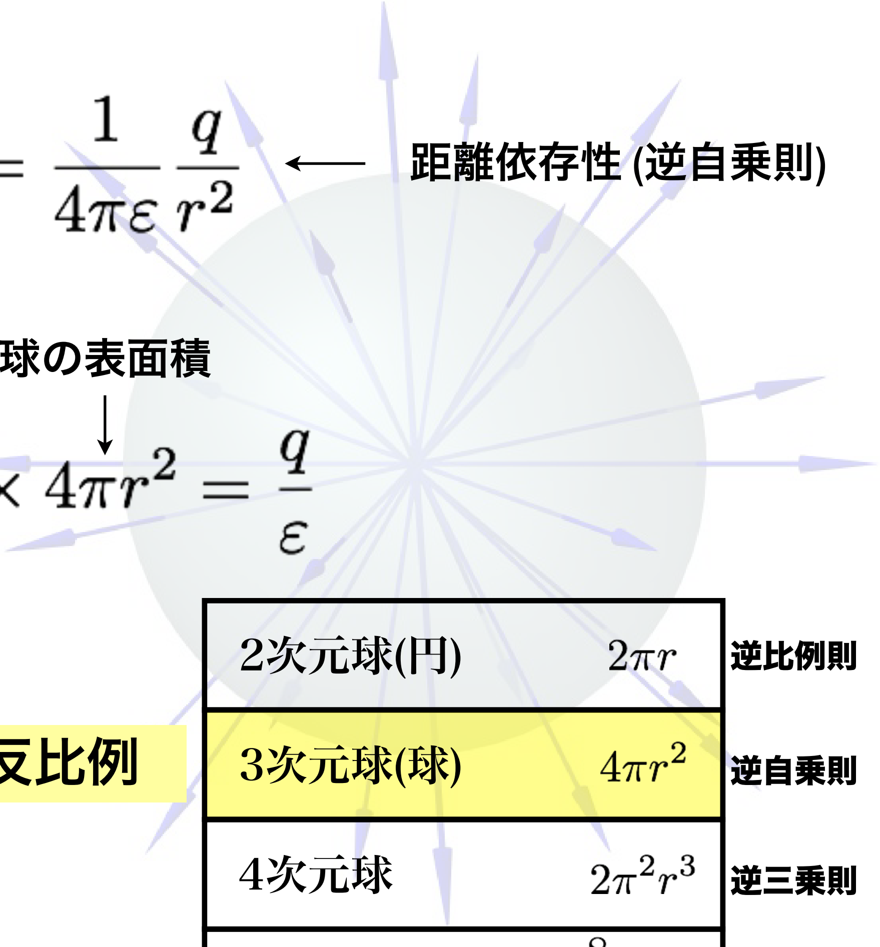
$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

球面に垂直な単位ベクトル

ガウスの法則　Gauss' law



$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r} \longleftrightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$ ← 距離依存性 (逆自乗則)

球の表面積

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon} \longleftrightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon}$$

余談ですが、　N次元だったら...

空間が3次元だから、力が距離の自乗に反比例

N次元球の表面積　$S_N = \frac{\quad}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} r^{N-1}$

偶数次元　$S_{2n} = \frac{2\pi^n}{\Gamma(n)} r^{2n-1} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!} r^{2n-1}$

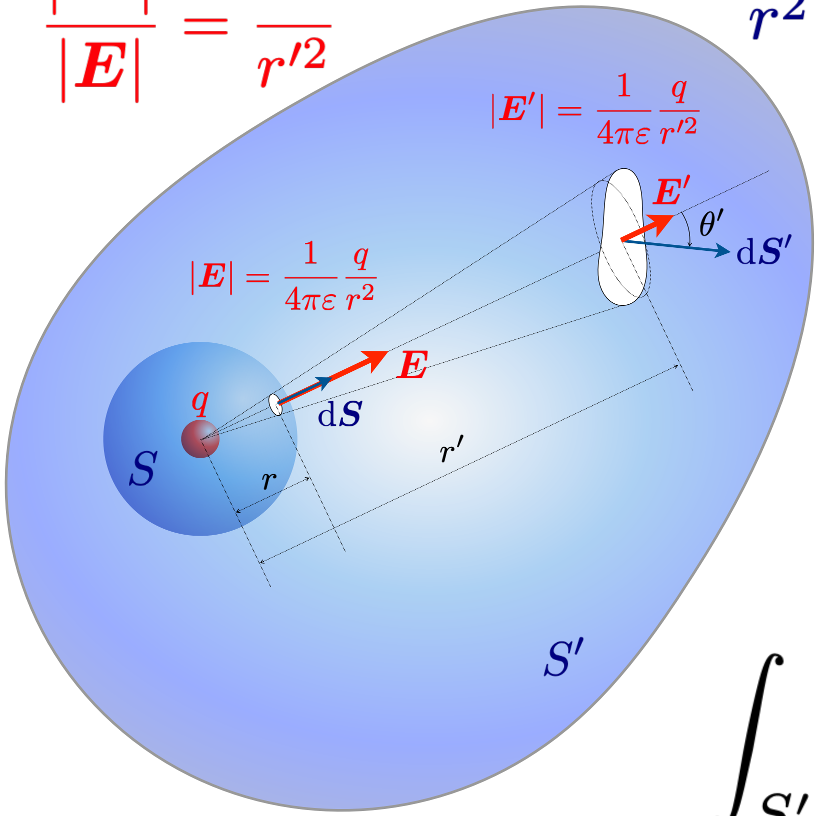
奇数次元　$S_{2n+1} = \frac{2\pi^n\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)} r^{2n} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n-1)!!} r^{2n}$

2次元球(円) $2\pi r$		逆比例則
3次元球(球)	$4\pi r^2$	逆自乗則
4次元球	$2\pi^2 r^3$	逆三乗則
5次元球	$\frac{8}{3}\pi^2 r^4$	逆四乗則
6次元球	$\pi^3 r^5$	逆五乗則

ガウスの法則

$$\frac{|\boldsymbol{E}'|}{|\boldsymbol{E}|} = \frac{r^2}{r'^2}$$

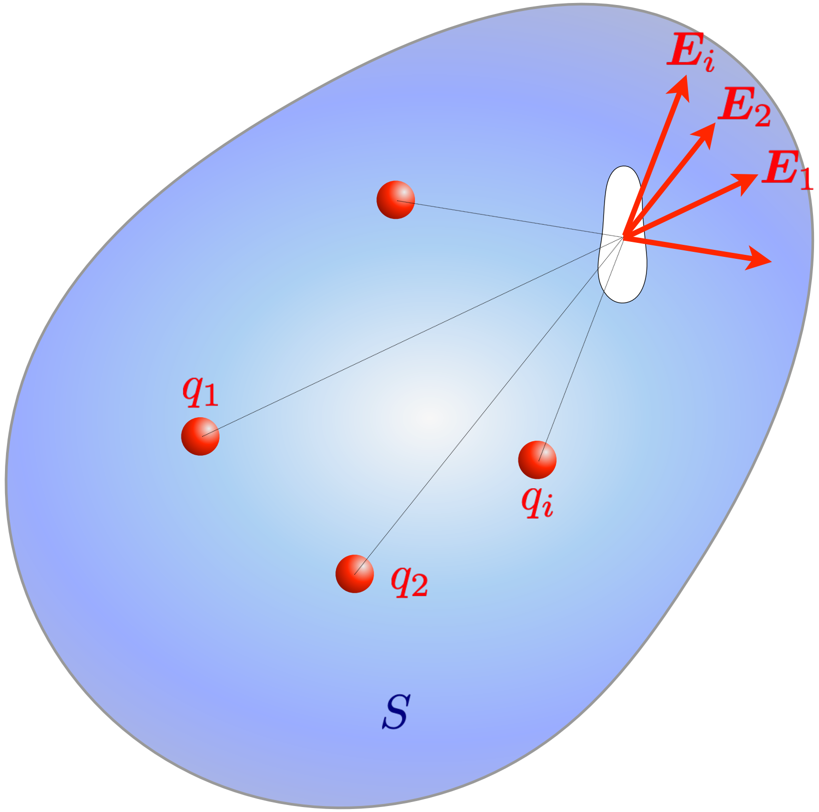
$$\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{S}|}{r^2} = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{S}'|\ \cos\theta'}{r'^2}$$



$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}' &= |\boldsymbol{E}'|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{S}'|\ \cos\theta' \\ &= |\boldsymbol{E}'|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{S}|\,\frac{r'^2}{r^2} \\ &= \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

$$\int_{S'}\boldsymbol{E}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}' = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

ガウスの法則



$$\int_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q_1}{\varepsilon}$$

$$\int_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q_2}{\varepsilon}$$

$$\vdots$$

$$\int_S \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q_i}{\varepsilon}$$

$$\vdots$$

$$\int_S \sum_i \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \qquad q = \sum_i q_i$$

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

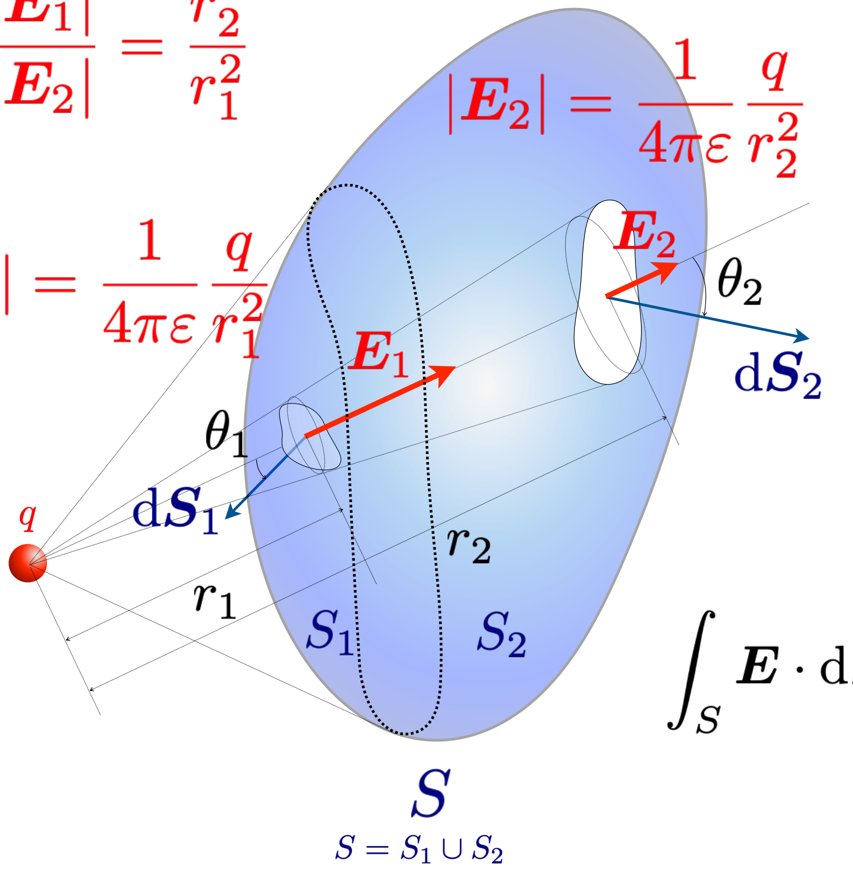
ガウスの法則

$$\frac{|\boldsymbol{E}_1|}{|\boldsymbol{E}_2|} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$|\boldsymbol{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_2^2}$$

$$|\boldsymbol{E}_1| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_1^2}$$

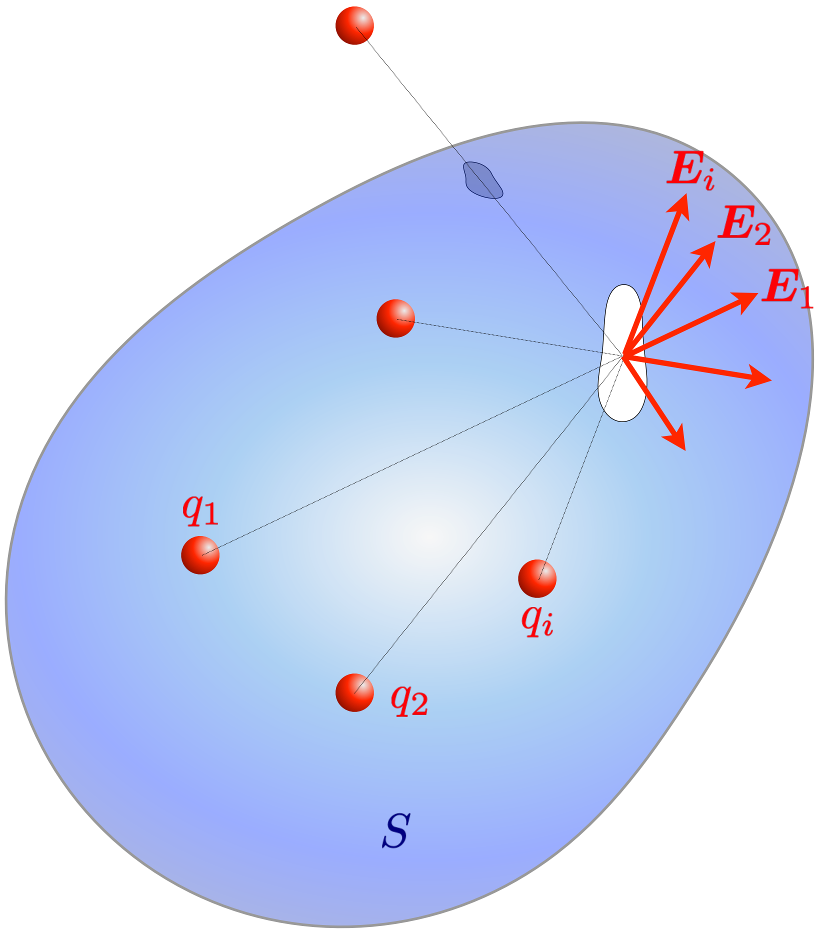
$$\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1|\cos\theta_1}{r_1^2} = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2|\cos\theta_2}{r_2^2}$$



$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = -\boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$$

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{S_1} \boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \int_{S_2} \boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \\ &= \int_{S_1} \boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 - \int_{S_1} \boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

ガウスの法則

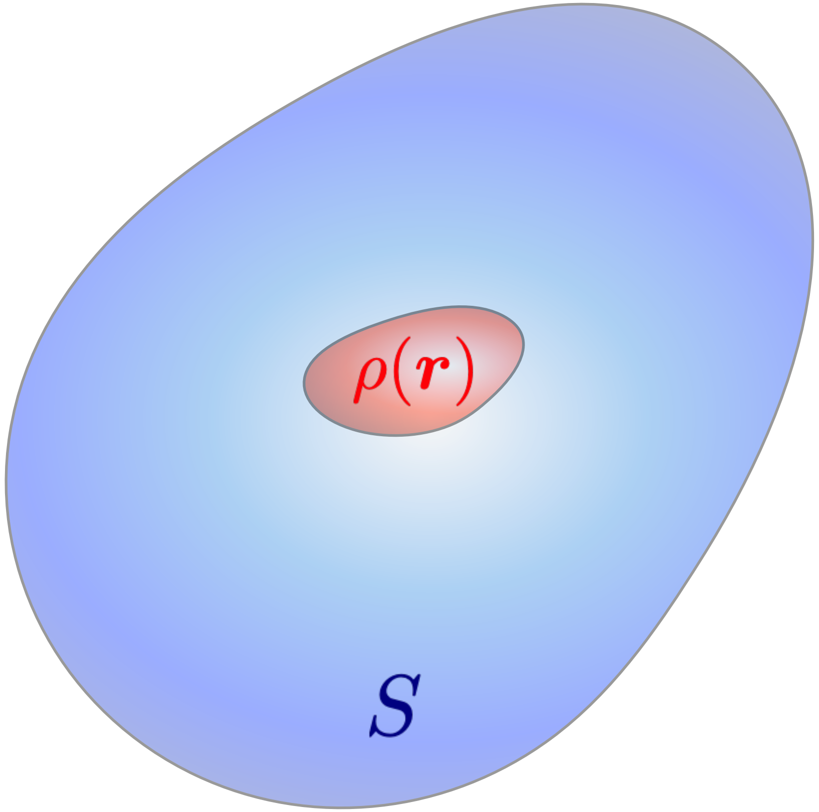


Sで囲まれた領域における和

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \qquad \boxed{q = \sum_i{}' q_i}$$

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

ガウスの法則



$$S = \partial V$$

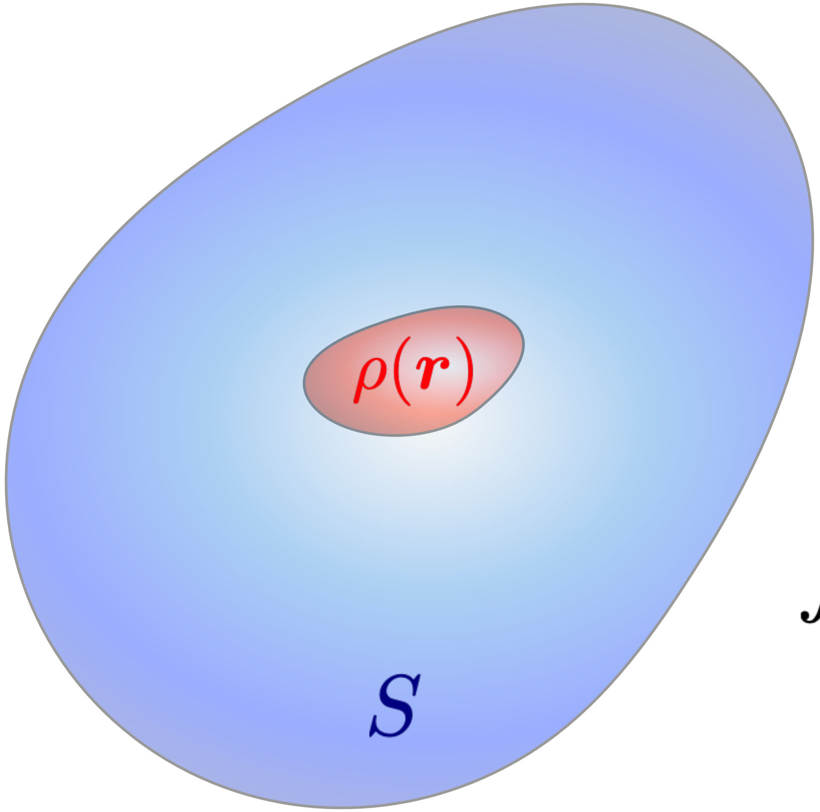
Sで囲まれた体積Vに含まれる電荷

$$\int_{S=\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V$$

Sは体積Vの表面

高斯定理(微分形式)
ガウスの法則(微分形)

ガウスの法則



$$V = \partial S$$

Sで囲まれた体積Vに含まれる電荷

$$\int_{S=\partial V} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

Sは体積Vの表面

$$= \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V$$ ガウスの定理

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

任意の体積Vで成立する

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ガウスの法則 Gauss' law

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ガウスの法則 Gauss' law

電荷密度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

発散

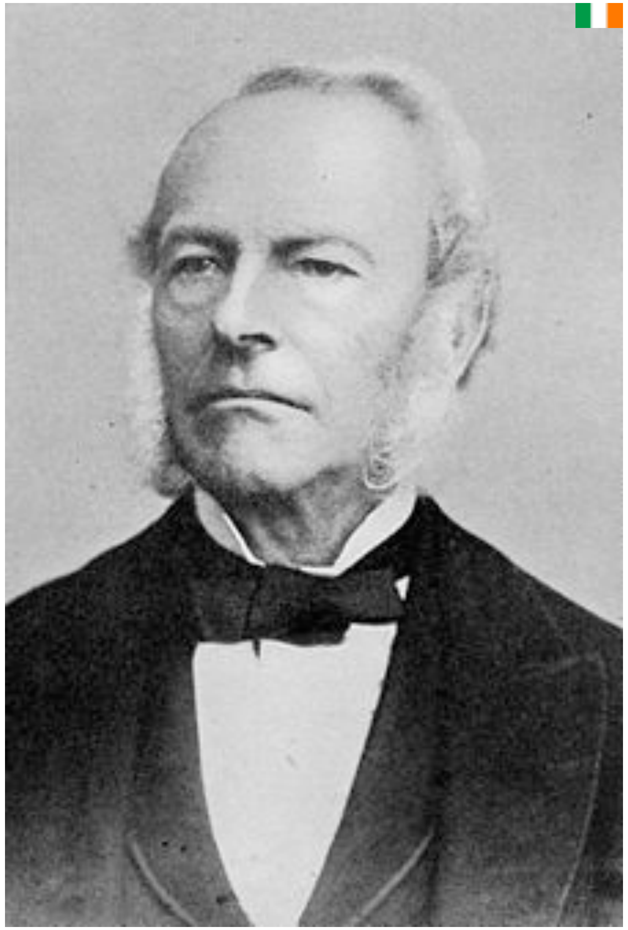
電場

誘電率

乔治・加布里埃尔・斯托克斯

ジョージ・ガブリエル・ストークス

Sir George Gabriel Stokes



-

Stokesの定理

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{S} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

电势
電場のポテンシャル

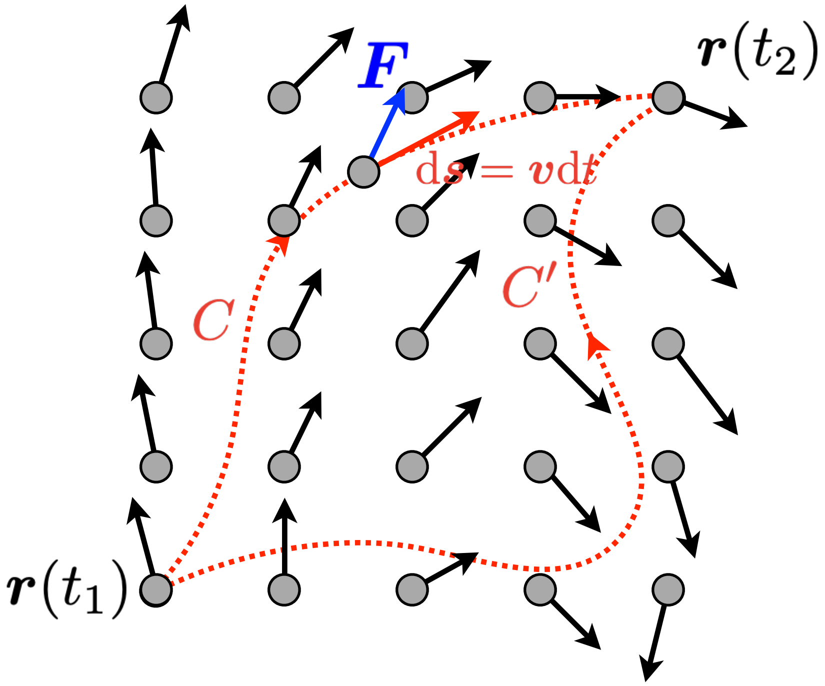
保存力 (保守力)

運動方程式 $$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

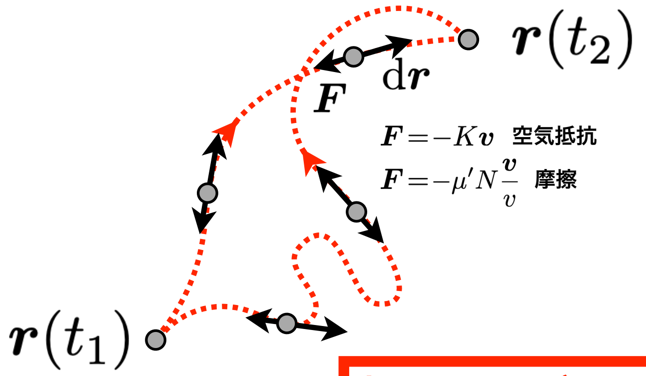
Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$$ 右辺はこう書ける

時間で積分する $$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$



$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \overset{!?}{=} \int_{C'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$



熱エネルギーに逃げる

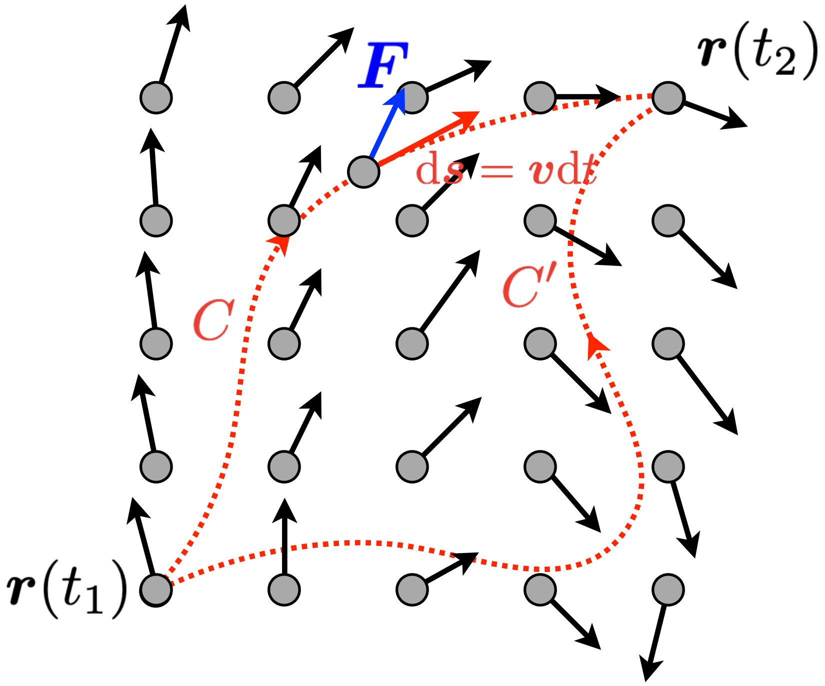
逃逸成热能

保存力 (保守力)

運動方程式 $$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$ Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$$ 右辺はこう書ける

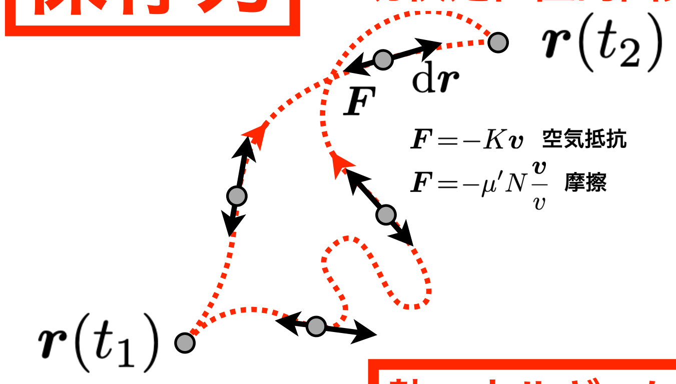
時間で積分する $$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$



$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \overset{!?}{=} \int_{C'} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

保存力

仕事が位置だけの関数
功仅是位置的函数



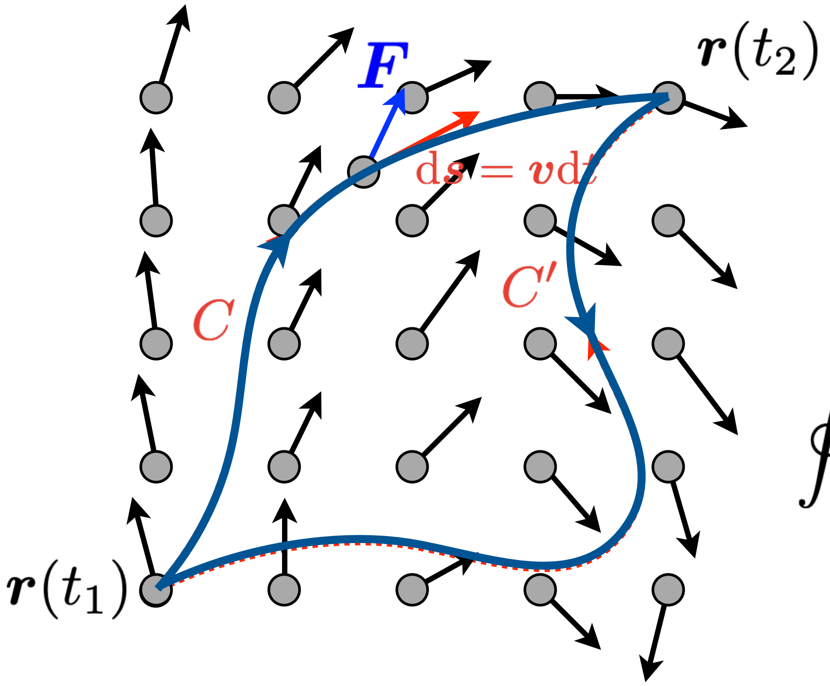
熱エネルギーに逃げる
逃逸成热能

保存力 (保守力)

運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$ 右辺はこう書ける

時間で積分する $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$



$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

保存力

仕事が位置だけの関数
功仅是位置的函数

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_{C'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

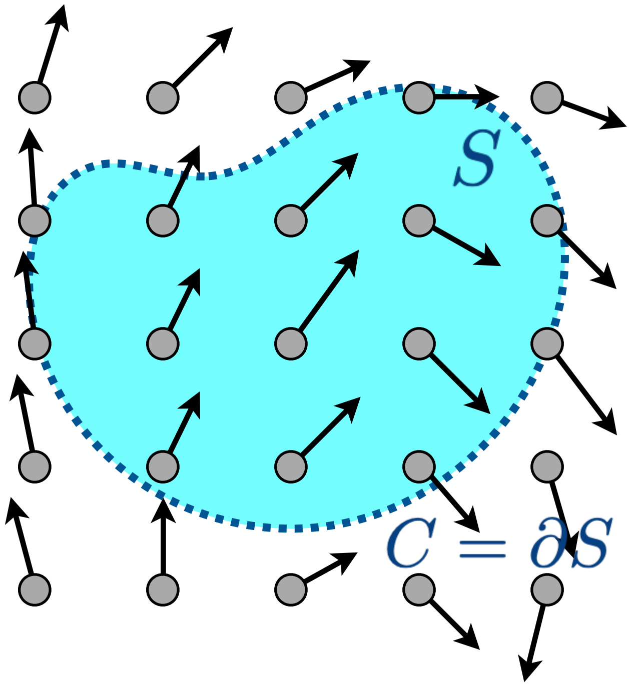
保存力 (保守力)

運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $\boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{m}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$ 右辺はこう書ける

時間で積分する $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$



$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$\boxed{\text{保存力}}$

仕事が位置だけの関数
功仅是位置的函数

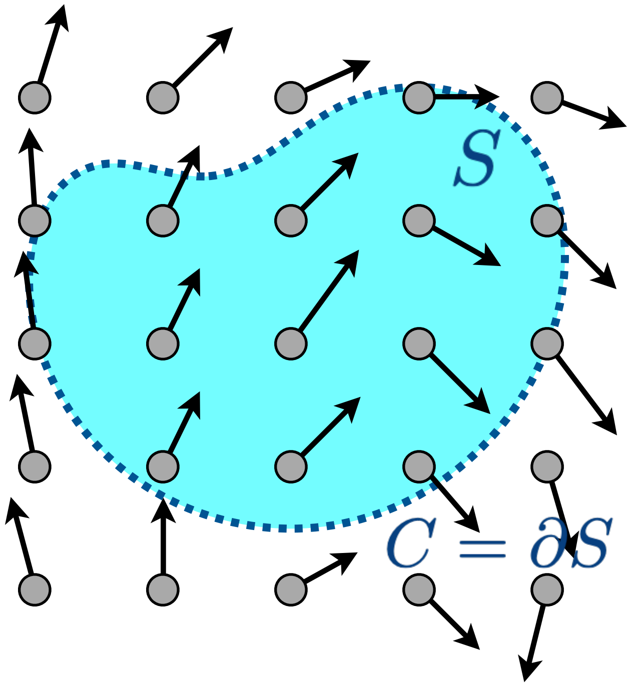
$$\oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C=\partial S}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_{C'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

保存力 (保守力)

運動方程式 $$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$ Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$$ 右辺はこう書ける

時間で積分する $$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$



$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$\boxed{\text{保存力}}$

仕事が位置だけの関数
功仅是位置的函数

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C=\partial S}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$$

保存力 (保守力)

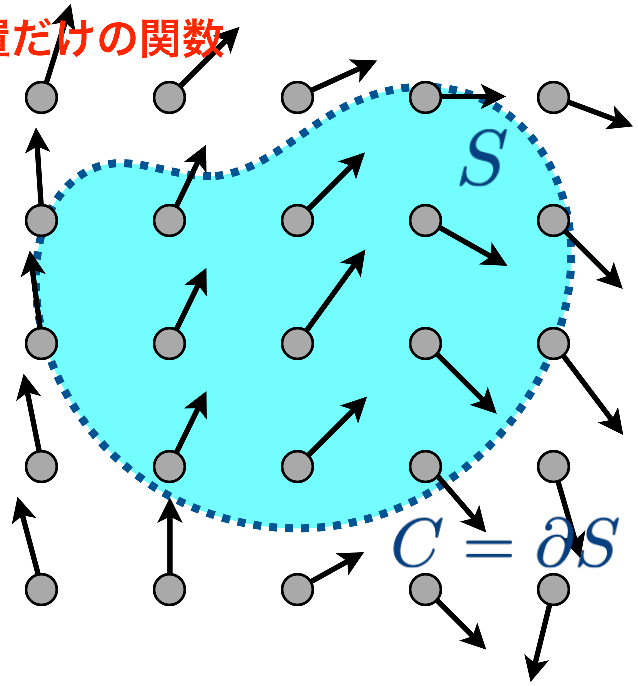
運動方程式 $$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$$ 右辺はこう書ける

時間で積分する $$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$

仕事が位置だけの関数



$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

仕事が位置だけの関数

保存力

$$\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C=\partial S}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

保存力 (保守力)

運動方程式 $$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$ Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$$ 右辺はこう書ける

時間で積分する $$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$

仕事が位置だけの関数
功仅是位置的函数

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

ここで $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ とおくと $-U(\boldsymbol{r}_2) + U(\boldsymbol{r}_1) = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$

$\boldsymbol{r}_0$ 定ベクトル(基準点)

すると $$\frac{m}{2}v_2^2 + U(\boldsymbol{r}_2) = \frac{m}{2}v_1^2 + U(\boldsymbol{r}_1)$$ ← 時間が経っても変化しない (不会随时间改变)
保存する (守恒)

$$E = \underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{\text{運動エネルギー (动能)}} + \underbrace{U(\boldsymbol{r})}_{\text{位置エネルギー (位能)}}$$ をエネルギー(能量)と定義する
这被定义为能量

保存力 (保守力)

運動方程式 $$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$ Fはrのみの関数とする
F 仅是 r 的函数

両辺に速度をかける $$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$$ 右辺はこう書ける

時間で積分する $$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(v(t'))^2\mathrm{d}t' = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$

仕事が位置だけの関数
功仅是位置的函数

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

ここで $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ とおくと $-U(\boldsymbol{r}_2) + U(\boldsymbol{r}_1) = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$

$\boldsymbol{r}_0$ 定ベクトル(基準点)

由于这个参考点是人类任意决定的，因此物理定律不应该取决于这个参考点是如何选择的。

保存する (守恒)

$$E = \frac{m}{2}v^2 + U(\boldsymbol{r})$$ をエネルギー(能量)と定義する
这被定义为能量

運動エネルギー
(动能)

位置エネルギー
(位能)

ガウスの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

電位の定義

potential

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$(\nabla \cdot \nabla)\,\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

ラプラシアン Laplacian

線形演算子

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\triangle \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

ポアソン方程式

Poisson's equation

$$\triangle \phi = 0$$

ラプラス方程式

Laplace's equation

非斉次方程式 (non-homogeneous equation)

斉次方程式 (homogeneous equation)

假设泊松方程有两个解
ポアソン方程式の解が二つ見つかったとする

由于拉普拉斯算子是线性算子，因此两者之差就是拉普拉斯方程的解
ラプラシアンは線形演算子なので、両者の差はラプラス方程式の解である

$$\triangle\phi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \triangle\phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \triangle(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_0$$

非斉次方程式の一般解
(general solution of a non-homogeneous equation)

特解
(particular solution)

斉次方程式の一般解
(general solution of a homogeneous equation)

泊松方程的解是泊松方程的一个解与拉普拉斯方程的通解之和
ポアソン方程式の解 は ポアソン方程式のある一つの解 と ラプラス方程式の一般解 の 和 で尽くされる

所以，我们首先求拉普拉斯方程的通解
そこで、まずラプラス方程式の一般解を求めることから始める

拉普拉斯方程
ラプラス方程式

$$\triangle\phi = 0$$ ラプラス方程式

Laplace's equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$ を満たす $\phi(x, y, z)$ を求める

$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ とおけるものと仮定する

代入すると $$Y(y)Z(z)\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + X(x)Z(z)\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + X(x)Y(y)\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}}}_{K_x} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}}}_{-K_x} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = K_x \qquad \underbrace{\boxed{\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}}}_{K_y} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}}}_{K_z} = -K_x$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = K_y \qquad \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = K_z$$

$$K_x + K_y + K_z = 0$$

$$\Delta\phi = 0$$

ラプラス方程式

Laplace's equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$ を満たす $\phi(x,y,z)$ を求める

$$\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$ とおけるものと仮定する

代入すると

$$Y(y)Z(z)\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + X(x)Z(z)\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + X(x)Y(y)\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}}}_{K_x} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}}}_{-K_x} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = K_x$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}}}_{K_y} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Z(z)}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}}}_{K_z} = -K_x$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = K_y \qquad \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = K_z$$

$$K_x + K_y + K_z = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = K_x$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = K_y$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = K_z$$

$$\triangle\phi = 0$$ ラプラス方程式

Laplace's equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$ を満たす $\phi(x,y,z)$ を求める

$\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ とおけるものと仮定する

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = K_x \qquad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - K_xX = 0 \qquad \lambda_x^2 - K_x = 0 \qquad \begin{array}{l}\lambda_x = ik_x\\ k_x^2 = -K_x\end{array} \qquad X = A_xe^{ik_xx} + B_xe^{-ik_xx}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = K_y \qquad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} - K_yY = 0 \qquad \lambda_y^2 - K_y = 0 \qquad \begin{array}{l}\lambda_y = ik_y\\ k_y^2 = -K_y\end{array} \qquad Y = A_ye^{ik_yy} + B_ye^{-ik_yy}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = K_z \qquad \frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} - K_zZ = 0 \qquad \lambda_z^2 - K_z = 0 \qquad \begin{array}{l}\lambda_z = ik_z\\ k_z^2 = -K_z\end{array} \qquad Z = A_ze^{ik_zz} + B_ze^{-ik_zz}$$

$$\phi = \sum_{\substack{k_x,k_y,k_z\\ k_x^2+k_y^2+k_z^2=0}} \left(A_x(k_x)e^{ik_xx} + B_x(k_x)e^{-ik_xx}\right)\left(A_y(k_y)e^{ik_yy} + B_y(k_y)e^{-ik_yy}\right)\left(A_z(k_z)e^{ik_zz} + B_z(k_z)e^{-ik_zz}\right)$$

変数分離法 variable separation method

$$\boxed{\triangle}\phi = 0$$ ラプラス方程式

直交座標 Laplace's equation

球面座標で解く

△を球面座標で表す

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}\phi = 0$$ を満たす $\phi(x, y, z)$ を求める

$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ とおけるものと仮定する

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = K_x \qquad \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - K_x X = 0 \qquad \lambda_x^2 - K_x = 0 \qquad \begin{array}{l}\lambda_x = ik_x \\ k_x^2 = -K_x\end{array} \qquad X = A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = K_y \qquad \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} - K_y Y = 0 \qquad \lambda_y^2 - K_y = 0 \qquad \begin{array}{l}\lambda_y = ik_y \\ k_y^2 = -K_y\end{array} \qquad Y = A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = K_z \qquad \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} - K_z Z = 0 \qquad \lambda_z^2 - K_z = 0 \qquad \begin{array}{l}\lambda_z = ik_z \\ k_z^2 = -K_z\end{array} \qquad Z = A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}$$

$$\phi = \sum_{\substack{k_x, k_y, k_z \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0}} \left(A_x(k_x)e^{ik_x x} + B_x(k_x)e^{-ik_x x}\right)\left(A_y(k_y)e^{ik_y y} + B_y(k_y)e^{-ik_y y}\right)\left(A_z(k_z)e^{ik_z z} + B_z(k_z)e^{-ik_z z}\right)$$

変数分離法 variable separation method

$$\nabla\phi = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\boldsymbol{e}_x = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{e}_y = \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\nabla\phi = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{e}_r + A_\theta \boldsymbol{e}_\theta + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta A_\theta \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi$$

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = -\boldsymbol{e}_r$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = -\sin\theta\,\boldsymbol{e}_r - \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\boldsymbol{e}_r - \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = \boldsymbol{0} \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot\left(A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\right) \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + A_r\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r}(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta) + A_\theta\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\varphi) + A_\varphi\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}(\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_r) + \frac{A_r}{r}\boldsymbol{e}_\theta\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{A_\theta}{r}\boldsymbol{e}_\theta\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}(\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\varphi) + \frac{A_\varphi}{r}\boldsymbol{e}_\theta\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta} \\
&\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}(\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_r) + \frac{A_r}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}(\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\theta) + \frac{A_\theta}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi} \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r\sin\theta}\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + 2\frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\, A_\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rA_\theta\right)\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\, A_\varphi\right)\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)\boldsymbol{e}_\varphi
$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad && \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta \quad && \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi \\
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r \quad && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi \\
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = \boldsymbol{0} \quad && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = \boldsymbol{0} \quad && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}$$

$$\nabla \phi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \cdot (A_r \boldsymbol{e}_r + A_\theta \boldsymbol{e}_\theta + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi) \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + A_r \boldsymbol{e}_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r}(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta) + A_\theta \boldsymbol{e}_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\varphi) + A_\varphi \boldsymbol{e}_r \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}(\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_r) + \frac{A_r}{r}\boldsymbol{e}_\theta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r}\boldsymbol{e}_\theta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}(\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi) + \frac{A_\varphi}{r}\boldsymbol{e}_\theta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} \\
&\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}(\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_r) + \frac{A_r}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}(\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\theta) + \frac{A_\theta}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r\sin\theta}\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + 2\frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}A_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\, A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(rA_\theta)\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, A_\varphi)\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}A_r\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$A_r \to \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad A_\theta \to \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad A_\varphi \to \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\Delta\phi = 0$$

ラプラス方程式
Laplace's equation

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

を満たす $\phi(r,\theta,\varphi)$ を求める

$\phi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$ とおいて代入する

$$Y\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+R\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+R\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}=0$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}}_{=\mu}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}}}_{=-\mu}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\mu R$$

$$R=r^\alpha\xrightarrow[\mathrm{d}/\mathrm{d}r]{}\alpha r^{\alpha-1}\xrightarrow[\times r^2]{}\alpha r^{\alpha+1}\xrightarrow[\mathrm{d}/\mathrm{d}r]{}\alpha(\alpha+1)r^\alpha=\mu r^\alpha$$

$$R=r^{-\alpha-1}\xrightarrow[\mathrm{d}/\mathrm{d}r]{}-(\alpha+1)r^{-\alpha-2}\xrightarrow[\times r^2]{}-(\alpha+1)r^{\alpha}\xrightarrow[\mathrm{d}/\mathrm{d}r]{}\alpha(\alpha+1)r^{-\alpha-1}=\mu r^{-\alpha-1}$$

$$R=A_Rr^\alpha+B_R\frac{1}{r^{\alpha+1}}\qquad \alpha(\alpha+1)=\mu$$

$$\triangle\phi = 0$$ ラプラス方程式

Laplace's equation

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

を満たす $\phi(r,\theta,\varphi)$ を求める

$\phi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$ とおいて代入する

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}}_{=\alpha(\alpha+1)}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}}_{=-\alpha(\alpha+1)}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2}R=0 \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\alpha(\alpha+1)Y=0$$

$$R=A_R r^\alpha+B_R\frac{1}{r^{\alpha+1}} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\alpha(\alpha+1)\sin^2\theta\, Y+\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0$$

$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ とおくと

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\alpha(\alpha+1)\sin^2\theta}}_{=\nu}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}}}_{=-\nu}=0$$

$$\Delta\phi = 0$$ ラプラス方程式

Laplace's equation

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

を満たす $\phi(r,\theta,\varphi)$ を求める

$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ とおいて代入する

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}}_{=\alpha(\alpha+1)} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}}_{=-\alpha(\alpha+1)} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2}R = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \alpha(\alpha+1)Y = 0$$

$$R = A_R r^\alpha + B_R\frac{1}{r^{\alpha+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \alpha(\alpha+1)\sin^2\theta\, Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0$$

$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ とおくと

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \alpha(\alpha+1)\sin^2\theta}}_{=\nu} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}}}_{=-\nu} = 0$$

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$ とおくと

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\alpha(\alpha+1)\sin\theta}}_{=\nu}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}}}_{=-\nu}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\nu\Phi=0 \qquad \Phi=A_\Phi e^{i\sqrt{\nu}\varphi}+B_\Phi e^{-i\sqrt{\nu}\varphi}$$

$$\Phi(\varphi+2\pi)=A_\Phi e^{i\sqrt{\nu}\varphi}e^{2\pi\sqrt{\nu}i}+B_\Phi e^{-i\sqrt{\nu}\varphi}e^{-2\pi\sqrt{\nu}i}$$

$$\Phi(\varphi)=A_\Phi e^{i\sqrt{\nu}\varphi}+B_\Phi e^{-i\sqrt{\nu}\varphi}$$

$$e^{2\pi i\sqrt{\nu}}=1$$

$$\sqrt{\nu}=0,1,2,\ldots$$

$$\Phi=A_\Phi e^{im\varphi}+B_\Phi e^{-im\varphi} \qquad \sqrt{\nu}\to m \quad (m=0,1,2,\ldots)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\alpha(\alpha+1)\sin\theta-m^2\right)\Theta=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{\sin\theta}\right)\Theta=0$$

$$x=\cos\theta$$ とおくと $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$ Legendre陪微分方程式

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$ **Legendre陪微分方程式**

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)\Theta=0$$ **Legendre微分方程式**

$$\Theta=P_\alpha(x)$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha=0$$

$$-2x\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha}{\mathrm{d}x^2}+(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P'_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}P_\alpha}{\mathrm{d}x}-2x\frac{\mathrm{d}P'_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P'_\alpha=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P'_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-4x\frac{\mathrm{d}P'_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P'_\alpha-2P'_\alpha=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P''_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P''_\alpha}{\mathrm{d}x}-4x\frac{\mathrm{d}P''_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P''_\alpha-2P''_\alpha-4P''_\alpha=0$$

$$P_\alpha^{(m)}=\frac{\mathrm{d}^mP_\alpha}{\mathrm{d}x^m}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(1)}}{\mathrm{d}x^2}-2(1+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(1)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(1)}-2P_\alpha^{(1)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(2)}}{\mathrm{d}x^2}-2(1+1+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(2)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(2)}-2(1+2)P_\alpha^{(2)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x^2}-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(m)}-2\frac{m(m+1)}{2}P_\alpha^{(m)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$ Legendre陪微分方程式

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)\Theta=0$$ Legendre微分方程式

$$\Theta=P_\alpha(x)$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha=0$$

$$P_\alpha^{(m)}=\frac{\mathrm{d}^mP_\alpha}{\mathrm{d}x^m}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x^2}-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(m)}-2\frac{m(m+1)}{2}P_\alpha^{(m)}=0$$

$$-2x\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha}{\mathrm{d}x^2}+(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P'_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}P_\alpha}{\mathrm{d}x}-2x\frac{\mathrm{d}P'_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P'_\alpha=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P'_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-4x\frac{\mathrm{d}P'_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P'_\alpha-2P'_\alpha=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P''_\alpha}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P''_\alpha}{\mathrm{d}x}-4x\frac{\mathrm{d}P''_\alpha}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P''_\alpha-2P''_\alpha-4P''_\alpha=0$$

$$P_\alpha^{(m)}=\frac{\mathrm{d}^mP_\alpha}{\mathrm{d}x^m}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(1)}}{\mathrm{d}x^2}-2(1+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(1)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(1)}-2P_\alpha^{(1)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(2)}}{\mathrm{d}x^2}-2(1+1+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(2)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(2)}-2(1+2)P_\alpha^{(2)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x^2}-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(m)}-2\frac{m(m+1)}{2}P_\alpha^{(m)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$ **Legendre陪微分方程式**

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)\Theta=0$$ **Legendre微分方程式**

$$P_\alpha^{(m)}=\frac{\mathrm{d}^m P_\alpha}{\mathrm{d}x^m}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x^2}-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(m)}-2\frac{m(m+1)}{2}P_\alpha^{(m)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x^2}-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x}+(\alpha(\alpha+1)-m(m+1))P_\alpha^{(m)}=0$$

$$P_\alpha^{(m)}(x)=(1-x^2)^\beta y$$

$$(4\beta^2x^2-2\beta-2\beta x^2)y-4\beta(1-x^2)xy'+(1-x^2)^2y''-2(m+1)(1-x^2)xy'$$
$$+4\beta(m+1)x^2y+(\alpha(\alpha+1)-m(m+1))(1-x^2)y=0$$

$\beta=-\dfrac{m}{2}$ **とおくと**

$$(1-x^2)^2y''+2m(1-x^2)xy'-2(m+1)(1-x^2)xy'+\alpha(\alpha+1)(1-x^2)y-m^2y=0$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

P_α **が Legendre微分方程式をみたすならば** $(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_\alpha$ **は Legendre陪微分方程式をみたす**

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$ Legendre陪微分方程式

P_α が Legendre微分方程式をみたすならば $(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_\alpha$ は Legendre陪微分方程式をみたす

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)\Theta=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)y=0$$ Legendre微分方程式

$$P_\alpha^{(m)}=\frac{\mathrm{d}^mP_\alpha}{\mathrm{d}x^m}\qquad (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x^2}-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)P_\alpha^{(m)}-2\frac{m(m+1)}{2}P_\alpha^{(m)}=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x^2}-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}P_\alpha^{(m)}}{\mathrm{d}x}+(\alpha(\alpha+1)-m(m+1))P_\alpha^{(m)}=0$$

$$P_\alpha^{(m)}(x)=(1-x^2)^\beta y$$

$$(4\beta^2x^2-2\beta-2\beta x^2)y-4\beta(1-x^2)xy'+(1-x^2)^2y''-2(m+1)(1-x^2)xy'$$
$$+4\beta(m+1)x^2y+(\alpha(\alpha+1)-m(m+1))(1-x^2)y=0$$

$\beta=-\dfrac{m}{2}$ とおくと

$$(1-x^2)^2y''+2m(1-x^2)xy'-2(m+1)(1-x^2)xy'+\alpha(\alpha+1)(1-x^2)y-m^2y=0$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

P_α が Legendre微分方程式をみたすならば $(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_\alpha$ は Legendre陪微分方程式をみたす

P_α が Legendre微分方程式をみたすならば　$(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_\alpha$ は Legendre陪微分方程式をみたす

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)y=0$$

Legendre微分方程式

冪級数を用いた解法　$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n_0+n}$ とおいて代入

$$\sum_n a_n(n_0+n)(n_0+n-1)x^{n_0+n-2}-\sum_n a_n\left((n_0+n)(n_0+n-1)+2(n_0+n)-\alpha(\alpha+1)\right)x^{n_0+n}=0$$

係数比較　x^{n_0-2} が最低次　$a_0 n_0(n_0-1)=0$　$a_{n+2}=\dfrac{(n_0+n)(n_0+n+1)-\alpha(\alpha+1)}{(n_0+n+1)(n_0+n+2)}a_n$

$$n_0=0\qquad a_{n+2}=-\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

$$n_0=1\qquad a_{n+2}=-\frac{(\alpha-n-1)(\alpha+n+2)}{(n+2)(n+3)}a_n$$

$$y_1=1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4-\cdots$$

$$y_2=x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5-\cdots$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=1+x^2+x^4+\cdots\neq 0$$

y_1とy_2は線形独立

$y=a_1y_1+a_2y_2$ が一般解　　$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n_0+n}$ という形の中での一般解

P_α が Legendre微分方程式をみたすならば $(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_\alpha$ は Legendre陪微分方程式をみたす

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)y=0$$ Legendre微分方程式

冪級数を用いた解法 $y=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n_0+n}$ とおいて代入

$$\sum_n a_n(n_0+n)(n_0+n-1)x^{n_0+n-2}-\sum_n a_n\left((n_0+n)(n_0+n+1)-\alpha(\alpha+1)\right)x^{n_0+n}=0$$

$n_0=0 \quad a_{n+2}=-\dfrac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad n_0=1 \quad a_{n+2}=-\dfrac{(\alpha-n-1)(\alpha+n+2)}{(n+2)(n+3)}a_n$

係数比較 x^{n_0-2} が最低次 $a_0n_0(n_0-1)=0$ $\quad a_{n+2}=\dfrac{(n_0+n)(n_0+n+1)-\alpha(\alpha+1)}{(n_0+n+1)(n_0+n+2)}a_n$

$\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4-\cdots \quad y_2=x-\dfrac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5-\cdots$

$n_0=0 \quad a_{n+2}=-\dfrac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad n_0=1 \quad a_{n+2}=-\dfrac{(\alpha-n-1)(\alpha+n+2)}{(n+2)(n+3)}a_n$

$$y_1=1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4-\cdots \qquad y_2=x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5-\cdots$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=1+x^2+x^4+\cdots\neq 0$$ y_1とy_2は線形独立

$y=a_1y_1+a_2y_2$ が一般解 (?) $\qquad y=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n_0+n}$ という形の中での一般解

P_α が Legendre微分方程式をみたすならば　$(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_\alpha$ は Legendre陪微分方程式をみたす

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha(\alpha+1)y=0$$

Legendre微分方程式

冪級数を用いた解法　$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n_0+n}$ とおいて代入

$$n_0=0 \qquad a_{n+2}=-\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

$$n_0=1 \qquad a_{n+2}=-\frac{(\alpha-n-1)(\alpha+n+2)}{(n+2)(n+3)}a_n$$

$$y_1=1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4-\cdots$$

$$y_2=x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5-\cdots$$

$$\left|\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_nx^n}\right|=\left|\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}x^2\right|\xrightarrow{n\to\infty}|x|^2$$

$$\left|\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_nx^2}\right|=\left|\frac{(\alpha-n-1)(\alpha+n+2)}{(n+2)(n+3)}x^2\right|\xrightarrow{n\to\infty}|x|^2$$

$|x|<1$ の範囲で絶対収束

もともと $x=\cos\theta$ とおいた　$-1\leq x\leq 1$ の範囲で有界であることを要請

α が正の整数の場合は、冪級数は有限和になる (多項式)

$\alpha=0$ の時は定数項を採用

$\alpha=l \quad (l=0,1,2,\ldots)$　$P_l(x)$ Legendre多項式　標準的に $P_l(1)=1$ ととる

Legendre多項式

Rodriguesの公式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

パリティ(偶奇性) $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

直交関係 $$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x+3)\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Legendre陪多項式

$$P_l^m(x) = \boxed{(-1)^m}(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$$

Condon-Shortley位相因子

$$P_l^m(x) = (-1)^m\frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$

直交関係 $$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\delta_{ll'}$$

$$\begin{aligned}
P_0^0(x) &= 1\\
P_1^1(x) &= -(1-x^2)^{1/2}\\
P_1^0(x) &= x\\
P_1^{-1}(x) &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}\\
P_2^2(x) &= 3(1-x^2)\\
P_2^1(x) &= -3x(1-x^2)^{1/2}\\
P_2^0(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_2^{-1}(x) &= \frac{1}{2}x(1-x^2)^{1/2}\\
P_2^{-2}(x) &= \frac{1}{8}(1-x^2)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

球面調和関数

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (-m \le l \le m)$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^{(m+|m|)/2}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

で定義される関数を球面調和関数と呼ぶ。球面調和関数は

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_l^m(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y_l^m(\theta,\varphi) = 0$$

の解であり、次の直交関係を満たす

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_l^m(\theta,\varphi)Y_{l'}^{m'*}(\theta,\varphi)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

以上から、球面座標で表したラプラス方程式 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$

の一般解は次のとおりである

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\frac{1}{r^l}Y_{lm}(\theta,\varphi) + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} b_{lm}r^lY_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\triangle\phi = 0$$ ラプラス方程式

Laplace's equation

球面座標

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

を満たす $\phi(r,\theta,\varphi)$ を求める

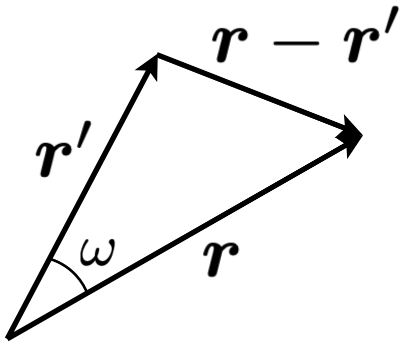
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

a_{lm} を決定することに帰着される

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \boxed{\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\frac{1}{r^l}Y_{lm}(\theta,\varphi)} + \boxed{\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} b_{lm}r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

$$\to 0 \quad (r\to\infty) \qquad\qquad \to 0 \quad (r\to 0)$$

多极扩展
多重極展開



$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\omega+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$

ただし $r'<r$

$$(1+x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$ とおく

$$(1+x)^{-1/2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \qquad a_0=1$$

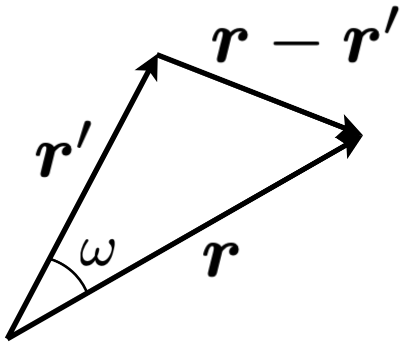
$$-\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots \qquad a_1=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots \qquad a_2=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1+x)^{-7/2}=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots \qquad a_3=-\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$a_n=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$



$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\omega+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$

ただし $r'<r$

$$(1+x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$ とおく

$$+\, a_3x^3+a_4x^4+\cdots \quad a_0=1 \qquad (1+x)^{-1/2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \qquad a_0=1$$

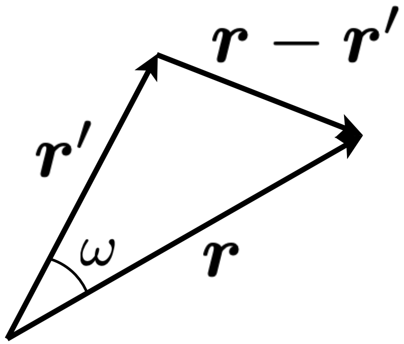
$$x^2+4a_4x^3+\cdots \quad a_1=-\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots \qquad a_1=-\frac{1}{2}$$

$$4\cdot 3a_4x^2+\cdots \quad a_2=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots \qquad a_2=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$a_4x+\cdots \quad a_3=-\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3} \qquad -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1+x)^{-7/2}=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots \qquad a_3=-\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$a_n=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \qquad\qquad a_n=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$



$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\omega+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$

ただし $r' < r$

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{とおく}$$

$$(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$$

$+ a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$ $\quad a_0 = 1 \quad = (-1)^0 \frac{(2\times 0)!}{2^0\cdot 2^0\cdot 0!}\frac{1}{0!}$

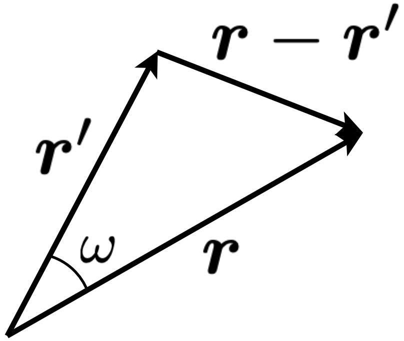
$x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$ $\quad a_1 = -\frac{1}{2} \quad = (-1)^1 \frac{(2\times 1)!}{2^1\cdot 2^1\cdot 1!}\frac{1}{1!}$

$4\cdot 3a_4x^2 + \cdots$ $\quad a_2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad = (-1)^2 \frac{(2\times 2)!}{2^2\cdot 2^2\cdot 2!}\frac{1}{2!}$

$a_4x + \cdots$ $\quad a_3 = -\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3} \quad = (-1)^3 \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{3!} = (-1)^3 \frac{(2\times 3)!}{2^3\cdot 2^3\cdot 3!}\frac{1}{3!}$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$



$$\boxed{\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{r'}{r}\cos\omega+\left(\dfrac{r'}{r}\right)^2}}}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$

ただし $r'<r$

$$(1+x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$$

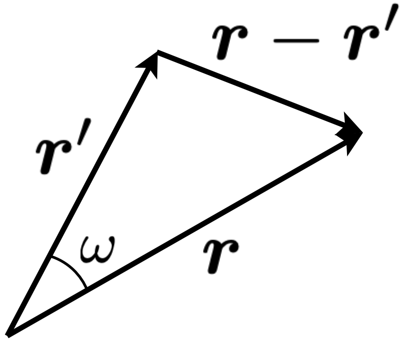
$$\boxed{\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\left(r^2-2rr'\cos\omega+r'^2\right)^{-1/2}}=\frac{1}{r}\left(1-2\frac{r'}{r}\cos\omega+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{r'}{r}\cos\omega\right)^n$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(1-2\frac{r}{r'}\cos\omega\right)^n\left(\frac{r'}{r}\right)^{2n}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(-2\frac{r}{r'}\cos\omega\right)^m\left(\frac{r'}{r}\right)^{2n}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{(2n)!}{2^{2n-m}n!m!(n-m)!}\cos^m\omega\left(\frac{r'}{r}\right)^{2n-m}$$



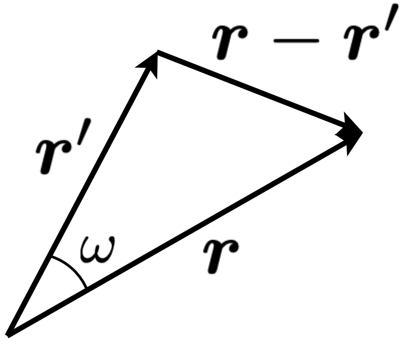
$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{r'}{r}\cos\omega+\left(\dfrac{r'}{r}\right)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$

ただし $r'<r$

$$(1+x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{(2n)!}{2^{2n-m}n!m!(n-m)!}\cos^m\omega\left(\frac{r'}{r}\right)^{2n-m}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}&=\left(r^2-2rr'\cos\omega+r'^2\right)^{-1/2}=\frac{1}{r}\left(1-2\frac{r'}{r}\cos\omega+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}\\&=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{r'}{r}\cos\omega\right)^n\\&=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(1-2\frac{r}{r'}\cos\omega\right)^n\left(\frac{r'}{r}\right)^{2n}\\&=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(-2\frac{r}{r'}\cos\omega\right)^m\left(\frac{r'}{r}\right)^{2n}\\&=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{(2n)!}{2^{2n-m}n!m!(n-m)!}\cos^m\omega\left(\frac{r'}{r}\right)^{2n-m}\end{aligned}$$



$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\omega+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$

ただし $r'<r$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{\overbrace{\boxed{n-m}}^{k}}\frac{(2n)!}{2^{\overbrace{\boxed{2n-m}}^{l}}n!m!\overbrace{\boxed{(n-m)}}^{k}!}\cos^m\omega\left(\frac{r'}{r}\right)^{\overbrace{\boxed{2n-m}}^{l}}$$

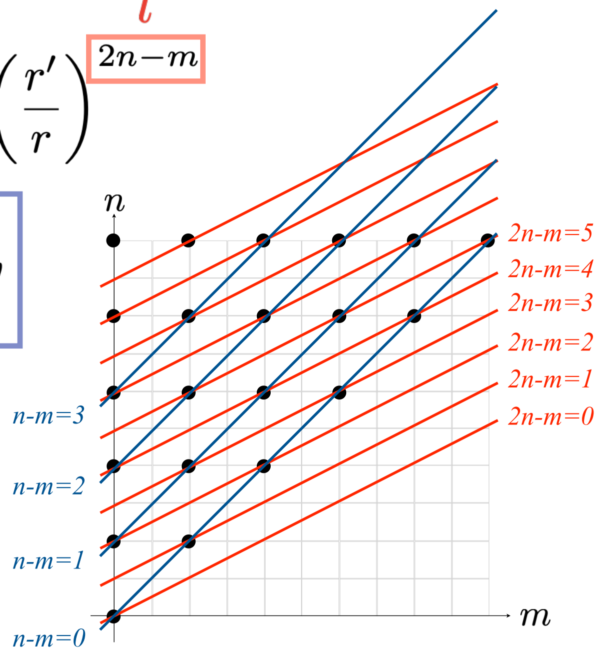
$$=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l\boxed{\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l(l-k)!(l-2k)!k!}\cos^{l-2k}\omega}$$

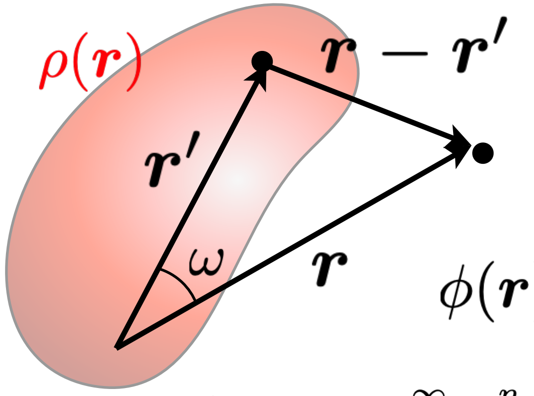
$$=\frac{1}{r}\Bigg\{\underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)^0}_{P_0(\cos\omega)}+\left(\frac{r'}{r}\right)^1\underbrace{\cos\omega}_{P_1(\cos\omega)}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\underbrace{\left(\frac{3}{2}\cos^2\omega-\frac{1}{2}\right)}_{P_2(\cos\omega)}$$

$$+\left(\frac{r'}{r}\right)^3\underbrace{\left(\frac{5}{2}\cos^3\omega-\frac{3}{2}\cos\omega\right)}_{P_3(\cos\omega)}$$

$$+\left(\frac{r'}{r}\right)^4\underbrace{\left(\frac{35}{8}\cos^4\omega-\frac{30}{8}\cos^2\omega+\frac{3}{8}\right)}_{P_4(\cos\omega)}\quad\cdots\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$





$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{r'}{r}\cos\omega+\left(\dfrac{r'}{r}\right)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$

ただし $r'<r$

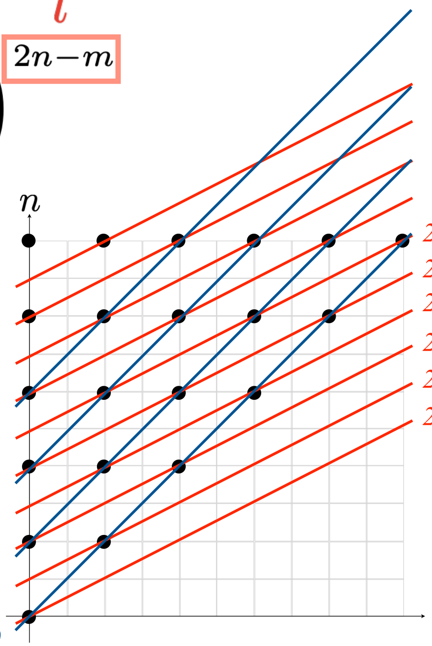
$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

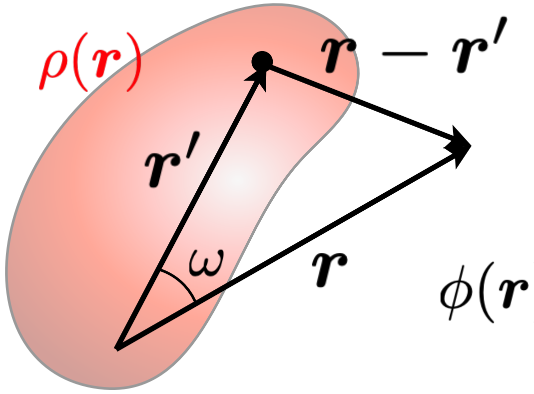
$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{\overset{k}{\boxed{n-m}}}\frac{(2n)!}{2^{\overset{l}{\boxed{2n-m}}}n!m!\overset{k}{\boxed{(n-m)}}!}\cos^m\omega\left(\frac{r'}{r}\right)^{\overset{l}{\boxed{2n-m}}}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l\boxed{\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^k(l-k)!(l-2k)!k!}\cos^{l-2k}\omega}$$

$$=\frac{1}{r}\left\{\underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)^0}_{P_0(\cos\omega)}+\left(\frac{r'}{r}\right)^1\underbrace{\cos\omega}_{P_1(\cos\omega)}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\underbrace{\left(\frac{3}{2}\cos^2\omega-\frac{1}{2}\right)}_{P_2(\cos\omega)}\right.$$
$$+\left(\frac{r'}{r}\right)^3\underbrace{\left(\frac{5}{2}\cos^3\omega-\frac{3}{2}\cos\omega\right)}_{P_3(\cos\omega)}$$
$$\left.+\left(\frac{r'}{r}\right)^4\underbrace{\left(\frac{35}{8}\cos^4\omega-\frac{30}{8}\cos^2\omega+\frac{3}{8}\right)}_{P_4(\cos\omega)}\quad\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\omega)$$





$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l}P_l(\cos\omega)$$

ただし $r' < r$

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l}P_l(\cos\omega)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int(r')^{l}P_l(\cos\omega)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_l}{r^{l+1}}\qquad Q_l=\int(r')^{l}P_l(\cos\omega)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

モーメント
2^l 極能率

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\int\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\int r\cos\omega\,\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^3}\int(r')^2\frac{3\cos^2\omega-1}{2}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^4}\int(r')^3\frac{5\cos^3\omega-3\cos\omega}{2}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^5}\int(r')^4\frac{35\cos^4\omega-30\cos^2\omega+3}{8}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\
+&\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\boxed{\int\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}\;q\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\boxed{\int z'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}\;D\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^3}\boxed{\int\frac{3(z')^2-(r')^2}{2}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}\;Q\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^4}\boxed{\int\frac{5(z')^3-3z'(r')^2}{2}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}\\
+&\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^5}\boxed{\int(r')^4\frac{35(z')^4-30(z')^2(r')^2+3(r')^4}{8}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}\\
+&\cdots
\end{aligned}$$

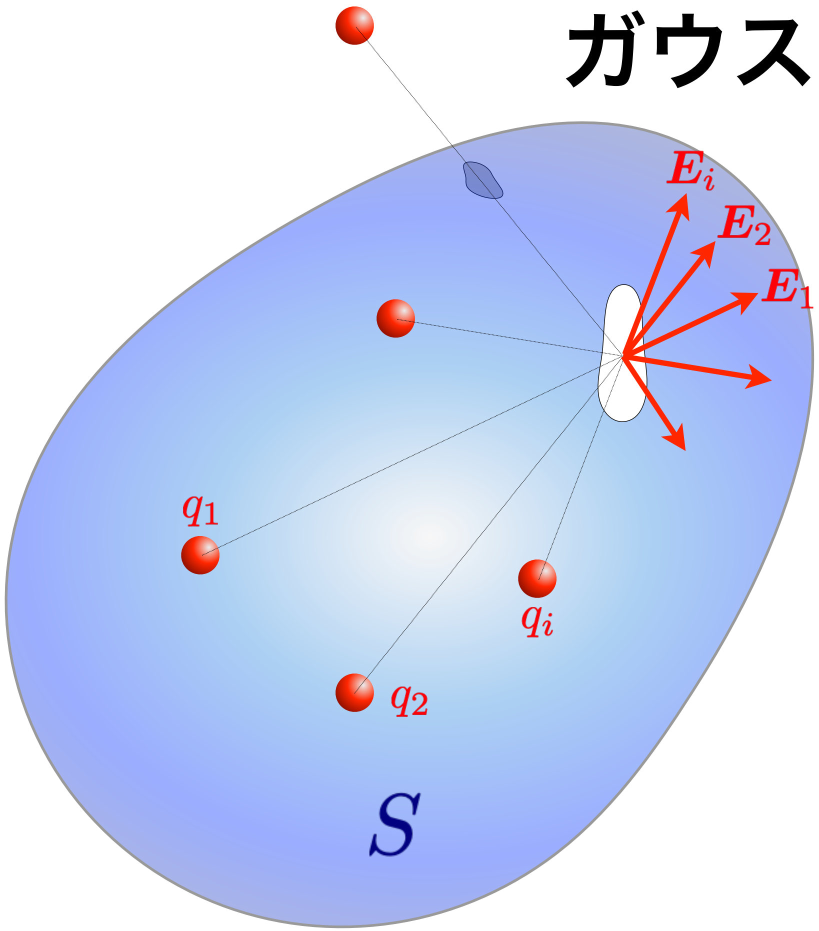
Q_0	単極子	monopole
Q_1	双極子能率（モーメント）	dipole
Q_2	四重極能率（モーメント）	quadrupole
Q_3	八重極能率（モーメント）	octapole
Q_4	十六重極能率（モーメント）	hexadecapole

泊松方程
ポアソンの方程式

$$\Delta\phi = 0$$ ラプラス方程式
Laplace's equation

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ ポアソン方程式
Poisson's equation

ガウスの法則



$$S = \partial V$$

Sで囲まれた領域における和

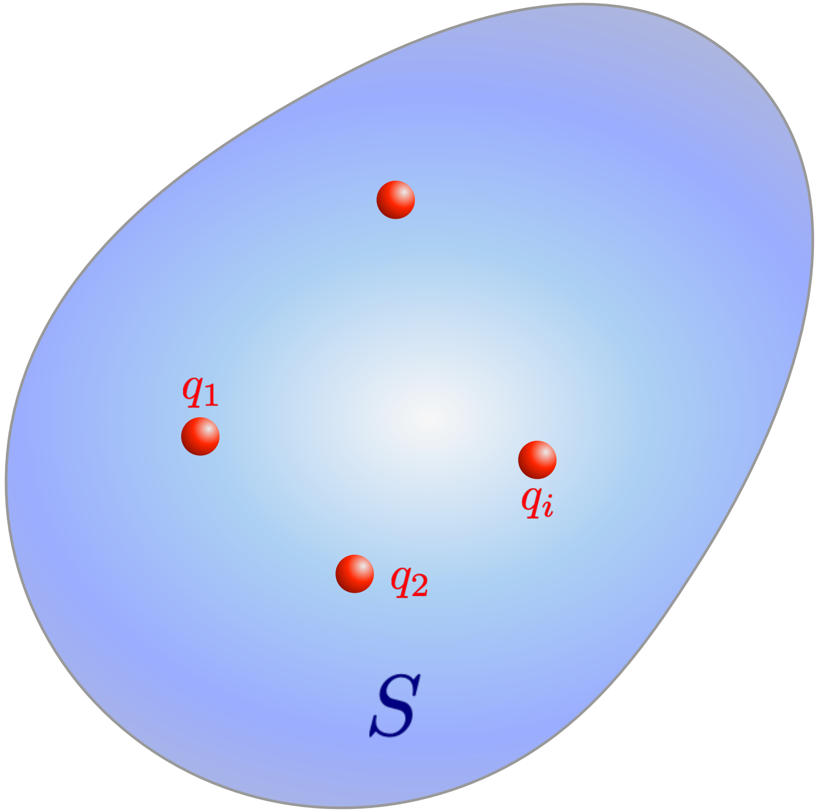
$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \qquad \boxed{q = \sum_i{}' q_i}$$

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\Delta\phi = 0$$ ラプラス方程式
Laplace's equation

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ ポアソン方程式
Poisson's equation

ガウスの法則



$$S = \partial V$$

Sで囲まれた領域における和

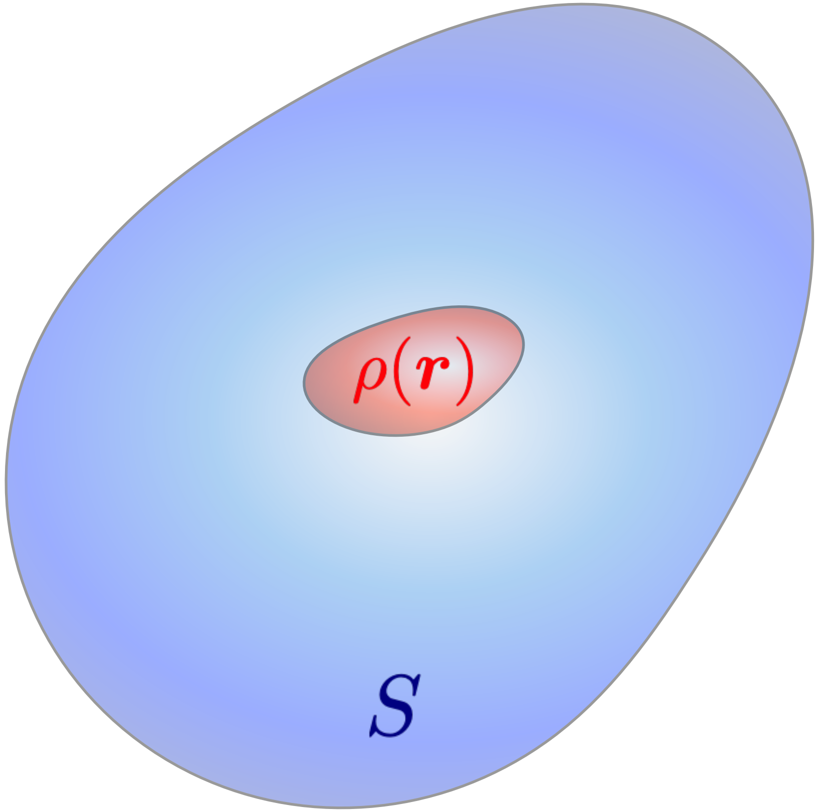
$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \qquad \boxed{q = {\sum_i}' q_i}$$

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\Delta\phi = 0$$ ラプラス方程式 Laplace's equation

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ ポアソン方程式 Poisson's equation

ガウスの法則



$$S = \partial V$$

Sで囲まれた体積Vに含まれる電荷

$$\int_{S=\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V$$

Sは体積Vの表面

Sで囲まれた領域における和

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \qquad \boxed{q = {\sum_i}' q_i}$$

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\Delta\phi = 0$$ ラプラス方程式

Laplace's equation

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ ポアソン方程式

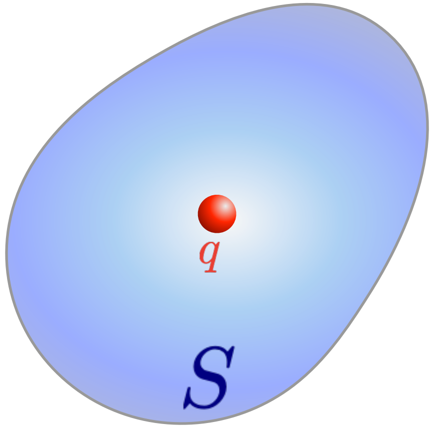
Poisson's equation

ガウスの法則

$$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0)$$ デルタ関数

$$\int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & ((a<0)\wedge(b>0)) \\ 0 & ((b<0)\vee(a>0)) \end{cases}$$

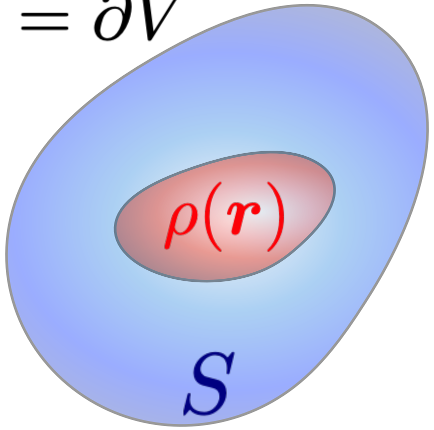
$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$



$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\boxed{q}}{\varepsilon}$$

$$q = \int_V \boxed{\rho(\boldsymbol{r})}\,\mathrm{d}V$$

$$S = \partial V$$



$$\int_{S=\partial V} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon}\boxed{\int_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V}$$

$$||$$

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$$

関数　function

超関数　distribution

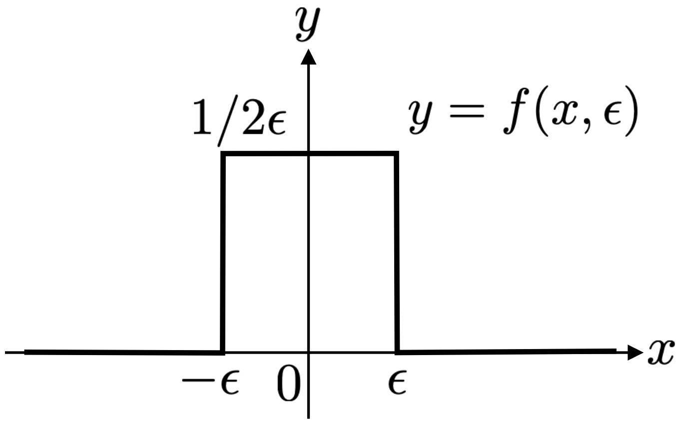
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0)$　デルタ関数

$$\int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & ((a<0)\wedge(b>0)) \\ 0 & ((b<0)\vee(a>0)) \end{cases}$$

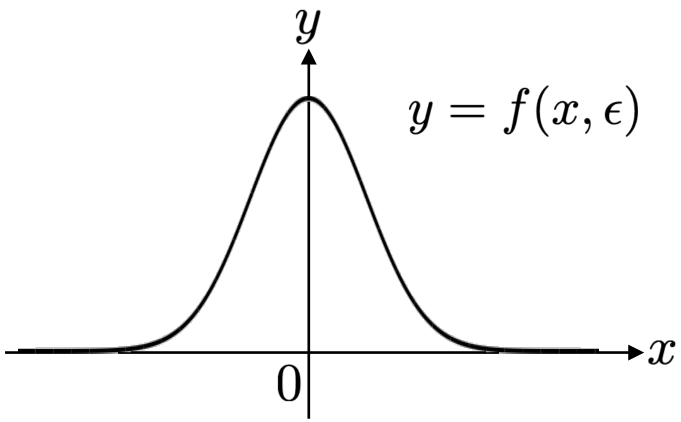
$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to+0} f(x,\epsilon)$$

$$f(x,\epsilon) = \begin{cases} 0 & (x<-\epsilon) \\ 1/2\epsilon & (-\epsilon<x<\epsilon) \\ 0 & (x>\epsilon) \end{cases}$$



$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to+0} f(x,\epsilon)$$

$$f(x,\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$$



関数　function

超関数　distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0)$　デルタ関数

$$\int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & ((a<0)\wedge(b>0)) \\ 0 & ((b<0)\vee(a>0)) \end{cases}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathrm{d}k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx}\mathrm{d}k = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(x) \to \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(k) \to f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky}\mathrm{d}y\right)e^{ikx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}k\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y)\mathrm{d}y = f(x)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(x) \to \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{F} : f(x, y, z) \to \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F} : f(x) \to \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{F} : f(x, y, z) \to \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

デルタ関数 $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathrm{d}k$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \rightarrow \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

デルタ関数

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathrm{d}k$$

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z$$

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} \mathrm{d}^3 r' \right) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \\
&= \int f(\boldsymbol{r}') \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 r' \\
&= \int f(\boldsymbol{r}') \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \mathrm{d}^3 r' \\
&= f(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

ポアソン方程式 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \boxed{\tilde{G}(\boldsymbol{k})} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \boxed{\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k}$$

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{G}(\boldsymbol{k}) \nabla^2 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$= \boxed{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{G}(\boldsymbol{k}) (-k^2) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k}$$

$$\boxed{\tilde{G}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2}}$$

$$\boxed{G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k}$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

ポアソン方程式 $\boldsymbol{\nabla}^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \boxed{\tilde{G}(\boldsymbol{k})} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \boxed{\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{G}(\boldsymbol{k}) \boldsymbol{\nabla}^2 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$= \boxed{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{G}(\boldsymbol{k}) (-k^2) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k}$$

$$\boxed{\tilde{G}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2}}$$

$$\boxed{G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k}$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

ポアソン方程式 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ k空間での直交座標

(k, θ, φ) k空間での球面座標

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikr\cos\theta} k^2 \sin\theta \mathrm{d}k \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

方位角について積分

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{ikr\cos\theta} \sin\theta \mathrm{d}k \mathrm{d}\theta$$

$\cos\theta = z$ とおく $-\sin\theta\, \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \int_0^{\infty} e^{ikrz} \mathrm{d}k \mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{ikr} e^{ikrz} \right]_{-1}^{1} \mathrm{d}k = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) \mathrm{d}k = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{kr} \mathrm{d}k$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

ポアソン方程式 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ k空間での直交座標

(k, θ, φ) k空間での球面座標

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikr\cos\theta} k^2 \sin\theta \mathrm{d}k \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

方位角について積分

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{ikr\cos\theta} \sin\theta \mathrm{d}k \mathrm{d}\theta$$

$\cos\theta = z$ とおく $-\sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \int_0^{\infty} e^{ikrz} \mathrm{d}k \mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{ikr} e^{ikrz} \right]_{-1}^{1} \mathrm{d}k = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) \mathrm{d}k = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{kr} \mathrm{d}k$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

ポアソン方程式 $\boldsymbol{\nabla}^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \mathrm{d}k \quad = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \mathrm{d}k$$

$kr = x$ とおく

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r} \boxed{\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

ポアソン方程式 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

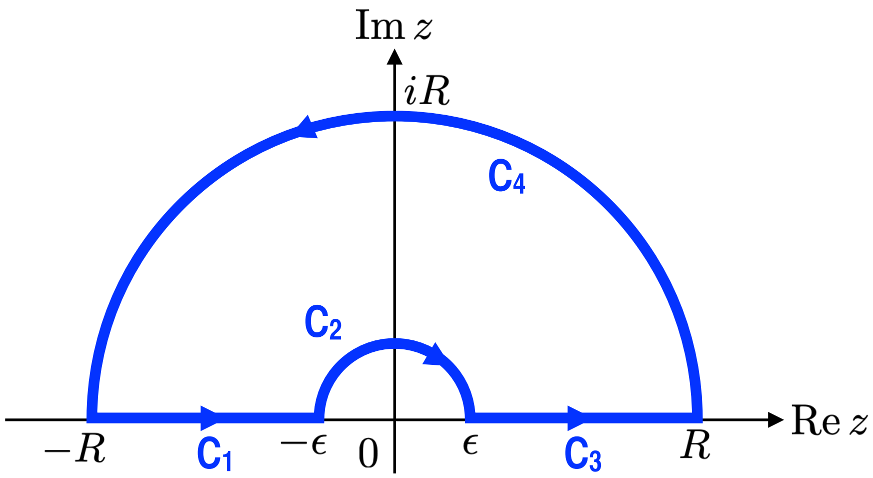
$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \mathrm{d}k \quad = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \mathrm{d}k$$

$kr = x$ とおく

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r} \boxed{\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x$$

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{2iz}$$ は正則



留数定理: 周回積分は0

$$\boxed{\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z}+\boxed{\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z}+\boxed{\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z}+\int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$-\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x \quad -\frac{\pi}{2}+\mathcal{O}(\epsilon) \quad +\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x \quad +\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z=0$$

$$e^z = 1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$$

$$=\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x$$

$y=-x$ とおく

$$=\int_R^\epsilon \frac{e^{-iy}}{-2iy}\mathrm{d}(-y)$$

$$=-\int_\epsilon^R \frac{e^{-iy}}{2iy}\mathrm{d}y$$

$z=\epsilon\, e^{i\theta}$ とおく

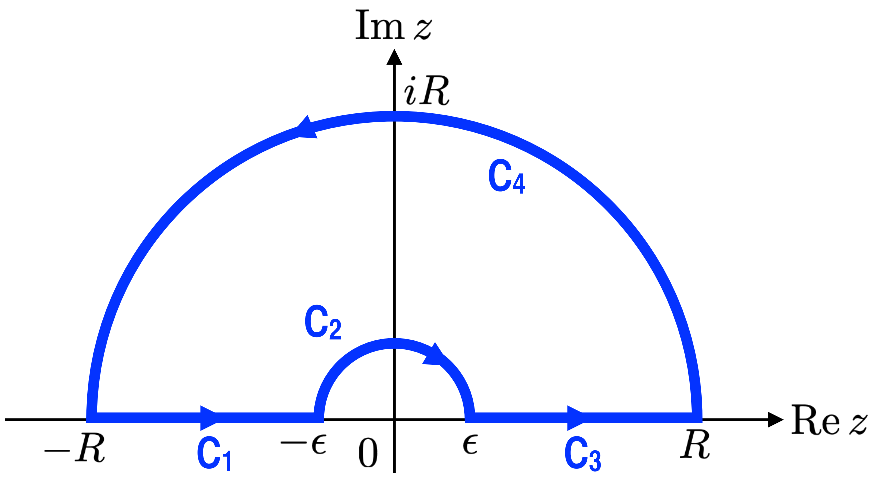
$$=\int_\pi^0 \frac{1}{2iz}\left(1+iz+\frac{(iz)^2}{2}+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdot\right)iz\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_\pi^0 \mathrm{d}\theta+i\epsilon\int_\pi^0 e^{i\theta}\mathrm{d}\theta+(i\epsilon)^2\frac{1}{2}\int_\pi^0 e^{2i\theta}\mathrm{d}\theta+(i\epsilon)^3\frac{1}{6}\int_\pi^0 e^{3i\theta}\mathrm{d}\theta+\cdot\right)$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x$$

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{2iz}$$ は正則



留数定理: 周回積分は0

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$-\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x \quad -\frac{\pi}{2}+\mathcal{O}(\epsilon) \quad +\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x \quad +\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z=0$$

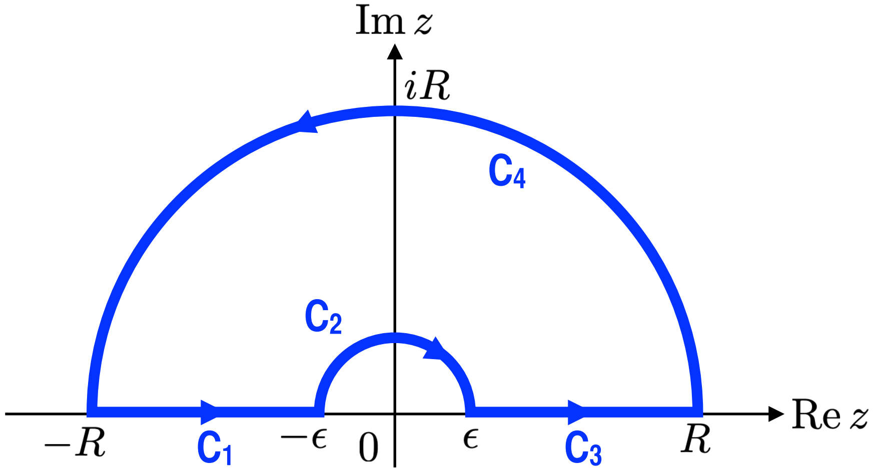
$$\left|\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z\right|=\left|-\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}+\mathcal{O}(\epsilon)+\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{2R}$$

$z=R\,e^{i\theta}$とおく $\quad \int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z=\int_0^\pi \frac{e^{iR\,e^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

$0<\theta<\pi\rightarrow 0<\sin\theta\leq\theta \qquad \left|\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z\right|<\frac{1}{2}\left|\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leq\frac{1}{2}\left|\int_0^\pi e^{-R\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leq\frac{1}{2R}\left(1-e^{-\pi R}\right)<\frac{1}{2R}$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x$$

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{2iz}$$ は正則



留数定理: 周回積分は0

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$-\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}+\mathcal{O}(\epsilon)+\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x+\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z=0$$

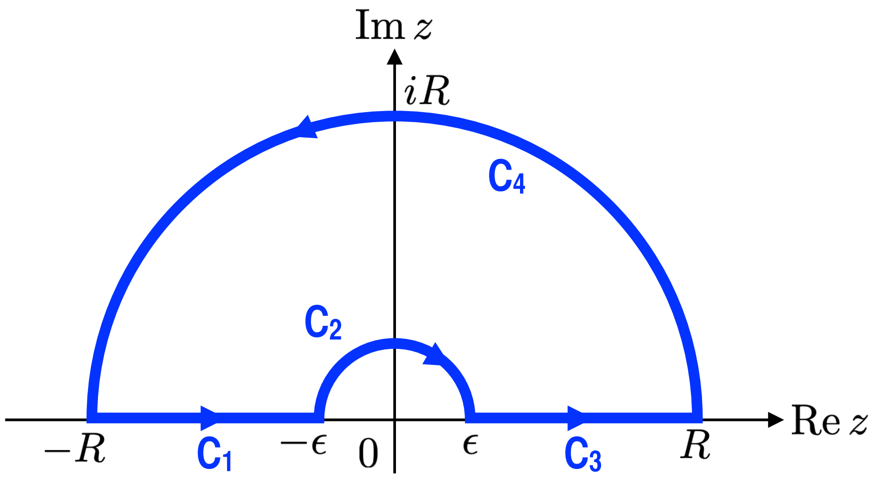
$$\left|\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z\right|=\left|-\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}+\mathcal{O}(\epsilon)+\int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{2R}$$

$z=R\,e^{i\theta}$とおく $$\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z=\int_0^\pi \frac{e^{iR\,e^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$0<\theta<\pi \rightarrow 0<\sin\theta\leq\theta$ $$\left|\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{2iz}\mathrm{d}z\right|<\frac{1}{2}\left|\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leq\frac{1}{2}\left|\int_0^\pi e^{-R\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leq\frac{1}{2R}\left(1-e^{-\pi R}\right)<\frac{1}{2R}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{2iz}$$ は正則



留数定理: 周回積分は0

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\left| -\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x \right| < \frac{1}{2R}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty} \left| -\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x \right| < \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} = 0$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2ix}\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$

$$\mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

ポアソン方程式 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \mathrm{d}k = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \mathrm{d}k$$

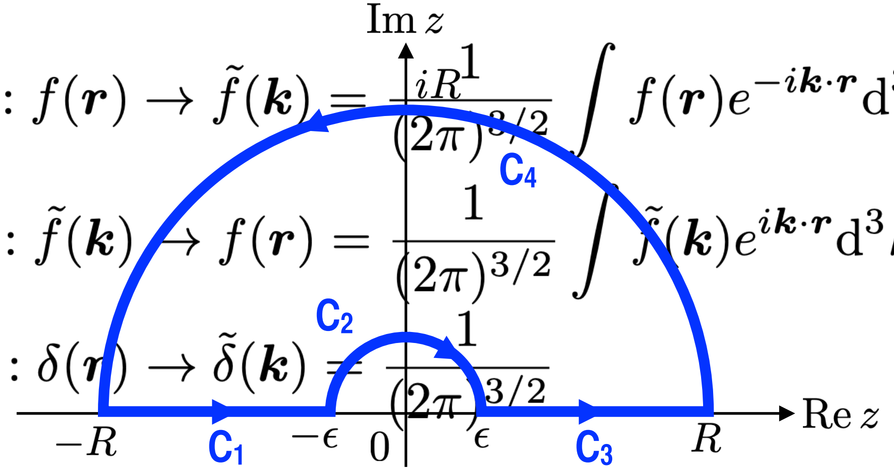
$kr = x$ とおく

$$-\frac{1}{2\pi^2 r} \boxed{\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{iz}}{2iz} \mathrm{d}z$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{2iz}$$ は正則

留数定理: 周回積分は0



$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{2ix} \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix} \mathrm{d}x \;\Big|\; < \frac{1}{2R}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{R \to \infty} \left| -\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{2ix} \mathrm{d}x \right| < \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2R} = 0$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2ix} \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

フーリエ変換 (Fourier transformation)

$$\mathcal{F} : f(\boldsymbol{r}) \to \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 r$$

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f}(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \quad \mathcal{F} : \delta(\boldsymbol{r}) \to \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$

ポアソン方程式 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \mathrm{d}k \quad = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} \mathrm{d}k$$

$kr = x$ とおく

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r} \boxed{\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

要点

$$\boldsymbol{\nabla}^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$$ をみたすGを求めたところ

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{k^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)\mathrm{d}k \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4\pi r}
\end{aligned}
$$

つまり次の式が成り立つ

$$\triangle \frac{1}{r} = \boldsymbol{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

$$\triangle\phi = 0$$

ラプラス方程式

Laplace's equation

球面座標で書くと

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

この一般解は

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\frac{1}{r^l}Y_{lm}(\theta,\varphi)+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}b_{lm}r^lY_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

ポアソン方程式

Poisson's equation

点電荷の場合は $\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r})$

$$\triangle\phi = -\frac{q}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}) \longrightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}$$

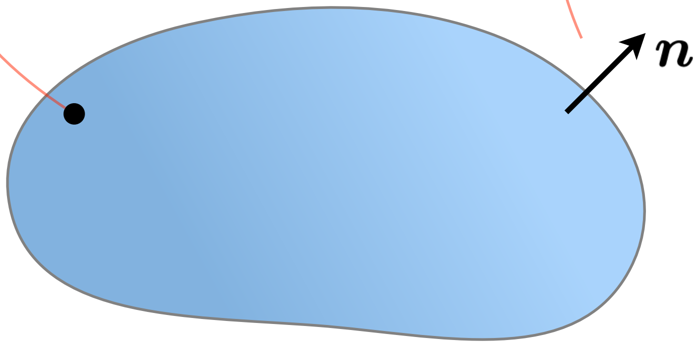
$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \boxed{a_{lm}} \frac{1}{r^l} Y_{lm}(\theta,\varphi) + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \boxed{b_{lm}} r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

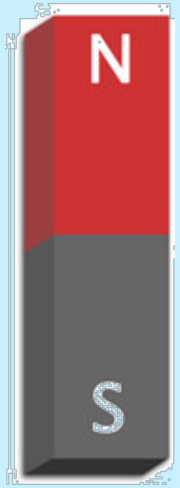
ディリクレ条件 $\boxed{\phi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})}$ 境界条件 $\boxed{\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} = g(\boldsymbol{r})}$ ノイマン条件

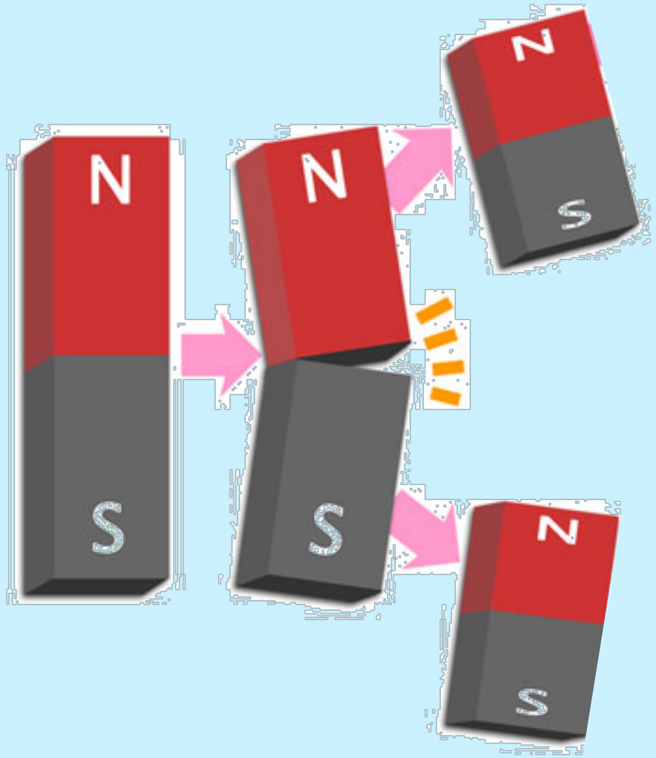
境界での関数値

境界での微分値



磁场 (introduction)
磁場 (introduction)


N
S


N
S
N
S
N
S
N
S

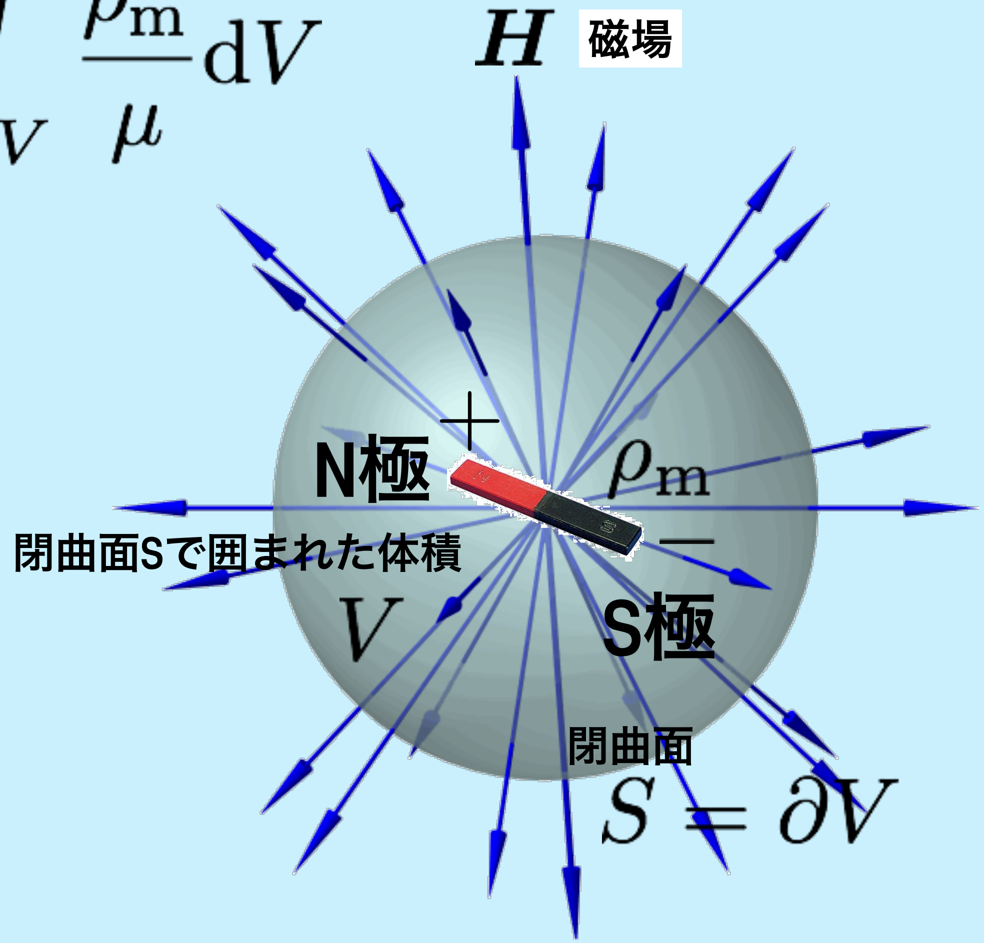
ガウスの法則 Gauss' law

$$\int_{s=\partial V} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \frac{\rho_\mathrm{m}}{\mu} \mathrm{dV}$$

ガウスの定理

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{dV}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\rho_\mathrm{m}}{\mu}$$



ガウスの法則 Gauss' law

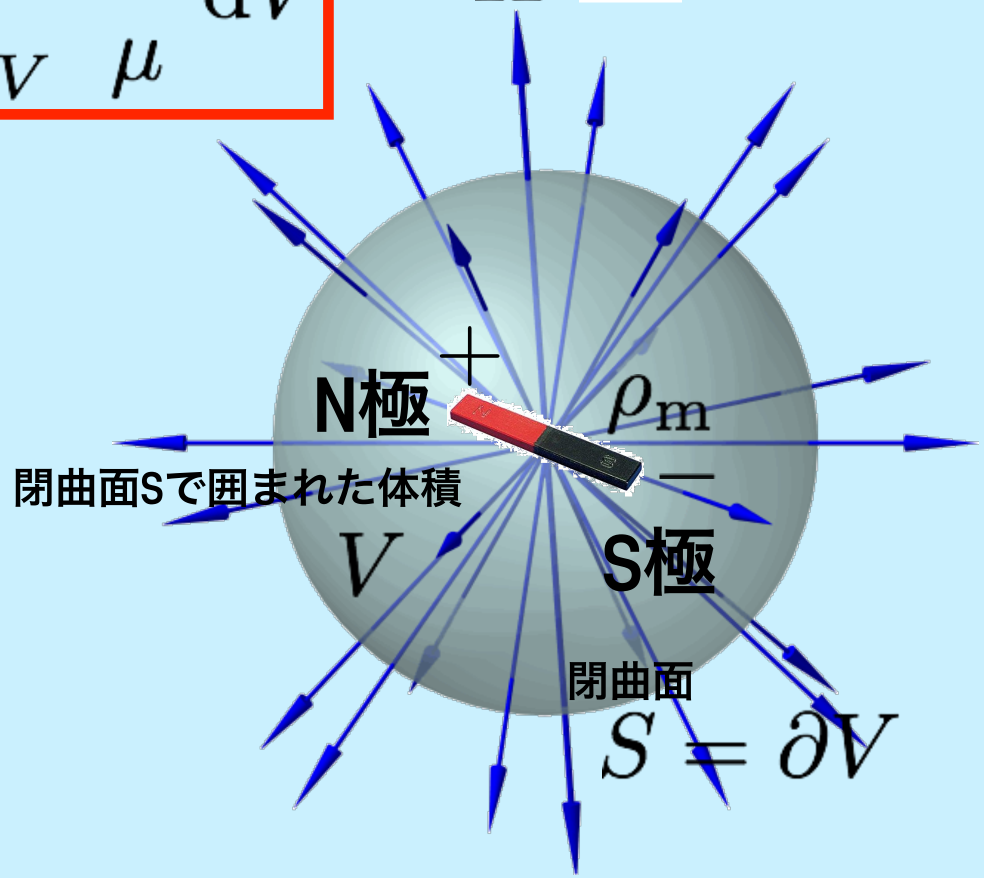
$$\int_{s=\partial V} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boxed{\int_V \frac{\rho_\mathrm{m}}{\mu} \mathrm{dV}}$$

= 0

ガウスの定理

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{dV}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\rho_\mathrm{m}}{\mu}$$



ガウスの法則 Gauss' law

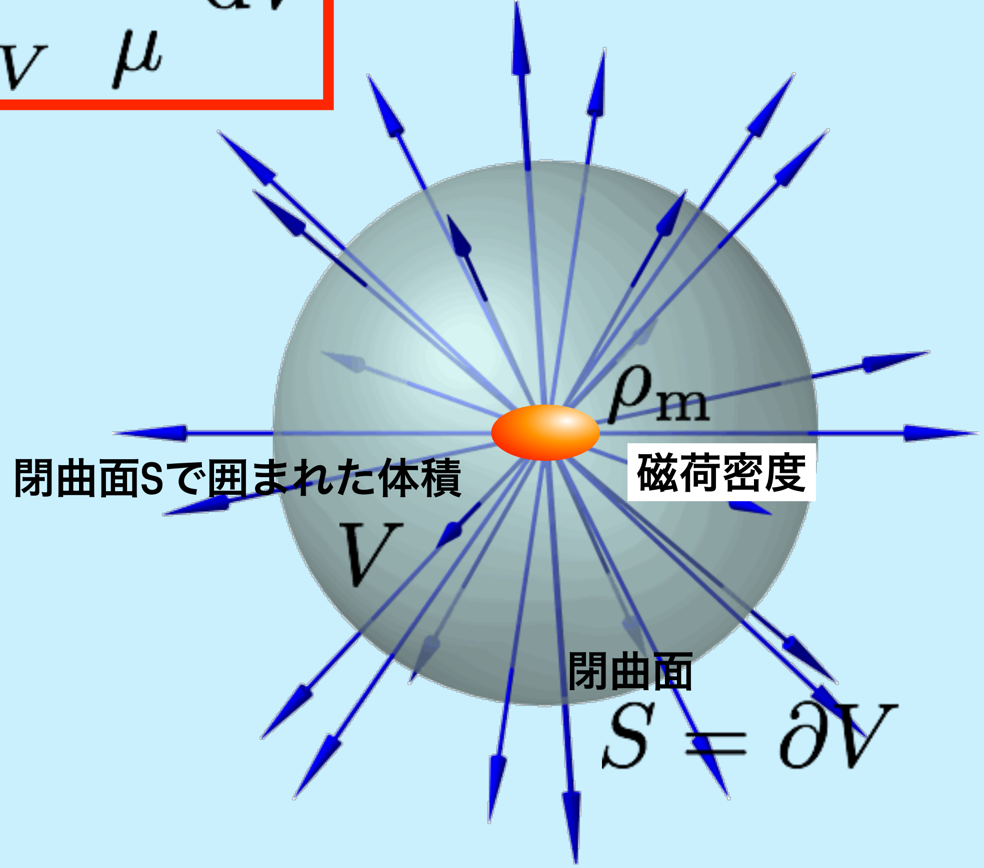
= 0

$$\int_{s=\partial V} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boxed{\int_V \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\mu}\mathrm{dV}}$$

ガウスの定理

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{H}\,\mathrm{dV}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H} = 0 \quad \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\mu}$$



$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

電気力

電荷 [C] クーロン

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

誘電率

真空の誘電率
$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}]$

磁力

磁荷 [Wb] ウェーバー

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{q_{\mathrm{m}1} q_{\mathrm{m}2}}{r^3}\boldsymbol{r}$$

透磁率

真空の透磁率
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[\mathrm{Wb^2N^{-1}m^{-2}}]$

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

電場

$\boldsymbol{F} = q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}$

磁場

磁荷从未被单独观察到
(磁单极子尚未被发现)

電束密

磁荷が単独で観測されたことがない
(磁気単極子が未発見)

電気双

$\boldsymbol{d} = q\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{d} + 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2}\boldsymbol{r}\right]$$

$\boldsymbol{m} = q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{m} + 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}}{r^2}\boldsymbol{r}\right]$$

電気力

電荷

[C] クーロン

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

誘電率

真空の誘電率
$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}]$

磁力

磁荷

[Wb] ウェーバー

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{q_{\mathrm{m1}} q_{\mathrm{m2}}}{r^3}\boldsymbol{r}$$

透磁率

真空の透磁率
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[\mathrm{Wb^2N^{-1}m^{-2}}]$

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

電場

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\ \ }\frac{q}{\ \ }\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{F} = q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}$

磁場

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\ \ }\frac{q_{\mathrm{m}}}{\ \ }\boldsymbol{r}$$

μ

磁荷从未被单独观察到
(磁单极子尚未被发现)

電束密

磁荷が単独で観測されたことがない
(磁気単極子が未発見)

電気双

$\boldsymbol{d} = q\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{d} + 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2}\boldsymbol{r}\right]$$

$\boldsymbol{m} = q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{m} + 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}}{r^2}\boldsymbol{r}\right]$$

電気力

電荷

[C] クーロン

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

誘電率

真空の誘電率

$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} [\mathrm{C^2 N^{-1} m^{-2}}]$

磁力

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

電場

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

磁場

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon$$

電流

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

電束密度 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$

磁束密度 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$

電気双極子能率

$\boldsymbol{d} = q\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{d} + 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2}\boldsymbol{r}\right]$$

磁気双極子能率

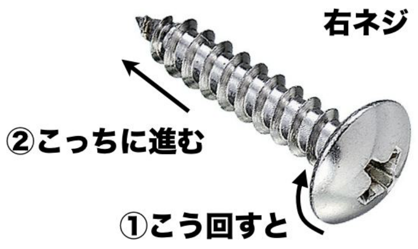
$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{r^3}\left[-\boldsymbol{m} + 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}}{r^2}\boldsymbol{r}\right]$$

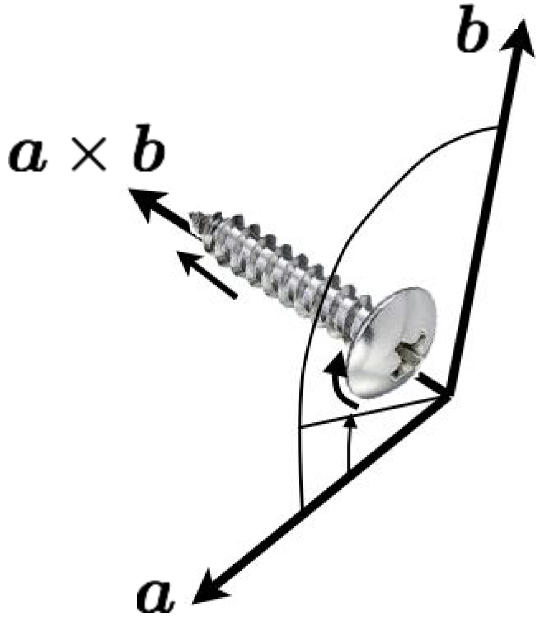
磁场

磁場

电磁场中运动的电荷所受的力
電磁場内を運動する電荷が受ける力

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$





洛伦兹力

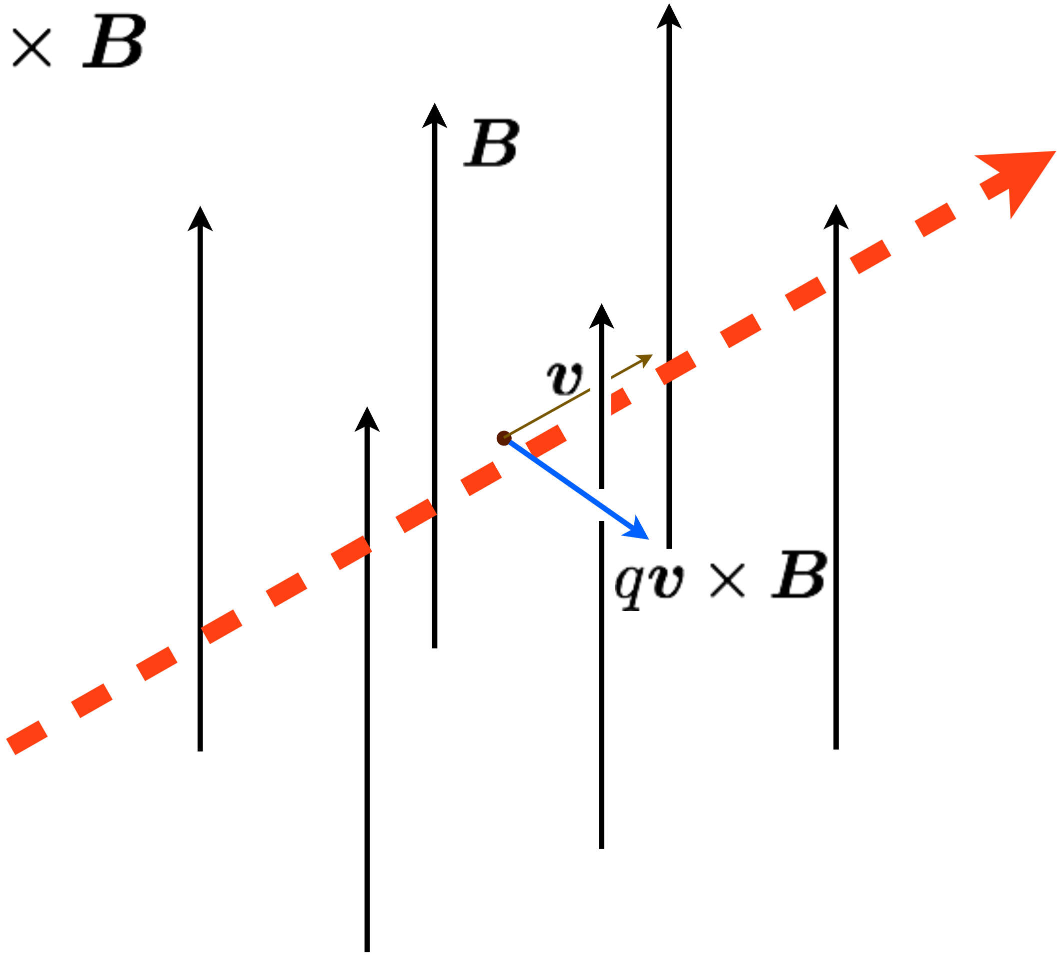
1. 磁场产生的力与电荷量和速度成正比。
2. 力的方向取决于磁场和速度。
3. 当速度和磁场平行时，力为零。
4. 当速度和磁场不平行时，力的方向垂直于速度和磁场。 不做功
5. 当电荷为正和负时，力的方向相反。
6. 如果速度和磁场之间的夹角为 θ，则力的大小与sinθ成正比。

ローレンツ力

1. 磁場から受ける力は、電荷と速さに比例する
2. 力の方向は、磁場と速度に依存する。
3. 速度と磁場が平行のときは、力を受けない。
4. 速度と磁場が平行でないときは、力の方向は速度と磁場の両方に垂直である。 仕事をしない
5. 殿下が正の場合と負の場合では、力の方向が逆である。
6. 速度と磁場がなす核を θ とすると、力の大きさは sinθ に比例する。

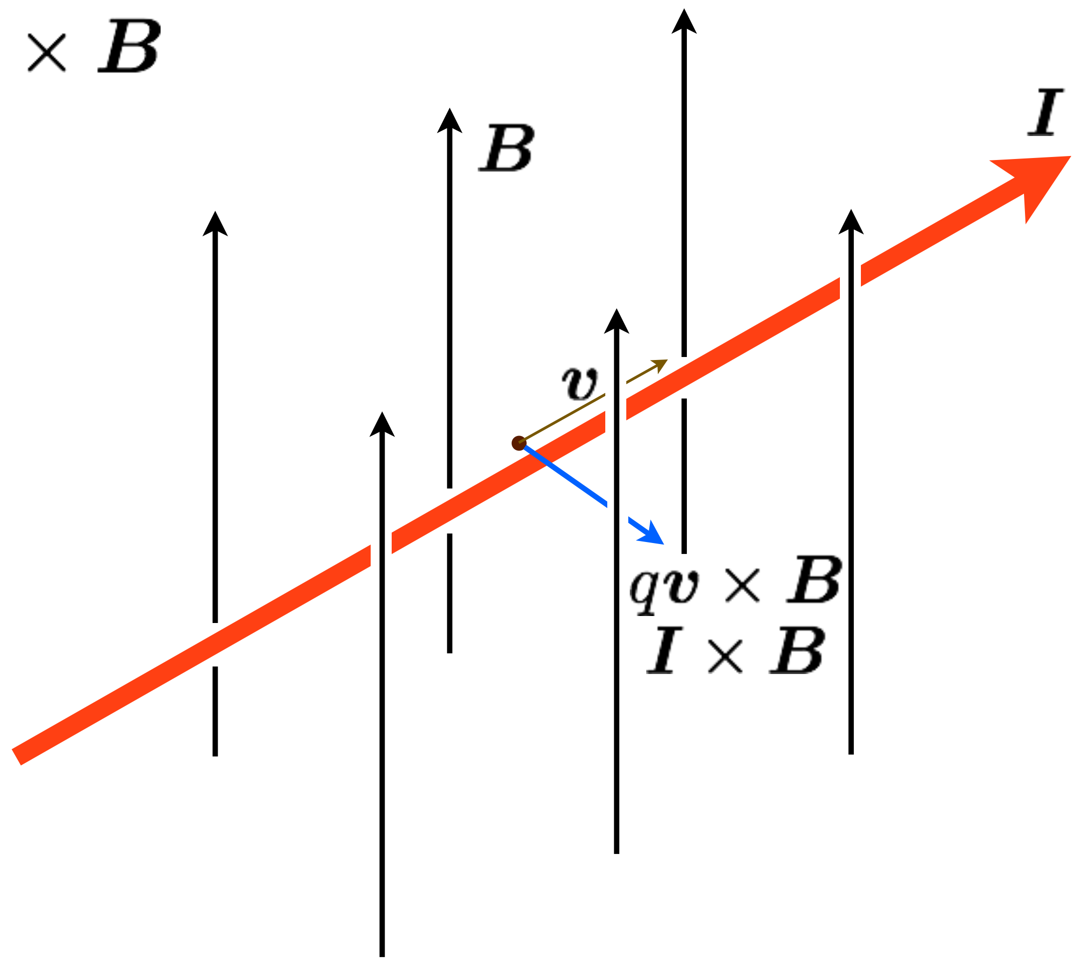
电磁场中运动的电荷所受的力
電磁場内を運動する電荷が受ける力

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$



电流产生的力
電流が受ける力

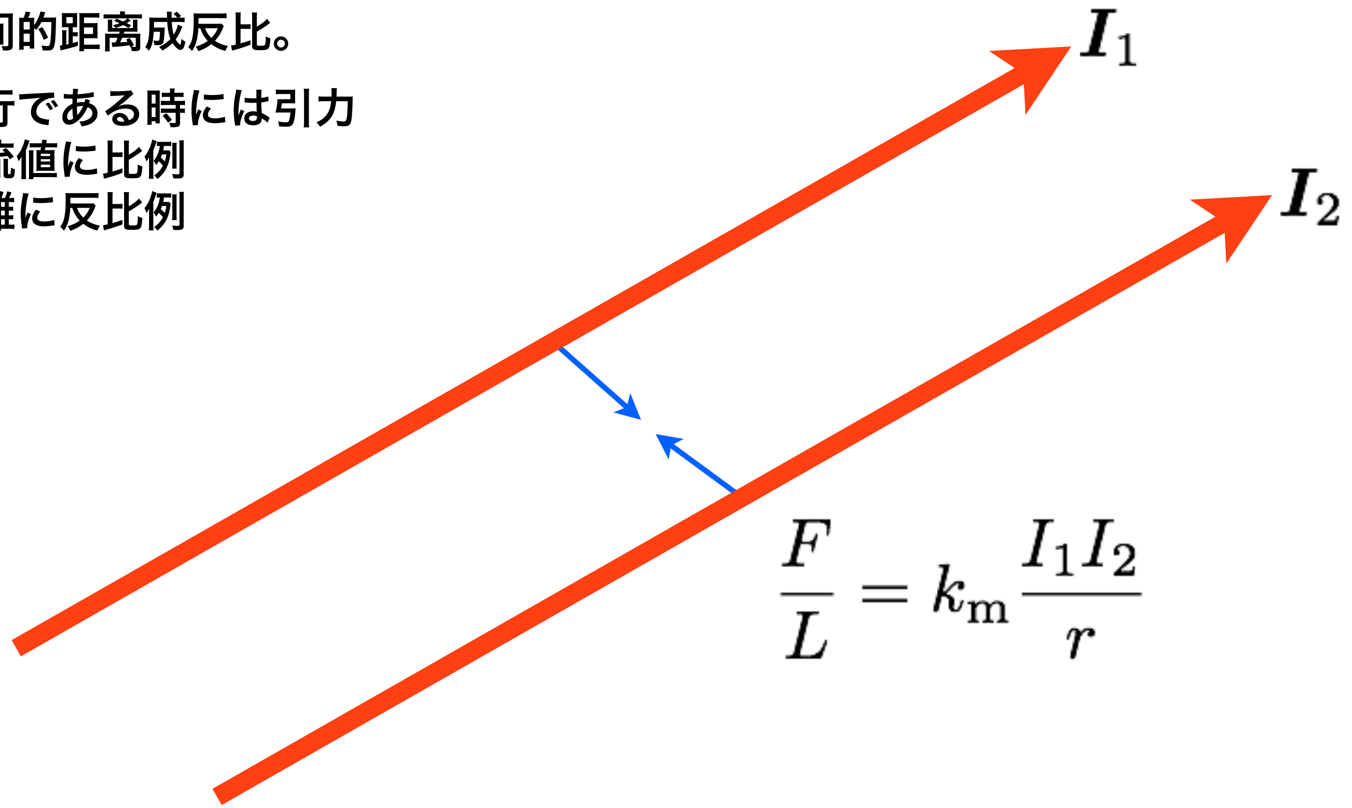
$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$



电流间的相互作用力
電流間の力

当电流方向平行时
吸引力与两个方向上的电流值成正比
与它们之间的距离成反比。

電流が平行である時には引力
双方の電流値に比例
互いの距離に反比例

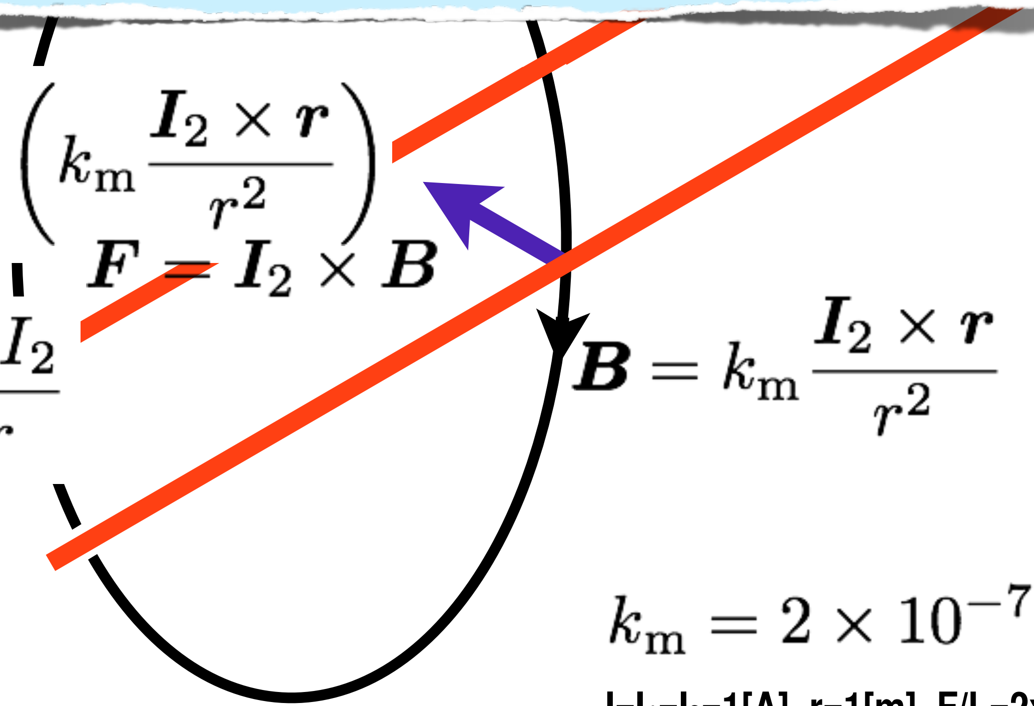


$$\frac{F}{L} = k_{\mathrm{m}} \frac{I_1 I_2}{r}$$

$I=I_1=I_2=1$[A], $r=1$[m], $F/L=2\times10^{-7}$[N]

将电流视为产生磁场是合理的
電流が磁場を生じると考えるとうまく行く

$$\frac{\boldsymbol{F}}{L} = \frac{k_\mathrm{m}}{r^2}\left((\boldsymbol{I}_1\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{I}_2 - (\boldsymbol{I}_1\cdot\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{r}\right) \quad = -k_\mathrm{m}\frac{I_1 I_2}{r^2}\boldsymbol{r}$$



$$\frac{\boldsymbol{F}}{L} = \boldsymbol{I}_1 \times \left(k_\mathrm{m}\frac{\boldsymbol{I}_2\times\boldsymbol{r}}{r^2}\right)$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_2 \times \boldsymbol{B}$$

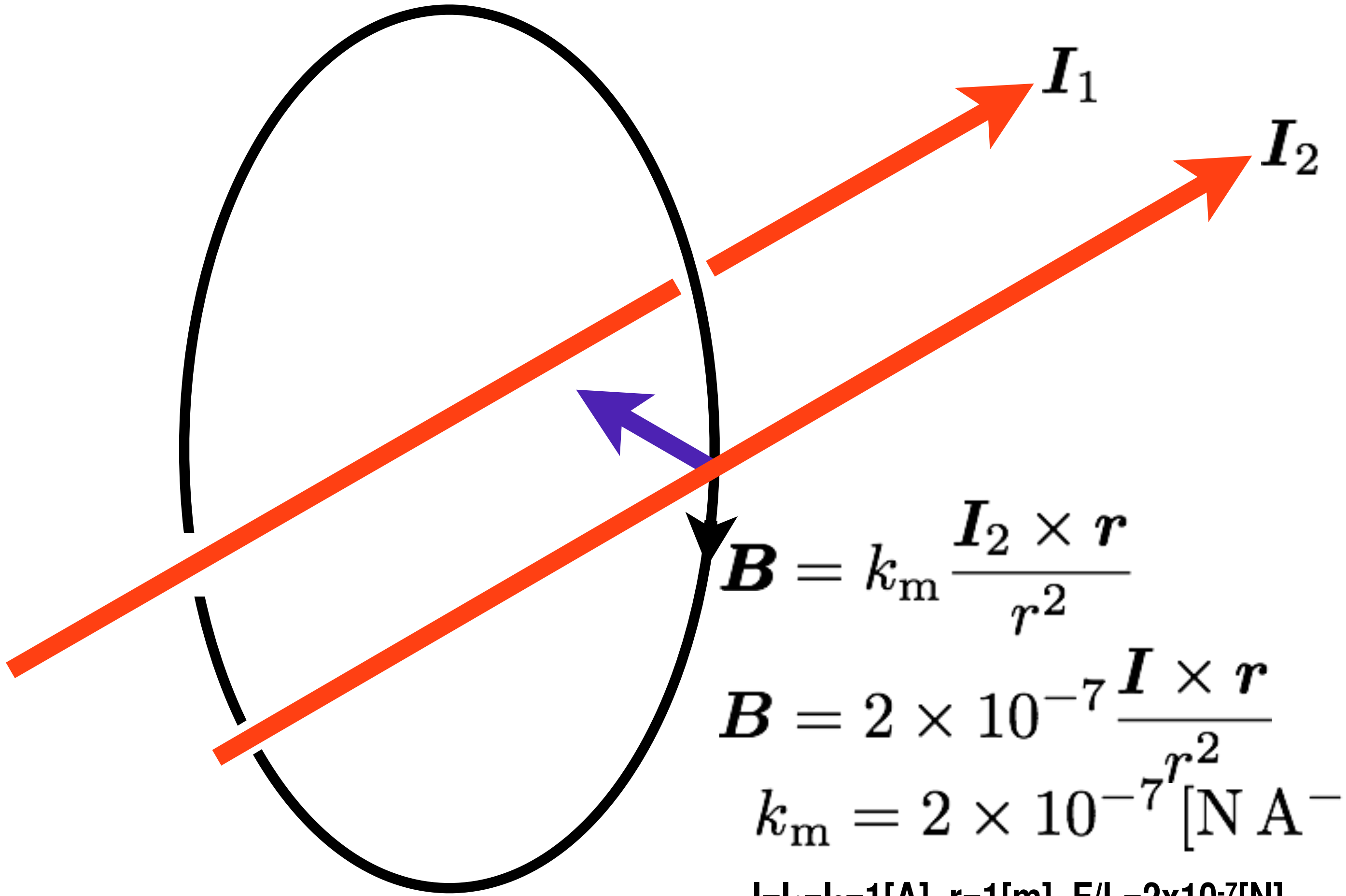
$$\frac{F}{L} = k_\mathrm{m}\frac{I_1 I_2}{r}$$

$$\boldsymbol{B} = k_\mathrm{m}\frac{\boldsymbol{I}_2\times\boldsymbol{r}}{r^2}$$

$$k_\mathrm{m} = 2\times 10^{-7}\,[\mathrm{N\,A^{-2}}]$$

$I=I_1=I_2=1$[A], $r=1$[m], $F/L=2\times10^{-7}$[N]

将电流视为产生磁场是合理的
電流が磁場を生じると考えるとうまく行く



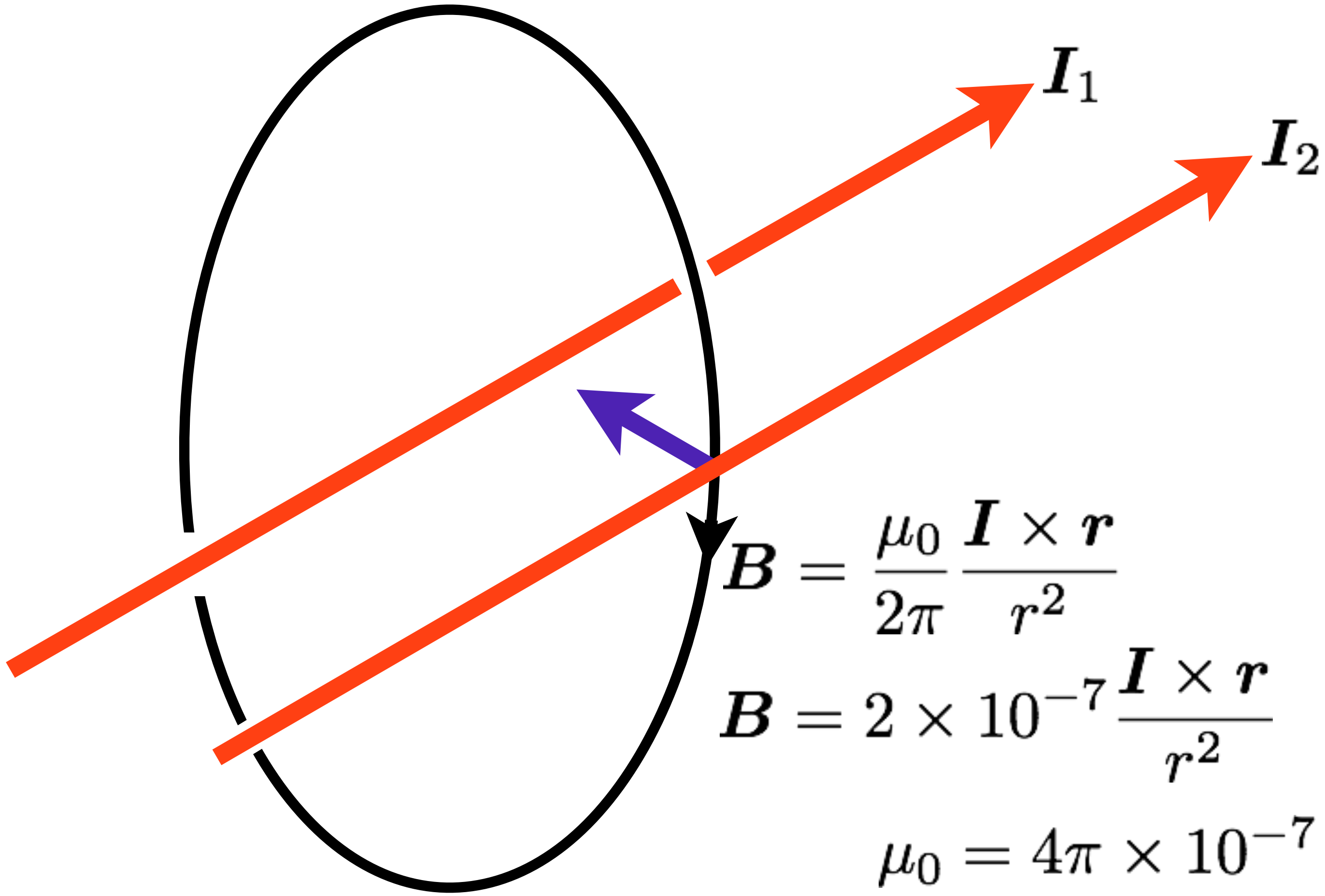
$$\boldsymbol{B} = k_{\mathrm{m}} \frac{\boldsymbol{I}_2 \times \boldsymbol{r}}{r^2}$$

$$\boldsymbol{B} = 2 \times 10^{-7} \frac{\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{r}}{r^2}$$

$$k_{\mathrm{m}} = 2 \times 10^{-7} [\mathrm{N\,A^{-2}}]$$

$I=I_1=I_2=1[A]$, $r=1[m]$, $F/L=2\times10^{-7}[N]$

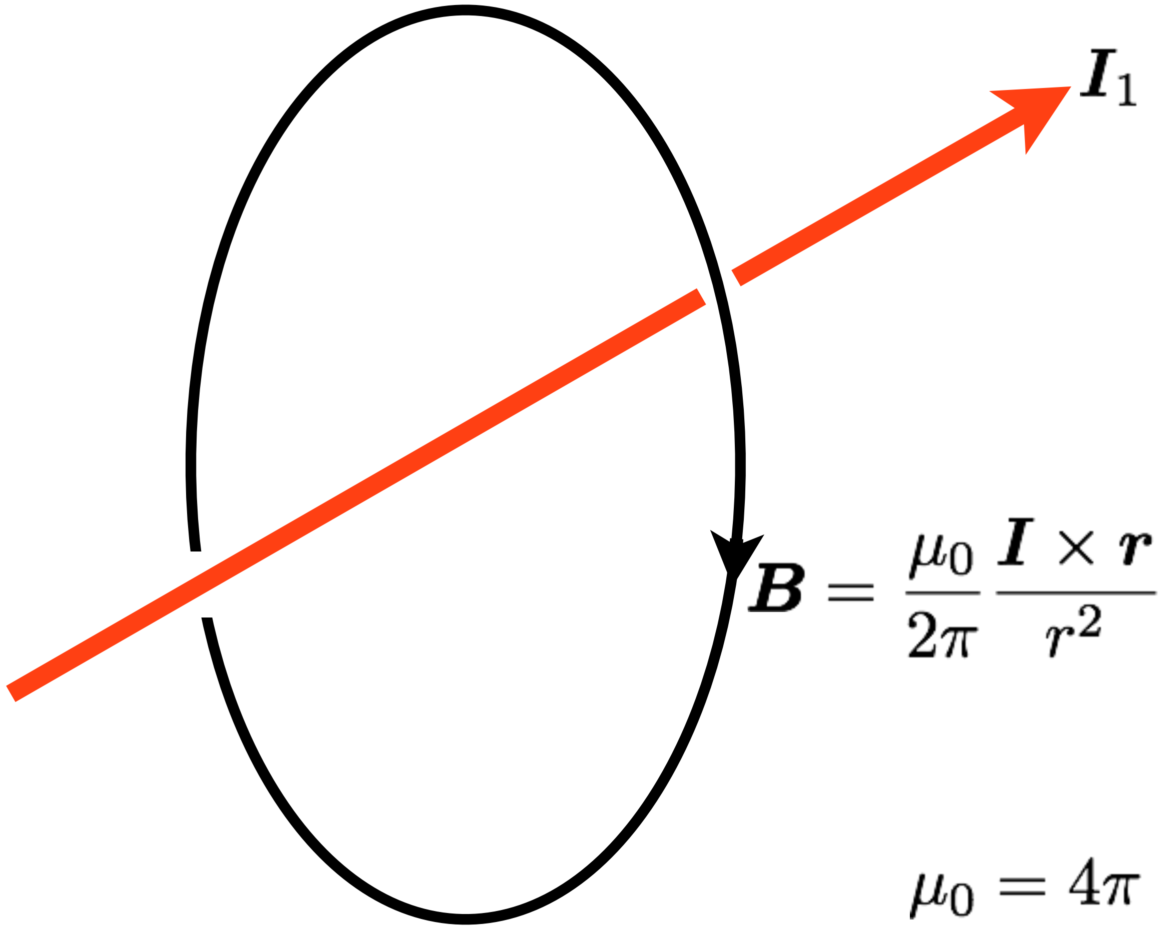
将电流视为产生磁场是合理的
電流が磁場を生じると考えるとうまく行く



$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{r^2}$$

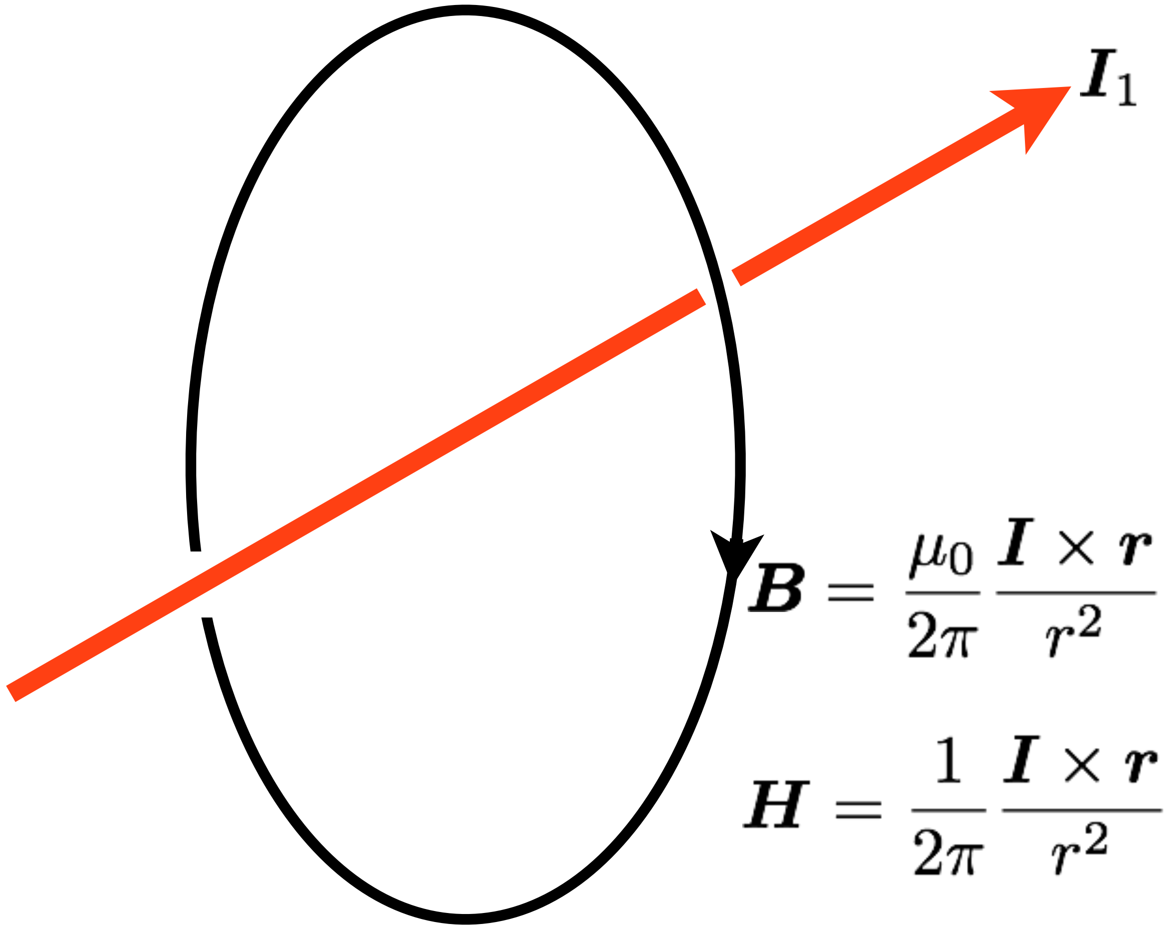
$$\boldsymbol{B} = 2\times 10^{-7}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$$



$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{r}}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

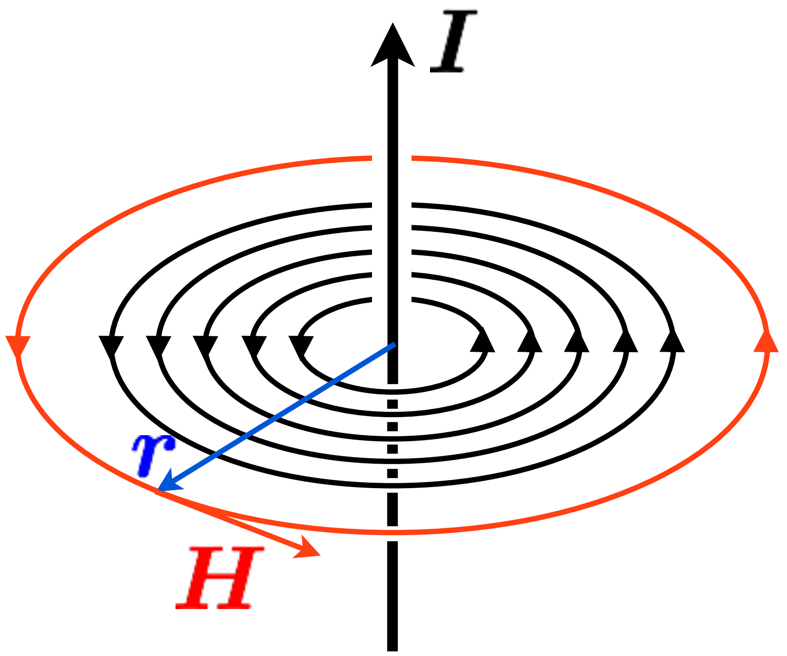


$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{r^2}$$ 磁束密度 or 磁場

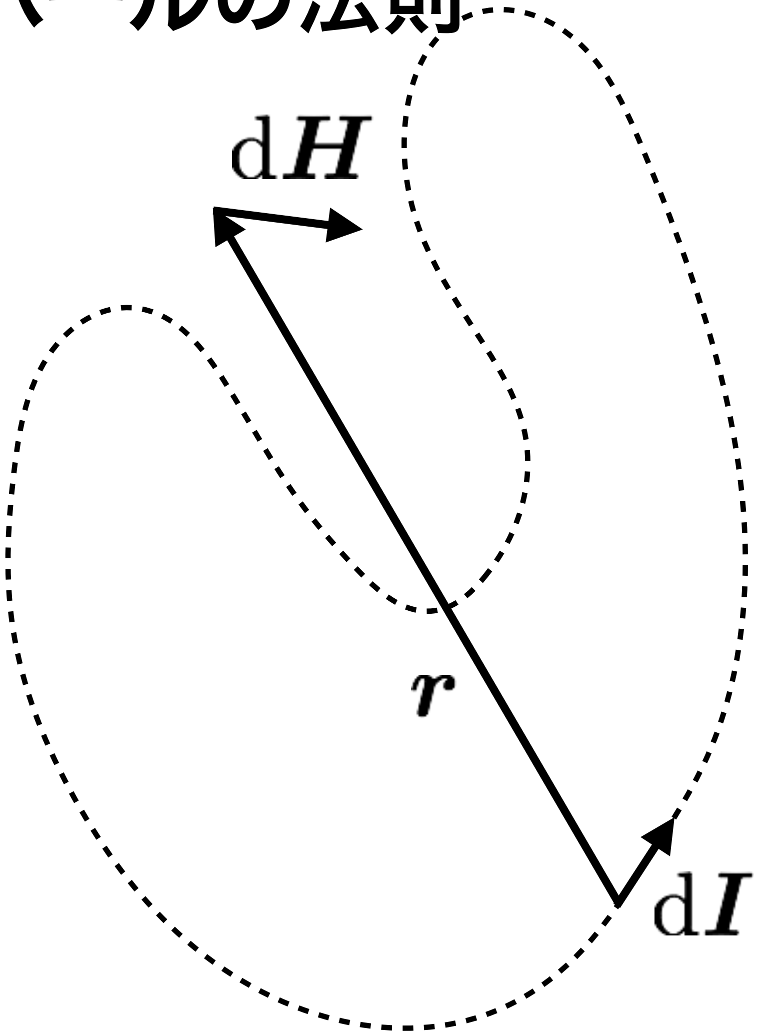
$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{r^2}$$ 磁場 or 磁界

直线电流周围的磁场
直線電流の周囲の磁場

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{r^2}$$



毕奥-萨伐尔定律
ビオ・サバールの法則



Biot-Savart's law

注意：電流素片!?

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\boldsymbol{H} = \int_V \frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

ジャン=バティスト・ビオ

Jean-Baptiste Biot

1774/04/21-1862/02/03

フェリックス・サヴァール

Felix Savart

1791/06/30-1841/03/16

安德烈-玛丽・安培

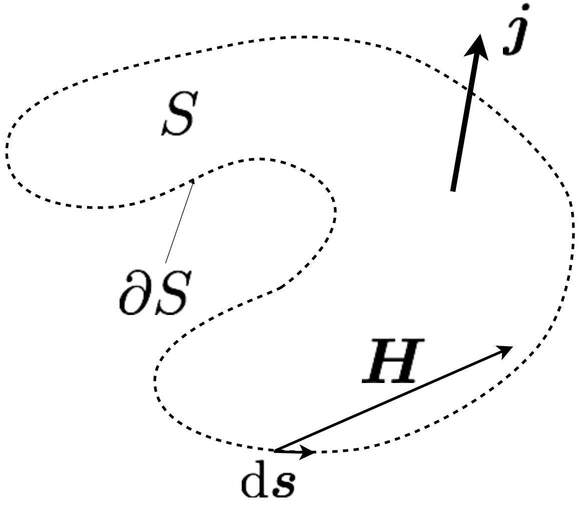
アンドレ=マリ・アンペール

André-Marie Ampère

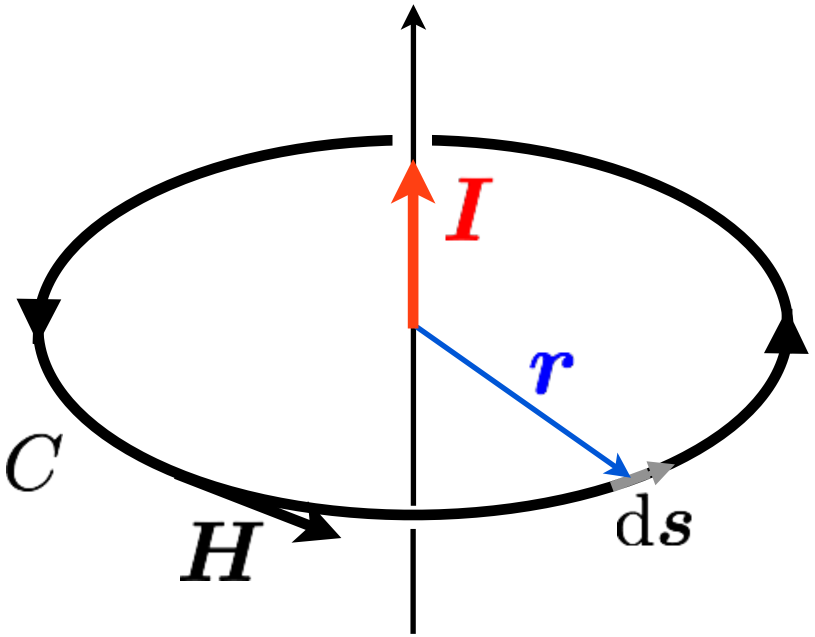
1775/01/20-1836/06/10

安培定律
アンペールの法則

$$\int_{C=\partial S} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I$$



$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{r^2}$$



$$\int_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_C \frac{1}{2\pi}\frac{(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{Ir}{r^2}\times 2\pi r$$

$$= I$$

安培定律

アンペールの法則

安培定律
アンペールの法則

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I$$

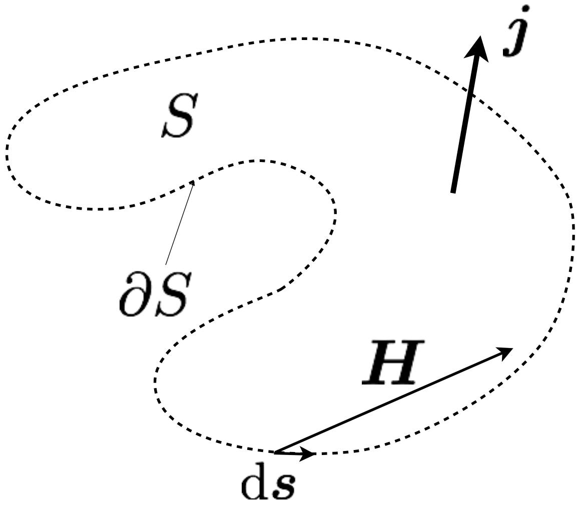
電流密度

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \underline{\int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

電流 =電荷の時間変化

単位は [C/s]

ストークスの定理



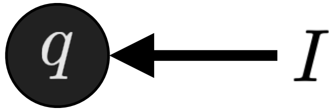
$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$$

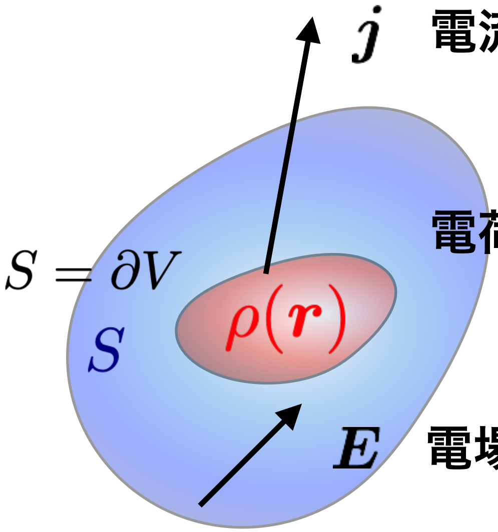
安培定律
アンペールの法則

電流は電荷の流れ　　電荷は保存する



流入する電流

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\boxed{\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V}$$



電流密度　　Sを通って出て行く電流　　$I = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

電荷密度　　Sの内側にある電荷　　$q = \int_V \rho\mathrm{d}V$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

電場　$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{d}V$

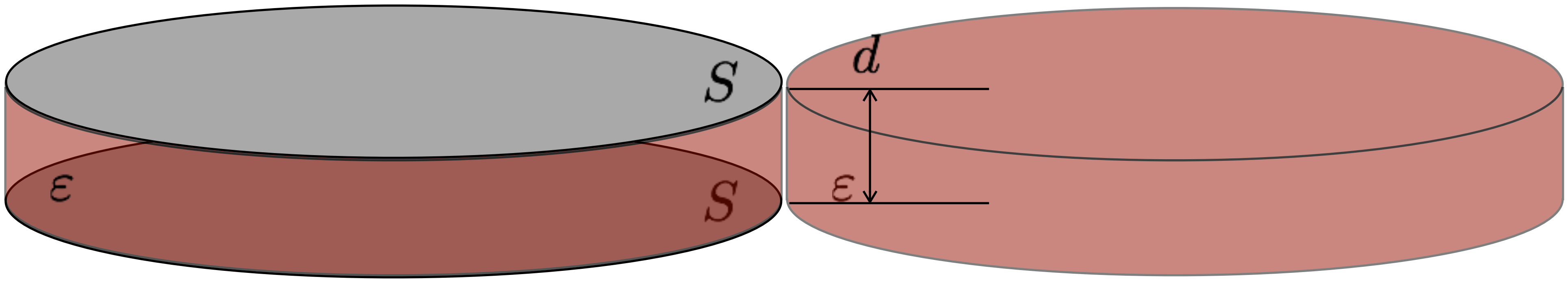
電束密度　$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$　　$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho\mathrm{d}V$

$$\int_S \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boxed{\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V}$$

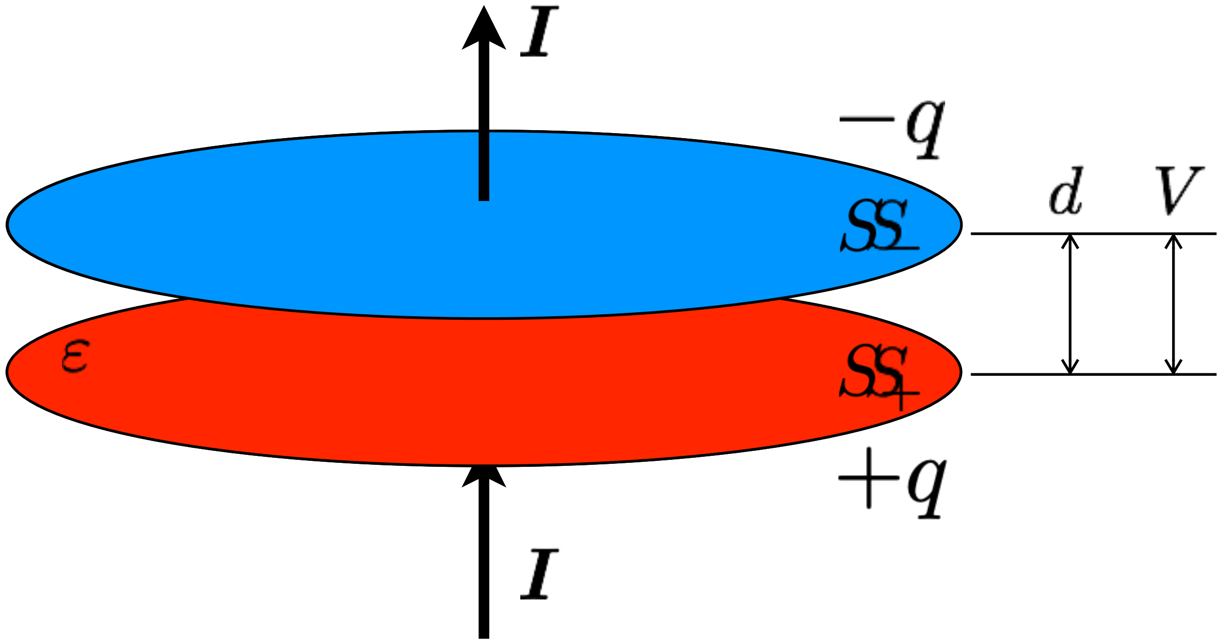
$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

電束密度に時間変化があると電流が流れる？

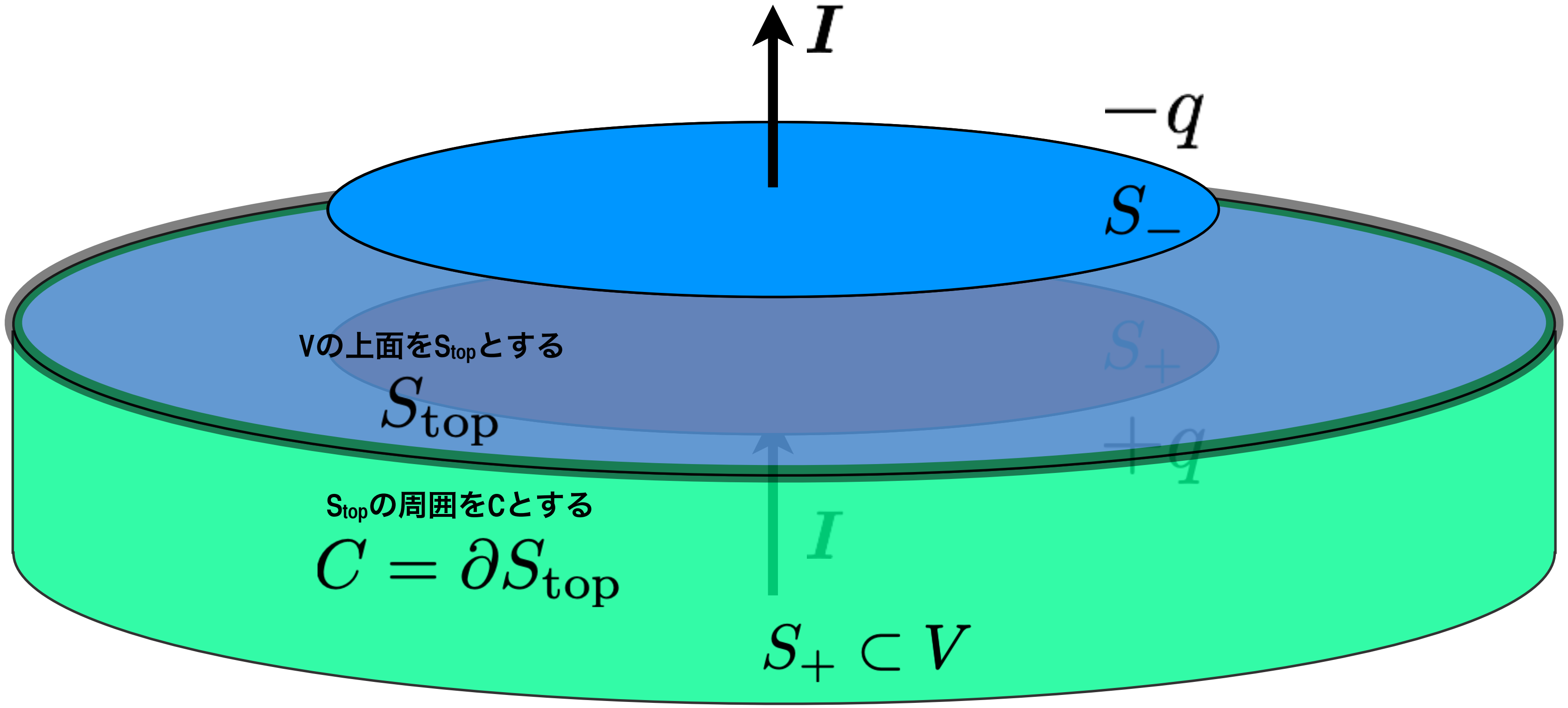
コンデンサ



コンデンサを充電する 電流を流す



コンデンサを充電する 電流を流す

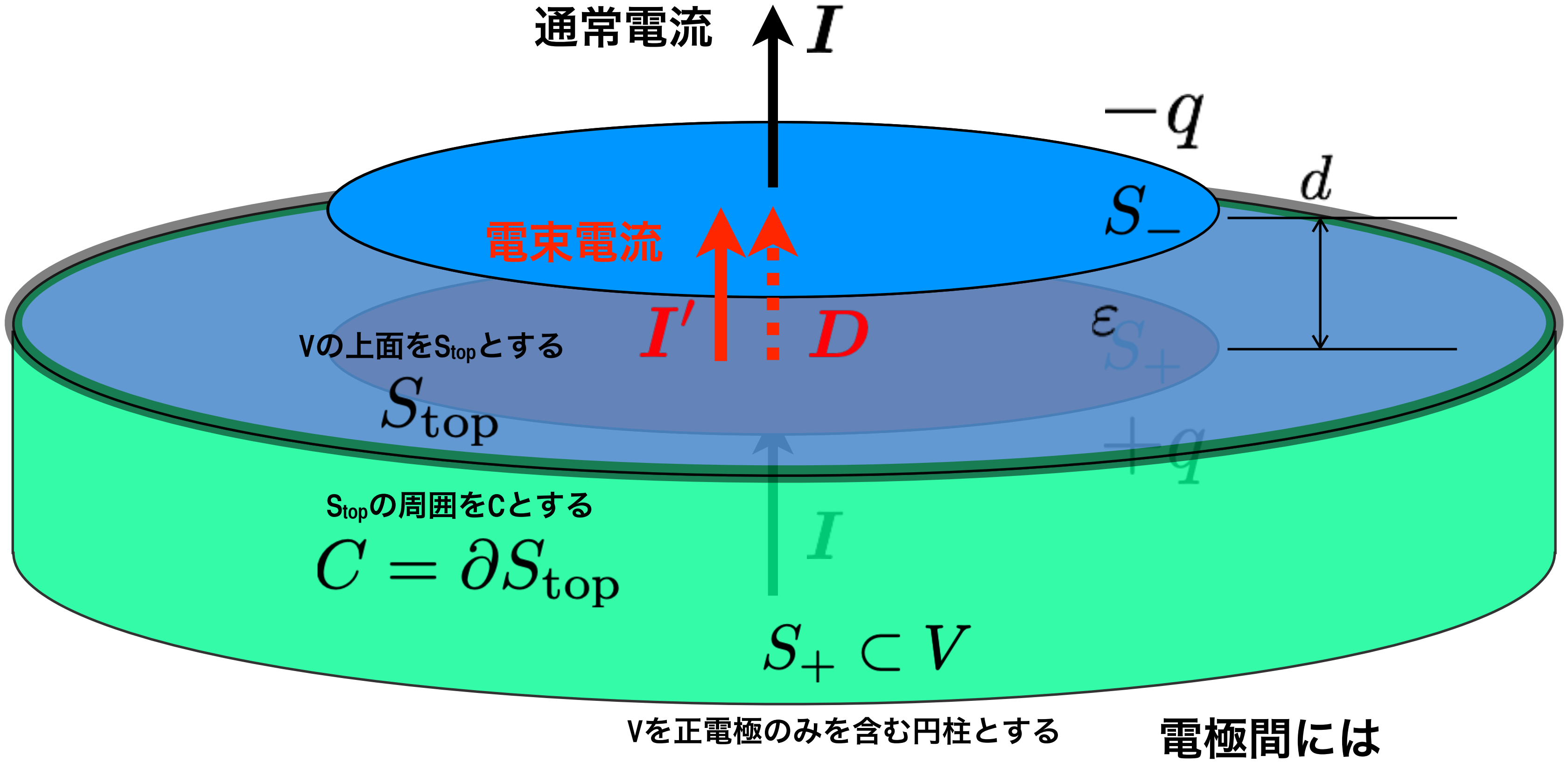


Vを正電極のみを含む円柱とする

電流はSを貫かない $$\int_{C=\partial S} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$H = 0 \quad ?$$

コンデンサを充電する 電流を流す



静電容量 $\varepsilon \dfrac{S}{d}$

電極の間には電束Dができている

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{qd}{\varepsilon S}\frac{1}{d} = \frac{q}{S}$$

$$\int_S \frac{\partial D}{\partial t}\mathrm{d}S = \frac{1}{S}\int \frac{\partial q}{\partial t}\mathrm{d}S = I$$

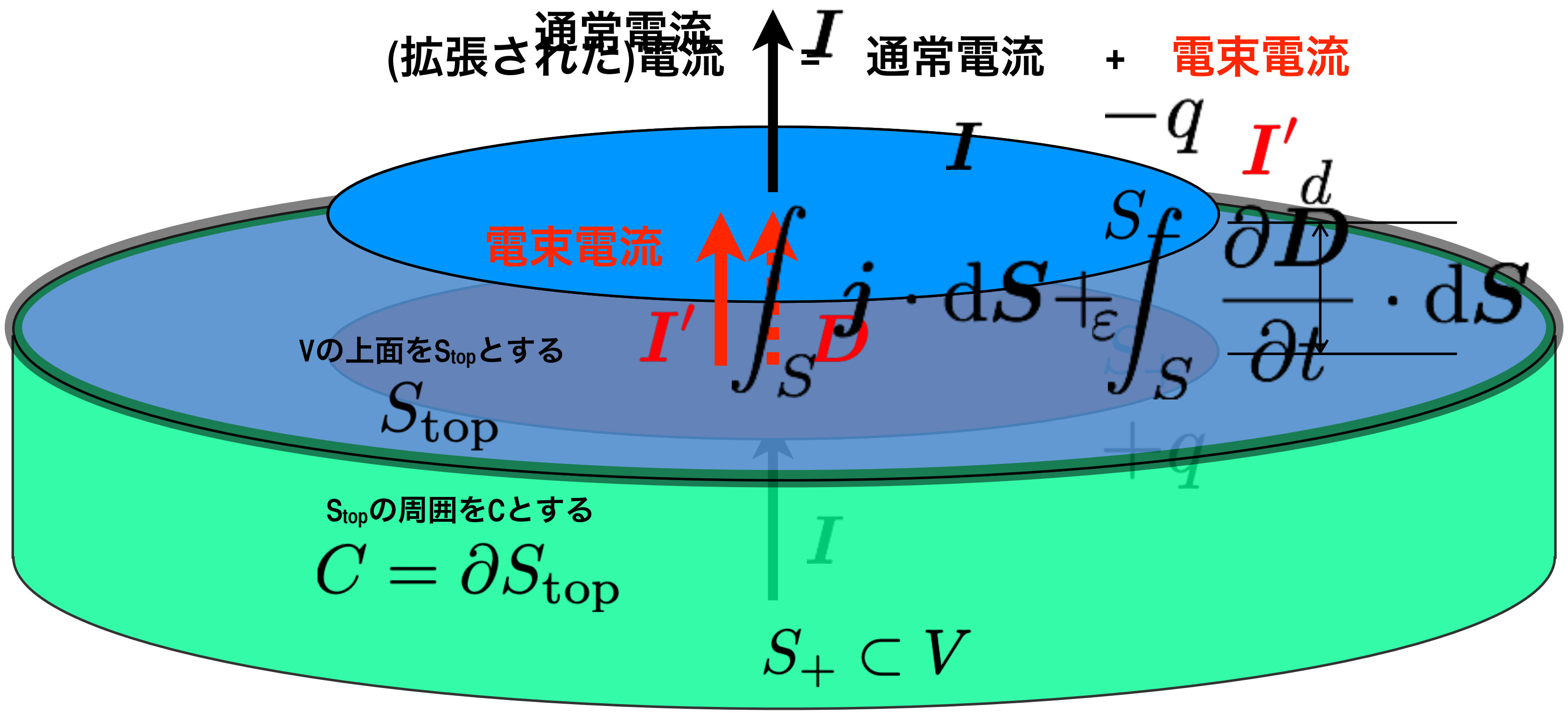
電極間には

$$\boldsymbol{I}' = \int_S \boldsymbol{j}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

という電流が流れていて、

それが磁場を発生すると考えられる

コンデンサを充電する 電流を流す



静電容量 $\varepsilon \frac{S}{d}$

Vを正電極のみを含む円柱とする

電極の間には電束Dができている

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{qd}{\varepsilon S}\frac{1}{d} = \frac{q}{S}$$

$$\int_S \frac{\partial D}{\partial t}\mathrm{d}S = \frac{1}{S}\int \frac{\partial q}{\partial t}\mathrm{d}S = I$$

電極間には

$$\boldsymbol{I}' = \int_S \boldsymbol{j}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

という電流が流れていて、

それが磁場を発生すると考えられる

(扩展)电流 = 正常电流 + 电通量电流

(拡張された)電流 = 通常電流 + 電束電流

$$\overset{\boldsymbol{I}}{\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} + \overset{\boldsymbol{I'}}{\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

アンペールの法則を

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$ と拡張する

ストークスの定理

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

(拡張された)電流 = 通常電流 + 電束電流

I I'

(拡張された)アンペールの法則

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

アンペールの法則を

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$ と拡張する

回転 磁場 電流密度 電束電流密度

ストークスの定理

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

(扩展)安培定律

(拡張された)アンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

旋转
回転

磁场
磁場

电流密度
電流密度

电通量电流密度
電束電流密度

矢量势
ベクトルポテンシャル

静磁場　アンペールの法則　真空中

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}}$$

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を満たす $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ のベクトルポテンシャルという

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mu_0 \boldsymbol{j} \qquad \boxed{\nabla(\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}}$$

Aには不定性がある

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \nabla u(\boldsymbol{r})$と置き換えても

$\nabla \times \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \boxed{\nabla \times (\nabla u(\boldsymbol{r}))}$ =0　となってBは変わらない

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}' = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla^2 u$$

Aの発散が0でない場合について、uを　$\nabla^2 u = -\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の解に取ると $\nabla \cdot \boldsymbol{A}' = 0$ となる。

このA'をAと再定義すると $\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0}$ であるものとしても、一般性を失わない

クーロンゲージ規范

クーロンゲージを採用すると

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

本日の問題

半径 a の球の表面に電荷 Q を一様に分布させる。
この球を角速度 ω で回転させた時の磁場を求めよ。

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{j}=\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta\ \delta(r-a)\boldsymbol{e}_\phi \qquad \boldsymbol{\nabla}(\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}}_{\text{クーロンゲージ}})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{j}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A})_\varphi=\boldsymbol{\nabla}^2A_\varphi-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi=-\mu\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta\delta(r-a)$$

$$(A_\varphi)_{\rm int}=\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^l P_l(\cos\theta) \qquad (A_\varphi)_{\rm ext}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}b_l\frac{1}{r^l}P_l(\cos\theta)$$

境界条件 $\quad (A_\varphi)_{\rm int}|_{r=a}=(A_\varphi)_{\rm ext}|_{r=a} \qquad -\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{B}_{\rm ext}|_{r=a}-\boldsymbol{B}_{\rm int}|_{r=a}\right)=\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{A}_{\rm int}=\frac{\mu Q\omega}{12\pi a}r\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\varphi \qquad \boldsymbol{A}_{\rm ext}=\frac{\mu Q\omega}{12\pi a^2}\frac{1}{r^2}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{E}_{\rm int}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}_{\rm int}=\frac{\mu Q\omega}{6\pi a}\left(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

$$\boldsymbol{E}_{\rm ext}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}_{\rm ext}=\frac{\mu Q\omega}{6\pi a}\frac{1}{r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

ヘルムホルツの定理 $\boxed{\boldsymbol{F} = -\boxed{\nabla\phi} + \boxed{\nabla \times \boldsymbol{A}}}$

微分可能なベクトル関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が、無限遠 $(r \to \infty)$ において $|\boldsymbol{F}|$ が $1/r$ 以上に速く 0 に収束し、無限遠において $|\nabla \cdot \boldsymbol{F}|$ と $|\nabla \times \boldsymbol{F}|$ が $1/r^2$ 以上に速く $\boldsymbol{0}$ に収束する場合、$\boldsymbol{F}$ はスカラーポテンシャルの勾配とベクトルポテンシャルの回転の和として、定数及び定ベクトルの差異を除いて一意的に表せる。

$$\phi(\boldsymbol{r}) \to \phi'(\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{r}) + \psi + \nabla \times \boldsymbol{X}$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a} + \nabla u(\boldsymbol{r})$$

縦成分
longitudinal

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times (\nabla\phi(\boldsymbol{r})) = \boldsymbol{0}$$

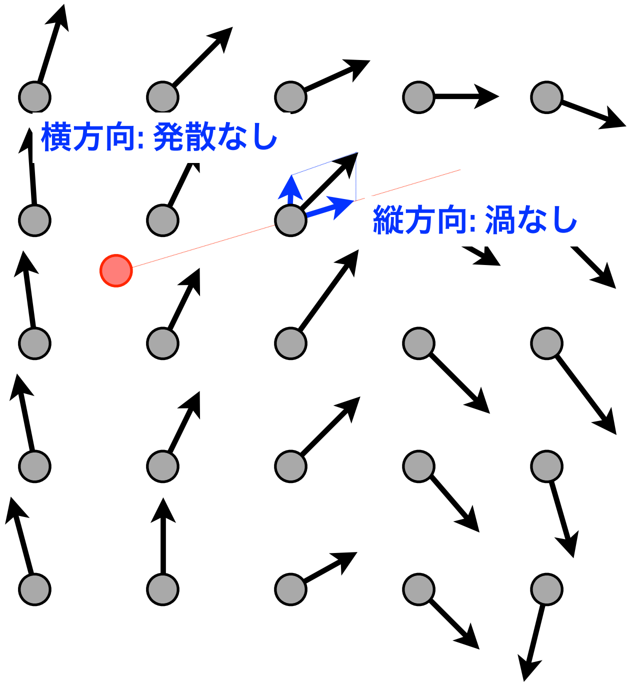
渦なし

横成分
transverse

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = 0$$

発散なし



法拉第电磁感应定律
ファラデーの電磁誘導の法則

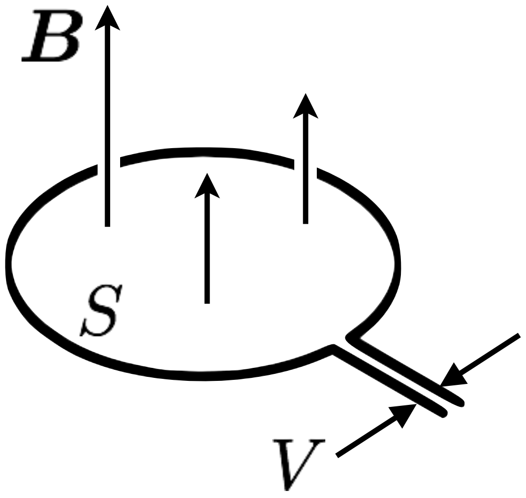
マイケル・ファラデー

Michael Faraday

1791/09/22-1867/08/25

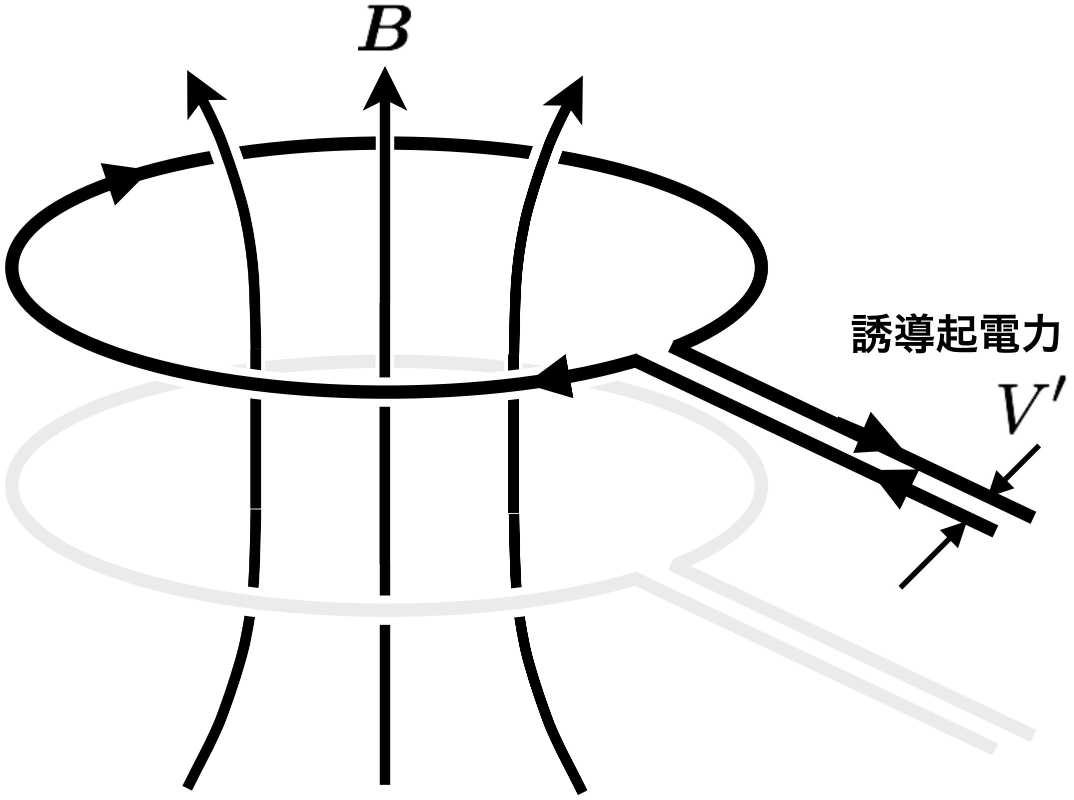
ファラデーの電磁誘導の法則

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



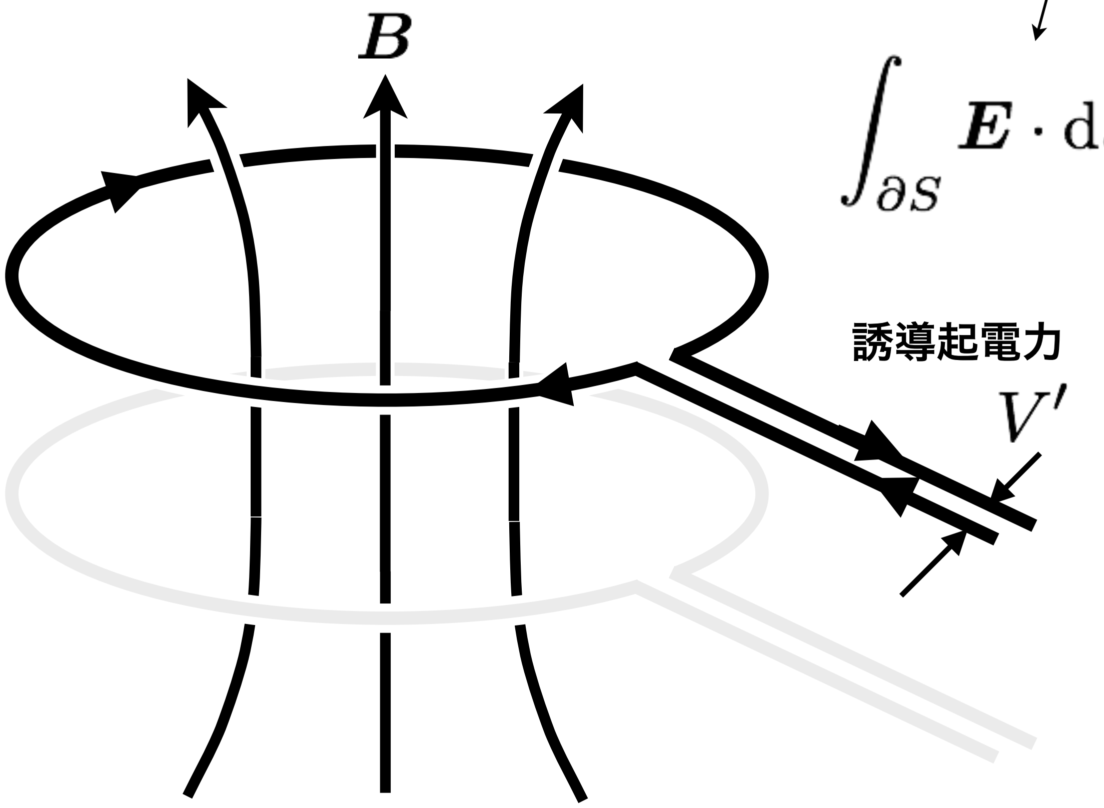
電磁誘導

磁束が変化すると
打ち消すように電流が流れる



電磁誘導

磁束が変化すると
打ち消すように電流が流れる



誘導起電力　磁束変化

$$V' = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

電位差=電場×距離

磁束=磁束密度×面積
(磁荷)

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

電磁誘導

磁束が変化すると
打ち消すように電流が流れる

誘導起電力　磁束変化

$$V' = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

電位差=電場×距離

磁束=磁束密度×面積
(磁荷)

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

電磁誘導

磁束が変化すると
打ち消すように電流が流れる

誘導起電力　磁束変化

$$V' = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

電位差=電場×距離

磁束=磁束密度×面積
(磁荷)

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ストークスの定理

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

電磁誘導

誘導起電力　　磁束変化

磁束が変化すると
打ち消すように電流が流れる

$$V' = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

電位差=電場×距離

磁束=磁束密度×面積
(磁荷)

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ストークスの定理

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

電磁誘導

磁束が変化すると
打ち消すように電流が流れる

誘導起電力　磁束変化

$$V' = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

電位差=電場×距離

磁束=磁束密度×面積
(磁荷)

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

電場と磁束変化の関係

(electric field ⇔ magnetic flux change)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

回転　　電場

磁束密度変化

電場と磁束変化の関係

(electric field ⇔ magnetic flux change)

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

回転　　電場

磁束密度変化

麦克斯韦方程组
マクスウェル方程式

$\boldsymbol{E}$	電場	$\boldsymbol{D}$	電束密度	ε	誘電率	ρ	電荷密度
$\boldsymbol{H}$	磁場	$\boldsymbol{B}$	磁束密度	μ	透磁率	$\boldsymbol{j}$	電流密度

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

静電場

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

静磁場 (磁気単極子がない)

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

電流磁場 (電荷変化⇒磁場)

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

電磁誘導 (磁荷変化⇒電場)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

$\boldsymbol{E}$	電場	$\boldsymbol{D}$	電束密度	ε	誘電率	ρ	電荷密度
$\boldsymbol{H}$	磁場	$\boldsymbol{B}$	磁束密度	μ	透磁率	$\boldsymbol{j}$	電流密度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

静電場

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

静磁場 (磁気単極子がない)

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

電流磁場 (電荷変化⇒磁場)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

電磁誘導 (磁荷変化⇒電場)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

マクスウェルの方程式

1864年

ジェームズ・クラーク・マクスウェル
James Clerk Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

1831/06/13-1879/11/05

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

マクスウェルの方程式

ジェームズ・クラーク・マクスウェル

James Clerk Maxwell

1864年

電磁場の方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

1831/06/13-1879/11/05

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

マクスウェルの方程式

1864年

ジェームズ・クラーク・マクスウェル
James Clerk Maxwell

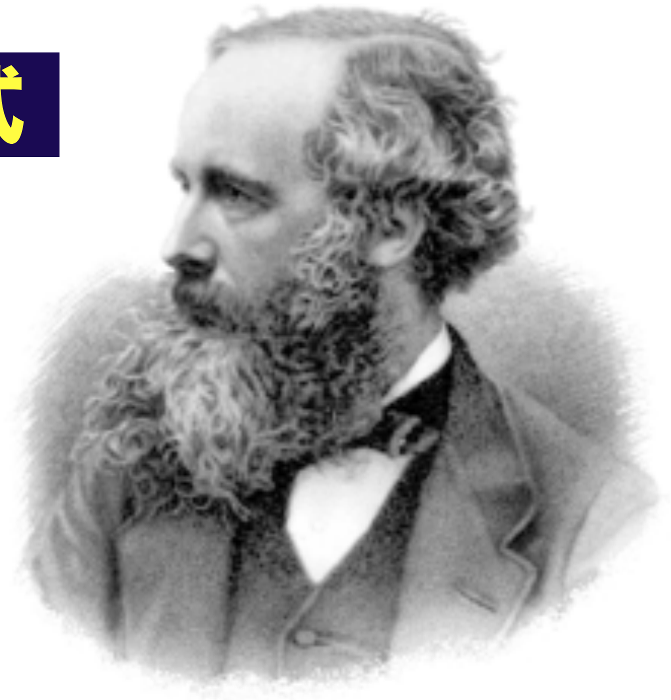
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

場の方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$



1831/06/13-1879/11/05

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

麦克斯韦方程组
マクスウェルの方程式 1864年
Maxwell’s equations

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦尔

ジェームズ・クラーク・マクスウェル

James Clerk Maxwell

1831/06/13-1879/11/05

電磁波

電磁波

Maxwellの方程式

各量の名称

$\boldsymbol{E}$	電場	$\boldsymbol{D}$	電束密度	ε	誘電率	ρ	電荷密度
$\boldsymbol{H}$	磁場	$\boldsymbol{B}$	磁束密度	μ	透磁率	$\boldsymbol{j}$	電流密度

方程式本体

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

クーロンの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

磁気単極子が無い

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

電気→磁気

アンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

磁気→電気

ファラデーの電磁誘導の法則

場と束の関係

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

電荷分布と電流分布が与えられると、電場と磁場が定まる

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \boxed{\rho}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boxed{\boldsymbol{j}}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

電荷分布と電流分布が与えられると、電場と磁場が定まる

電荷がなくて

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \boxed{0}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

電荷分布と電流分布が与えられると、電場と磁場が定まる

電荷がなくて、電流もない場合でも、解があるかも

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \boxed{0}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boxed{\mathbf{0}}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

電磁波

マクスウェル方程式　　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

電磁波

マクスウェル方程式　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

電磁波

マクスウェル方程式　　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H})$$

電磁波

マクスウェル方程式　　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H})$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle$$

ラプラシアン (Laplacian)

電磁波

マクスウェル方程式　　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\triangle \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle$$

ラプラシアン (Laplacian)

電磁波

マクスウェル方程式　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad \triangle \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

電磁波

マクスウェル方程式　　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{E})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad \triangle \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

電磁波

マクスウェル方程式　　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E})$$

$$= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\triangle \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle$$

ラプラシアン (Laplacian)

電磁波

マクスウェル方程式　　　真空中で、電荷も電流も無い時は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\triangle \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

$$\triangle \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

電磁波程式

$$\Delta \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \qquad \Delta \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

波動方程式

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ という関数は $|\boldsymbol{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ であれば $\triangle F = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ をみたす

$$\begin{aligned}\triangle F &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)\\ &= \left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)F''(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)\\ &= |\boldsymbol{k}|^2 F''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}F(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)\\ &= \omega^2 F''(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)\\ &= \omega^2 F''\end{aligned}$$

波動方程式

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ は $|\boldsymbol{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ であれば解である

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ という関数は $|\boldsymbol{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ であれば $\triangle F = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ をみたす

波動方程式

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ は $|\boldsymbol{k}|^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$ であれば解である

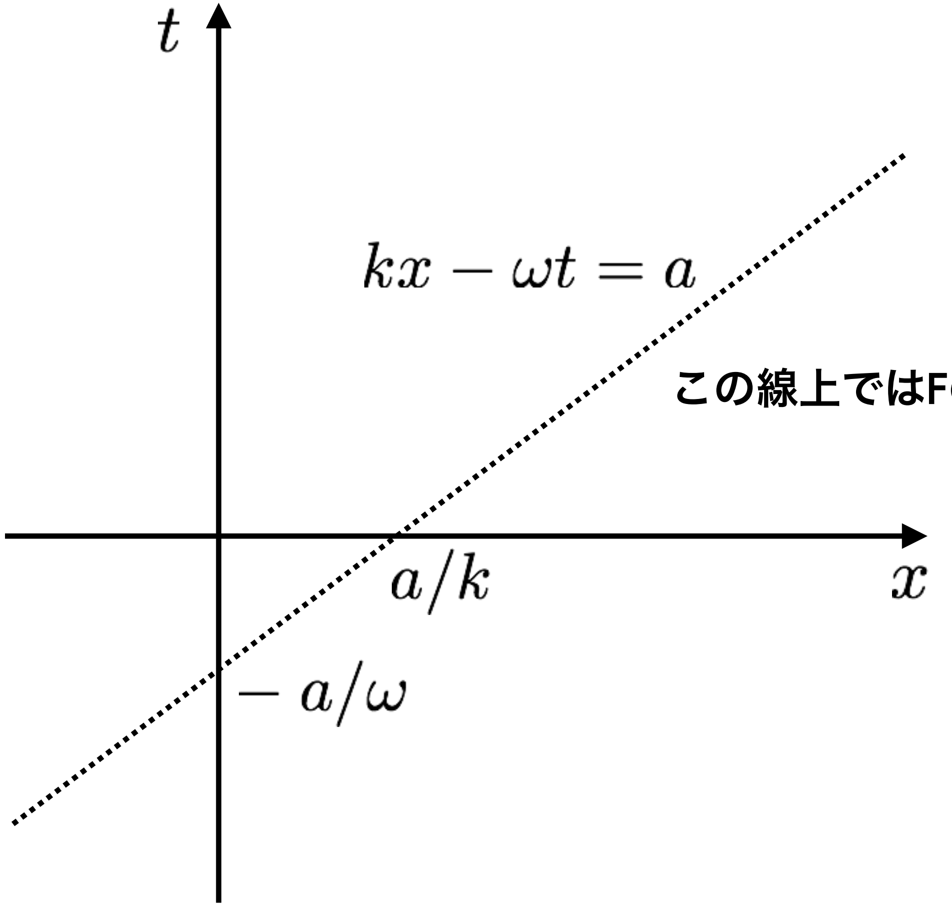
波動方程式

$F(kx - \omega t)$　を考える

$kx - \omega t = a$　(一定)を図示すると

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$　は　$|\boldsymbol{k}|^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$　であれば解である



波動方程式

$F(kx - \omega t)$ を考える

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

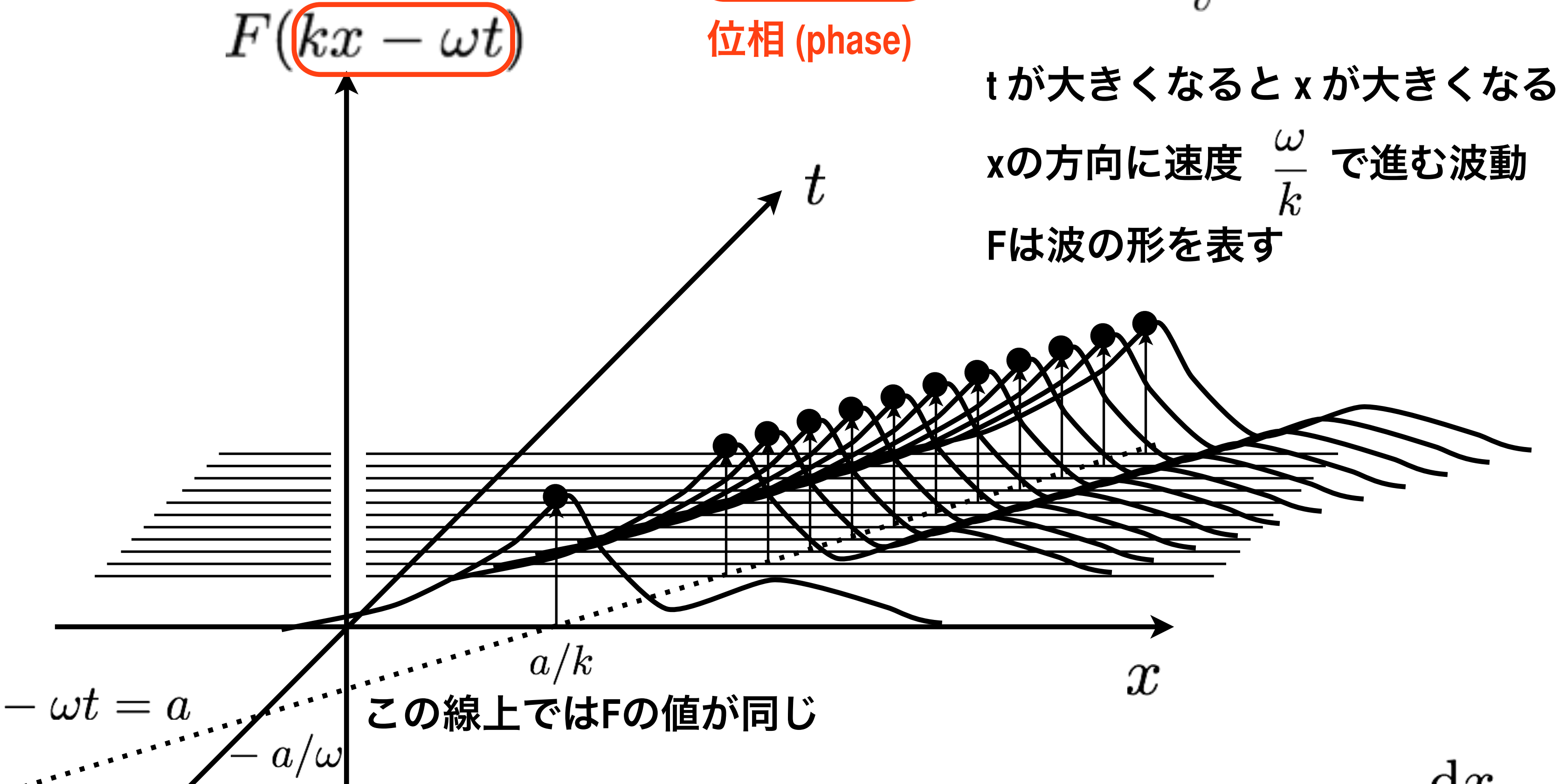
$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ は $|\boldsymbol{k}|^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$ であれば解である

位相 (phase)

t が大きくなると x が大きくなる

xの方向に速度 $\dfrac{\omega}{k}$ で進む波動

Fは波の形を表す



$$kx - \omega t = a \rightarrow k\mathrm{d}x - \omega \mathrm{d}t = 0 \rightarrow v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}$$

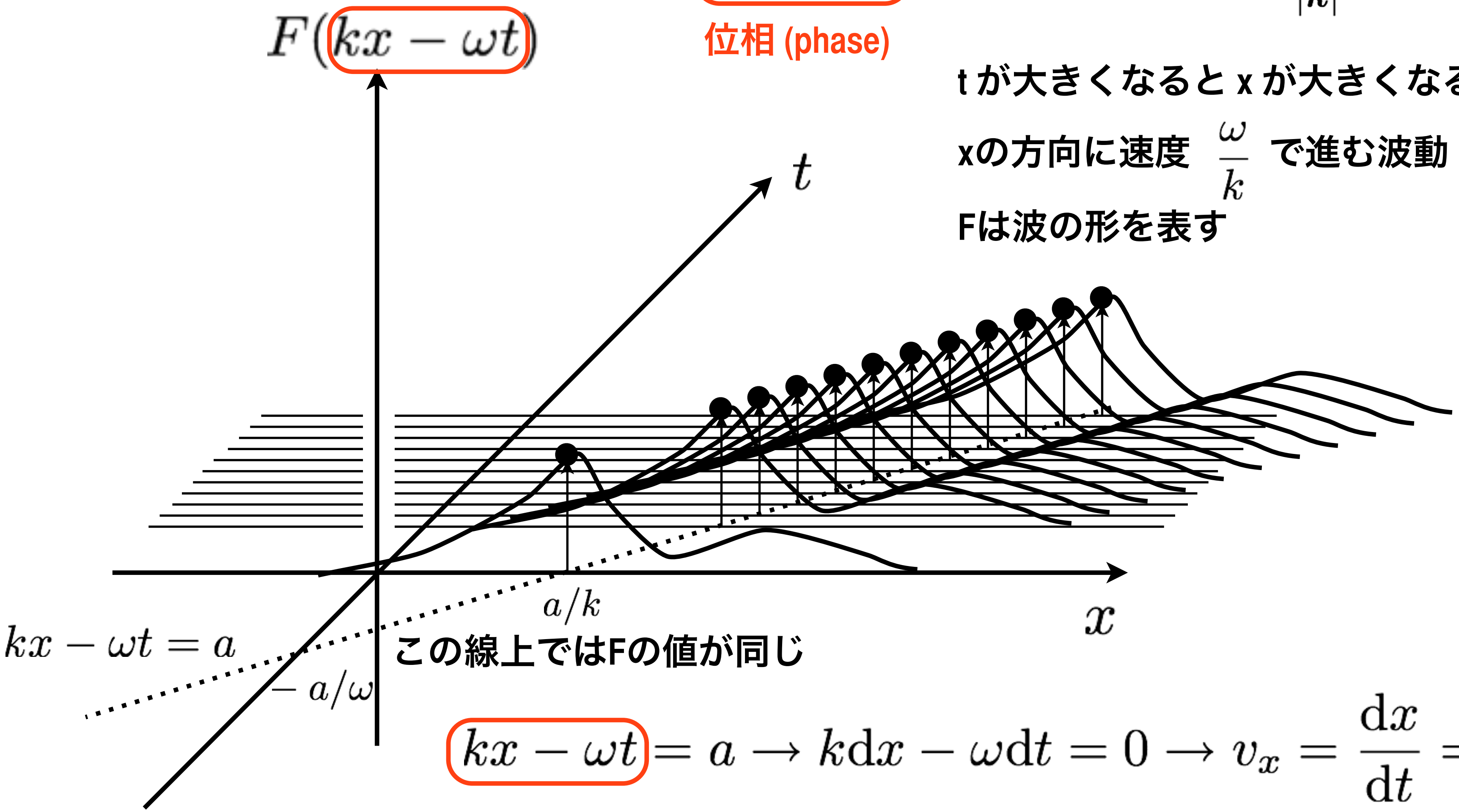
波動方程式

$F(kx - \omega t)$ を考える

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ は k 方向に速度 $v = \dfrac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$ で進む波動

位相 (phase)



t が大きくなると x が大きくなる

xの方向に速度 $\dfrac{\omega}{k}$ で進む波動

Fは波の形を表す

$$kx - \omega t = a \rightarrow k\mathrm{d}x - \omega\mathrm{d}t = 0 \rightarrow v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}$$

波動方程式

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ という関数は $|\boldsymbol{k}|^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$ であれば $\triangle F = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ をみたす

$G(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega t)$ という関数は $|\boldsymbol{k}|^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$ であれば $\triangle G = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}$ をみたす

波動方程式

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

k 方向に速度 $v = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$ で進む波動

$F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ という関数は $|\boldsymbol{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ であれば $\triangle F = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ をみたす

$G(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \omega t)$ という関数は $|\boldsymbol{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ であれば $\triangle G = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$ をみたす

-*k* 方向に速度 $v = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$ で進む波動

波動方程式

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$
\begin{array}{lr}
a\times & \triangle F = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\
b\times & \triangle G = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\
+) & \\
\hline
 & \triangle(aF+bG) = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(aF+bG)
\end{array}
$$

任意の定数 a, b 任意の関数 F, G に対して

$$f = aF(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) + bG(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega t)$$

が解である

波動方程式

$$\triangle f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$
\begin{array}{rl}
a\times & \triangle F = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\
b\times & \triangle G = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\
+) & \\
\hline
 & \triangle(aF+bG) = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(aF+bG)
\end{array}
$$

任意の定数 a, b 任意の関数 F, G に対して

$$f = a\underbrace{\boxed{F}\left(\boxed{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t}\right)}_{\boldsymbol{k}\ \text{の方向に進む}} + b\underbrace{\boxed{G}\left(\boxed{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega t}\right)}_{-\boldsymbol{k}\ \text{の方向に進む}}$$

波形　位相　波形　位相

が解である

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ に代入

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} E_{0x} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + \frac{\partial}{\partial y} E_{0y} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + \frac{\partial}{\partial z} E_{0z} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right) e^{-i\omega t}$$

$$= \left(k_x E_{0x} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + k_y E_{0y} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + k_z E_{0z} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right) e^{-i\omega t}$$

$$= \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H} = 0$ に代入

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial}{\partial x}H_{0x}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + \frac{\partial}{\partial y}H_{0y}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + \frac{\partial}{\partial z}H_{0z}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right)e^{-i\omega t}$$

$$= \left(k_x H_{0x}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + k_y H_{0y}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + k_z H_{0z}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right)e^{-i\omega t}$$

$$= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_0 = 0$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_0 = 0$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直 　　$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$ に代入

左辺 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$ 　　右辺 $-\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega\mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}\mu_0 \boldsymbol{H}$$

伝播方向の単位ベクトル

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} = c\mu_0 \boldsymbol{H}$$

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ に代入

左辺 $\nabla \times \boldsymbol{H} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}$

右辺 $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega\epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{H} = -\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

伝播方向の単位ベクトル

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} = c\mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{H} = -c\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} = c\mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{H} = -c\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{H} = -\frac{1}{c\mu_0}\boldsymbol{E}$$

$$c\mu_0 \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{E}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times (c\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{E}$$

$$c\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{E}$$

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

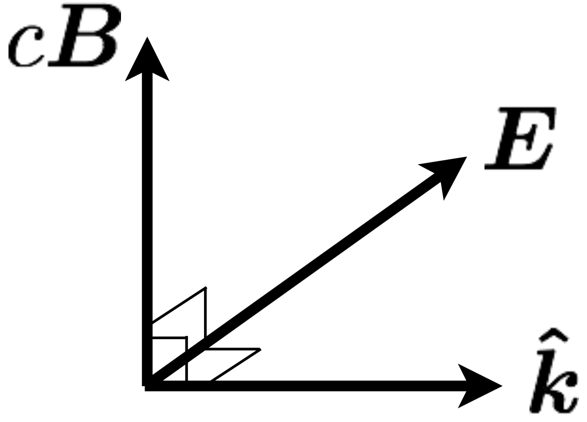
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

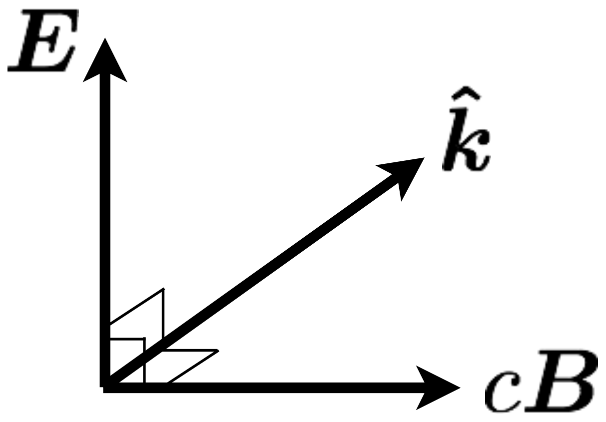
$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}$$

$$c\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{E}$$





$$|\hat{\boldsymbol{k}}|\,|\boldsymbol{E}|\sin\frac{\pi}{2} = |c\boldsymbol{B}|$$

$$|\boldsymbol{E}| = |c\boldsymbol{B}|$$

$$|c\boldsymbol{B}|\,|\hat{\boldsymbol{k}}|\sin\frac{\pi}{2} = |\boldsymbol{E}|$$

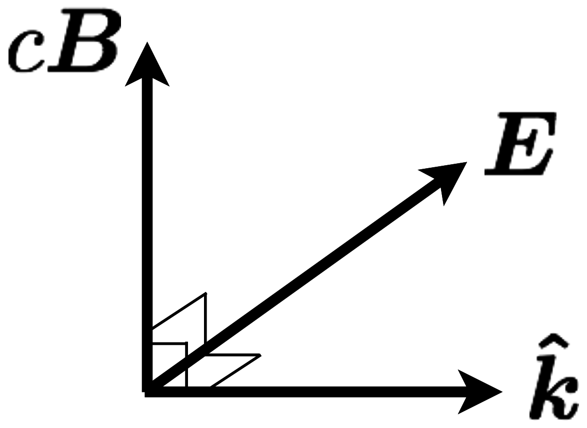
$$|\boldsymbol{E}| = |c\boldsymbol{B}|$$

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ は垂直

$$\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}$$

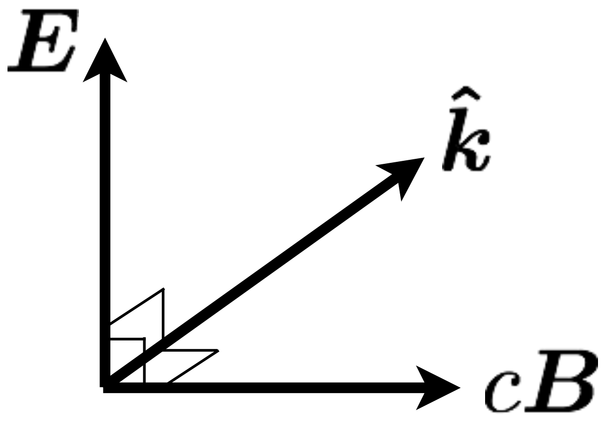


$$|\boldsymbol{E}| = |c\boldsymbol{B}|$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{H}$ は垂直

$$c\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{E}$$

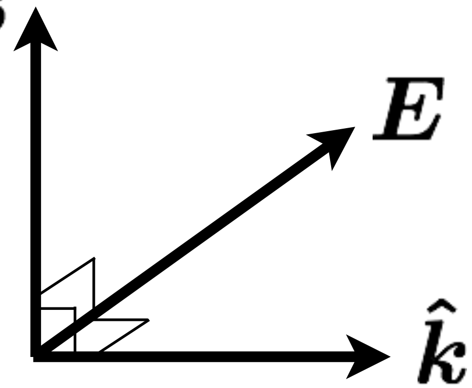


$$|\boldsymbol{E}| = |c\boldsymbol{B}|$$

電磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

$$c\mu_0 \boldsymbol{H} = c\boldsymbol{B}$$



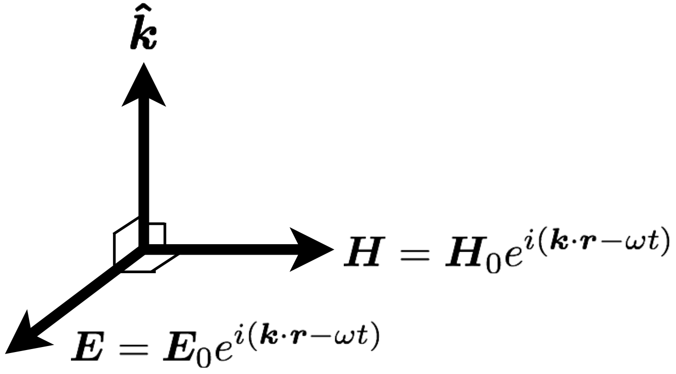
$$|\boldsymbol{E}| = |c\boldsymbol{B}| = |c\mu_0 \boldsymbol{H}|$$

電場と磁場は互いに他を伴い、進行方向に垂直な方向に振動する　⇒　電磁波は横波

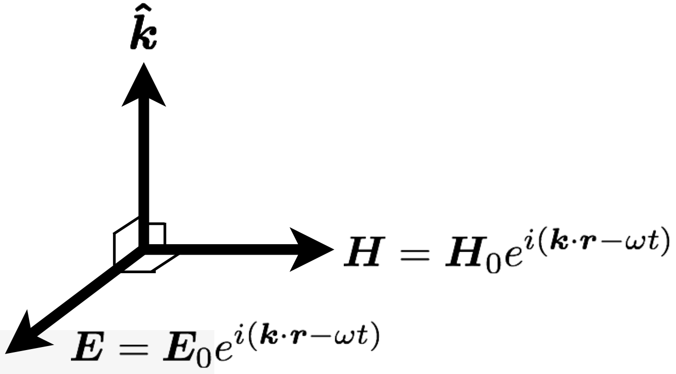
伝播速度 $v = \dfrac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$　波長 $\dfrac{2\pi}{|\boldsymbol{k}|}$　周期 $\dfrac{2\pi}{\omega}$

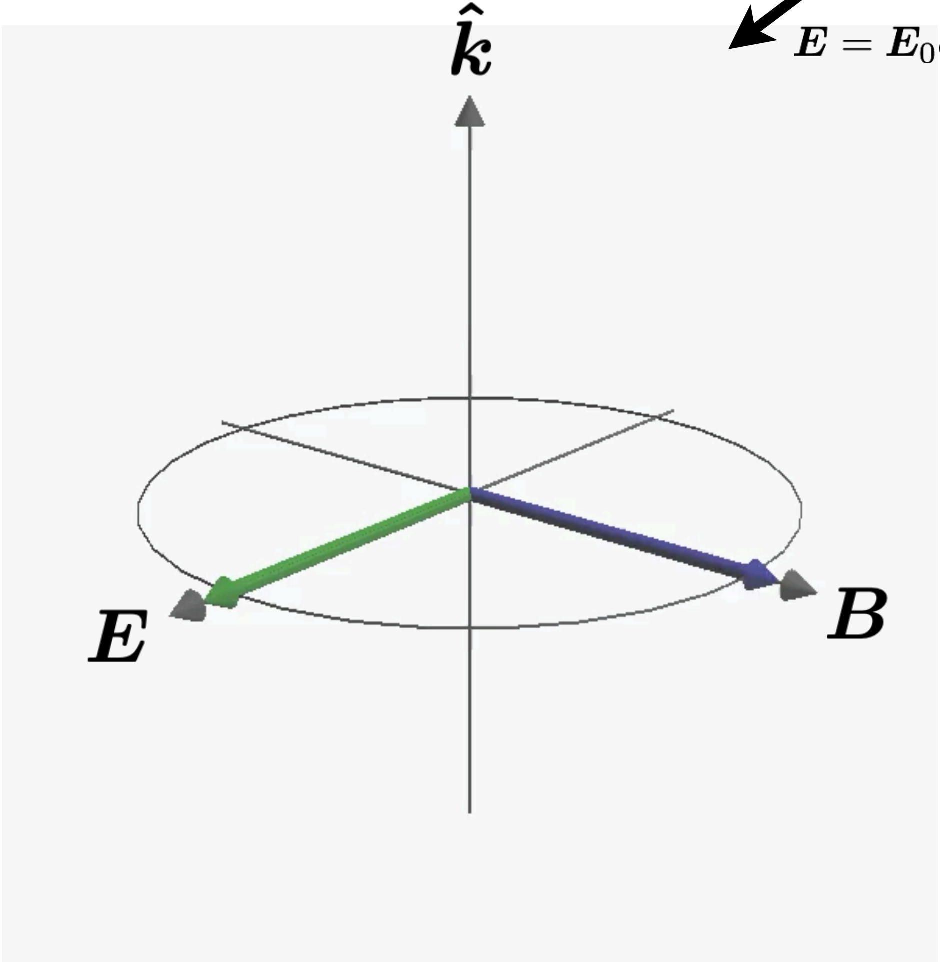
波数　角振動数

電磁波

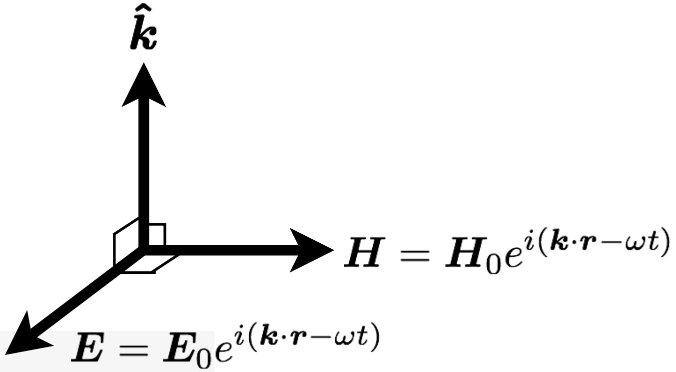

$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$

電磁波

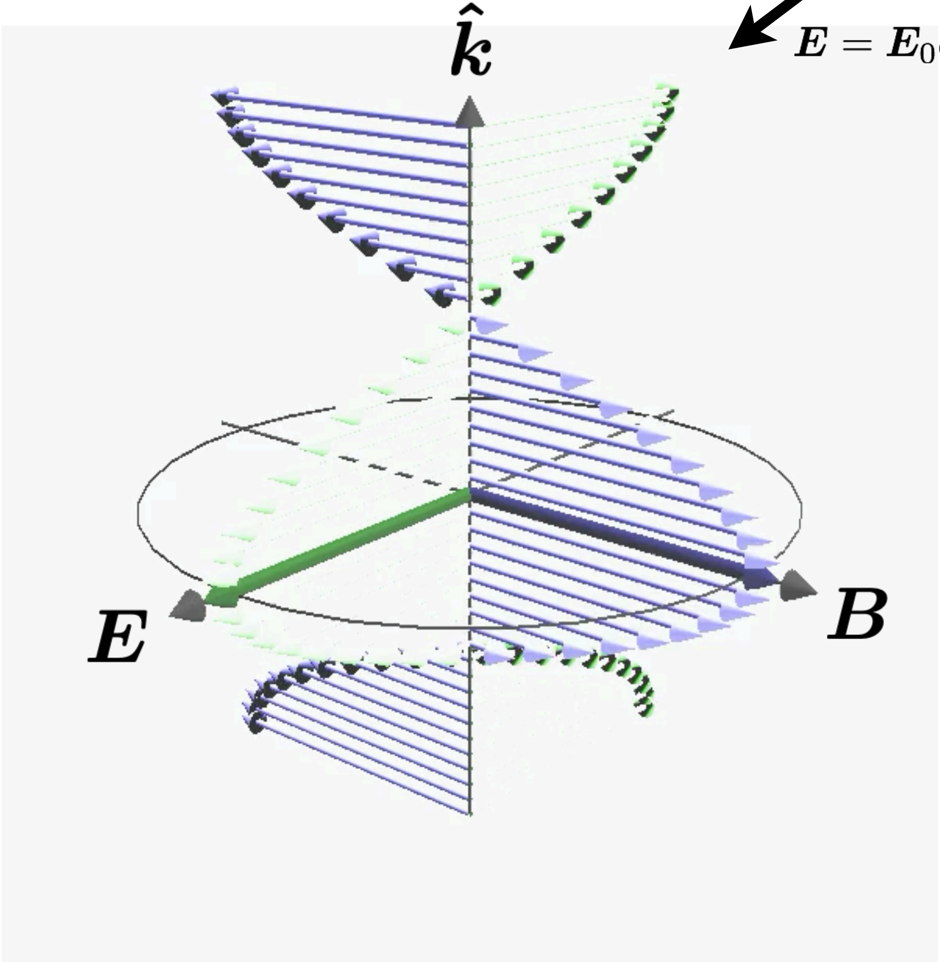

$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$


$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{B}$

電磁波

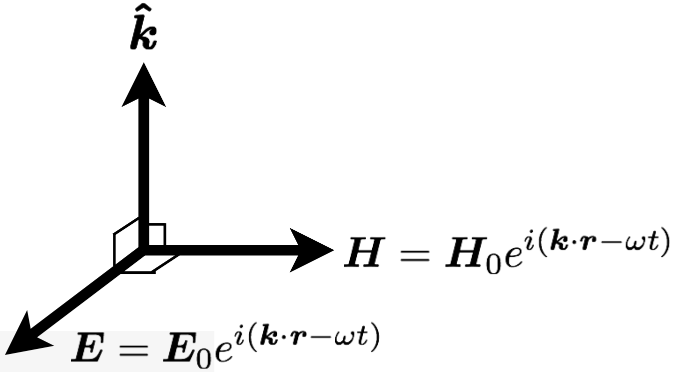


$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$

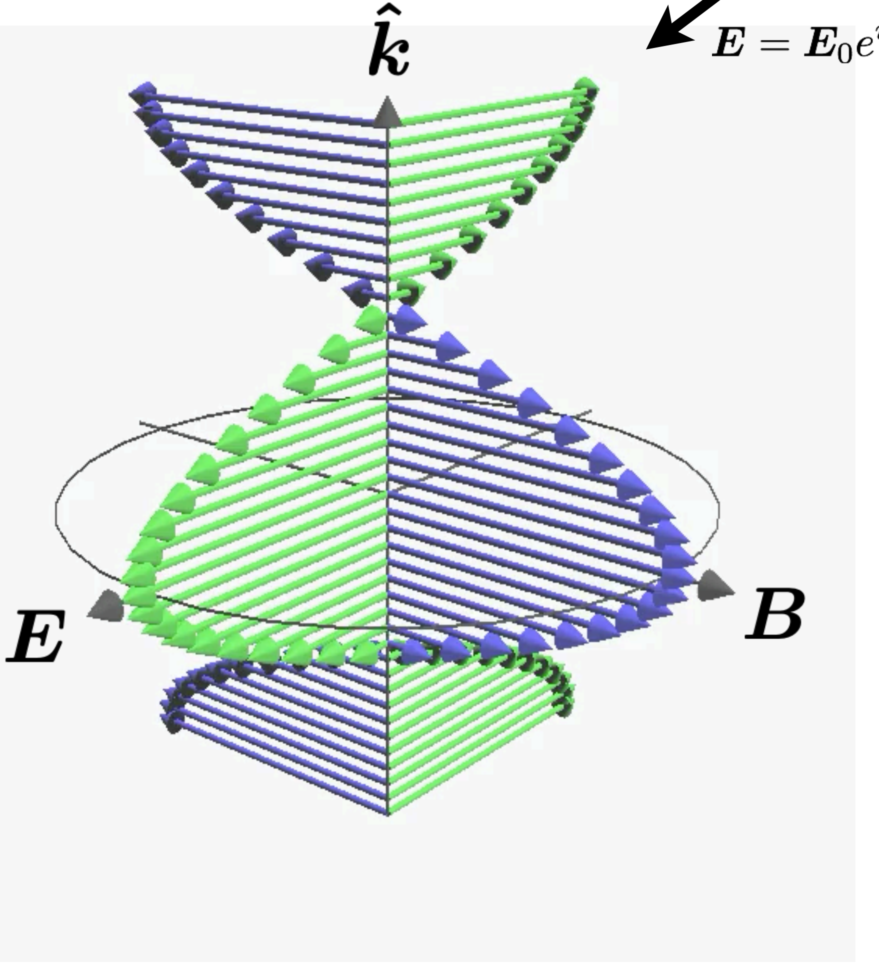


$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{B}$

電磁波



$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$



$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{B}$

電磁波 (真空中)

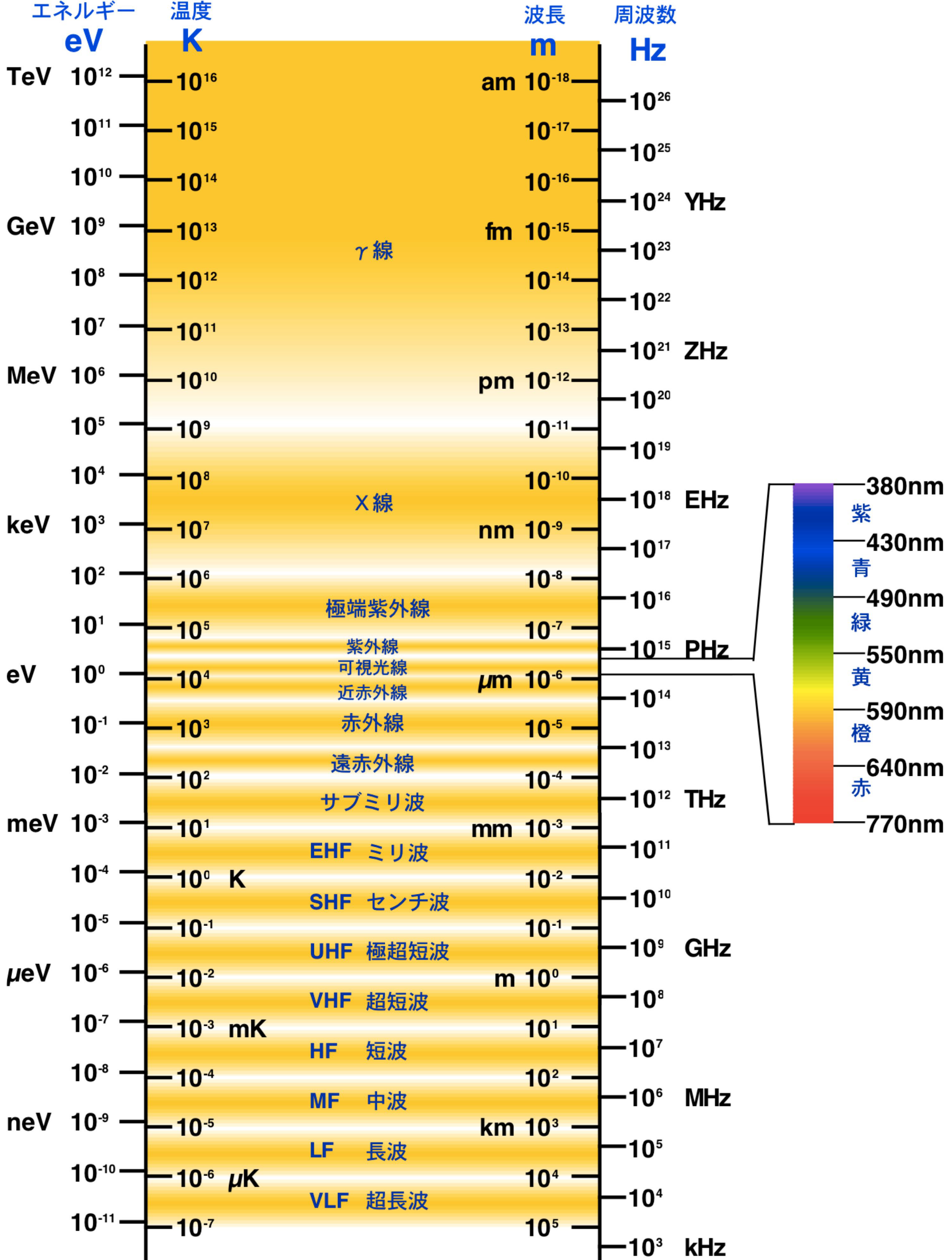
$$\triangle \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \qquad \triangle \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

真空の誘電率　　真空の光速度

真空の透磁率

電磁波の帯域名称



エネルギー
eV
温度
K
波長
m
周波数
Hz
TeV 10^12
10^11
10^10
GeV 10^9
10^8
10^7
MeV 10^6
10^5
10^4
keV 10^3
10^2
10^1
eV 10^0
10^-1
10^-2
meV 10^-3
10^-4
10^-5
μeV 10^-6
10^-7
10^-8
neV 10^-9
10^-10
10^-11
10^16
10^15
10^14
10^13
10^12
10^11
10^10
10^9
10^8
10^7
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0 K
10^-1
10^-2
10^-3 mK
10^-4
10^-5
10^-6 μK
10^-7
γ線
X線
極端紫外線
紫外線
可視光線
近赤外線
赤外線
遠赤外線
サブミリ波
EHF ミリ波
SHF センチ波
UHF 極超短波
VHF 超短波
HF 短波
MF 中波
LF 長波
VLF 超長波
am 10^-18
10^-17
10^-16
fm 10^-15
10^-14
10^-13
pm 10^-12
10^-11
10^-10
nm 10^-9
10^-8
10^-7
μm 10^-6
10^-5
10^-4
mm 10^-3
10^-2
10^-1
m 10^0
10^1
10^2
km 10^3
10^4
10^5
10^26
10^25
10^24 YHz
10^23
10^22
10^21 ZHz
10^20
10^19
10^18 EHz
10^17
10^16
10^15 PHz
10^14
10^13
10^12 THz
10^11
10^10
10^9 GHz
10^8
10^7
10^6 MHz
10^5
10^4
10^3 kHz
380nm
紫
430nm
青
490nm
緑
550nm
黄
590nm
橙
640nm
赤
770nm

電荷分布と電流分布が与えられると、電場と磁場が定まる

電荷がなくて、電流もない場合でも、解があるかも

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \boxed{0}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boxed{\mathbf{0}}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

電荷分布と電流分布が与えられると、電場と磁場が定まる

電荷がなくて、電流もない場合でも、解があるかも

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

電磁波

マクスウェルの方程式

1864年

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

電磁波を予言

ジェームズ・クラーク・マクスウェル
James Clerk Maxwell

1831/06/13-1879/11/05

電磁波の発見

1888年

ハインリッヒ・ルドルフ・ヘルツ
Heinrich Rudolf Hertz

1857/02/22-1894/01/01

マクスウェルの方程式

1864年

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

電磁波を予言

ジェームズ・クラーク・マクスウェル
James Clerk Maxwell

1831/06/13-1879/11/05

電磁波の発見

1888年

ハインリッヒ・ルドルフ・ヘルツ
Heinrich Rudolf Hertz

電場や磁場は単なる計算の便宜だけではない

1857/02/22-1894/01/01

マクスウェルの方程式

1864年

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \boldsymbol{0} \\
\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

電磁波を予言

ジェームズ・クラーク・マクスウェル
James Clerk Maxwell

1831/06/13-1879/11/05

電磁波の発見

1888年

ハインリッヒ・ルドルフ・ヘルツ
Heinrich Rudolf Hertz

電場や磁場は単なる計算の便宜だけではない

場は実在すると考えるのが適当

1857/02/22-1894/01/01

力
force

電気力
electric force

磁気力
magnetic force

荷
charge

電荷
electric charge

電流
(electric) current

磁荷
magnetic charge

場
field

電場
electric field

磁場
magnetic field

ポテンシャル
potential

場

電位
electric potential

磁位
magnetic potential

力 force	電気力 electric force	磁気力 magnetic force
荷 charge	電荷 electric charge	電流 (electric) current
場 field	電場 electric field	磁場 magnetic field
ポテンシャル potential 場	電位 electric potential	磁位 magnetic potential

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right)$$

力 force		電気力 electric force	磁気力 magnetic force
荷 charge		電荷 electric charge	電流 (electric) current
場 field	光	電場 electric field	磁場 magnetic field
ポテンシャル potential 場		電位 electric potential	磁位 magnetic potential

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right)$$

势
ポテンシャル

重写麦克斯韦方程组
マクスウェル方程式の書き換え

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

つまりこの式は要らない

スカラーポテンシャル

電場のポテンシャル $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$

ベクトルポテンシャル

磁場のポテンシャル $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$

ベクトルポテンシャルを定義しておくと

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}$$

$$= 0$$

なので、 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ が自動的に満たされる。

マクスウェル方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

電場のポテンシャル $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$

磁場のポテンシャル $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{0}$$

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

電場のポテンシャル $\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$

磁場のポテンシャル $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \longleftarrow$$ ここに代入すると

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \phi) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

$$\nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

電場のポテンシャル $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$

磁場のポテンシャル $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \longleftarrow$$ ここに代入すると

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla\phi) + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

ということは $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ と定義し直すと

自動的に満たされる

つまりこの式が要らなくなる

マクスウェル方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

電場のポテンシャル $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$

磁場のポテンシャル $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j}$$

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

↑

ここに代入すると

電場のポテンシャル $$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

磁場のポテンシャル $$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \quad = \quad \rho$$

$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ を使い、$\tau = ct$ と定義して書き直すと、

$$\nabla \cdot \left(\nabla \frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau} \right) = -\mu_0 c \rho$$

マクスウェル方程式

電場のポテンシャル $$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

磁場のポテンシャル $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau} \right) = -\mu_0 c \rho$$

マクスウェル方程式

電場のポテンシャル $$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

磁場のポテンシャル $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

↑

ここに代入すると

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau} \right) = -\mu_0 c \rho$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j} &= \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{\mu_0} \left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla}\phi + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \\
&= \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0} \triangle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial \tau^2} - \triangle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\phi}{c} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \right) = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

マクスウェル方程式

電場のポテンシャル $$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

磁場のポテンシャル $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau} \right) = -\mu_0 c\rho$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial \tau^2} - \triangle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\phi}{c} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \right) = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

マクスウェル方程式

電場のポテンシャル $$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

这两条不再是物理定律，而是势能的定义。
この二つは、もはや物理法則ではなく、ポテンシャルの定義式である

磁場のポテンシャル $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau} \right) = -\mu_0 c \rho$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial \tau^2} - \triangle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\phi}{c} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \right) = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

マクスウェル方程式

電場のポテンシャル $$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

这两条不再是物理定律，而是势能的定义。

この二つは、もはや物理法則ではなく、ポテンシャルの定義式である

磁場のポテンシャル $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau} \right) = -\mu_0 c \rho$$

物理定律其实就是这两个方程式。

物理法則はこの二つの式だけである

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial \tau^2} - \triangle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\phi}{c} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \right) = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

让我们将这两个方程改写如下

この二つの式を、さらに書き直して行く

四元数向量
四元ベクトル

この添字がギリシャ文字の時は 0,1,2,3 と動くとする

$\tau = ct$　　(ローマ文字の時は 1,2,3)

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

と書くことにする

“上付き”と”下付き”には意味があるので勝手に上げ下げしないこと

また

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

四元ポテンシャル

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

四元電流

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

と書くことにする

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

物理法則はこの二つの式だけである

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \tau}\right) = -\mu_0 c\rho$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial \tau^2} - \triangle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\phi}{c} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}\right) = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial\tau}\right) = -\mu_0 c\rho$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial\tau^2} - \triangle\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\boxed{\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\phi}{c} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}}\right) = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\phi}{c} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \partial_0 A^0 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 = \underline{\sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu A^\mu}$$

我们将这个和记为

この和を $\partial_\mu A^\mu$ と書くことにする

缩写：当同一个字母出现在一个下标的上标和下标中时，我们同意取下标之和（爱因斯坦规则）。

縮約 : 添字の上付きと下付きに同じ文字があった時は、その添字についての和を取ると約束する(Einsteinの規約)

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial\tau^2} - \triangle\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \qquad = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\partial_\mu A^\mu$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial\tau^2} - \triangle\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\nabla} \quad \partial_\mu A^\mu \quad = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{A}$$

$$= (\partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3)\,\boldsymbol{A}$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$x^\mu = (\tau, x, y, z)$

$\partial_\mu = ($

$A^\mu = ($

$j^\mu = (\mu$

$\mu_0 \boldsymbol{j}$

$=$

規則をもう一つ

添字の上げ下げ

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ と定義して

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

という風に添字を上げ下げする

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

規則をもう一つ

添字の上げ下げ

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ と定義して

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\mu$$

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

という風に添字を上げ下げする

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

規則をもう一つ

添字の上げ下げ

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と定義して

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \qquad x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$x_\mu = (\tau, -x, -y, -z)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$x^\mu = (\tau, x, y, z)$

$\partial_\mu = ($

$A^\mu = ($

$j^\mu = (\mu$

$\mu_0 \boldsymbol{j}$

$=$

規則をもう一つ

添字の上げ下げ

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ と定義して

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$x^\mu = (\tau, x, y, z)$

$\partial_\mu = ($

$A^\mu = ($

$j^\mu = (\mu$

$\mu_0 \boldsymbol{j}$

$=$

規則をもう一つ

添字の上げ下げ

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ と定義して

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$+ \boldsymbol{\nabla} \qquad \partial_\mu A^\mu \qquad = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{A}$$

$$= (\partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3)\,\boldsymbol{A}$$

$$= \left(\partial_0\partial^0 + \partial_1\partial^1 + \partial_2\partial^2 + \partial_3\partial^3\right)\boldsymbol{A}$$

$$= \partial_\mu\partial^\mu \boldsymbol{A}$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \quad \partial_\mu A^\mu \quad = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \partial_\mu A^\mu = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^i + \partial_i \partial_\mu A^\mu = j^i$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^1 + \partial_1 \partial_\mu A^\mu = j^1$$
$$\partial_\mu \partial^\mu A^2 + \partial_2 \partial_\mu A^\mu = j^2$$
$$\partial_\mu \partial^\mu A^3 + \partial_3 \partial_\mu A^\mu = j^3$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^i + \partial_i \partial_\mu A^\mu = j^i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial^i \partial_\mu A^\mu = j^i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

もう一つの式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\phi}{c} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial\tau}\right) = -\mu_0 c\rho$$

$$\sum_{i=1}^{3} \partial_i \left(\partial_i A^0 + \partial_0 A^i\right) = -j^0$$

$$\sum_{i=1}^{3} \partial_i \left(-\partial^i A^0 + \partial^0 A^i\right) = -j^0$$

$$\partial_i \partial^i A^0 - \partial^0 \partial_i A^i = j^0$$

$$\partial_0 \partial^0 A^0 + \partial_i \partial^i A^0 - \partial^0 \partial_0 A^0 - \partial^0 \partial_i A^i = j^0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu = j^0$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

結局二つの式は次のように変形できた

$$\partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu = j^0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial^i \partial_\mu A^\mu = j^i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

まとめて書くと

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

$$(\nu = 0, 1, 2, 3)$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直す

もう一息

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

$$(\nu = 0, 1, 2, 3)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$ と定義すると

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$ と書き換えられる

つまり $$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$ と書ける

电磁场张量
電磁場テンソル

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{E_x}{c} & -\dfrac{E_y}{c} & -\dfrac{E_z}{c} \\ \dfrac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \dfrac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \dfrac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

四元ベクトルを使ってマクスウェル方程式を書き直した

$$x^\mu = (\tau, x, y, z)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

$$j^\mu = (\mu_0 c\rho, \mu_0 j_x, \mu_0 j_y, \mu_0 j_z)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

式が二つあるように見えますが、
この二つは全く同じ式であって、
一つの式にまとまりました

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

こう変形したからこそ見えてくる性質があります

洛伦兹变换
ローレンツ変換

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

四维矢量长度
四元ベクトルの長さ

$$x_{\mu} x^{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$
$$(= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

保持四维向量长度恒定的条件
四元ベクトルの長さを変えない条件

$$x'_{\mu} x'^{\mu} = \eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\sigma} x^{\rho} x^{\sigma}$$
$$x_{\mu} x^{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}}$$

满足此条件的变换 L 称为洛伦兹变换
この条件を満たす変換 L をローレンツ変換と言う

在洛伦兹变换下不变：狭义相对论
ローレンツ変換のもとで不変 ： 特殊相対性理論

四矢量关系是洛伦兹不变的 (Lorentz invariant)
四元ベクトルの関係式はローレンツ不変 (Lorentz invariant)

麦克斯韦方程组可以表示为四矢量关系式
マクスウェル方程式は、四元ベクトルの関係で表せた

电磁学是洛伦兹不变的 (Lorentz invariant)
電磁気学はローレンツ不変 (Lorentz invariant)

规范变换
ゲージ変換

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu u$$

$$\begin{aligned}
F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\
&= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu u) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu u) \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu u - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu u \\
&= F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

电磁场张量在规范变换下是不变的
電磁場テンソルはゲージ変換に対して不変

电磁学是规范不变的 (gauge invariant)

電磁気学はゲージ不変 (gauge invariant)

力 force	電気力 electric force	磁気力 magnetic force
荷 charge	電荷 electric charge	電流 (electric) current
場　光 field	電場 electric field	磁場 magnetic field
ポテンシャル potential 場	電位 electric potential	磁位 magnetic potential

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right)$$

力 force		電気力 electric force	磁気力 magnetic force
荷 charge		電荷 electric charge	電流 (electric) current
場 field	光	電場 electric field	磁場 magnetic field
ポテンシャル potential 場	?	電位 electric potential	磁位 magnetic potential

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A} \right)$$

解析力学

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$$

位置を2回微分して　　　ポテンシャルを1回微分して

等置した微分方程式を解けと言っている

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$$

位置を2回微分して　　ポテンシャルを1回微分して

等置した微分方程式を解けと言っている

微分は減らした方が解きやすいはず

力を使わずに議論できないのか

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$$

位置を2回微分して　　　ポテンシャルを1回微分して

等置した微分方程式を解けと言っている

微分は減らした方が解きやすいはず

力を使わずに議論できないのか

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

位置と運動量を使って書くと良さそう

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_x} = m v_x \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_x} = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m a_x$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \dfrac{\partial T}{\partial v_x} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \dfrac{\partial T}{\partial v_y} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \dfrac{\partial T}{\partial v_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex] -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_x} = m v_x \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial T}{\partial v_x} = m \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}} = m a_x$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_x} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_y} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_x} = m v_x \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_x} = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m a_x$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_x} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_y} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex] -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_1} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_2} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \\ -\dfrac{\partial V}{\partial x_2} \\ \\ -\dfrac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_2} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_2} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_3} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_4} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_5} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_4} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_5} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_6} \end{pmatrix}$$

質点が二つあったら

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

という6次元にある一つの質点が運動すると考えることにする

$$T = \frac{m}{2}\left(\boxed{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} + \boxed{v_4^2 + v_5^2 + v_6^2}\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

質点が二つあったら $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ という6次元にある一つの質点が運動すると考えることにする

$$T = \frac{m}{2}\left(\boxed{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} + \boxed{v_4^2 + v_5^2 + v_6^2}\right)$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$L = T - V$$

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$L = T - V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$L = T - V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

V : ポテンシャルエネルギー

$$m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$L = T - V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

T : 運動エネルギー

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m v_1 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_1} = m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = m a_1$$

T : 運動エネルギー

V : ポテンシャルエネルギー

$$L = T - V$$

L : ラグランジアン (Lagrangian)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

オイラー・ラグランジュ方程式

レオンハルト・オイラー
Leonhard Euler

1707/04/15-1783/09/18

ジョセフ=ルイ・ラグランジュ
Joseph-Louis Lagrange

1736/01/25-1813/04/10

T : 運動エネルギー

V : ポテンシャルエネルギー

$$L = T - V$$ L : ラグランジアン (Lagrangian)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

オイラー・ラグランジュ方程式

時間微分を ˙ で表す $$v_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}_i$$

レオンハルト・オイラー
Leonhard Euler

1707/04/15-1783/09/18

ジョセフ=ルイ・ラグランジュ
Joseph-Louis Lagrange

1736/01/25-1813/04/10

T : 運動エネルギー

V : ポテンシャルエネルギー

$$L = T - V$$

L : ラグランジアン (Lagrangian)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

オイラー・ラグランジュ方程式

時間微分を ˙で表す $v_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}_i$

レオンハルト・オイラー
Leonhard Euler

1707/04/15-1783/09/18

ジョセフ=ルイ・ラグランジュ
Joseph-Louis Lagrange

1736/01/25-1813/04/10

T : 運動エネルギー

V : ポテンシャルエネルギー

$$L = T - V$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

ラグランジュ方程式

時間微分を ˙で表す $v_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}_i$

レオンハルト・オイラー
Leonhard Euler

1707/04/15-1783/09/18

ジョセフ=ルイ・ラグランジュ
Joseph-Louis Lagrange

1736/01/25-1813/04/10

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = m v_i = p_i$$

$$p_i = m v_i$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

$$= \sum_j\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right]$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ $\quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right]$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right]$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right]$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\underline{\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\left(\underline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right]$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right]$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}\right]$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right)$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}_j}{\mathrm{d}q_i}\right]$$

$$= \sum_j \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right)\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial q_i}\right]$$

$$= \sum_j \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j}\right]\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian)　$L = T - V$

ラグランジュ方程式　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない　　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$$

⬅ 次元は(エネルギー)×(時間)

ラグランジアン (Lagrangian)　$L = T - V$　　q_i　一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$$

⬅ 次元は(エネルギー)×(時間)　作用と呼ばれる

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$$

⬅ 次元は(エネルギー)×(時間) 作用と呼ばれる

$$I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

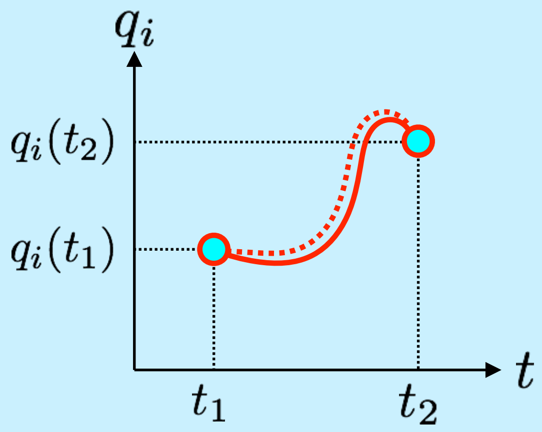
作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$

変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$



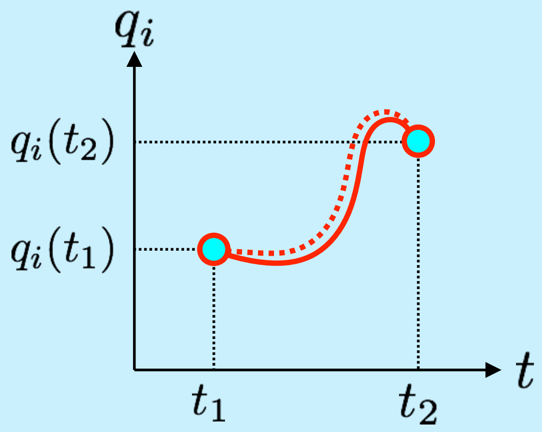
ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$

変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

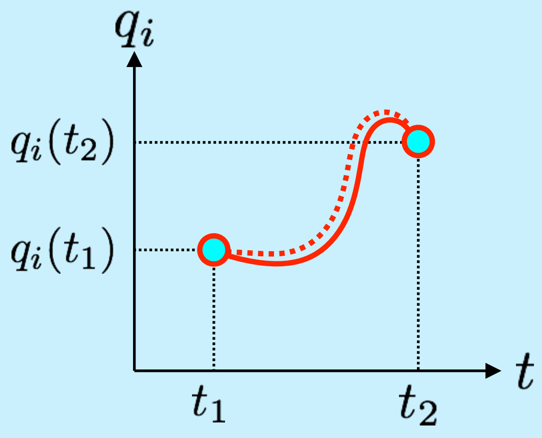
$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$



ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$



変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

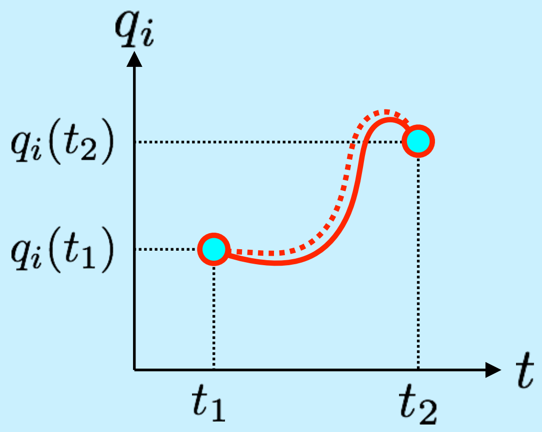
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \right) \mathrm{d}t$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$

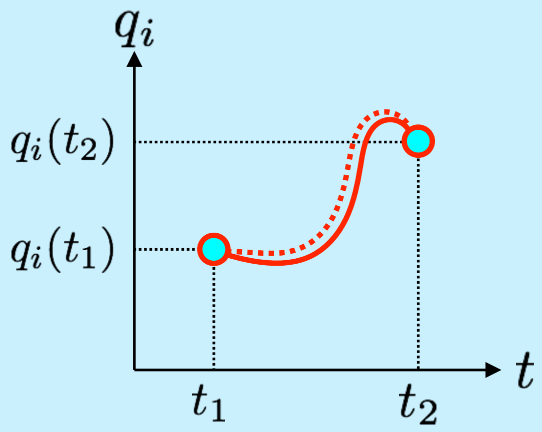
変分
$$\begin{aligned}
\delta I &= I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$



ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$



変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

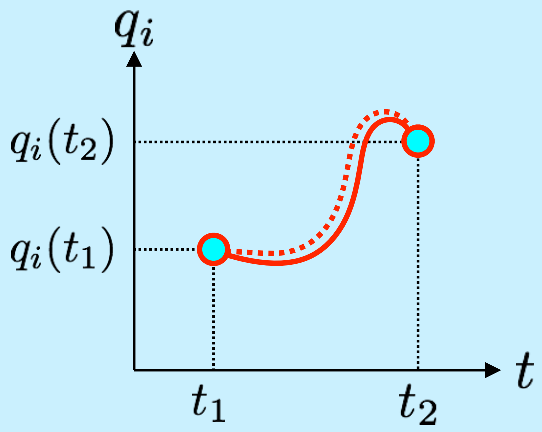
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \quad = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$



変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \quad = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \mathrm{d}t + \underline{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \mathrm{d}t$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$

変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

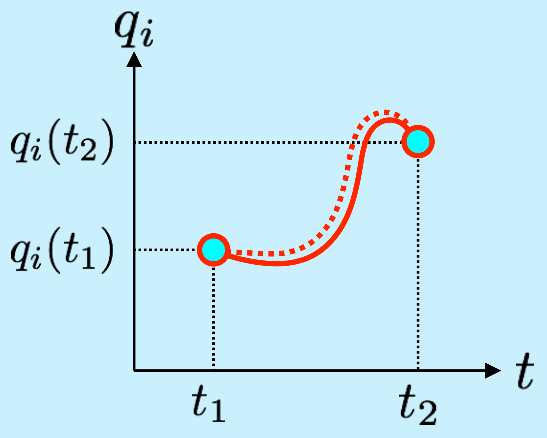
$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \quad = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \mathrm{d}t + \underline{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\downarrow$$

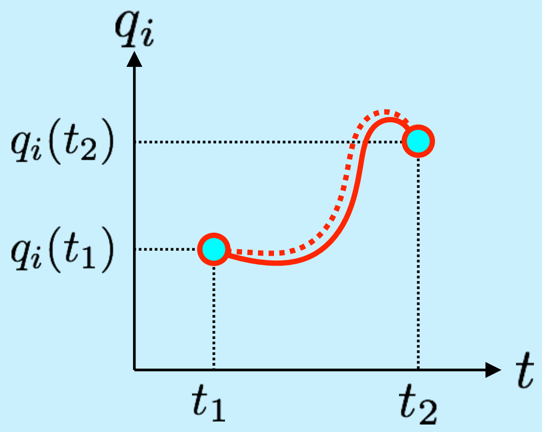
$$\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\delta q_i \mathrm{d}t$$



ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$



変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \quad = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \mathrm{d}t + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\downarrow$$

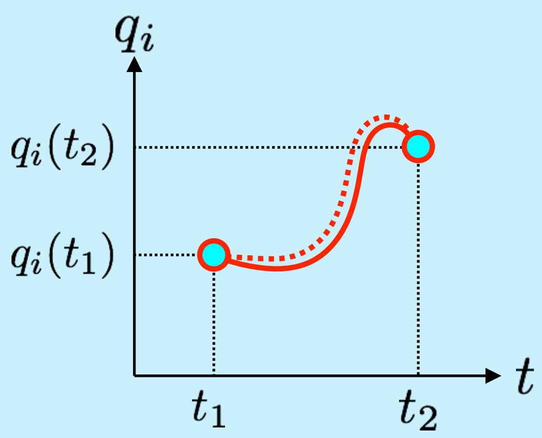
$$\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \mathrm{d}t$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$



変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \quad = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \mathrm{d}t + \underline{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \mathrm{d}t$$

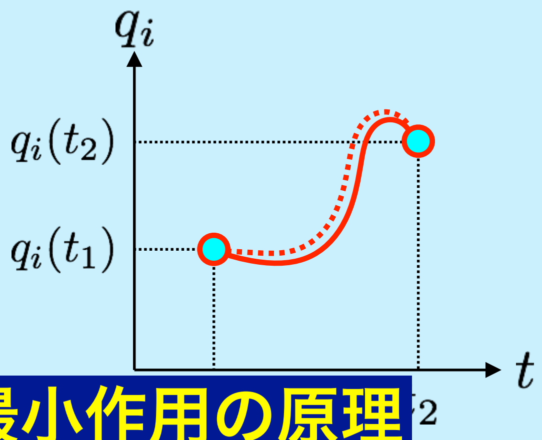
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$



変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

作用の変分=0が運動を規定する ➡ 最小作用の原理

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right)\mathrm{d}t \quad = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \mathrm{d}t + \underline{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\delta q_i \mathrm{d}t$$

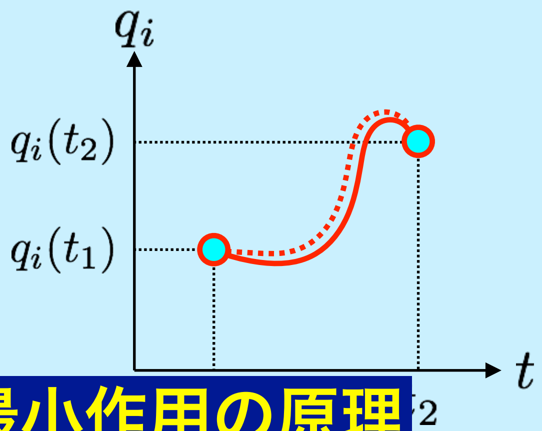
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right)\delta q_i \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式を導く

作用 $I(q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$



変分 $\delta I = I(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i) - I(q_i, \dot{q}_i)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t$$

ラグランジアンが与えられれば

作用の変分=0が運動を規定する ➡ 最小作用の原理

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \mathrm{d}t + \underline{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ 　　q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$ $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない　　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ 　 q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{一般化運動量}$$

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない　　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

$$\mathrm{d}H = \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}q_i\right)$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ 　　q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$ 　　$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない 　　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}q_i\right) \\ &= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i (\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i)\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}q_i\right) \\
&= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i (\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) \\
&= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i)
\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ 　 q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$ 　 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない　　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}q_i\right) \\ &= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i (\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) \\ &= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ 　 q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ 　 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない 　 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

$$\mathrm{d}H = \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i\right)$$

ハミルトンの正準方程式

$$= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i) - \sum_i (\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i)$$

$$= \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$ 　 q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$ $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない 　 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

ハミルトンの正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

q_i 一般化座標

ラグランジュ方程式 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない

ウィリアム・ローワン・ハミルトン
William Rowan Hamilton

1805/08/04-1865/09/02

ハミルトニアン (Hamiltonian) $$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

ハミルトンの正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

ラグランジアン (Lagrangian) $L = T - V$

ラグランジュ方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

q_i 一般化座標

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

独立変数は q_i, p_i

座標変換

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) \to L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \ldots, \dot{Q}_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$$

座標変換しても形が変わらない　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

ハミルトニアン (Hamiltonian) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

ハミルトンの正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \frac{\partial H}{\partial t}
\end{aligned}$$

ハミルトニアンは陽に時間を含まなければ保存する

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\
&= \frac{\partial H}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{m}{2}v^2 + V = \frac{m}{2}v^2 + V$$

ハミルトニアンは陽に時間を含まなければ保存する

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$

独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{m}{2}v^2 + V = \frac{m}{2}v^2 + V$$

ハミルトニアンは陽に時間を含まなければ保存する

ハミルトニアンは全エネルギーに対応する

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

$\longrightarrow$

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

ラグランジアンが定義されれば、ハミルトニアンを導くことができて、全エネルギーや運動方程式が定まる

$\uparrow$

作用の変分が0

$\uparrow$

最小作用の原理

解析力学

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3} = 0 \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3} = 0 \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}$$

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$ OK

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{x_i}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3} = 0 \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$F_i = -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jklm}\left(\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m\right)$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は
$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\begin{aligned} F_i &= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jklm}\left(\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m\right) \\ &= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jlm}\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m \end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\begin{aligned}
F_i &= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jklm}\left(\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jlm} \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{j}\left(v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{dt}} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は
$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\begin{aligned}
F_i &= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jklm}\left(\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jlm} \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{j}\left(v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{dt}} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \sum_j v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{dt}} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$$

$$\begin{aligned}
F_i &= -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jklm}\left(\epsilon_{ijk}v_j\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jlm}\epsilon_{ijk}v_j\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m \\
&= -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{j}\left(v_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \sum_j v_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\begin{aligned}
F_i &= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jklm}\left(\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{jlm} \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\sum_{j}\left(v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \sum_j v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\right) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_i
\end{aligned}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 　一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 　一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 　一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 　独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{dt}}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{dt}}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{dt}}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i　一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$　一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$　一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$　独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は　$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i + qA_i) = m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i + qA_i) = m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i} = 0$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i + qA_i) = m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i} = 0 \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{\nabla}\phi + q\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i + qA_i) = m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i} = 0 \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{\nabla}\phi + q\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})}{\partial x_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i + qA_i) = m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}$$

OK

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\frac{\partial (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})}{\partial x_i} = 0 \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{\nabla}\phi + q\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -q\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_i + qA_i) = m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}$$

OK

$$\boldsymbol{F} = -q\left(\boldsymbol{\nabla}(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$m\ddot{x}_i + q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial x_i} = 0 \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{\nabla}\phi + q\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \qquad \dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は $V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \qquad \dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

$$H = \sum_i p_i \frac{1}{m}(p_i - qA_i) - \frac{m}{2}\sum_i (p_i - qA_i)^2 - q\phi + q\sum_i \frac{1}{m}(p_i - qA_i)A_i$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \qquad \dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

$$H = \sum_i p_i \frac{1}{m}(p_i - qA_i) - \frac{m}{2}\sum_i (p_i - qA_i)^2 - q\phi + q\sum_i \frac{1}{m}(p_i - qA_i)A_i$$

$$= \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

電場と磁場がある場合は

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \qquad \dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

$$H = \sum_i p_i \frac{1}{m}(p_i - qA_i) - \frac{m}{2}\sum_i (p_i - qA_i)^2 - q\phi + q\sum_i \frac{1}{m}(p_i - qA_i)A_i$$

$$H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left|\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right|^2 + q\phi$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$ 一般化運動量

$$F_i = \dot{p}_i$$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}|^2 \qquad H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}|^2 + q\phi$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}|^2 \qquad H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}|^2 + q\phi$$

$$H \to H - q\phi$$

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left|\boldsymbol{p}\right|^2 \qquad H = \frac{1}{2m}\left|\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right|^2 + q\phi$$

非相対論

$$H \rightarrow H - q\phi$$

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}$$

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$　独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i　一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$　一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$　一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$　独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) \qquad p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}|^2 \qquad H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}|^2 + q\phi$$

非相対論

$$H \to H - q\phi$$

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}$$

この処方箋は相対論でも通用する

ラグランジアン (Lagrangian)

$L = T - V$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \qquad p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}|^2 \qquad H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}|^2 + q\phi$$

非相対論

$$H \to H - q\phi$$

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}$$

この処方箋は相対論でも通用する

相対論的ラグランジアンからスタートすれば良い

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L = T - V$$ 独立変数は $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i 一般化座標

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 一般化運動量

$F_i = \dot{p}_i$ 一般化力

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$ 独立変数は q_i, p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$V = q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A})$$

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - q\phi + q\sum_j \dot{x}_j A_j$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}|^2 \qquad H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}|^2 + q\phi$$

非相対論

$$H \to H - q\phi$$

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}$$

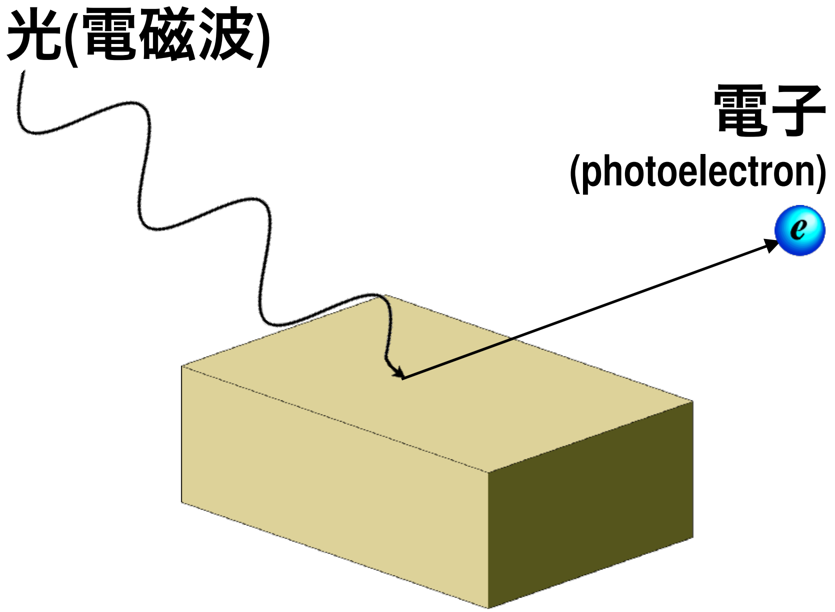
この処方箋は相対論でも通用する

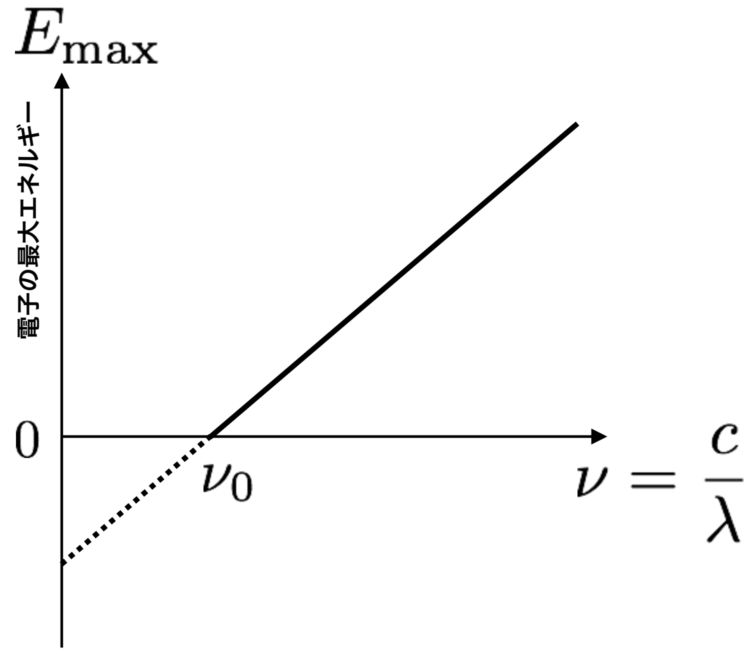
相対論的ラグランジアンからスタートすれば良い

実は最先端の素粒子物理学でも通用する

光电效应
光電効果

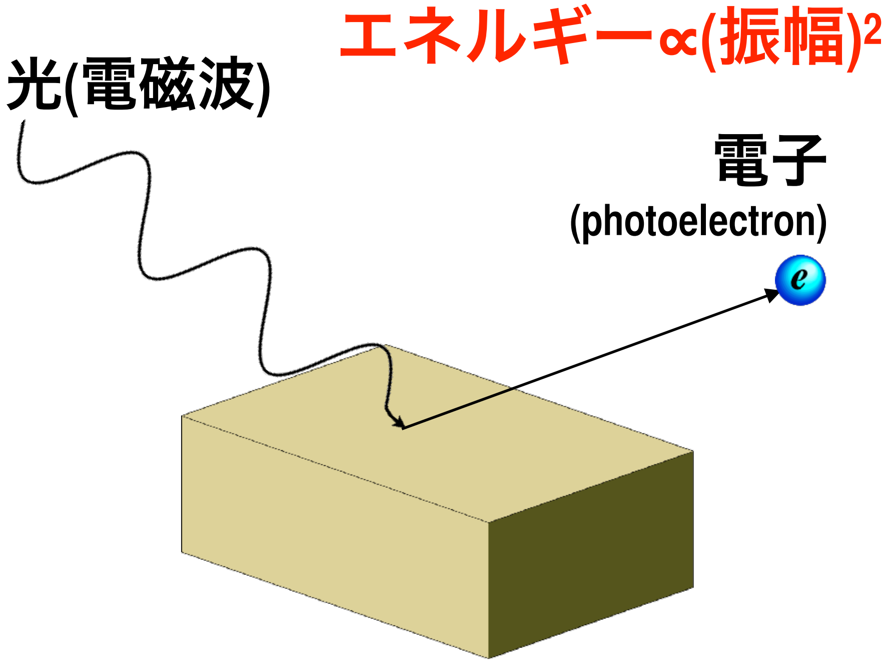
光电效应 (photoelectric effect)
光電効果 (photoelectric effect)

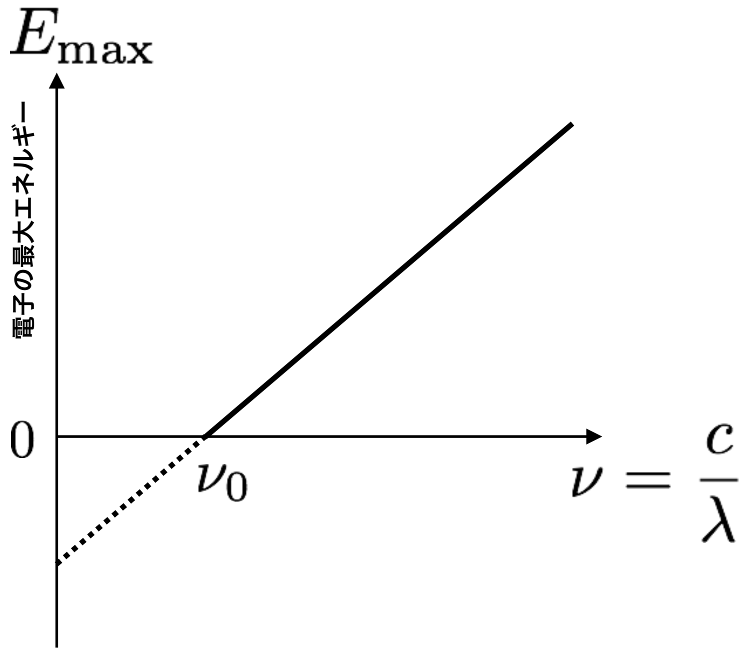




飛び出る電子の数は、光の強さに比例する
照射する光の波長が、ある値よりも長いと、電子は飛び出ない
照射する光の波長が、ある値よりも短いと、電子が飛び出てくる

光电效应 (photoelectric effect)
光電効果 (photoelectric effect)





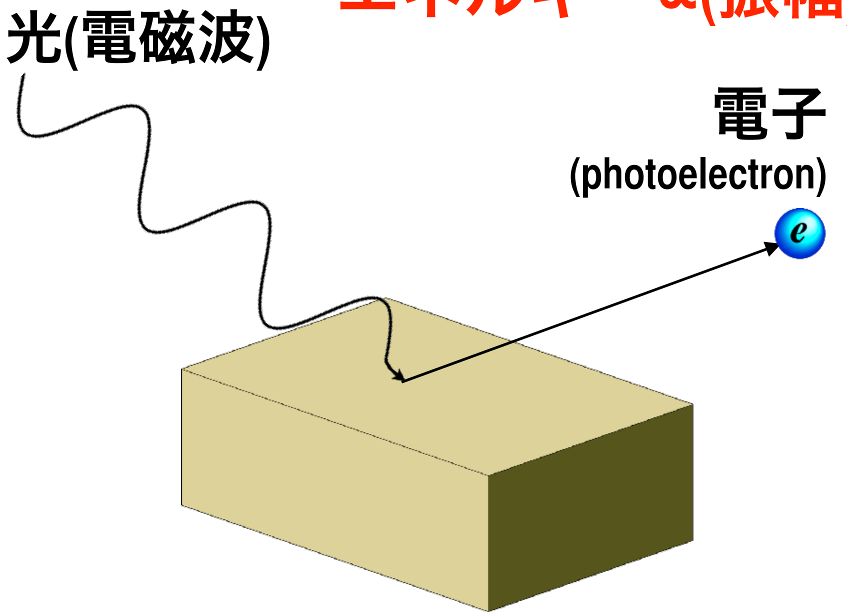
飛び出る電子の数は、光の強さに比例する

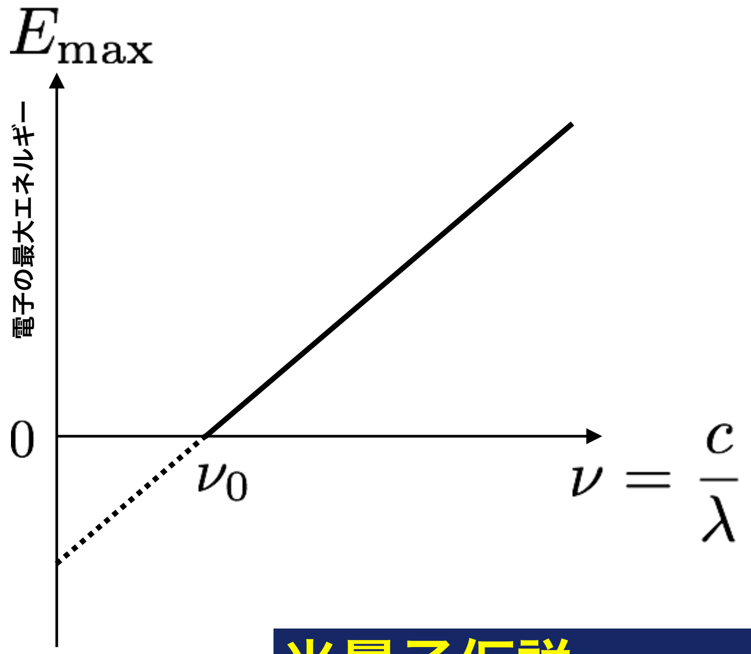
照射する光の波長が、ある値よりも長いと、電子は飛び出ない

照射する光の波長が、ある値よりも短いと、電子が飛び出てくる

光电效应 (photoelectric effect)
光電効果 (photoelectric effect)

エネルギー∝(振幅)^2





飛び出る電子の数は、光の強さに比例する

照射する光の波長が、ある値よりも長いと、電子は飛び出ない

照射する光の波長が、ある値よりも短いと、電子が飛び出てくる

光量子仮説

$E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ の粒子

粒子数が光の強度

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}$ [J s]

Planck定数

$$\underbrace{E_\gamma}_{\text{エネルギー}} = \overbrace{h}^{\text{Planck定数}}\underbrace{\nu}_{\text{振動数}}$$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J\,s}]$

Planck定数

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega$$

エネルギー　振動数　角振動数

$\omega = 2\pi\nu$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J\,s}]$

Planck定数

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

Planck定数

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

エネルギー

振動数

角振動数

$\omega = 2\pi\nu$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J\,s}]$

Planck定数

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

Planck定数

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

エネルギー　振動数　角振動数

$\omega = 2\pi\nu$

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}$ [J s]

Planck定数

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

Planck定数

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

エネルギー

振動数

角振動数

$\omega = 2\pi\nu$

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = e^{i(\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar}$$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J\,s}]$

Planck定数

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

Planck定数

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

エネルギー

振動数

角振動数

$\omega = 2\pi\nu$

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = e^{i(\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar}$$

$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J\,s}]$

Planck定数

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

Planck定数

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

エネルギー　振動数　角振動数

$\omega = 2\pi\nu$

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = e^{i(\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar}$$

$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = hc\nu$$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J\,s}]$

Planck定数

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

Planck定数

$$E_\gamma = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

エネルギー

振動数

角振動数

$\omega = 2\pi\nu$

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = e^{i(\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar}$$

$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = hc\nu$$

$$E = pc$$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\,[\mathrm{J\,s}]$
Planck定数

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$
Planck定数

电磁波也具有粒子特性

電磁波は粒子の性質も持つ

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = e^{i(\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar}$$

$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = hc\nu$$

$$E = pc$$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}$ [J s]
Planck定数

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$
Planck定数

电磁波也具有粒子特性

電磁波は粒子の性質も持つ

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = e^{i(\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar}$$

粒子也具有波动性

粒子も波の性質を持つ

$$E = pc$$

光子(photon)

$h = 6.62607004 \times 10^{-34}\ [\mathrm{J\,s}]$
Planck定数

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$
Planck定数

电磁波也具有粒子特性

電磁波は粒子の性質も持つ

量子力学

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = e^{i(\hbar\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E_\gamma t)/\hbar}$$

粒子也具有波动性

粒子も波の性質を持つ

$$E = pc$$

量子力学

$$\psi = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\psi = \cos\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et}{\hbar} + i\sin\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et}{\hbar}$$

$$\psi = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}$$

$$\psi = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi$$

$$\psi = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi \qquad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \hat{E}\psi = E\psi$$

演算子

$$\psi = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar}$$

固有方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

演算子

$$\underbrace{\hat{E}}_{\text{演算子}}\psi = \underbrace{E}_{\text{固有値}}\psi$$

固有関数

$$\psi = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

演算子

固有方程式

演算子　　固有値

$$\hat{E}\psi = E\psi$$

固有関数

固有方程式

行列　　固有値

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

固有ベクトル

$$\psi = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}$$

固有方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi \qquad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \underbrace{\overset{\text{演算子}}{\hat{E}}\psi}_{\text{固有関数}} = \underbrace{\overset{\text{固有値}}{E}\psi}_{\text{固有関数}}$$

演算子

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\psi \qquad \hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} \qquad \hat{\boldsymbol{p}}\psi = \boldsymbol{p}\psi$$

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン $\longrightarrow$ 量子力学的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \hat{V}$$

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン $\longrightarrow$ 量子力学的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \hat{V}$$

Schrödinger方程式

哈密顿量
ハミルトニアン

能量本征值
エネルギー固有值

$$\underset{\uparrow}{\hat{H}}\,\psi(\boldsymbol{r}) = \underset{\uparrow}{E}\,\psi(\boldsymbol{r})$$

波動関数(複素関数)

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン ⟶ 量子力学的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V \qquad \longrightarrow \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \hat{V}$$

Schrödinger方程式

哈密顿量
ハミルトニアン

能量本征值
エネルギー固有値

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

波動関数(複素関数)

埃尔温·鲁道夫·约瑟夫·亚历山大·薛定谔
エルヴィーン・ルードルフ・ヨーゼフ・アレクサンダー・シュレーディンガー
Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger

1887/08/12-1961/01/04

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン → 量子力学的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \hat{V}$$

Schrödinger方程式

哈密顿量
ハミルトニアン

能量本征值
エネルギー固有値

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

波動関数(複素関数)

$|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ が粒子の確率分布を与える

規格化 $\int |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1$

位相は観測されない

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン $\longrightarrow$ 量子力学的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \hat{V}$$

Schrödinger方程式

哈密顿量
ハミルトニアン

能量本征值
エネルギー固有值

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

波動関数(複素関数)

$|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ が粒子の確率分布を与える

規格化 $\int |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1$

位相は観測されない

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン ⟶ 量子力学的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \hat{V}$$

Schrödinger方程式

哈密顿量
ハミルトニアン

能量本征值
エネルギー固有値

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

波動関数(複素関数)

$|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ が粒子の確率分布を与える

規格化 $\int |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1$

位相は観測されない

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \hat{V}\right)\psi(\boldsymbol{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

発見？

原理

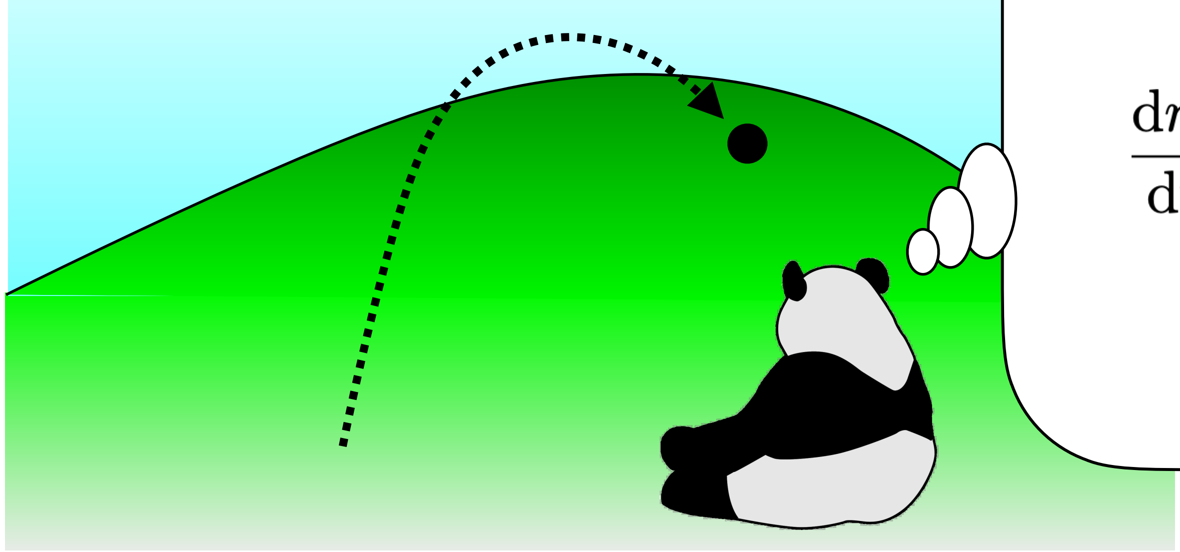
数学 　数学

法則

数学

予測

現象



$$\underset{\text{力}}{\boldsymbol{F}} = \underset{\text{質量}}{m}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{m\boldsymbol{g}}_{\text{重力}} - \underbrace{\alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{wind}}\right)}_{\text{空気抵抗?}}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ?$$

α は定数?

潜力的现实
ポテンシャルの実在性

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi$$

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン

$\longrightarrow$

量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi$$

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン

$\longrightarrow$

量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi(\boldsymbol{r}, t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン
$\longrightarrow$
量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi(\boldsymbol{r}, t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

電磁場の方程式(Maxwell方程式)はゲージ対称性を持っている

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン
→
量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi(\boldsymbol{r}, t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

麦克斯韦方程组具有规范对称性
電磁場の方程式(Maxwell方程式)はゲージ対称性を持っている

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu u \qquad \phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} u$$

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン
$\longrightarrow$
量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H=\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{2m}+q\phi \qquad H=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2\psi(\boldsymbol{r},t)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

麦克斯韦方程组具有规范对称性
電磁場の方程式(Maxwell方程式)はゲージ対称性を持っている

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu+\partial^\mu u \qquad \phi\to\phi'=\phi+\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}u$$

如果量子力学中也存在同样的情况，那么
量子力学でも同様だとするならば

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2\psi(\boldsymbol{r},t)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

也应该成立。
が成り立つはずだが...

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン
→
量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi(\boldsymbol{r},t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

麦克斯韦方程组具有规范对称性
電磁場の方程式(Maxwell方程式)はゲージ対称性を持っている

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu u \qquad \phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} u$$

如果量子力学中也存在同样的情况，那么
量子力学でも同様だとするならば

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 \psi(\boldsymbol{r},t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

也应该成立...
が成り立つはずだが...

但事实并非如此
成り立っていない

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン
→
量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi(\boldsymbol{r}, t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

麦克斯韦方程组具有规范对称性
電磁場の方程式(Maxwell方程式)はゲージ対称性を持っている

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu u \qquad \phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} u$$

如果量子力学中也存在同样的情况，那么
量子力学でも同様だとするならば

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 \psi(\boldsymbol{r}, t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

也应该成立？
成り立たせるにはどうあれば良いか？

带电粒子在电磁场中的运动 電磁場下の荷電粒子の運動

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン → 量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H=\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{2m}+q\phi \qquad H=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2\psi(\boldsymbol{r},t)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

麦克斯韦方程组具有规范对称性
電磁場の方程式(Maxwell方程式)はゲージ対称性を持っている

$$A^\mu\to A'^\mu=A^\mu+\partial^\mu u \qquad \phi\to\phi'=\phi+\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}u$$

如果量子力学中也存在同样的情况，那么
量子力学でも同様だとするならば

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2\psi(\boldsymbol{r},t)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

也应该成立？
成り立たせるにはどうあれば良いか？ $\psi\to e^{iw}\psi$

经典力学的哈密顿量
古典力学のハミルトニアン
$\longrightarrow$
量子力学中的哈密顿量
量子力学のハミルトニアン

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\phi \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi$$

Schrödinger方程式

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi(\boldsymbol{r},t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

麦克斯韦方程组具有规范对称性
電磁場の方程式(Maxwell方程式)はゲージ対称性を持っている

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu u \qquad \phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} u$$

如果量子力学中也存在同样的情况，那么
量子力学でも同様だとするならば

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 e^{iw}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)e^{iw}\psi(\boldsymbol{r},t)$$

也应该成立？
成り立たせるにはどうあれば良いか？

$$\psi \to e^{iw}\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2\left(e^{iw}\psi\right)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)$$

右辺 $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)=e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t}+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2\left(e^{iw}\psi\right)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)$$

右辺 $$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)=e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t}+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi=e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w=-\frac{q}{\hbar}u}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2\left(e^{iw}\psi\right)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)$$

右辺 $$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)=e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t}+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi=e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w=-\frac{q}{\hbar}u}$$

左辺 $$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw}=\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw}=-q\boldsymbol{A}e^{iw}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left(e^{iw}\psi\right)=e^{iw}\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w+\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)\psi=e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

右辺

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi = e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w = -\frac{q}{\hbar}u}$$

左辺

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = (\hbar\boldsymbol{\nabla}w - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u)\,e^{iw} = -q\boldsymbol{A}e^{iw}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w + \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\psi = e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left\{e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right\}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2\left(e^{iw}\psi\right)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)$$

右辺

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(e^{iw}\psi\right)=e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t}+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi=e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w=-\frac{q}{\hbar}u}$$

左辺

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw}=\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw}=-q\boldsymbol{A}e^{iw}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left(e^{iw}\psi\right)=e^{iw}\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w+\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)\psi=e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2\left(e^{iw}\psi\right)&=\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left\{e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)\psi\right\}\\&=-q\boldsymbol{A}e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)\psi+e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)\psi\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

右辺

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi = e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w = -\frac{q}{\hbar}u}$$

左辺

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = \left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = -q\boldsymbol{A}e^{iw}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w + \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\psi = e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left\{e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right\}$$

$$= -q\boldsymbol{A}e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi + e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$e^{iw}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi + q\boldsymbol{\nabla}u\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right]$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

右辺

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi = e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w = -\frac{q}{\hbar}u}$$

左辺

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = \left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = -q\boldsymbol{A}e^{iw}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w + \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\psi = e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left\{e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right\}$$

$$= -q\boldsymbol{A}e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi + \underline{e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi}$$

$$e^{iw}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi + q\boldsymbol{\nabla}u\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right]$$

$$= e^{iw}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right) + q(\boldsymbol{\nabla}u - \boldsymbol{A})\right]\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

右辺 $$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi = e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w = -\frac{q}{\hbar}u}$$

左辺 $$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = (\hbar\boldsymbol{\nabla}w - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u)\,e^{iw} = -q\boldsymbol{A}e^{iw}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w + \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\psi = e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left\{e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right\}$$

$$= -q\boldsymbol{A}e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi + e^{iw}\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi}$$

$$e^{iw}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi + q\boldsymbol{\nabla}u\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right]$$

$$= e^{iw}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right) + q(\boldsymbol{\nabla}u - \boldsymbol{A})\right]\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}u}$$

$$= e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

右辺

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(-\hbar\frac{\partial w}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi = e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\boxed{w = -\frac{q}{\hbar}u}$$

左辺

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = \left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)e^{iw} = -q\boldsymbol{A}e^{iw}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)(e^{iw}\psi) = e^{iw}\left(\hbar\boldsymbol{\nabla}w + \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\psi = e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left\{e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right\}$$

$$= -q\boldsymbol{A}e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi + e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$e^{iw}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi + q\boldsymbol{\nabla}u\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi\right]$$

$$= e^{iw}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right) + q(\boldsymbol{\nabla}u - \boldsymbol{A})\right]\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)\psi$$

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}u}$$

$$= e^{iw}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2(e^{iw}\psi)=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

$$\boxed{w=-\frac{q}{\hbar}u} \qquad \boxed{\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}u}$$

$$e^{iw}\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2\psi\ =e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

$$\boxed{w = -\frac{q}{\hbar}u} \qquad \boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}u}$$

$$e^{iw}\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi = e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{\nabla}u\right)^2 (e^{iw}\psi) = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi - q\frac{\partial u}{\partial t}\right)(e^{iw}\psi)$$

$$\boxed{w = -\frac{q}{\hbar}u} \qquad \boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}u}$$

$$e^{iw}\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi = e^{iw}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}\right)^2\psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

薛定谔方程的形式得以保持
Schrödinger方程式の形が保たれた

阿哈罗诺夫-玻姆效应
アハラノフ=ボーム効果

如果波函数随
波動関数が

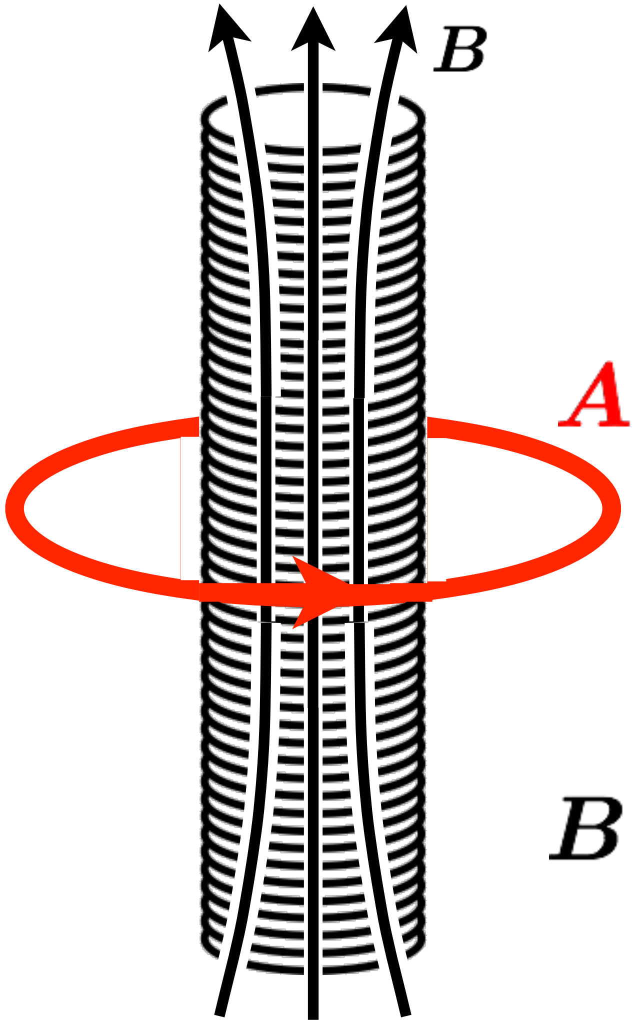
$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\frac{q}{\hbar}\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}\psi$$

变换，则规范对称性成立
と変換されるとすると、ゲージ対称性が成り立つ

规范对称性是必要的吗？
ゲージ対称性は必要？

阿哈罗诺夫-玻姆效应

アハラノフ=ボーム効果



$$B = 0, A \neq 0$$

ヤキール・アハラノフ
Yakir Aharonov

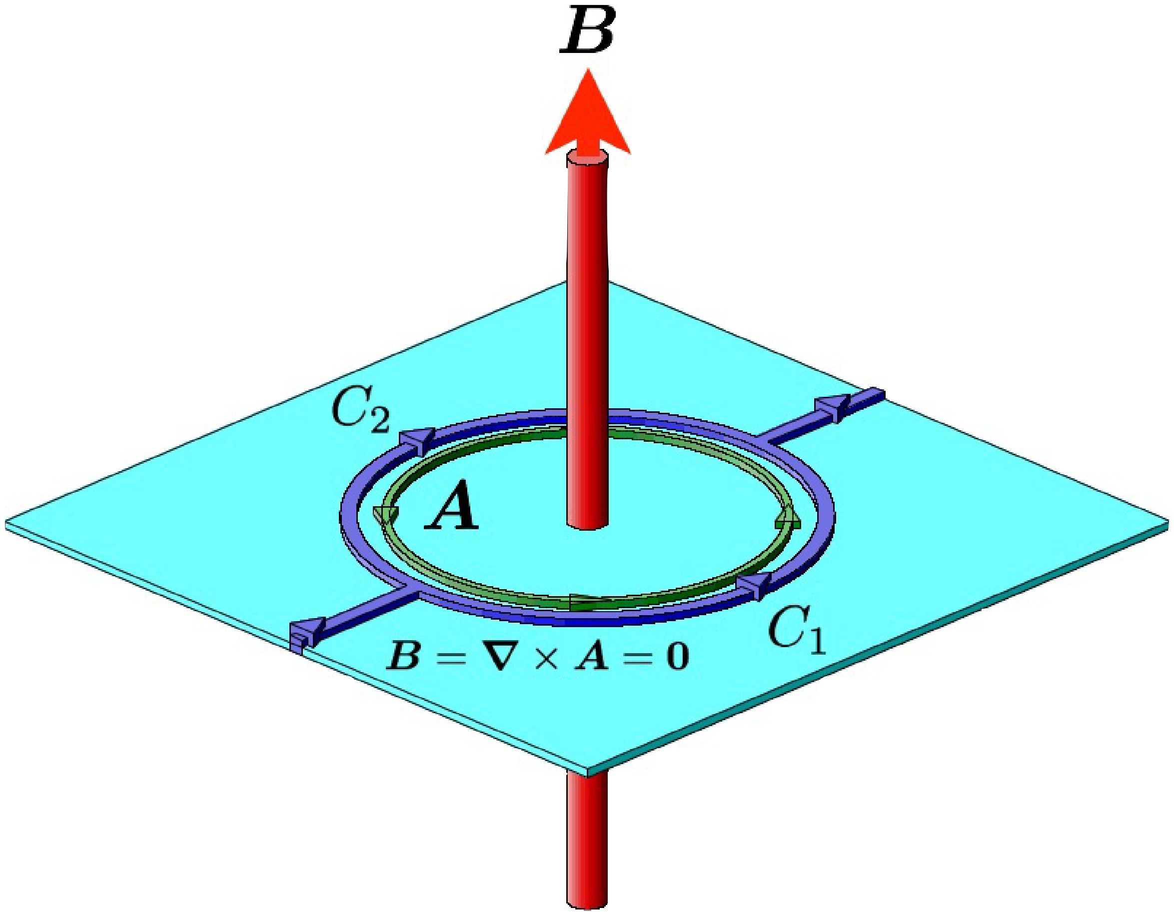
1932/08/28-

デヴィッド・ジョーゼフ・ボーム
David Joseph Bohm

1917/12/20-1992/10/27

阿哈罗诺夫-玻姆效应

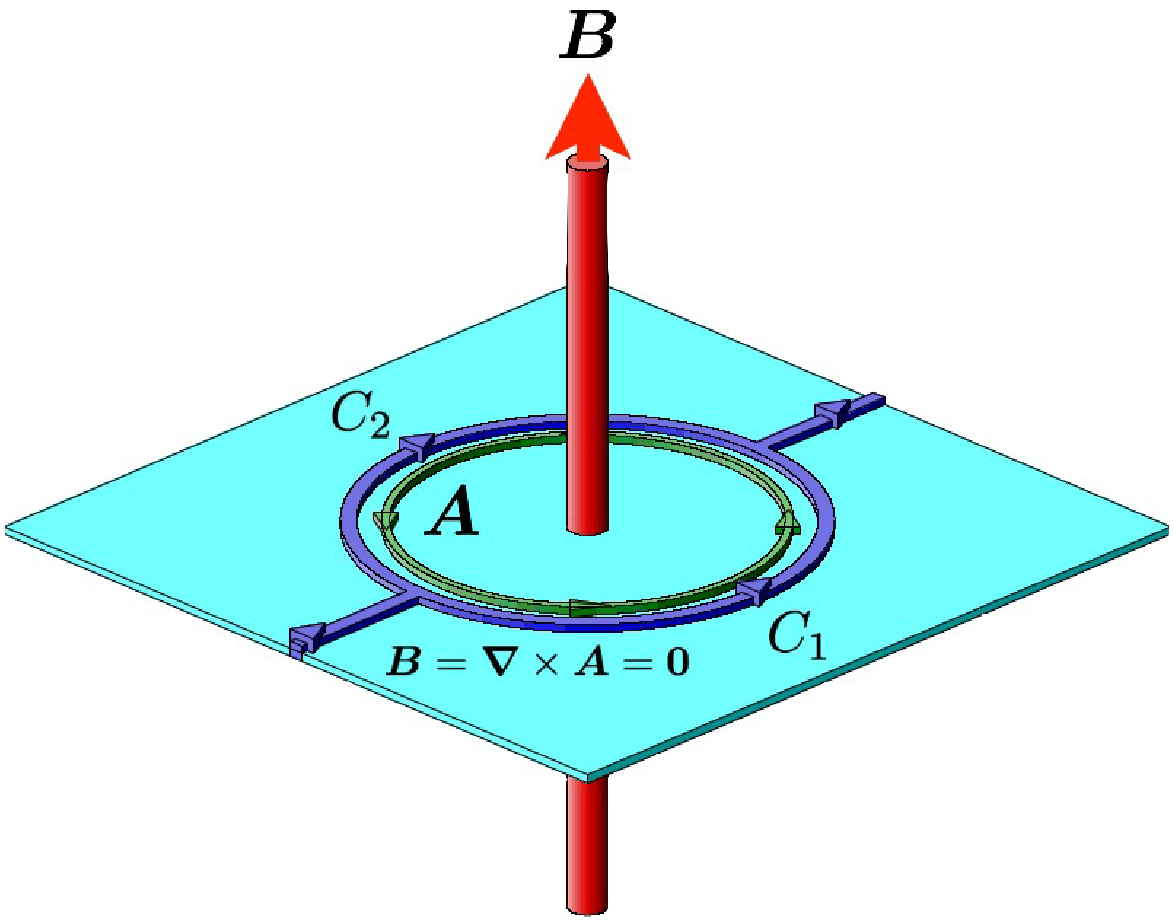
アハラノフ=ボーム効果



阿哈罗诺夫-玻姆效应

アハラノフ=ボーム効果

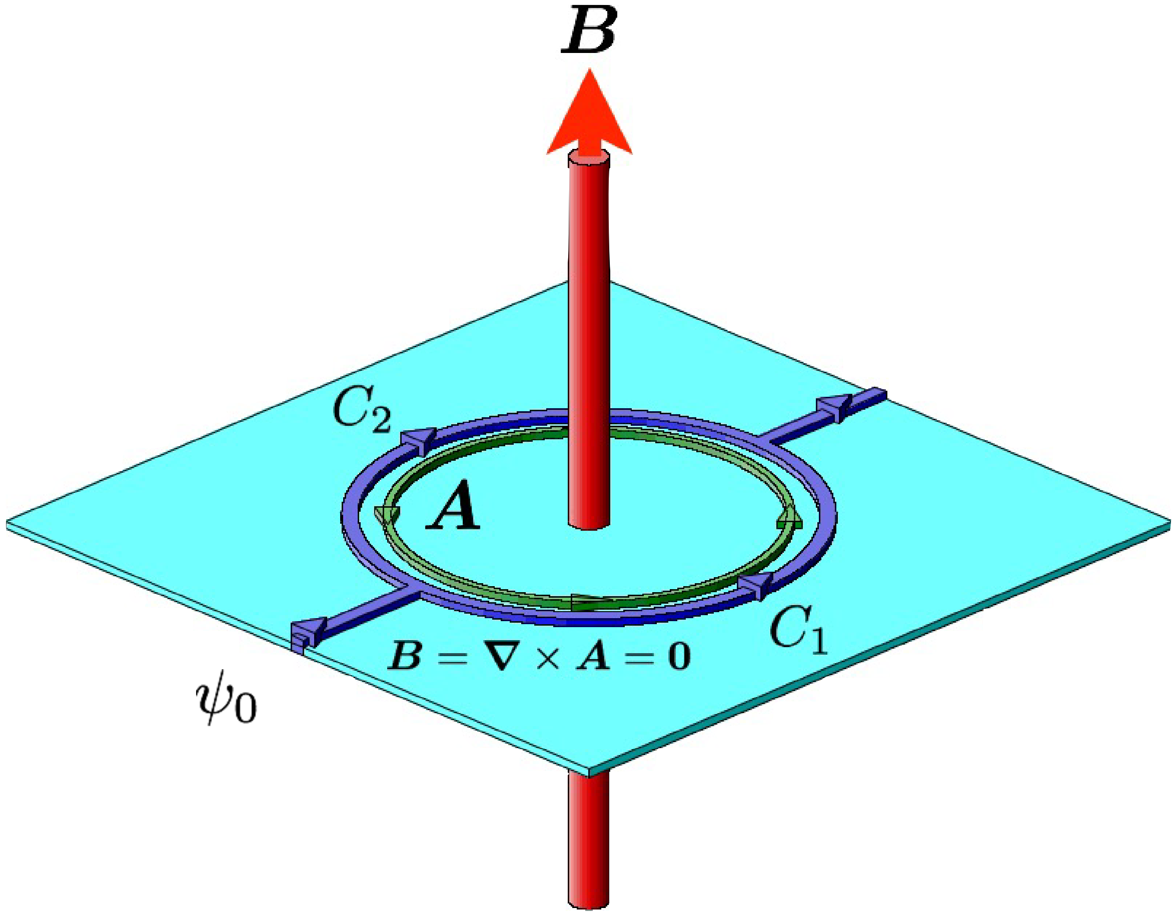
$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{C=\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \Phi = 2\pi r A$$



阿哈罗诺夫-玻姆效应

アハラノフ=ボーム効果

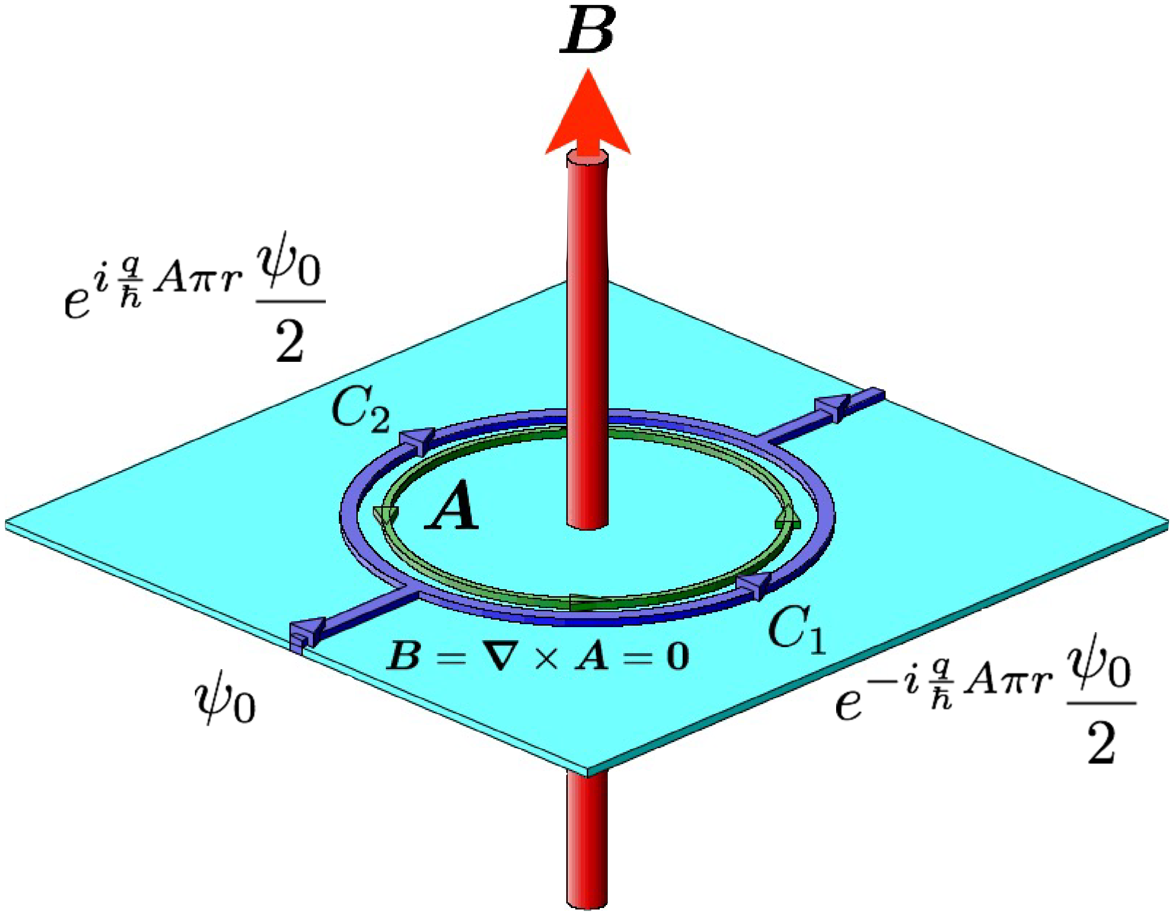
$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{C=\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \Phi = 2\pi r A$$



阿哈罗诺夫-玻姆效应

アハラノフ=ボーム効果

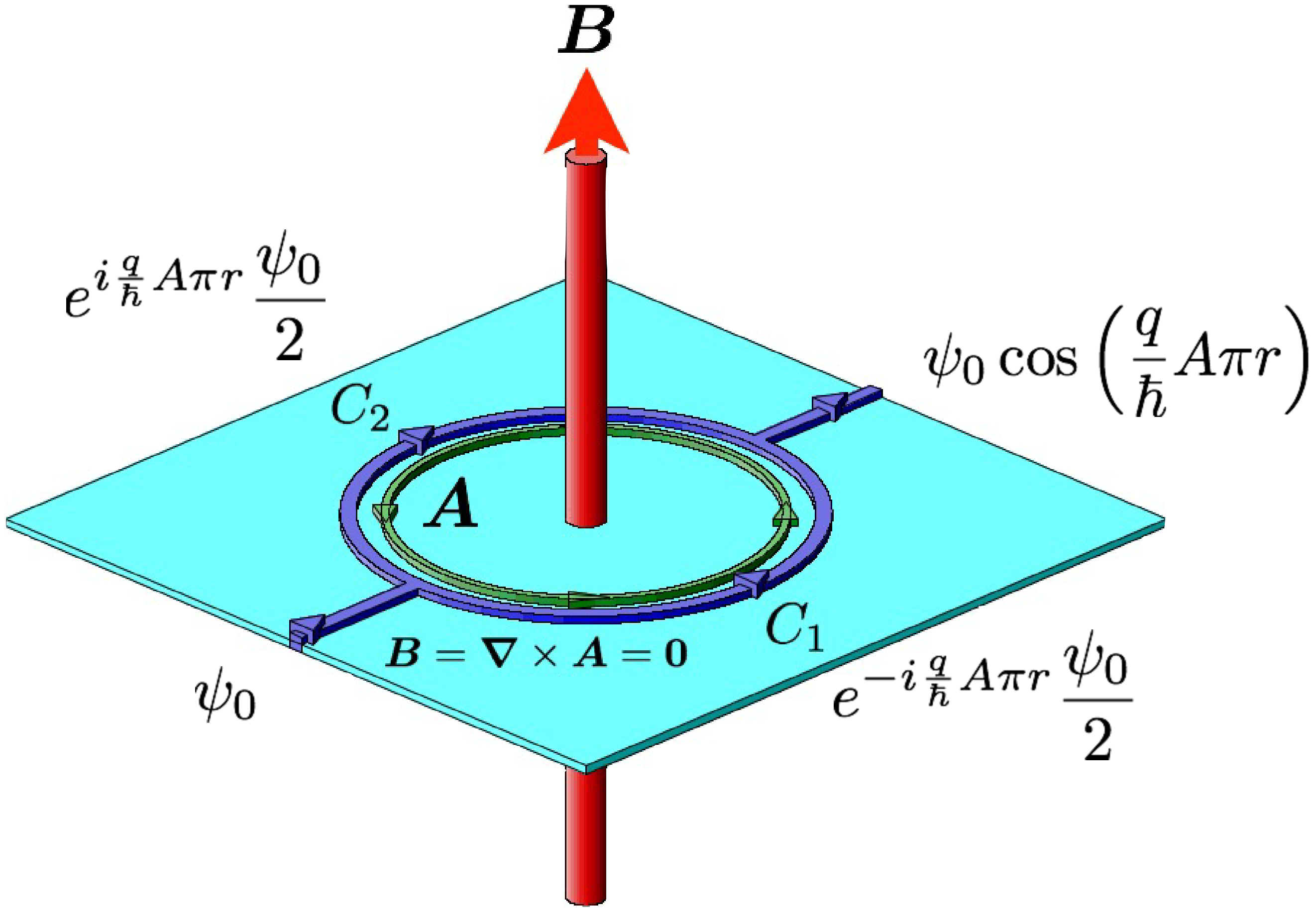
$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{C=\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \Phi = 2\pi r A$$



阿哈罗诺夫-玻姆效应

アハラノフ=ボーム効果

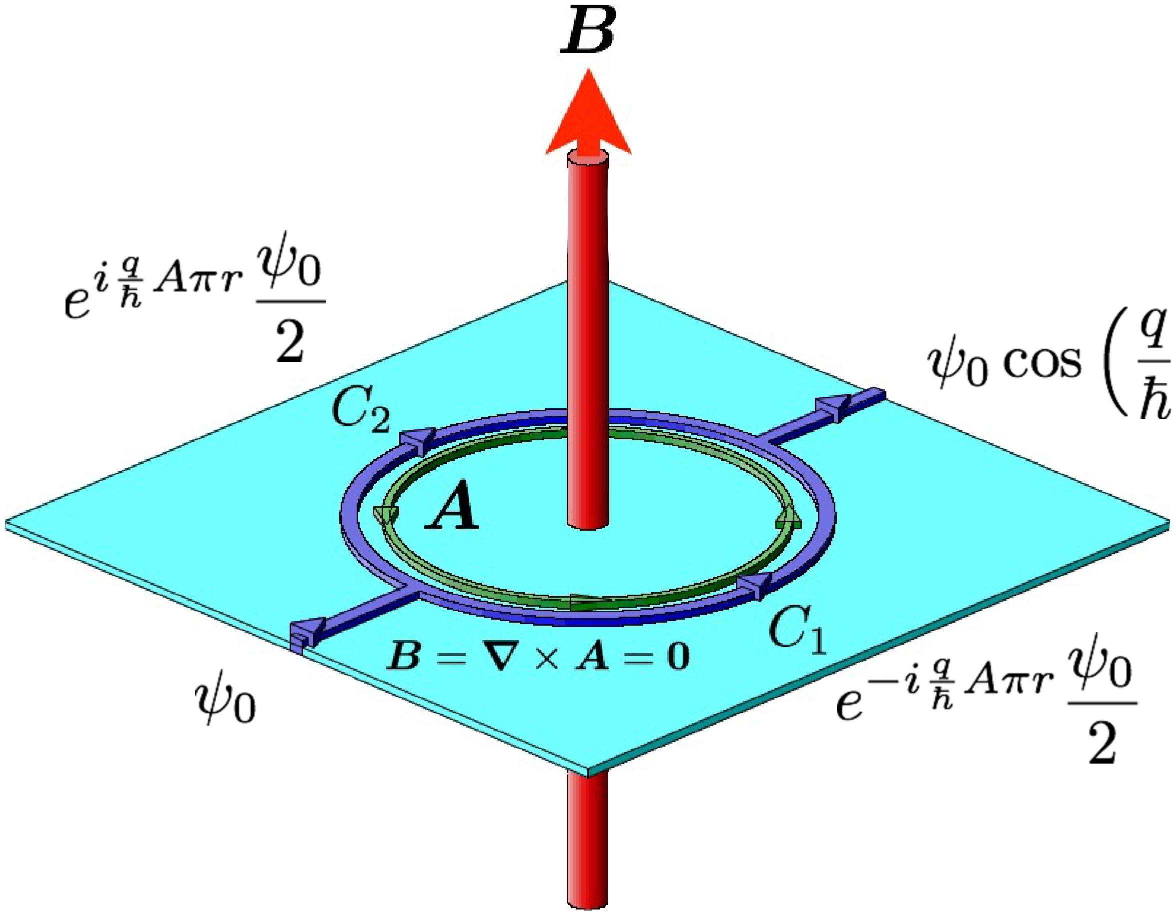
$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{C=\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \Phi = 2\pi r A$$



阿哈罗诺夫-玻姆效应

アハラノフ=ボーム効果

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{C=\partial S}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \Phi = 2\pi r A$$

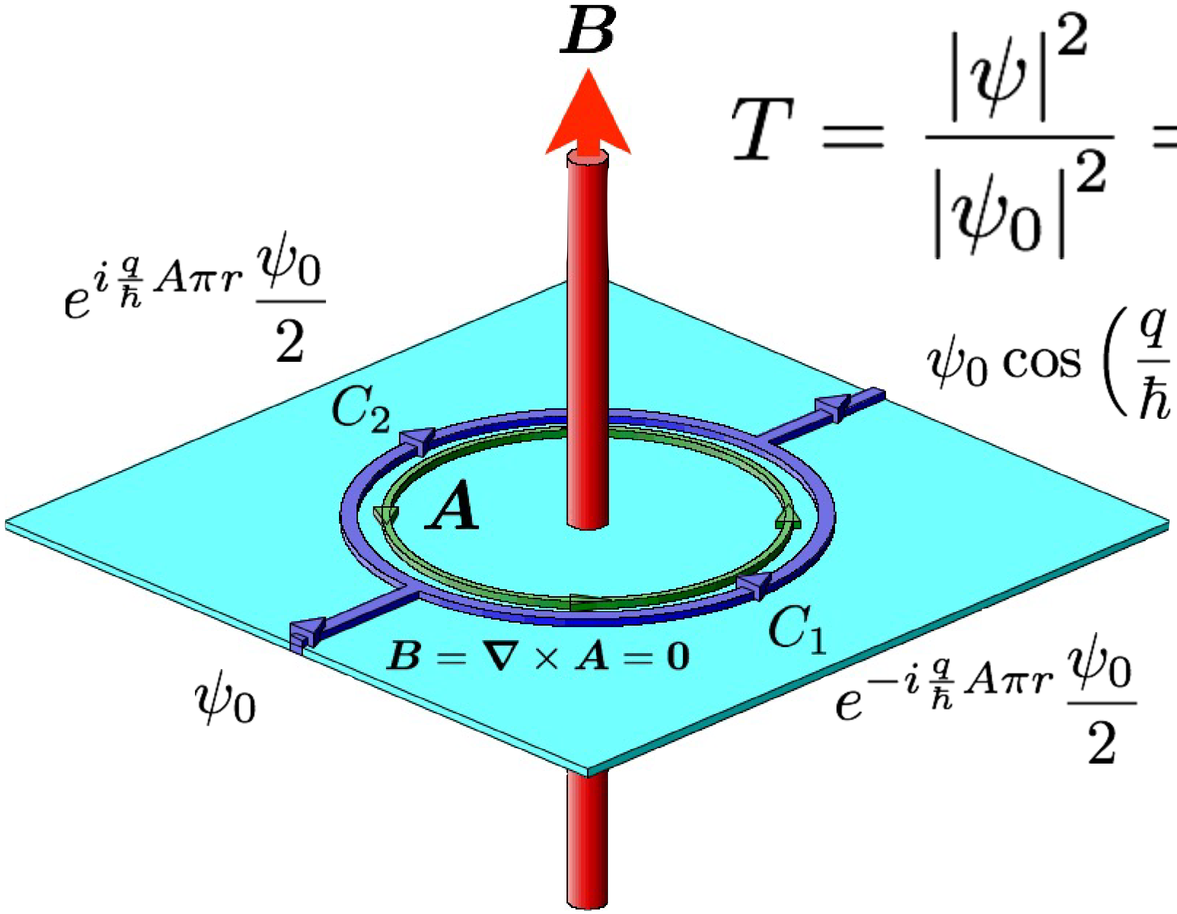


$$\psi_0 \cos\left(\frac{q}{\hbar}A\pi r\right) = \psi_0\cos\left(\frac{q\Phi}{2\hbar}\right)$$

阿哈罗诺夫-玻姆效应

アハラノフ=ボーム効果

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{C=\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \Phi = 2\pi r A$$

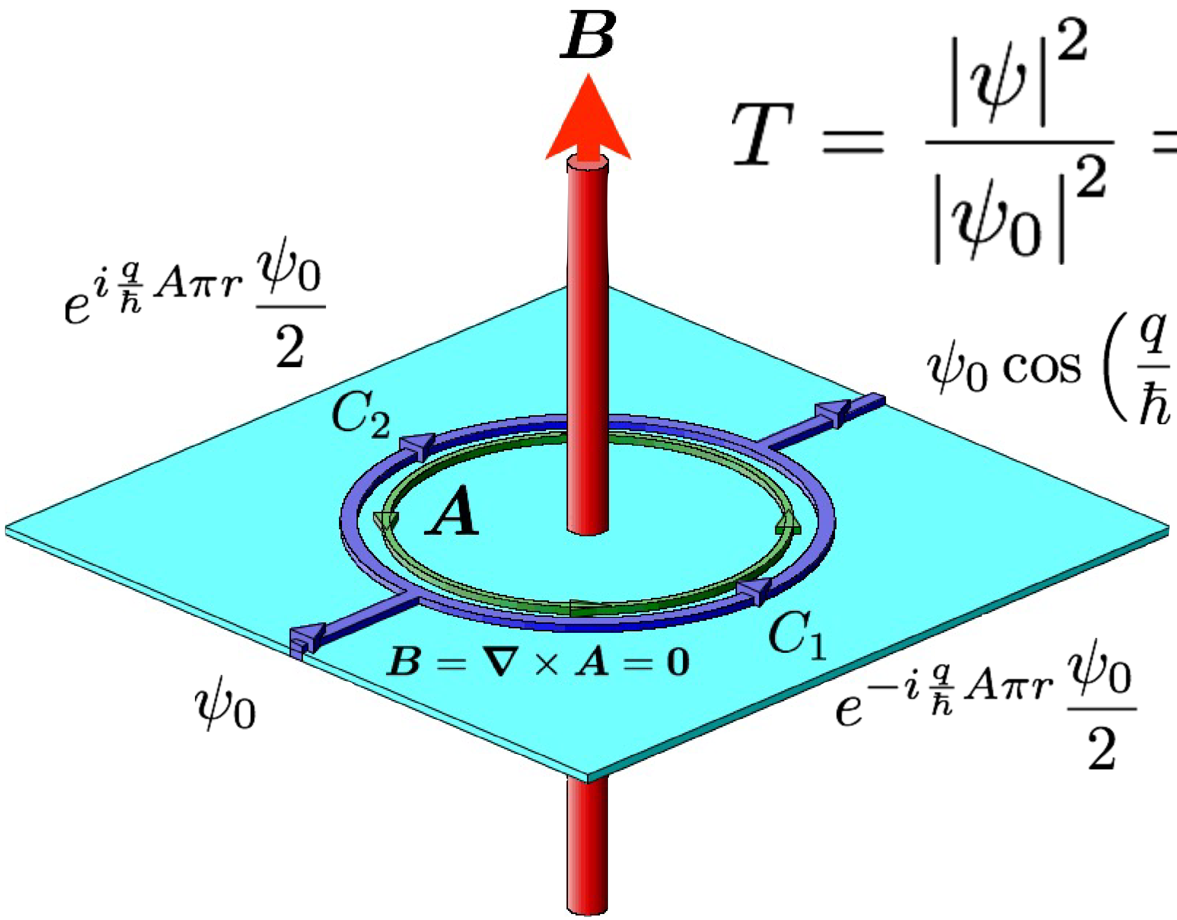


$$T = \frac{|\psi|^2}{|\psi_0|^2} = \cos^2\left(\frac{q\Phi}{2\hbar}\right)$$

$$\psi_0 \cos\left(\frac{q}{\hbar}A\pi r\right) = \psi_0 \cos\left(\frac{q\Phi}{2\hbar}\right)$$

阿哈罗诺夫-玻姆效应
アハラノフ=ボーム効果

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{C=\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \Phi = 2\pi r A$$



$$T = \frac{|\psi|^2}{|\psi_0|^2} = \cos^2\left(\frac{q\Phi}{2\hbar}\right)$$

$$\psi_0 \cos\left(\frac{q}{\hbar}A\pi r\right) = \psi_0 \cos\left(\frac{q\Phi}{2\hbar}\right)$$

电子全息术
1986年 (外村彰)

電子線ホログラフィー
1986年 (外村彰)

力 force	電気力 electric force		磁気力 magnetic force
荷 charge	電荷 electric charge	電流 (electric) current	磁荷 magnetic charge
場 field	電場 electric field		磁場 magnetic field
ポテンシャル potential 場	電位 electric potential		磁位 magnetic potential

力 force		電気力 electric force	磁気力 magnetic force
荷 charge		電荷 electric charge	電流 (electric) current
場 field	光	電場 electric field	磁場 magnetic field
ポテンシャル potential 場		電位 electric potential	磁位 magnetic potential

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right)$$

力 force		電気力 electric force	磁気力 magnetic force
荷 charge		電荷 electric charge	電流 (electric) current
場 field	光	電場 electric field	磁場 magnetic field
ポテン… potential 場		…tial	磁位 magnetic potential

$$\ldots u = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right)$$

阿哈罗诺夫-玻姆效应
1959年

アハラノフ＝ボーム効果
1959年

力 force		電気力 electric force	磁気力 magnetic force
荷 charge		電荷 electric charge	電流 (electric) current
場 field	光	電場 electric field	磁場 magnetic field

ポテン

potential

場

阿哈罗诺夫-玻姆效应
1959年

アハラノフ=ボーム効果
1959年

电子全息术
1986年 (外村彰)

電子線ホログラフィー
1986年 (外村彰)

力
force

電気力
electric force

磁気力
magnetic force

荷
charge

電荷

電流
current

狭义相对论

場
field

光

特殊相対性理論

磁場
magnetic field

ポテン
potential

場

阿哈罗诺夫-玻姆效应
1959年

アハラノフ=ボーム効果
1959年

电子全息术
1986年 (外村彰)

電子線ホログラフィー
1986年 (外村彰)

力 force	電気力 electric force		磁気力 magnetic force
荷 charge	電荷	電流 current	
場 field 光	electric field		磁場 magnetic field
ポテンシャル potential 場	electric potential		磁位 magnetic potential

狭义相对论

特殊相対性理論

量子力学

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A} \right)$$

量子力学

古典力学

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi = (mc^2)^2\psi$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

$$p^2 - m^2 = 0$$

$$(p+m)(p-m) = 0$$

$$p - m = 0$$

対応

数　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi = (mc^2)^2\psi$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

$$p^2 - m^2 = 0$$

$$(p+m)(p-m) = 0$$

$$p - m = 0$$

対応

数　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi = (mc^2)^2\psi$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

狄拉克方程
ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

$$p^2 - m^2 = 0$$

$$(p + m)(p - m) = 0$$

$$p - m = 0$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi = (mc^2)^2\psi$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

狄拉克方程
ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

相対論的量子力学

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

$$p^2 - m^2 = 0$$

$$(p+m)(p-m) = 0$$

$$p - m = 0$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi = (mc^2)^2\psi$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

狄拉克方程
ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

相対論的量子力学

场的正则量子化

場の正準量子化

$$\psi \to \prod_i \hat{a}_i^\dagger \left|0\right\rangle$$

生成演算子　**真空**

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

$$p^2 - m^2 = 0$$
$$(p+m)(p-m) = 0$$
$$p - m = 0$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$
$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

量子场论

場の量子論

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi = (mc^2)^2\psi$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

狄拉克方程
ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

相対論的量子力学

场的正则量子化

場の正準量子化

$$\psi \to \prod_i \hat{a}_i^\dagger \left|0\right\rangle$$

生成演算子　真空

古典力学

非相対論

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V$$

相対論

$$E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = (mc^2)^2$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0$$

$$p^2 - m^2 = 0$$

$$(p+m)(p-m) = 0$$

$$p - m = 0$$

対応

数　　演算子

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

$$c = \hbar = 1$$

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

量子力学

薛定谔方程
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi$$

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi = (mc^2)^2\psi$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

狄拉克方程
ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

相対論的量子力学

场的正则量子化
場の正準量子化

$$\psi \to \prod_i \hat{a}_i^\dagger |0\rangle$$

生成演算子　真空

量子场论
場の量子論

具有整数自旋的粒子
スピン整数の粒子

关注 Bose 统计数据
Bose統計に従う

具有半整数自旋的粒子
スピン半整数の粒子

遵循费米统计
Fermi統計に従う

克莱因-戈登方程
クライン・ゴルドン方程式

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

狄拉克方程
ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

Boson	具有整数自旋的粒子 スピン整数の粒子 关注 Bose 统计数据 Bose統計に従う	クライン・ゴルドン方程式 $\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$
Fermion	具有半整数自旋的粒子 スピン半整数の粒子 遵循费米统计 Fermi統計に従う	ディラック方程式 $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$

类似光的东西
光らしいもの

Boson

具有整数自旋的粒子
スピン整数の粒子

关注 Bose 统计数据
Bose統計に従う

クライン・ゴルドン方程式

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

类似物质的东西
物質らしいもの

Fermion

具有半整数自旋的粒子
スピン半整数の粒子

遵循费米统计
Fermi統計に従う

ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

Gauge不変性

電磁場と相互作用する電荷qを持つ粒子のSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi\right]\psi$$

は、$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu u$　という変換(gauge変換)に対して

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}u$ であって　$\psi \to e^{-i\frac{q}{\hbar}u}\psi$ と変換されるならば不変

类似光的东西 光らしいもの **Boson**	具有整数自旋的粒子 スピン整数の粒子 关注 Bose 统计数据 Bose統計に従う	クライン・ゴルドン方程式 $\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$
类似物质的东西 物質らしいもの **Fermion**	具有半整数自旋的粒子 スピン半整数の粒子 遵循费米统计 Fermi統計に従う	ディラック方程式 $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$

Gauge不変性

電磁場と相互作用する電荷qを持つ粒子のSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi\right]\psi$$

は、$A^\mu\rightarrow A^\mu+\partial^\mu u$ という変換(gauge変換)に対して

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}u$ であって $\psi\rightarrow e^{-i\frac{q}{\hbar}u}\psi$ と変換されるならば不変

Gauge原理

相互作用源于这样一个事实：状态在某些变换下保持不变。

状態がある変換の下で不変であることから、相互作用が導かれる

类似光的东西 光らしいもの **Boson**	具有整数自旋的粒子 スピン整数の粒子 关注 Bose 统计数据 Bose統計に従う	クライン・ゴルドン方程式 $\left(\partial_\mu\partial^\mu-m^2\right)\psi=0$
类似物质的东西 物質らしいもの **Fermion**	具有半整数自旋的粒子 スピン半整数の粒子 遵循费米统计 Fermi統計に従う	ディラック方程式 $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi=0$

Gauge不変性

電磁場と相互作用する電荷qを持つ粒子のSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi\right]\psi$$

は、$A^\mu\to A^\mu+\partial^\mu u$ という変換(gauge変換)に対して

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}u$ であって $\psi\to e^{-i\frac{q}{\hbar}u}\psi$ と変換されるならば不変

Gauge原理

相互作用源于这样一个事实：状态在某些变换下保持不变。

状態がある変換の下で不変であることから、相互作用が導かれる

类似光的东西
光らしいもの

Boson

具有整数自旋的粒子
スピン整数の粒子

关注 Bose 统计数据
Bose統計に従う

クライン・ゴルドン方程式

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu-m^2\right)\psi=0$$

类似物质的东西
物質らしいもの

Fermion

具有半整数自旋的粒子
スピン半整数の粒子

遵循费米统计
Fermi統計に従う

ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi=0$$

你可以改变相位
位相を変えてもいい

Gauge不変性

電磁場と相互作用する電荷qを持つ粒子のSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi\right]\psi$$

は、$A^\mu\to A^\mu+\partial^\mu u$ という変換(gauge変換)に対して

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}u$ であって $\psi\to e^{-i\frac{q}{\hbar}u}\psi$ と変換されるならば不変

Gauge原理

相互作用源于这样一个事实：状态在某些变换下保持不变。

状態がある変換の下で不変であることから、相互作用が導かれる

类似光的东西
光らしいもの

Boson

具有整数自旋的粒子
スピン整数の粒子

关注 Bose 统计数据
Bose統計に従う

クライン・ゴルドン方程式

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu-m^2\right)\psi=0$$

类似物质的东西
物質らしいもの

Fermion

具有半整数自旋的粒子
スピン半整数の粒子

遵循费米统计
Fermi統計に従う

ディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$$

需要一个附加项来使方程保持不变
方程式を不変にするためには追加項が必要

你可以改变相位
位相を変えてもいい

Gauge不変性

電磁場と相互作用する電荷qを持つ粒子のSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi\right]\psi$$

は、 $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu u$ という変換(gauge変換)に対して

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}u$ であって $\psi \to e^{-i\frac{q}{\hbar}u}\psi$ と変換されるならば不変

Gauge原理

相互作用源于这样一个事实：状态在某些变换下保持不变。

状態がある変換の下で不変であることから、相互作用が導かれる

类似光的东西
光らしいもの

Boson

具有整数自旋的粒子
スピン整数の粒子

关注 Bose 统计数据
Bose統計に従う

クライン・ゴルドン方程式

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi = 0$$

类似物质的东西
物質らしいもの

Fermion

具有半整数自旋的粒子
スピン半整数の粒子

遵循费米统计
Fermi統計に従う

ディラック方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

需要一个附加项来使方程保持不变
方程式を不変にするためには追加項が必要

你可以改变相位
位相を変えてもいい

附加条款具有预先设定的形式
追加項は形が決まってしまう

Gauge不変性

電磁場と相互作用する電荷qを持つ粒子のSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi\right]\psi$$

は、 $A^\mu\rightarrow A^\mu+\partial^\mu u$ という変換(gauge変換)に対して

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}u$ であって $\psi\rightarrow e^{-i\frac{q}{\hbar}u}\psi$ と変換されるならば不変

Gauge原理

相互作用源于这样一个事实：状态在某些变换下保持不变。

状態がある変換の下で不変であることから、相互作用が導かれる

類似光的东西
光らしいもの

Boson

具有整数自旋的粒子
スピン整数の粒子

关注 Bose 统计数据
Bose統計に従う

クライン・ゴルドン方程式

$$(\partial_\mu\partial^\mu-m^2)\psi=0$$

類似物质的东西
物質らしいもの

Fermion

具有半整数自旋的粒子
スピン半整数の粒子

遵循费米统计
Fermi統計に従う

ディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$$

需要一个附加项来使方程保持不变
方程式を不変にするためには追加項が必要

你可以改变相位
位相を変えてもいい

附加条款具有预先设定的形式
追加項は形が決まってしまう

与附加项对应的粒子是力的成因
追加項が対応する粒子が力の原因

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

$\longrightarrow$

その自由度の変更に対して方程式が不変
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

$\longrightarrow$

その自由度の変更に対して方程式が不変
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

规范原理
ゲージ原理

$\longrightarrow$

その自由度の変更に対して方程式が不変
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

$\longrightarrow$

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

规范原理
ゲージ原理

$\longrightarrow$

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

二维复向量空间中保持范数的条件
2次元の複素ベクトル空間で、ノルムを変えない条件

电子
電子

$$\psi_e$$

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

→

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

旋转不变性
回転不変

规范原理
ゲージ原理

→

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

二维复向量空间中保持范数的条件
2次元の複素ベクトル空間で、ノルムを変えない条件

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

→

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

旋转不变性
回転不変

规范原理
ゲージ原理

→

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

二维复向量空间中保持范数的条件
2次元の複素ベクトル空間で、ノルムを変えない条件

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

$$|\psi'|^2 = \psi^{*T}\psi = \psi U^{*T} U\psi = \psi U^\dagger U\psi \qquad U^\dagger = U^{*T}$$

$$U^\dagger U = 1$$

幺正矩阵
ユニタリー行列

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

旋转不变性
回転不変

规范原理
ゲージ原理

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

二维复向量空间中保持范数的条件
2次元の複素ベクトル空間で、ノルムを変えない条件

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

$$|\psi'|^2 = \psi^{*T}\psi = \psi U^{*T} U\psi = \psi U^\dagger U\psi \qquad U^\dagger = U^{*T}$$

$$U^\dagger U = 1$$

幺正矩阵
ユニタリー行列

同时请求 |U|=1
|U|=1も要請

SU(2)不变性
SU(2)不変性

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

電磁相互作用 ⇔ U(1)

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

旋转不变性
回転不変

规范原理
ゲージ原理

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

二维复向量空间中保持范数的条件
2次元の複素ベ

弱い相互作用 ⇔ SU(2)

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

$$|\psi'|^2 = \psi^{*T}\psi = \psi U^{*T}U\psi = \psi U^{\dagger}U\psi \qquad U^{\dagger} = U^{*T}$$

$$U^{\dagger}U = 1$$

幺正矩阵
ユニタリー行列

同时请求 |U|=1
|U|=1も要請

SU(2)不变性
SU(2)不変性

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

電磁相互作用 ⇔ U(1)

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

旋转不变性
回転不変

规范原理
ゲージ原理

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

二维复向量空间中保持范数的条件
2次元の複素ベ

弱い相互作用 ⇔ SU(2)$_L$

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

$$|\psi'|^2 = \psi^{*T}\psi = \psi U^{*T}U\psi = \psi U^\dagger U\psi \qquad U^\dagger = U^{*T}$$

$$U^\dagger U = 1$$

幺正矩阵
ユニタリー行列

同时请求 |U|=1
|U|=1も要請

SU(2)不变性
SU(2)不変性

电子
電子

ψ_e

相位自由度
位相の自由度

规范原理
ゲージ原理

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

电磁场
電磁場

電磁相互作用 ⇔ U(1)

电子-中微子对
電子と中性微子の組

$$\psi = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$$

规范原理

電弱相互作用 ⇔ SU(2)$_L$×U(1)

回転不変

该方程对于其自由度的变化是不变的
その自由度の変更に対して方程式が不変

弱相互作用
弱い相互作用

二维复向量空间中保持范数的条件
2次元の複素ベ

弱い相互作用 ⇔ SU(2)$_L$

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi$$

$$|\psi'|^2 = \psi^{*T}\psi = \psi U^{*T}U\psi = \psi U^\dagger U\psi \qquad U^\dagger = U^{*T}$$

$$U^\dagger U = 1$$

幺正矩阵
ユニタリー行列

同时请求 |U|=1
|U|=1も要請

SU(2)不变性
SU(2)不変性

群

group

群　かけ算を抽象化したようなもの

空でない集合 S に対して二項演算 f が定義されている時

$$f : S \times S \to S$$

$$(\forall a, b, c \in S)[f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)]$$

結合法則: a×(b×c)=(a×b)×cの拡張

$$(\exists e \in S)(\forall a \in S)[f(e, a) = f(a, e) = a]$$

単位元の存在: 1のこと、a×1=1×a

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)[f(a, x) = f(x, a) = e]$$

逆元の存在: 逆数のこと、x=1/a

のすべてが成り立つならば、(S , f) の組は群を為すと言う。

群　かけ算を抽象化したようなもの

空でない集合 S に対して二項演算 f が定義されている時

$$f : S \times S \to S$$

$$(\forall a, b, c \in S)[f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)]$$

結合法則: a×(b×c)=(a×b)×cの拡張

$$(\exists e \in S)(\forall a \in S)[f(e, a) = f(a, e) = a]$$

単位元の存在: 1のこと、a×1=1×a

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)[f(a, x) = f(x, a) = e]$$

逆元の存在: 逆数のこと、x=1/a

のすべてが成り立つならば、(S , f) の組は群を為すと言う。

可換(ab=ba)であるとは言っていない

可換な群：アーベル群

非可換な群：非アーベル群

群　かけ算を抽象化したようなもの

空でない集合 S に対して二項演算 f が定義されている時

$$f : S \times S \to S$$

$$(\forall a, b, c \in S)[f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)]$$

結合法則

U(1) 和 SU(2) 都构成群

U(1)もSU(2)も群をなす

$$(\exists e \in S) \quad \ldots = a]$$

単位元の存在: 1のこと、a×1=1×a

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)[f(a, x) = f(x, a) = e]$$

逆元の存在: 逆数のこと、x=1/a

のすべてが成り立つならば、(S , f) の組は群を為すと言う。

可換(ab=ba)であるとは言っていない

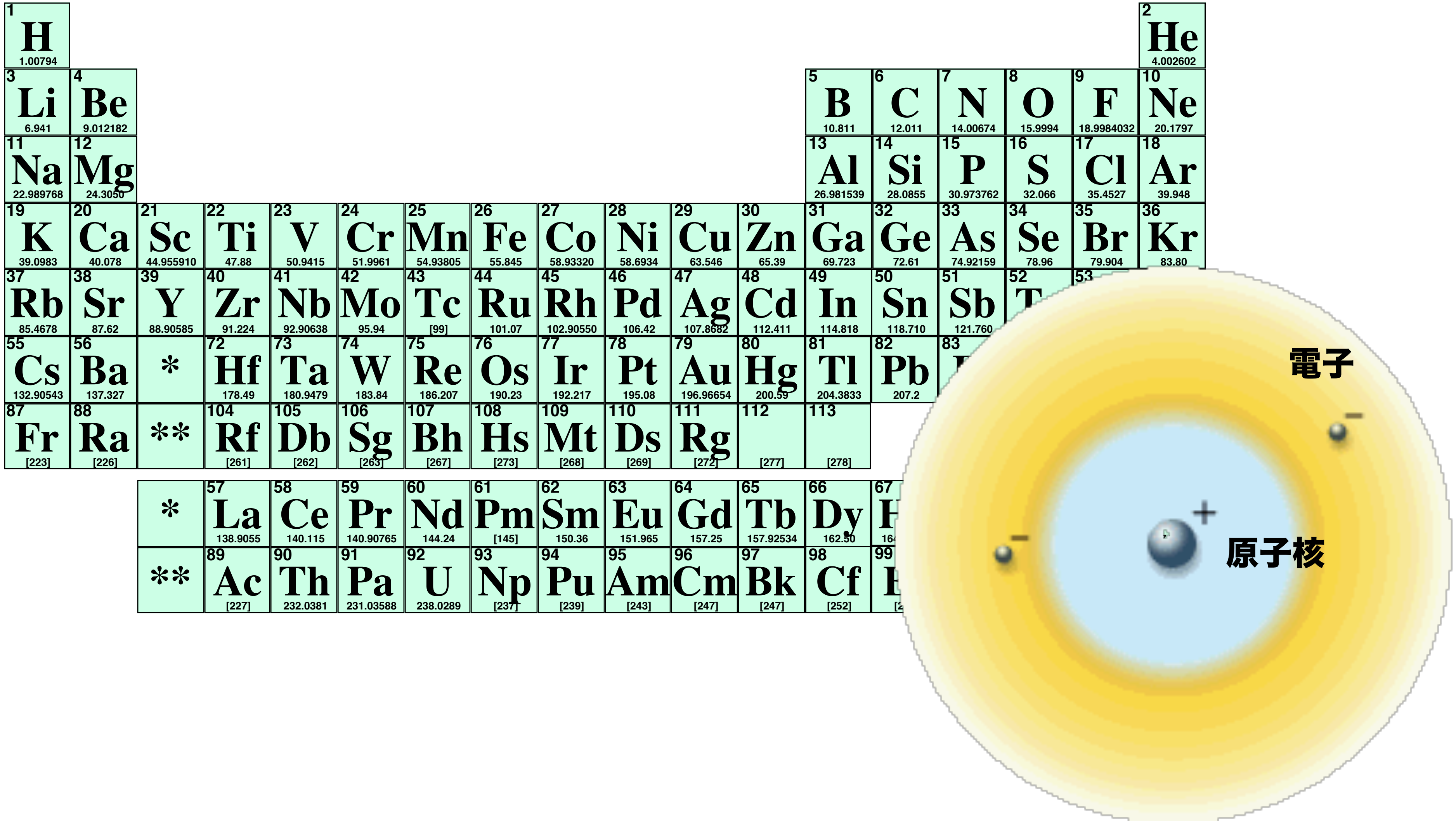
可換な群：アーベル群

非可換な群：非アーベル群

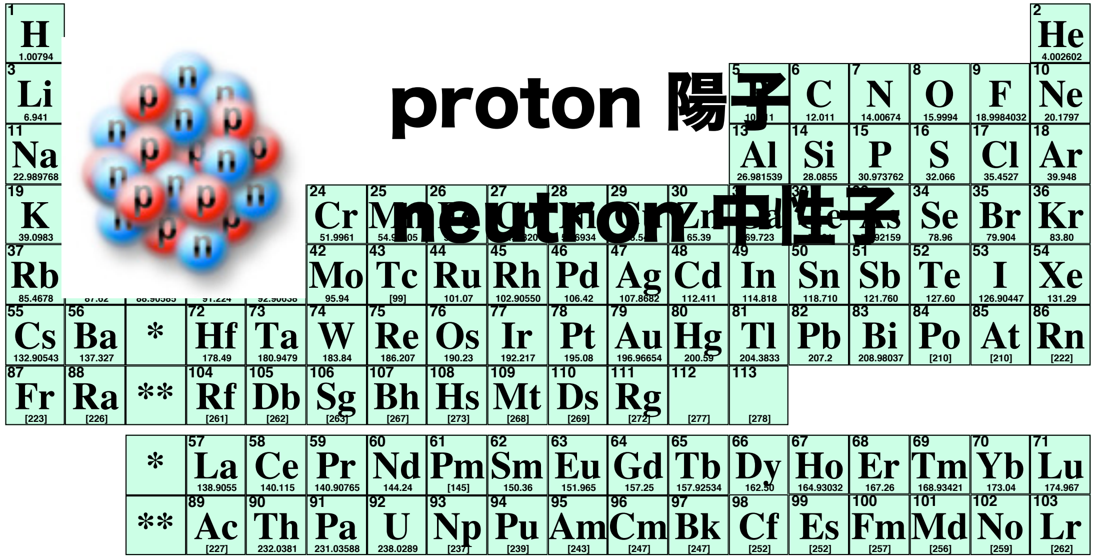
素粒子

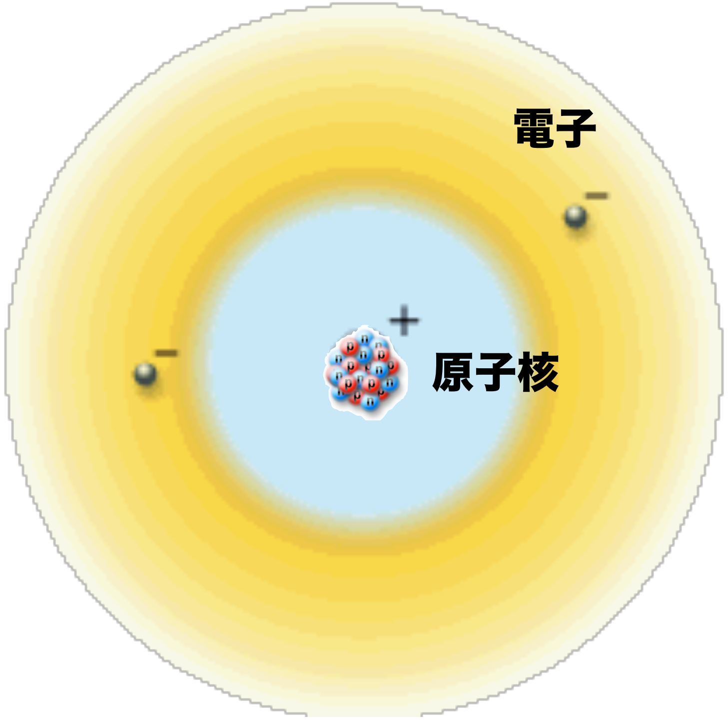
elementary particles

元素



原子核





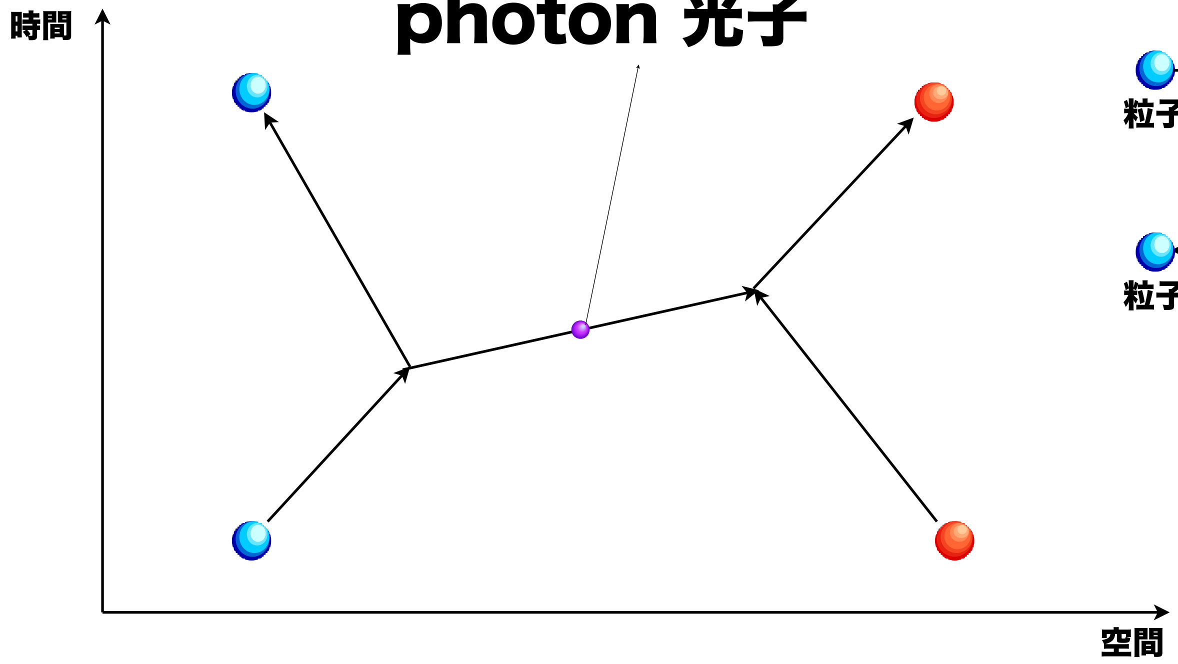
素粒子

proton 陽子

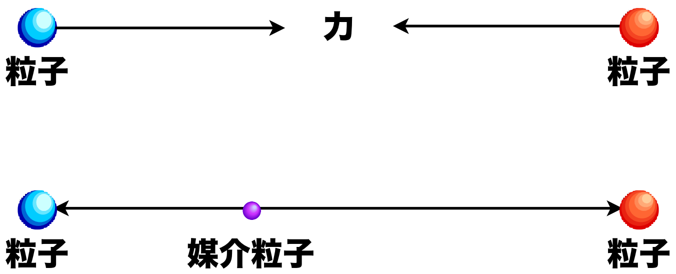
neutron 中性子

electron 電子

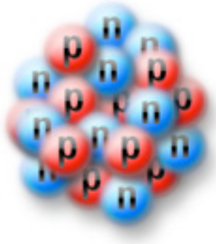
photon 光子



相互作用



核力

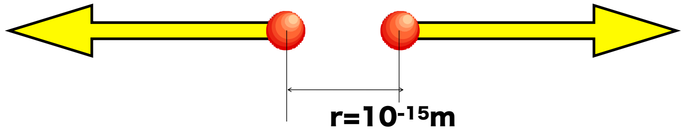


proton 陽子

neutron 中性子

$4\mu N=0.4mg$重

Q=1.6×10^{-19}C

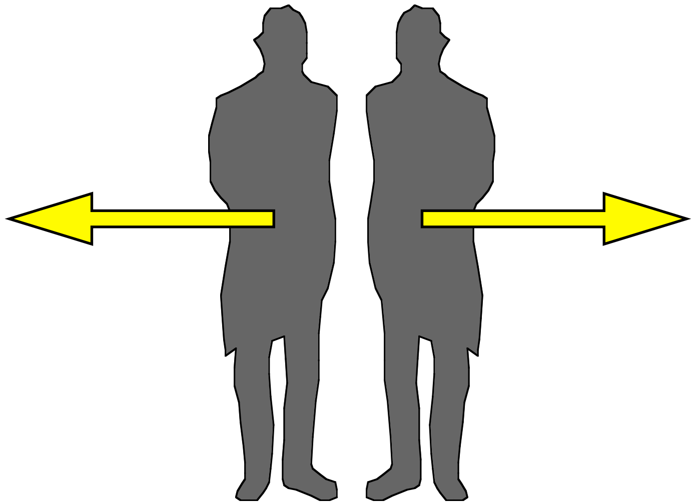


$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}=4\times10^{-6}N$$

陽子質量=1.672210×10^{-27}kg

陽子が受ける加速度を換算すると

60kg　60kg

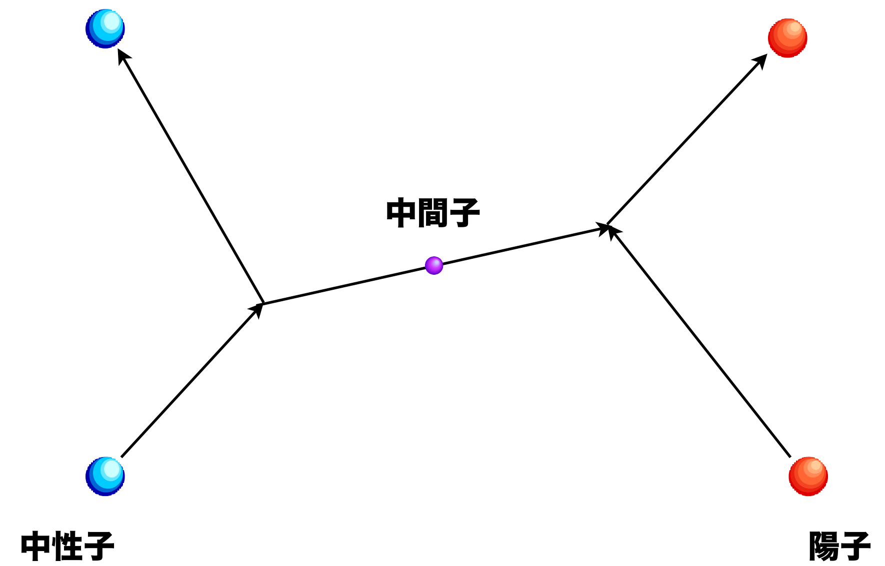


$1.4\times10^{23}N=1.4\times10^{22}kg$重

$=0.02M_{地球}$重

この反発力に打ち勝って原子核を形作る力⇒核力

中間子



$\pi^0, \pi^\pm$ $\mu^\pm$

素粒子

p $\bar{p}$

n $\bar{n}$

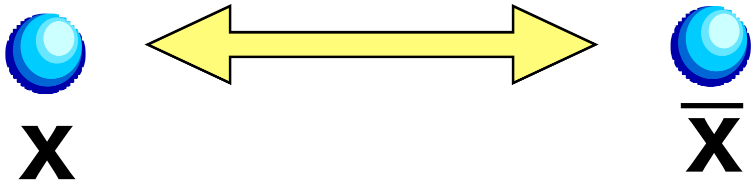
e^- e^+

γ

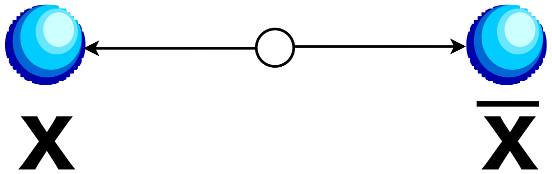
$\pi^0, \pi^\pm$

$\mu^\pm$

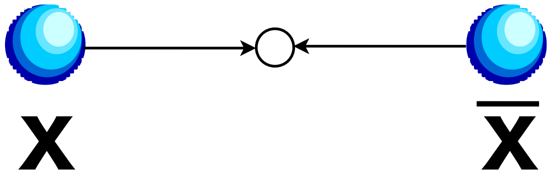
反粒子



対生成



対消滅



素粒子

p

, , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , , ,
, , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , , , Δ(
, , , , , , , , , , , , , ,
, , ,

n

, , , , , , , , , Σ(1660), , , , , ,
, , , , , , , , , , , , ,

, , , , , , , , , , ,
, , ,

e

, , , , ,
, , , , , , ,
, , , , , , , , ,
, , ,
,

γ

η, , , , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , ,

π

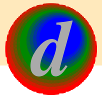
, , , , , , , , , , ,
, , , , , , ,
, , , , , , ,
, , , , , ,
, , , , , , ,

μ

, , , , , , , ,
, , , , ,
, , , ,
, , , , , , , , , , , , , , ,
, , , , , , , , ,
, , , , , , , , , , , , ,

τ, $W^{\pm}$, Z^{0}, ν_e, ν_μ, ν_τ

素粒子



p up-quark down-quark

n

e

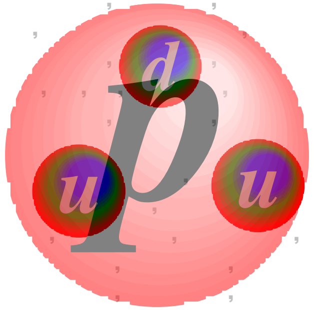
γ

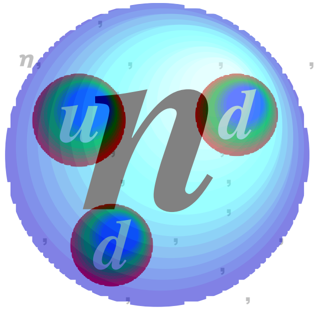
π

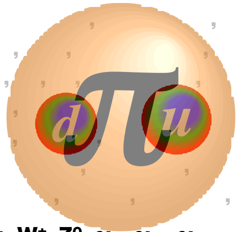
μ

Δ(

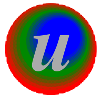
Σ(1660),



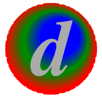




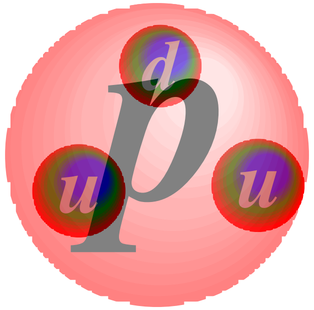
τ, $W^{\pm}$, Z^0, ν_e, ν_μ, ν_τ

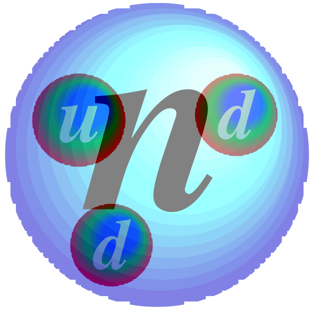


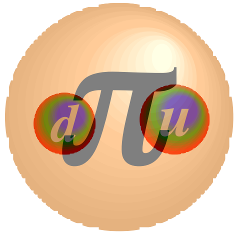
up-quark

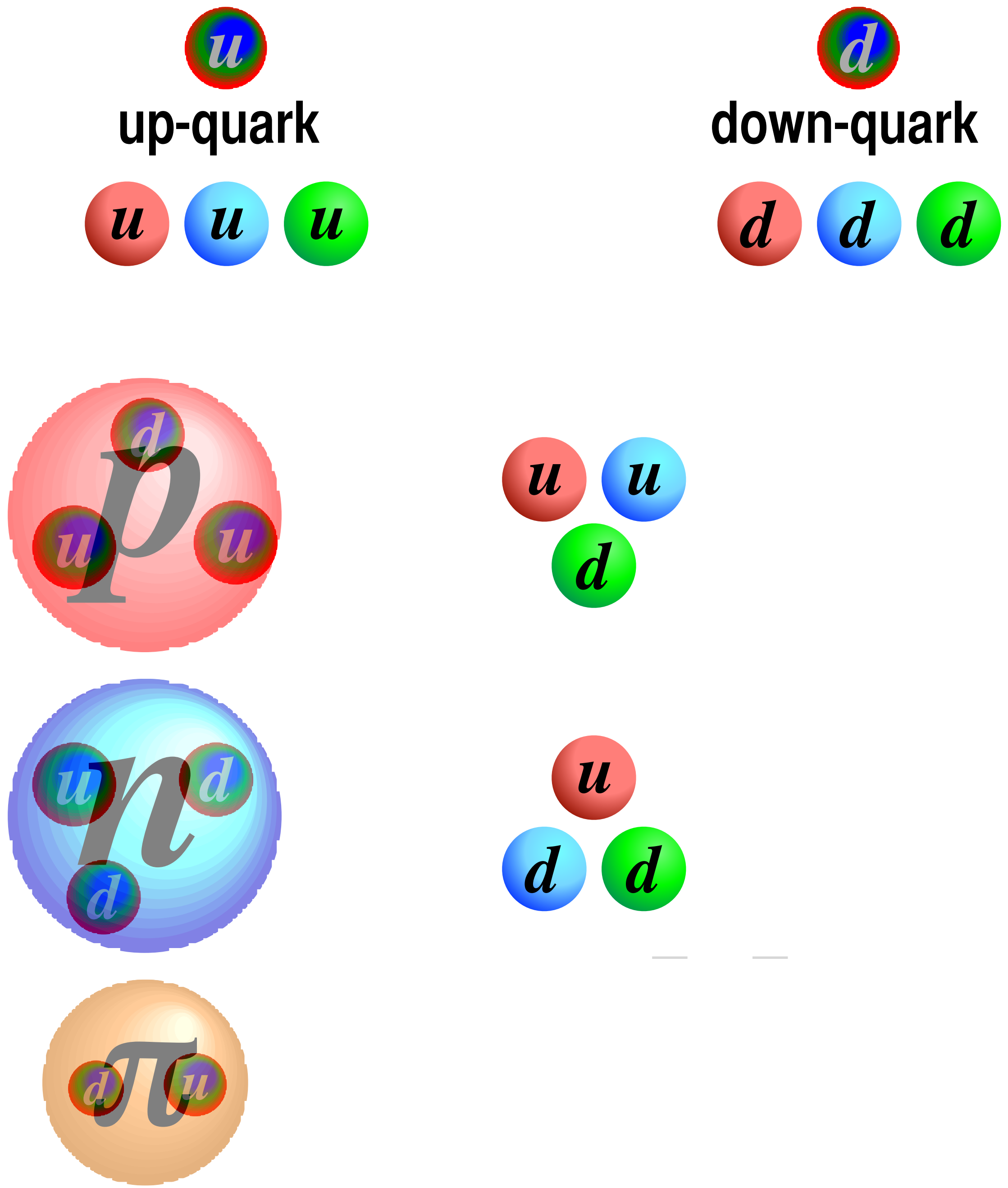


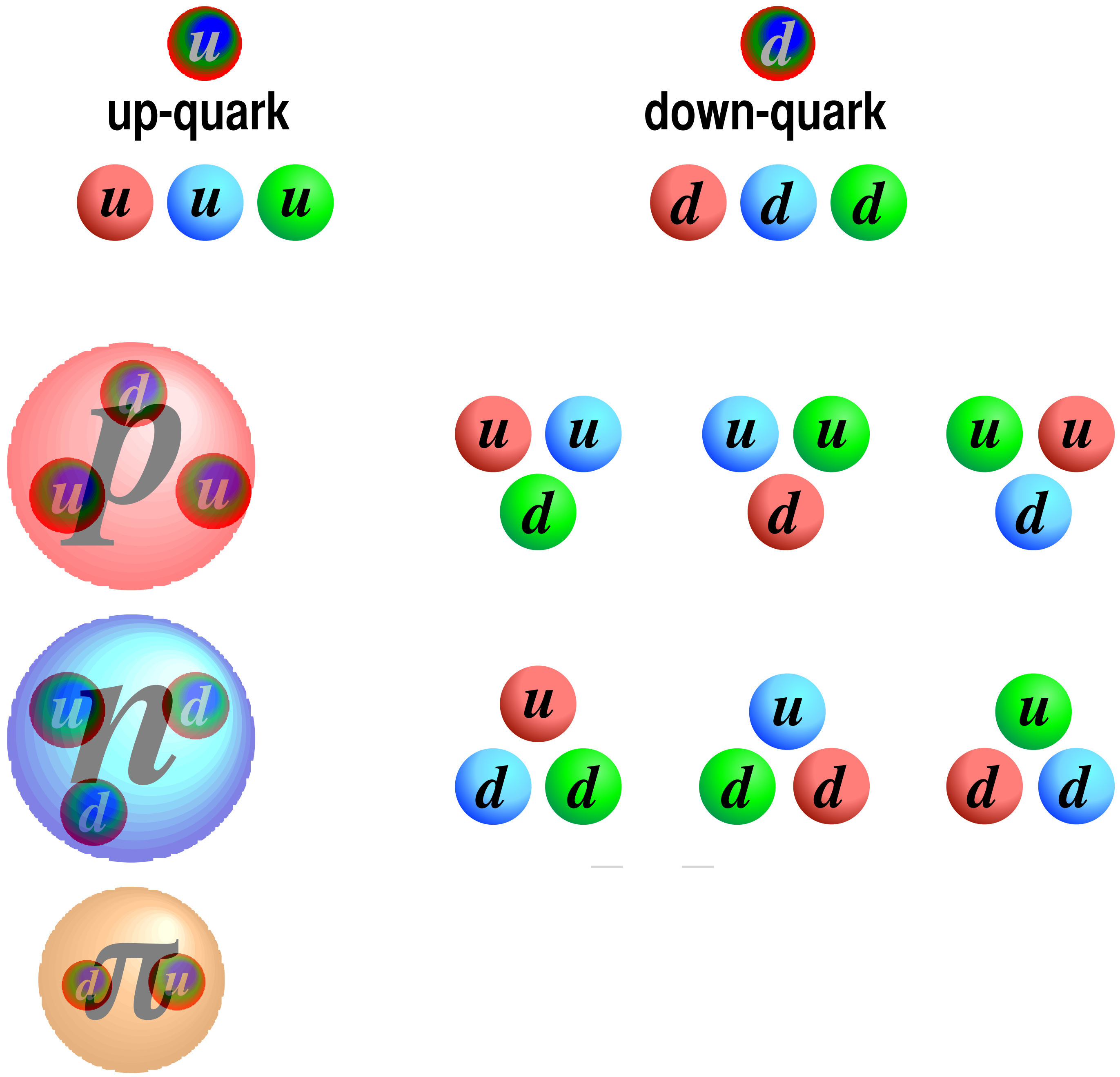
down-quark

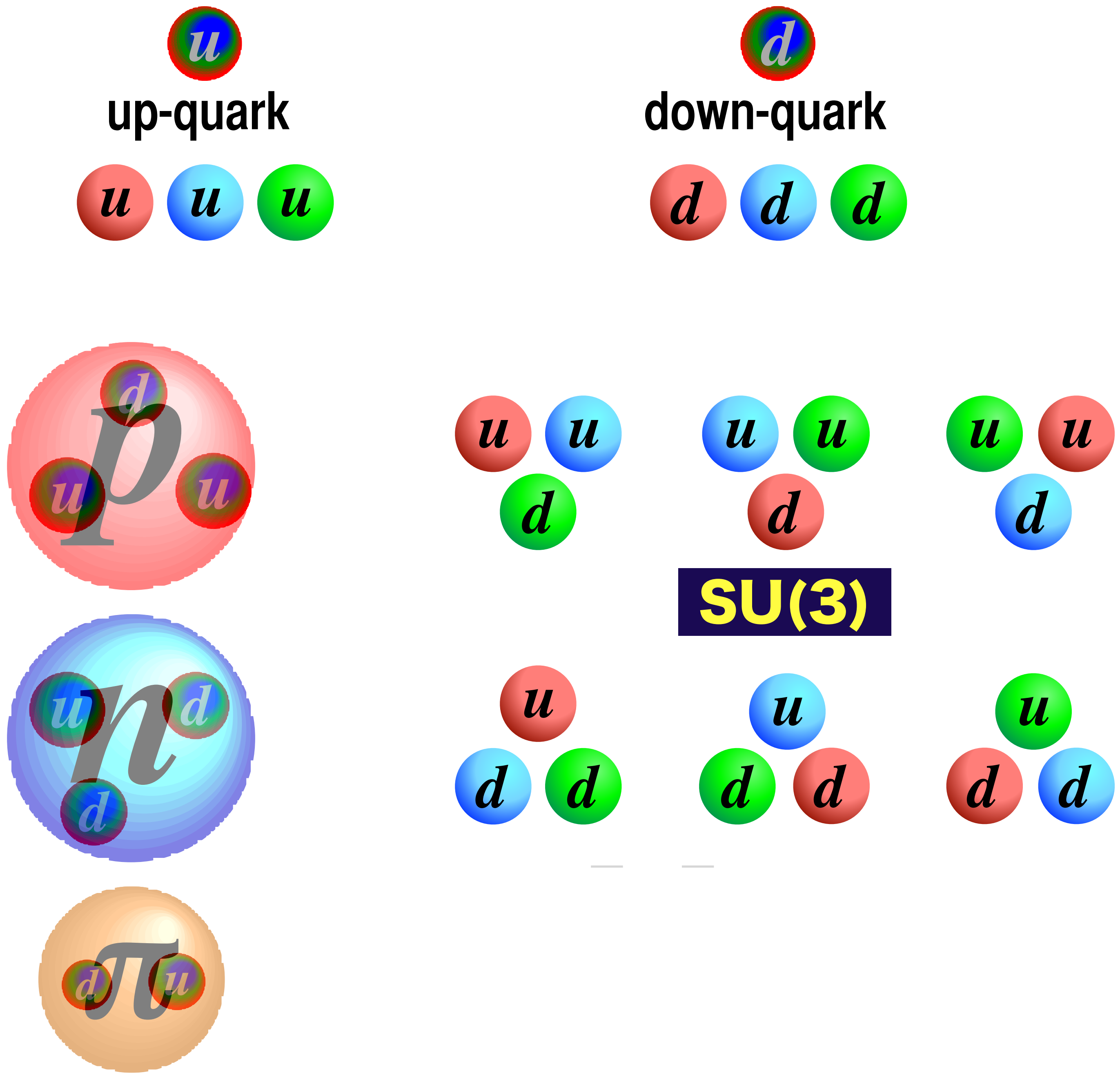


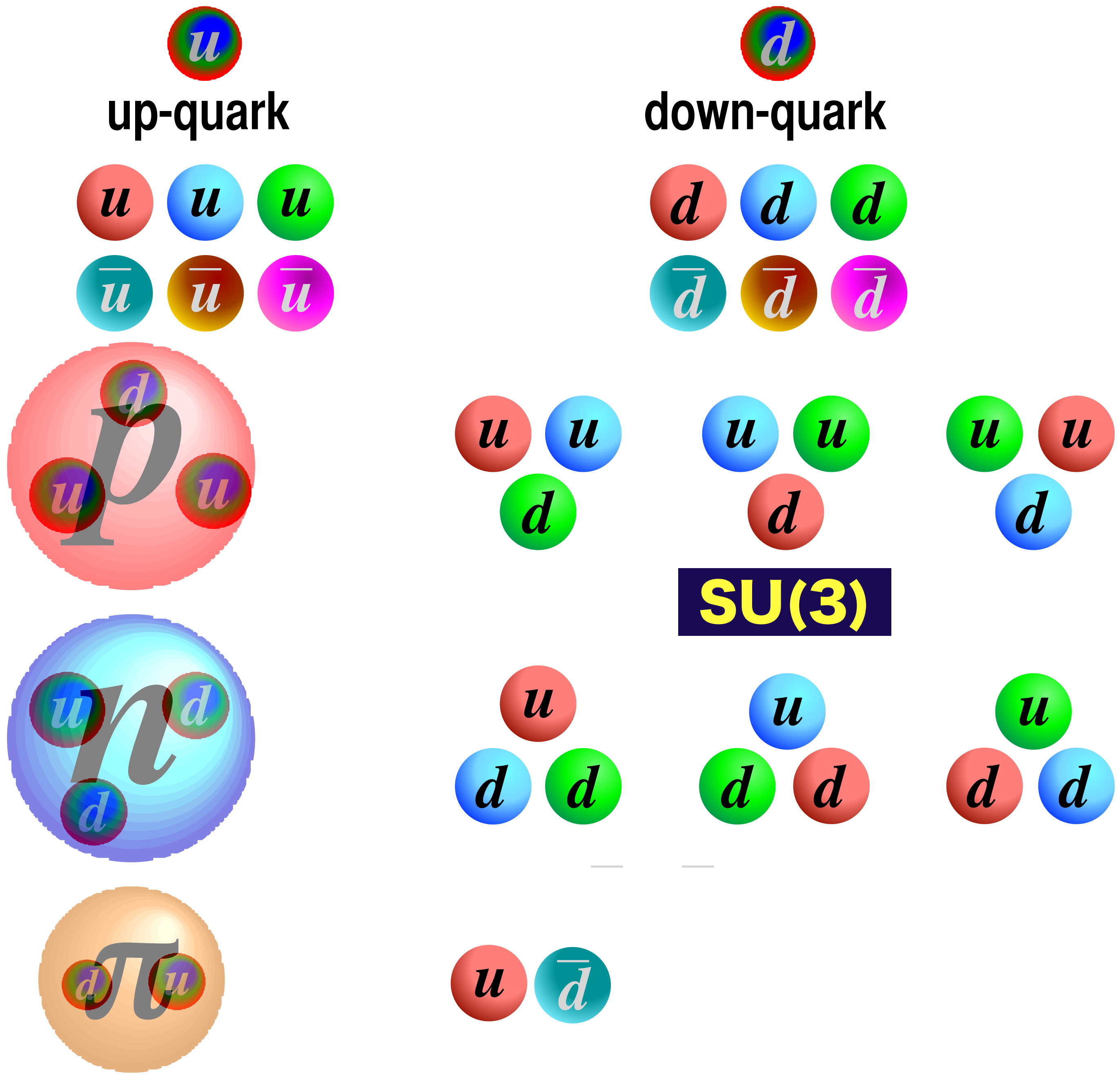


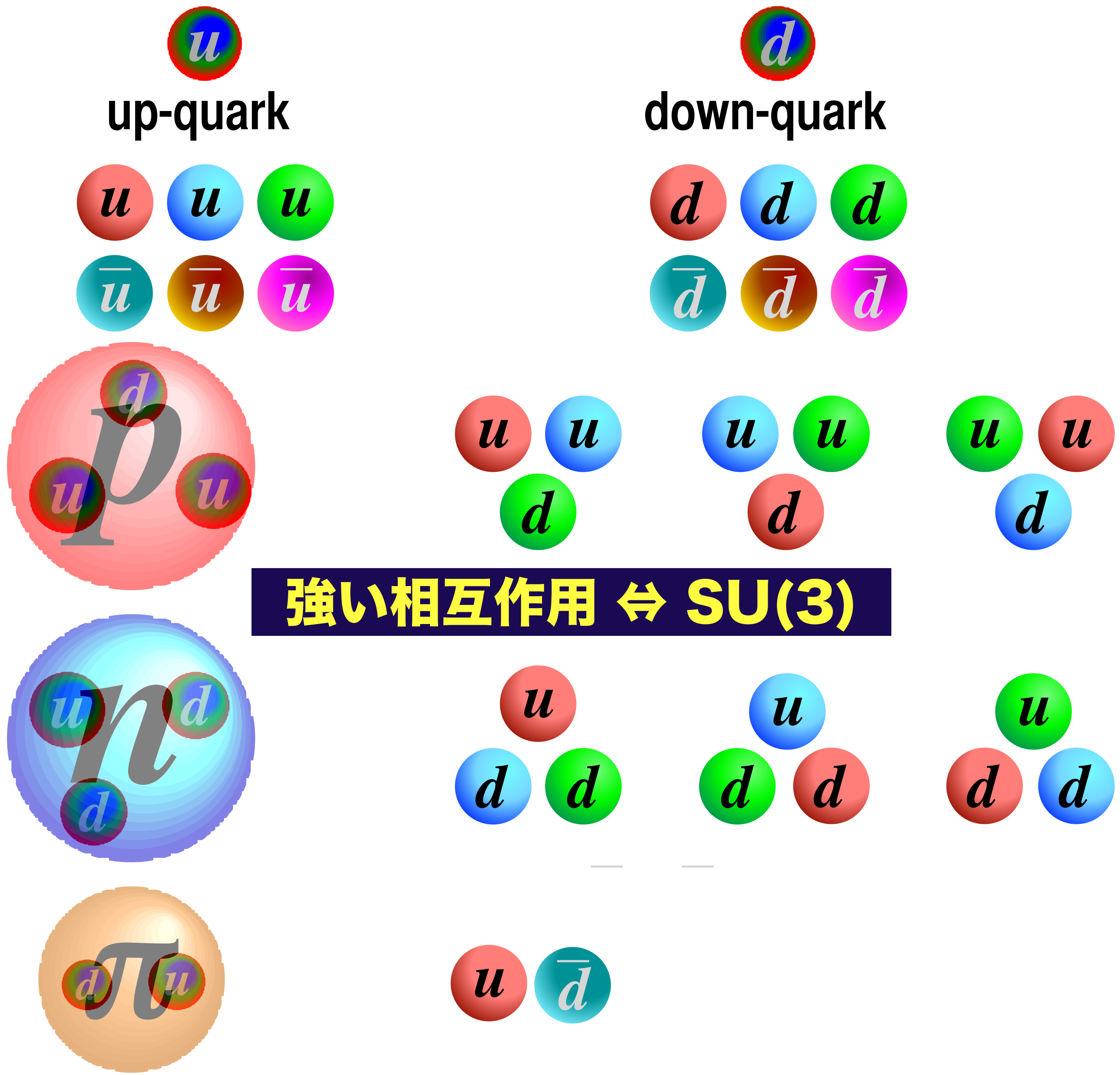


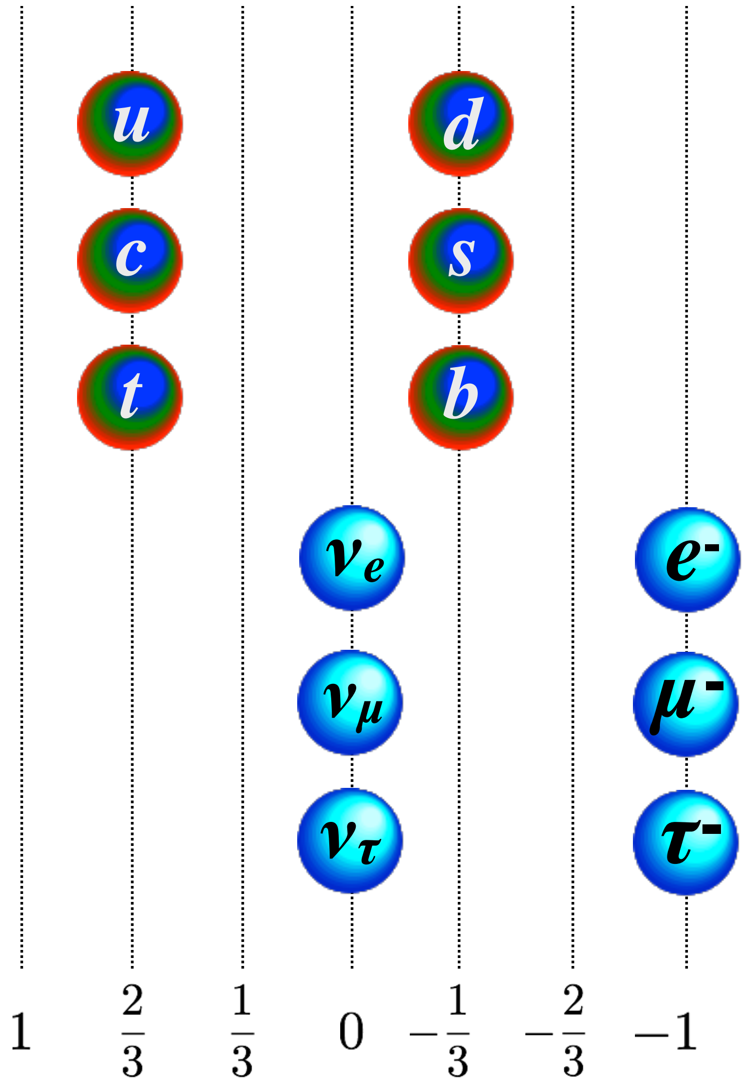

up-quark
down-quark

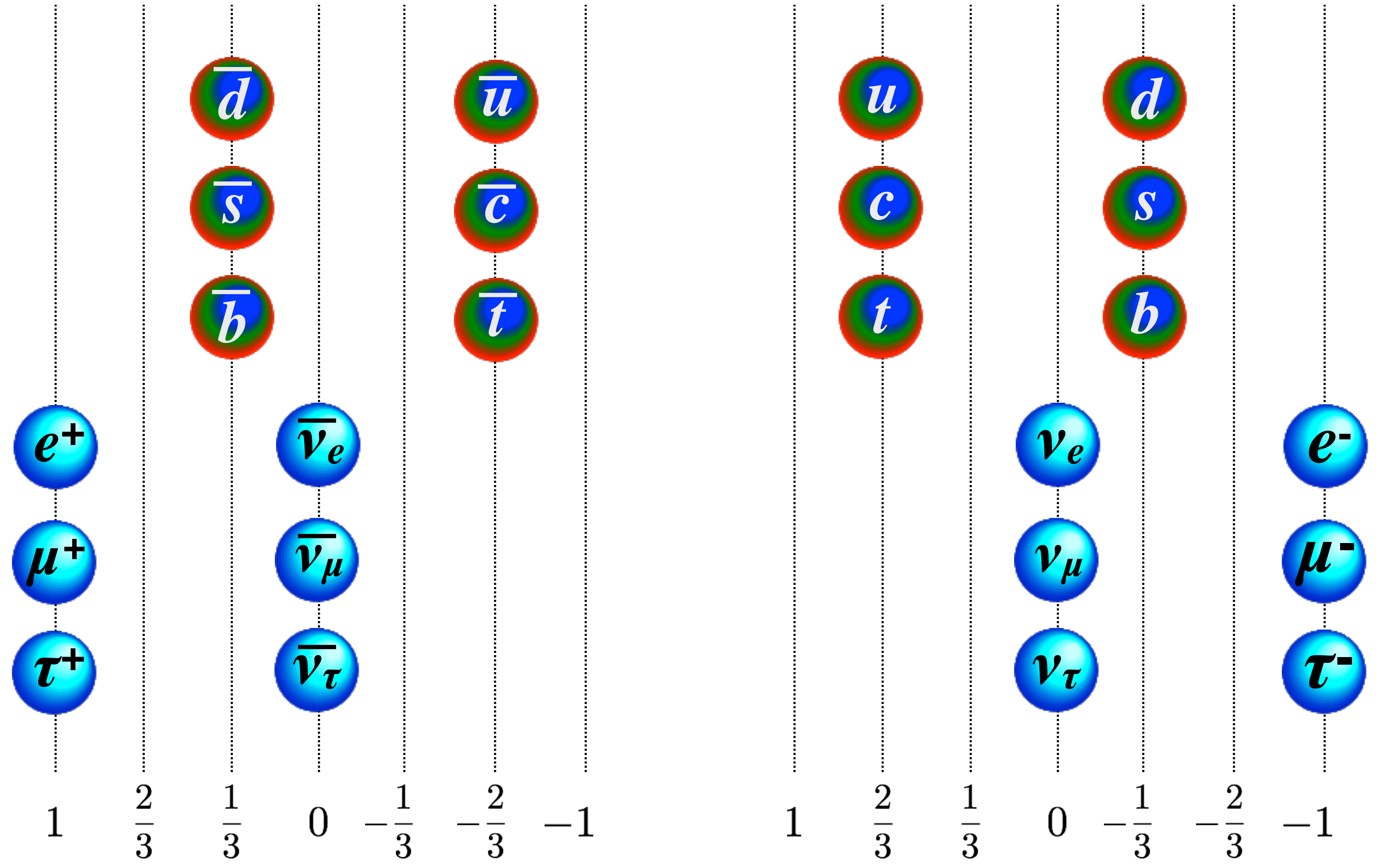

up-quark
down-quark


up-quark
down-quark
SU(3)

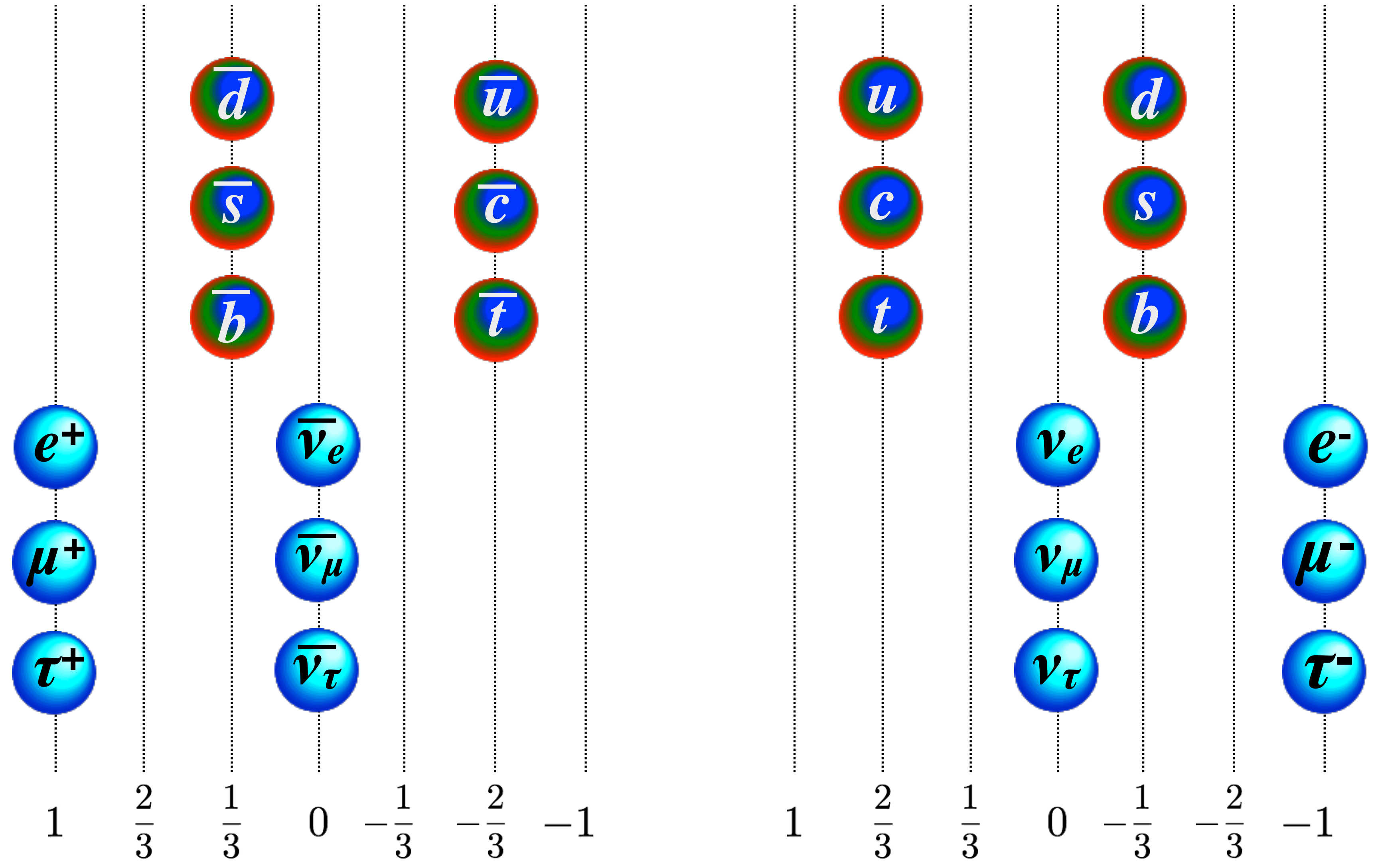

up-quark
down-quark
SU(3)

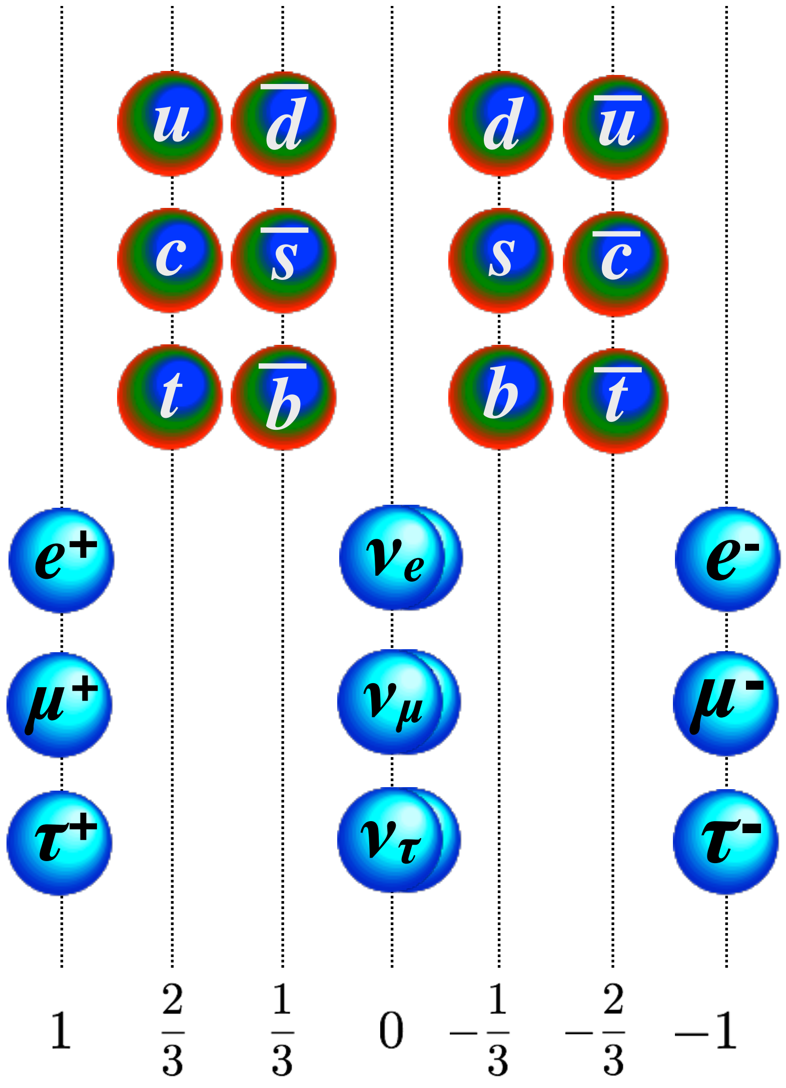

up-quark
down-quark
強い相互作用 ⇔ SU(3)

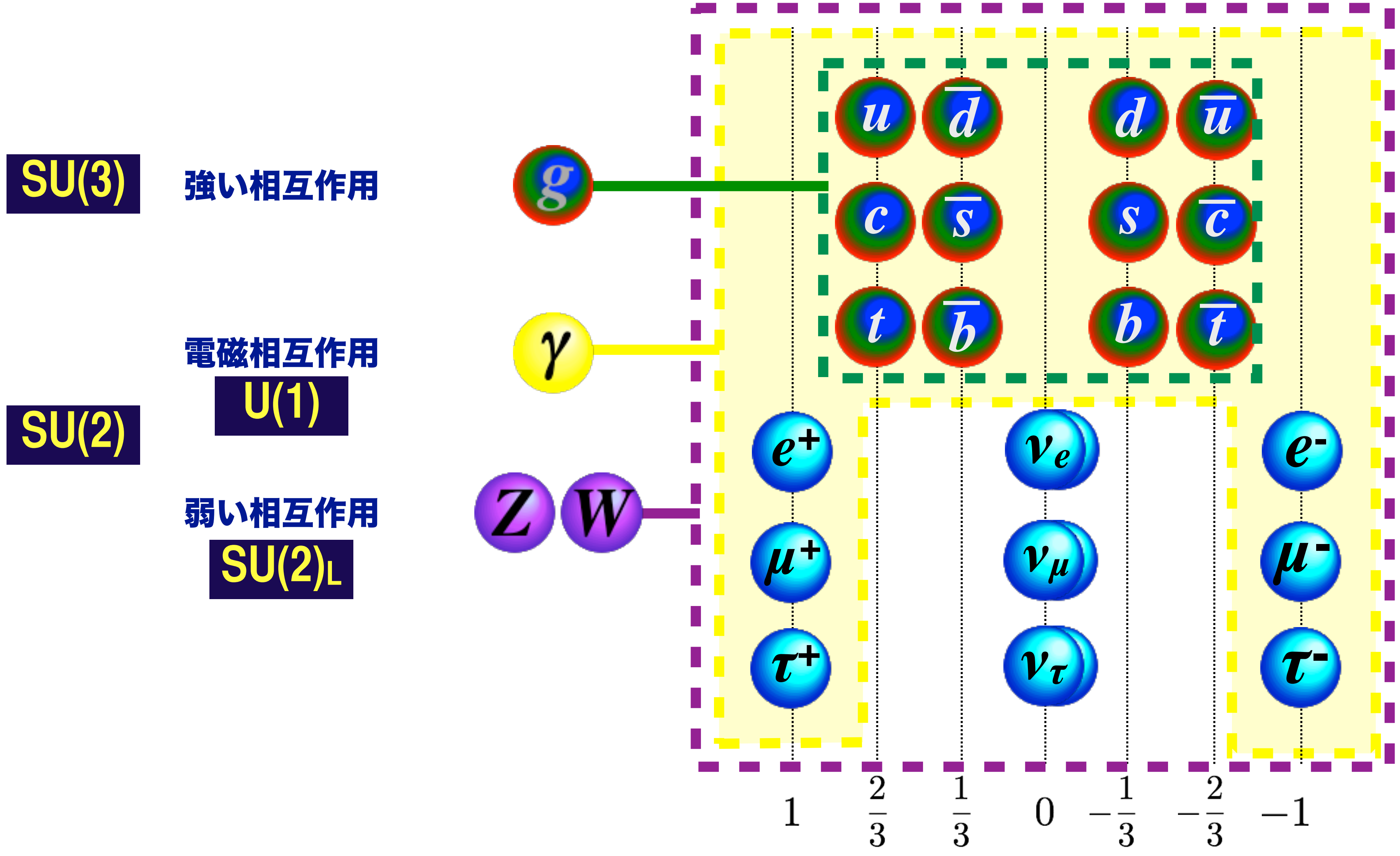

u
c
t
d
s
b
ν_e
ν_μ
ν_τ
e^-
μ^-
τ^-
1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ -1



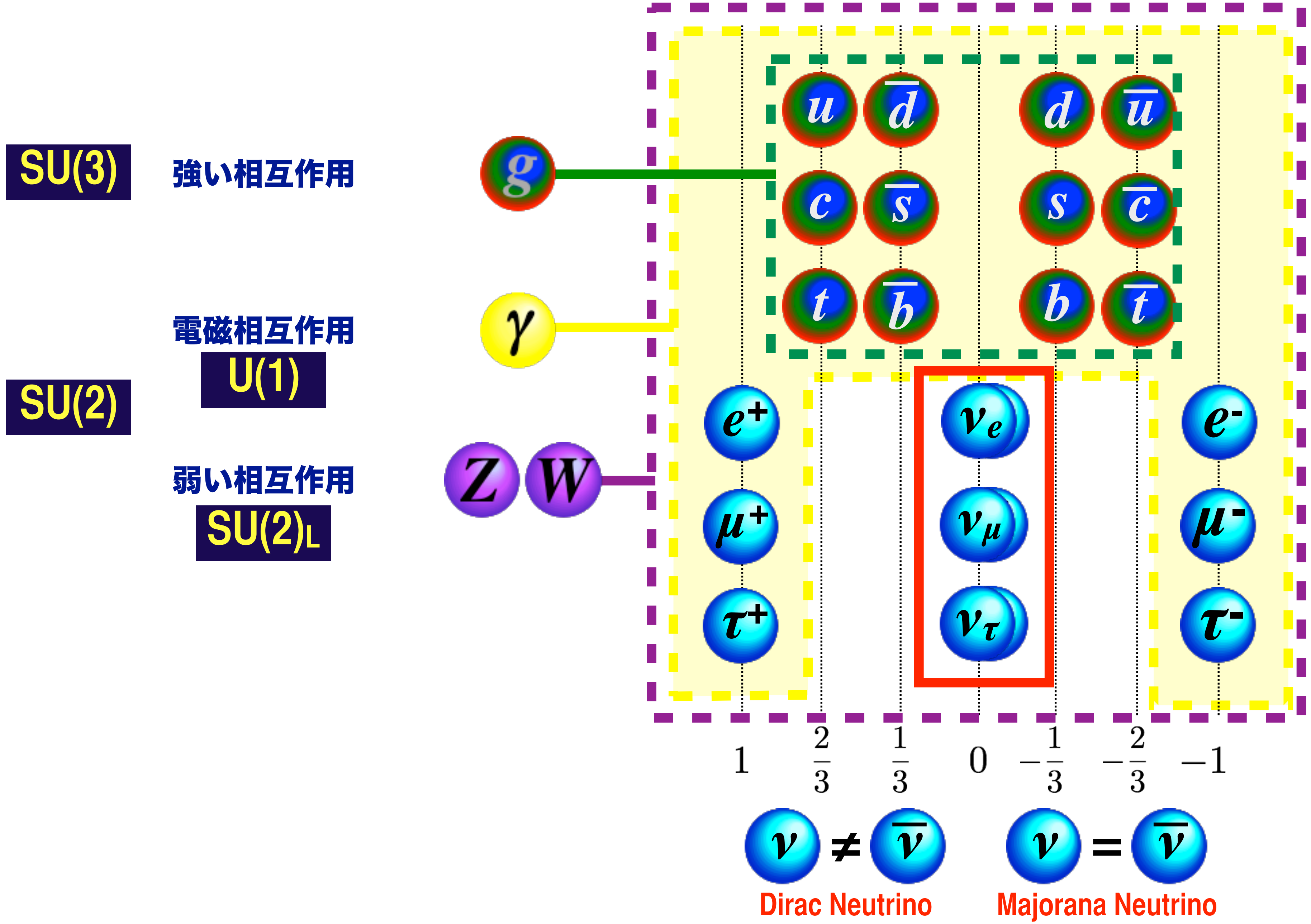
$\bar{d}$ $\bar{s}$ $\bar{b}$
$\bar{u}$ $\bar{c}$ $\bar{t}$
e^+ μ^+ τ^+
$\bar{\nu}_e$ $\bar{\nu}_\mu$ $\bar{\nu}_\tau$
1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ -1
u c t
d s b
ν_e ν_μ ν_τ
e^- μ^- τ^-
1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ -1

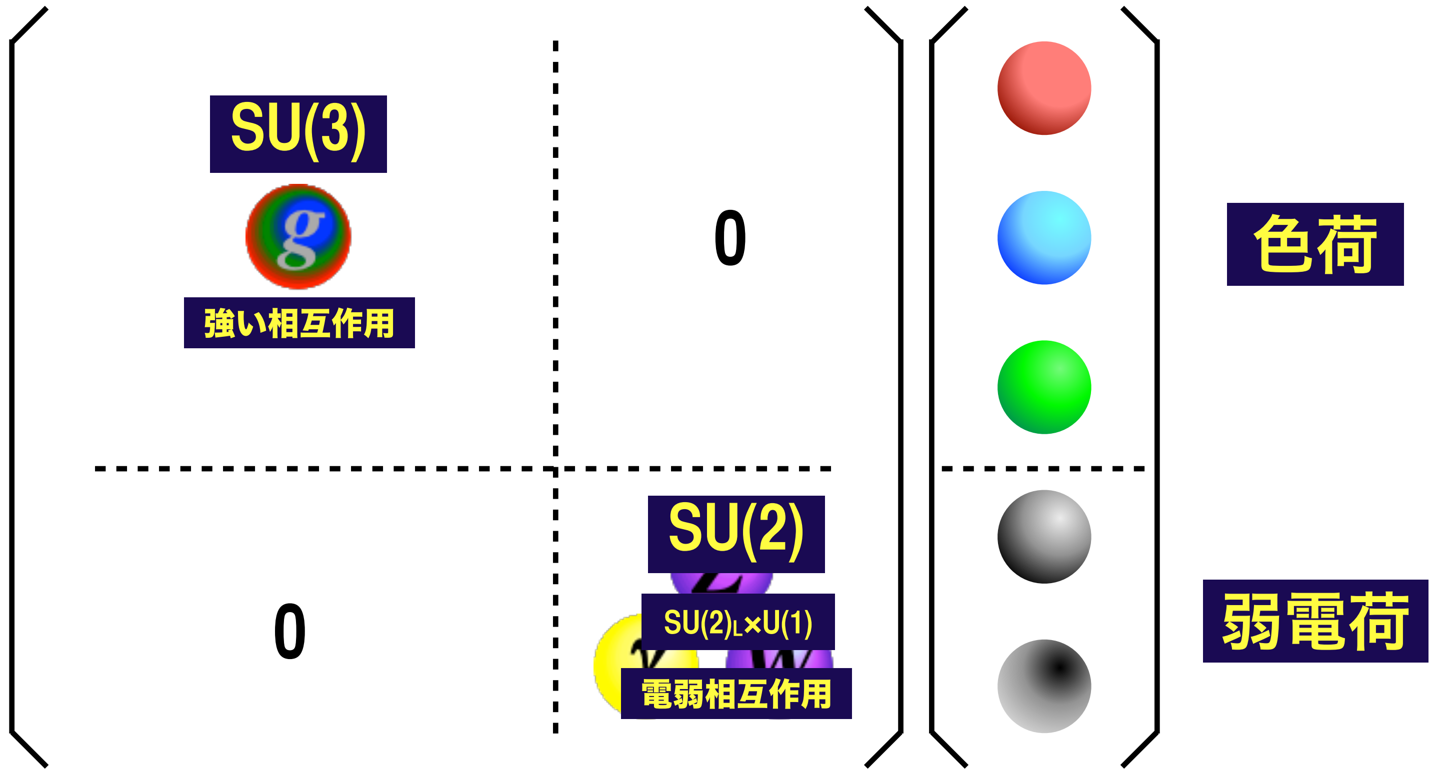

$\bar{d}$ $\bar{s}$ $\bar{b}$
$\bar{u}$ $\bar{c}$ $\bar{t}$
e^+ μ^+ τ^+
$\bar{\nu}_e$ $\bar{\nu}_\mu$ $\bar{\nu}_\tau$
1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ -1
u c t
d s b
ν_e ν_μ ν_τ
e^- μ^- τ^-
1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ -1


u
$\bar{d}$
d
$\bar{u}$
c
$\bar{s}$
s
$\bar{c}$
t
$\bar{b}$
b
$\bar{t}$
e^+
ν_e
e^-
μ^+
ν_μ
μ^-
τ^+
ν_τ
τ^-
1
$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$
0
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{2}{3}$
-1



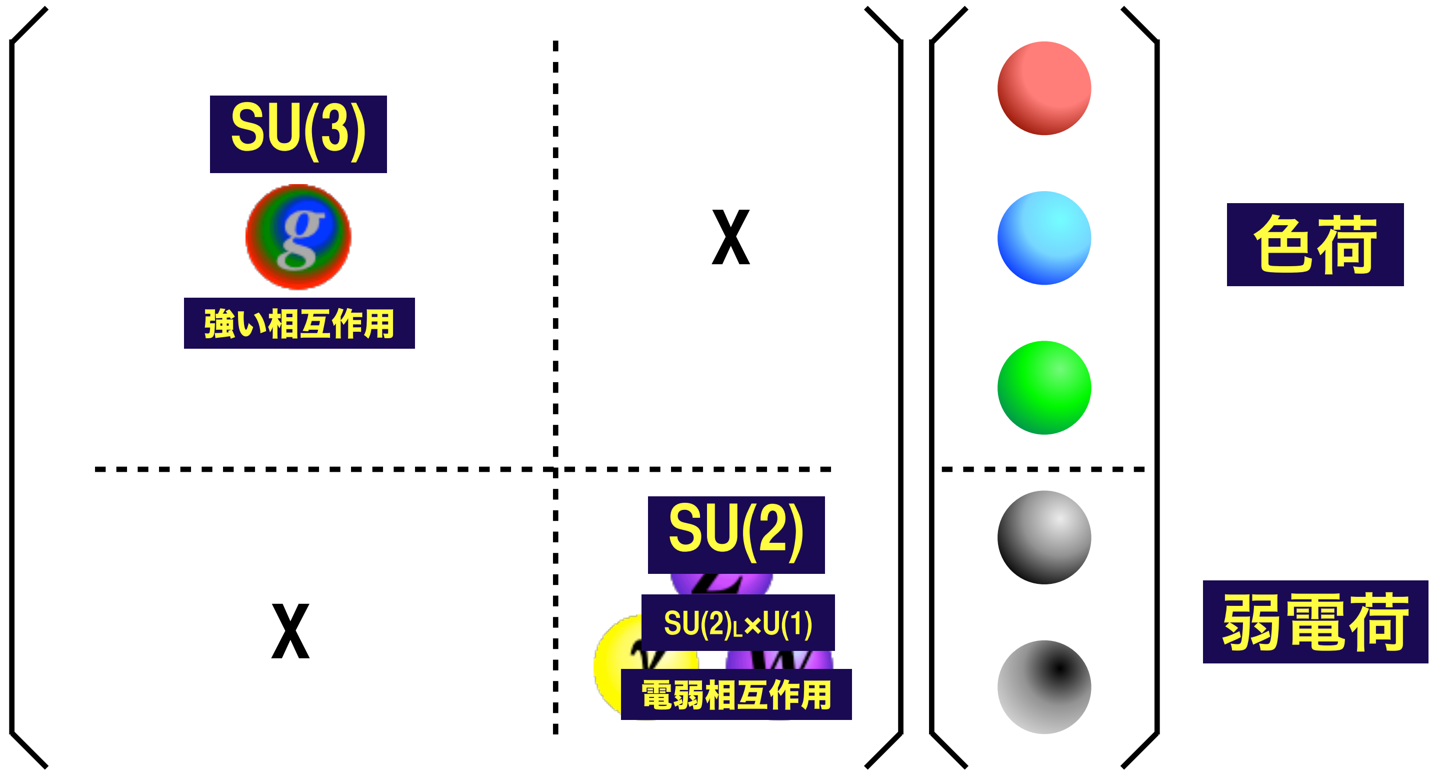
SU(3)
強い相互作用
電磁相互作用
U(1)
SU(2)
弱い相互作用
$SU(2)_L$
g
γ
Z W
u $\bar{d}$ d $\bar{u}$
c $\bar{s}$ s $\bar{c}$
t $\bar{b}$ b $\bar{t}$
e^+ ν_e e^-
μ^+ ν_μ μ^-
τ^+ ν_τ τ^-
1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ -1


SU(3)
強い相互作用
電磁相互作用
U(1)
SU(2)
弱い相互作用
SU(2)L
g
γ
Z
W
u
d̄
d
ū
c
s̄
s
c̄
t
b̄
b
t̄
e+
νe
e-
μ+
νμ
μ-
τ+
ντ
τ-
1
2/3
1/3
0
−1/3
−2/3
−1
ν ≠ ν̄
ν = ν̄
Dirac Neutrino
Majorana Neutrino


SU(3)
強い相互作用
0
0
SU(2)
SU(2)L×U(1)
電弱相互作用
色荷
弱電荷

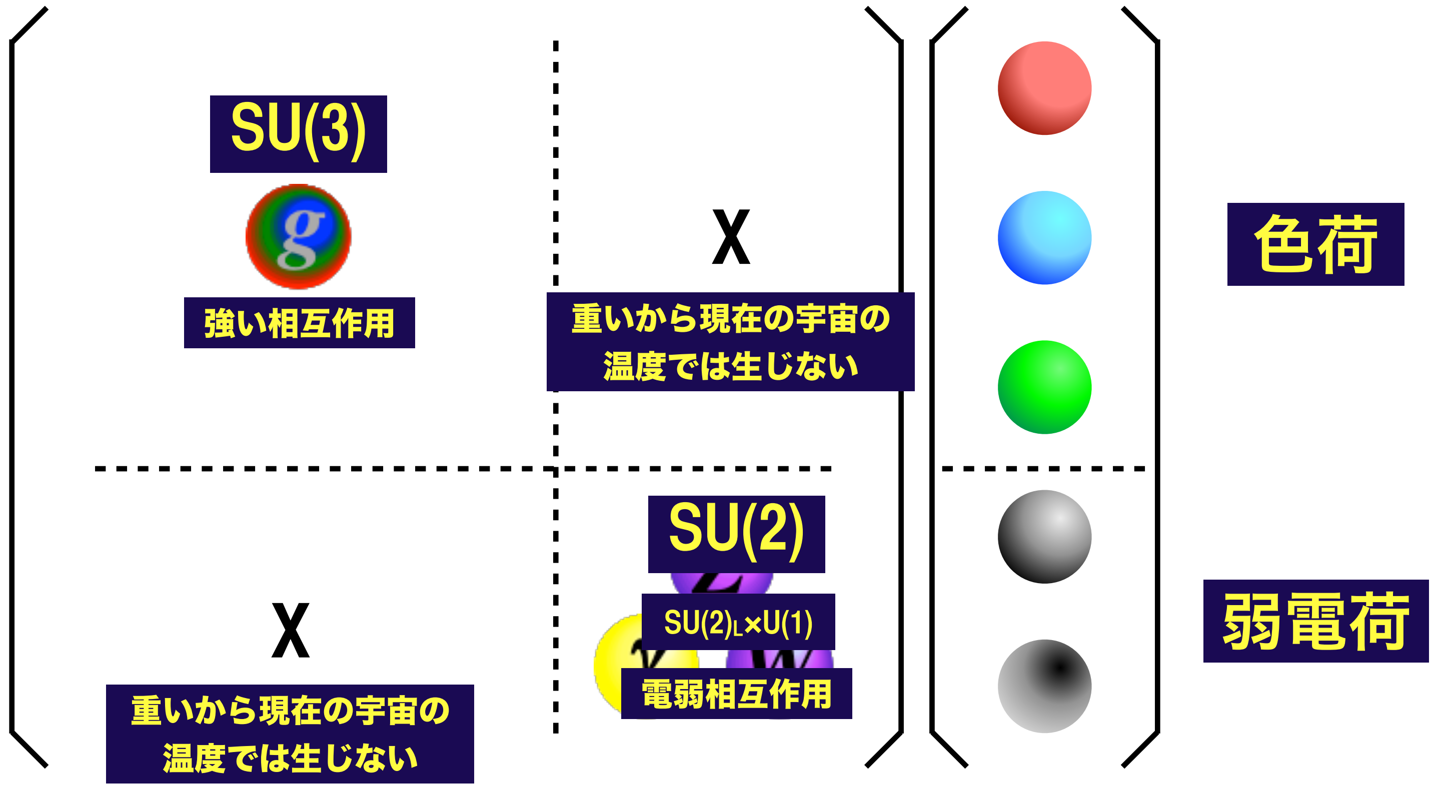
SU(5)

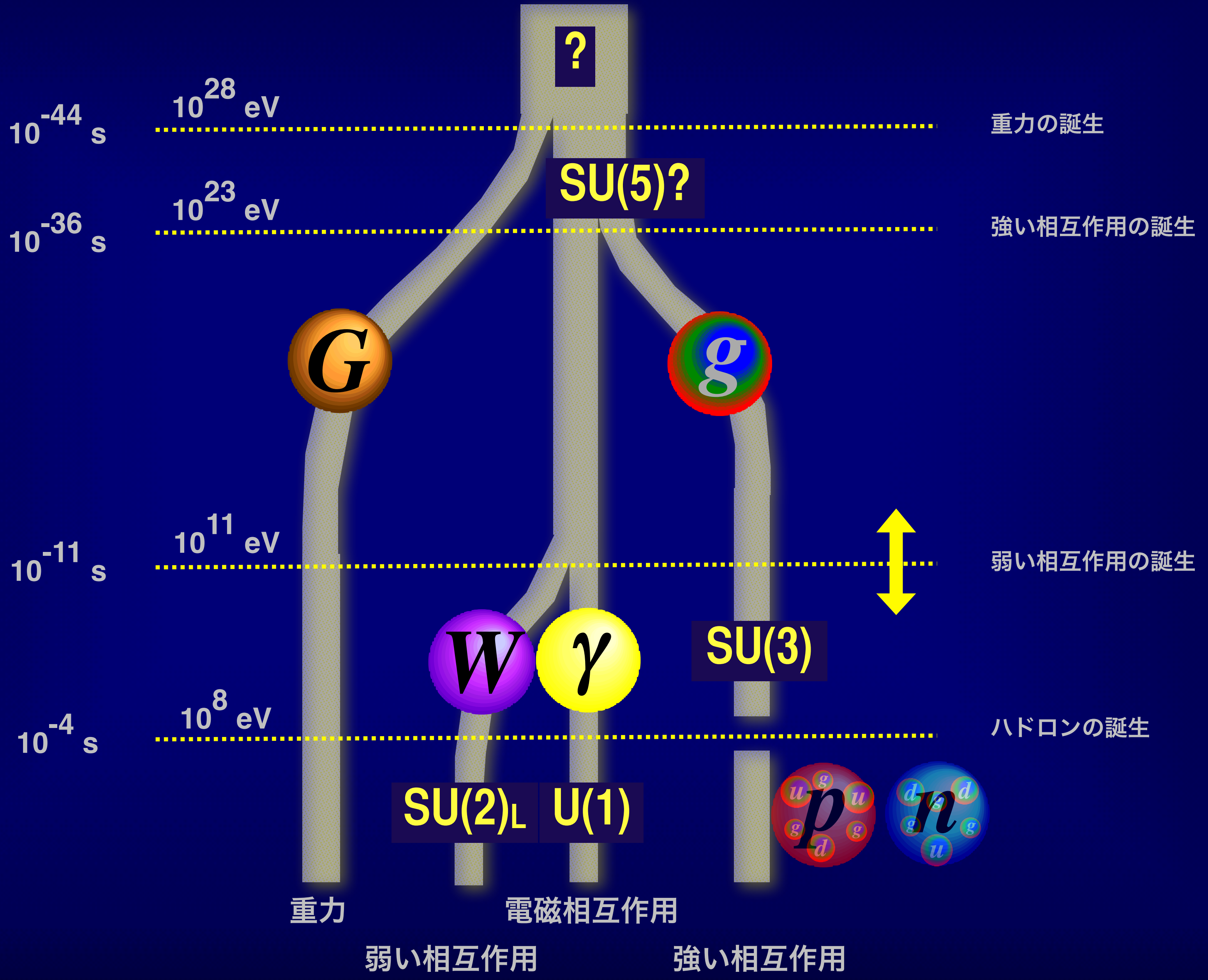
Grand Unified Theory



SU(5)

Grand Unified Theory




?
10^{-44} s
10^{28} eV
重力の誕生
SU(5)?
10^{-36} s
10^{23} eV
強い相互作用の誕生
G
g
10^{-11} s
10^{11} eV
弱い相互作用の誕生
W
γ
SU(3)
10^{-4} s
10^{8} eV
ハドロンの誕生
$SU(2)_L$
U(1)
p
n
重力
電磁相互作用
弱い相互作用
強い相互作用

離散的対称性

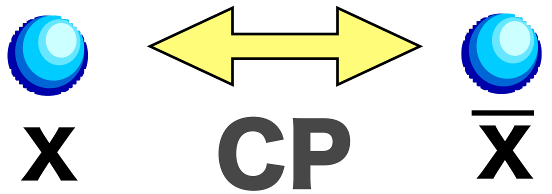
discrete symmetries

離散的対称性

C 荷電反転

P 空間反転

T 時間反転



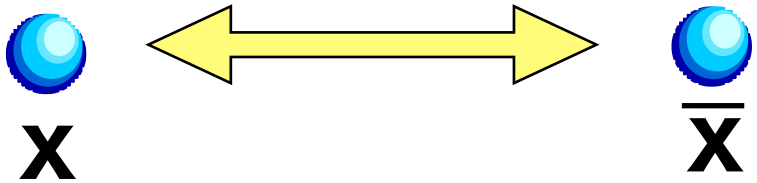
CPT定理 CPT=1

Equations of fields hold valid also for CPT-inverted states.

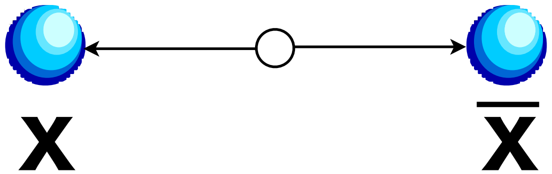
$CP \neq 1 \Leftrightarrow T \neq 1$

CP-violation　　T-violation

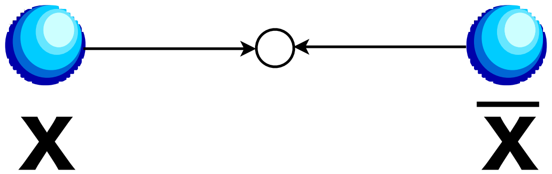
反粒子

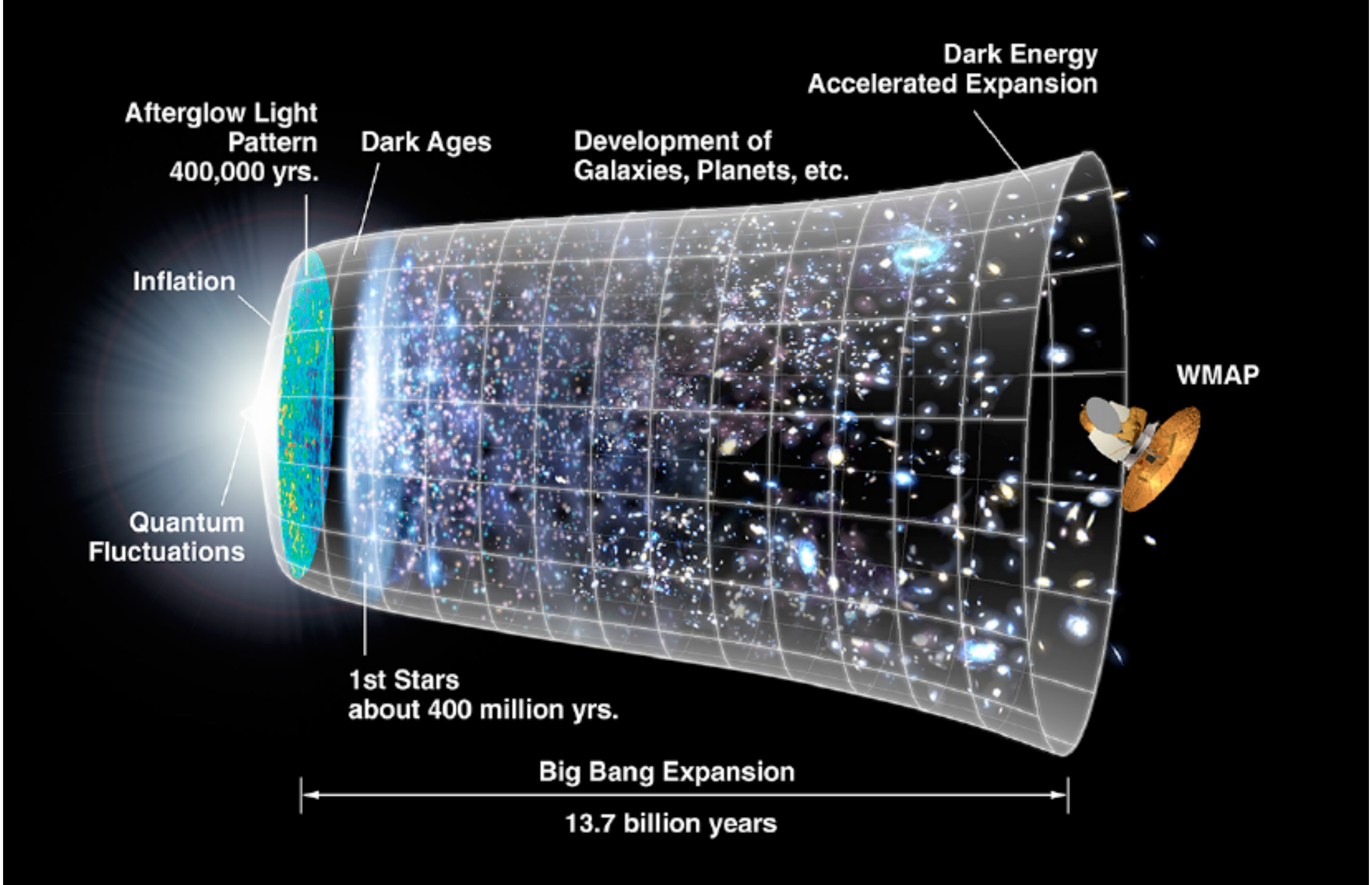


対生成



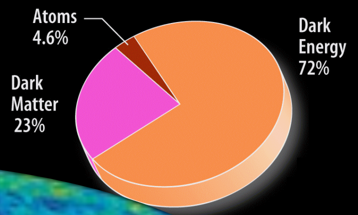
対消滅

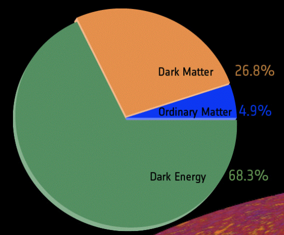


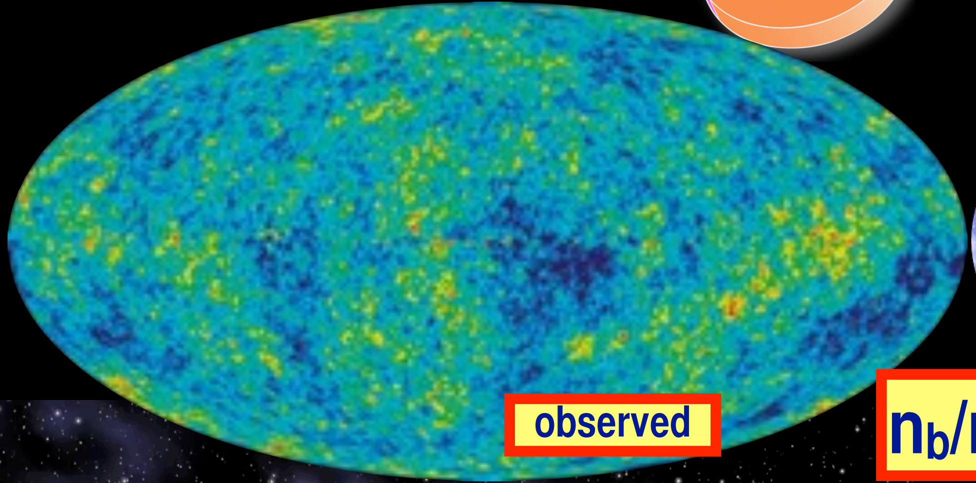

Dark Energy
Accelerated Expansion
Afterglow Light
Pattern
400,000 yrs.
Dark Ages
Development of
Galaxies, Planets, etc.
Inflation
WMAP
Quantum
Fluctuations
1st Stars
about 400 million yrs.
Big Bang Expansion
13.7 billion years

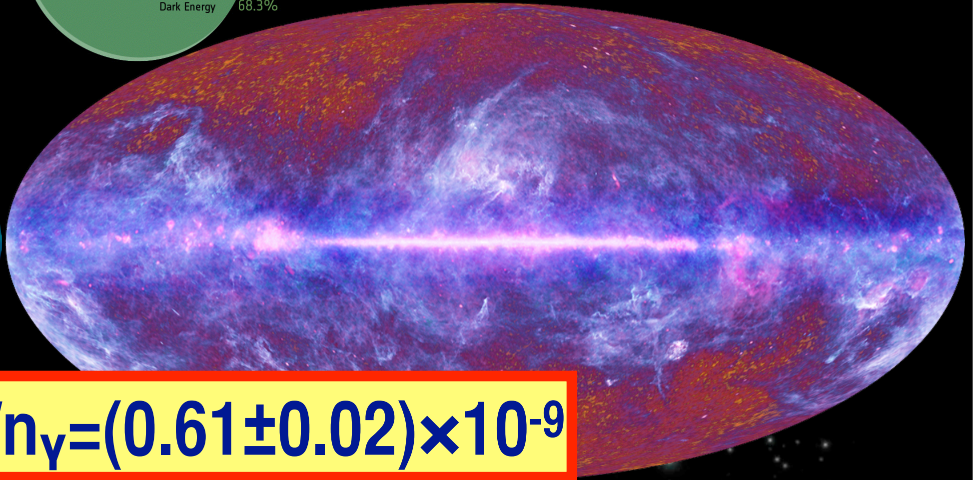
Anisotropy of Cosmic Microwave Background

WMAP&PLANCK → Constituents of the Universe







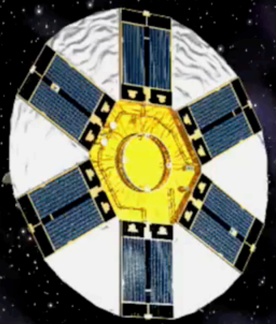


observed

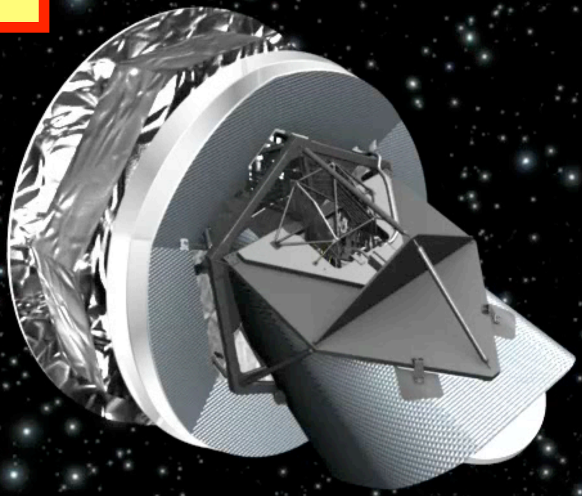
$$n_b/n_\gamma=(0.61\pm0.02)\times10^{-9}$$

standard model

$$n_b/n_\gamma=10^{-18}$$



WMAP: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe



PLANCK mission

素粒子標準模型

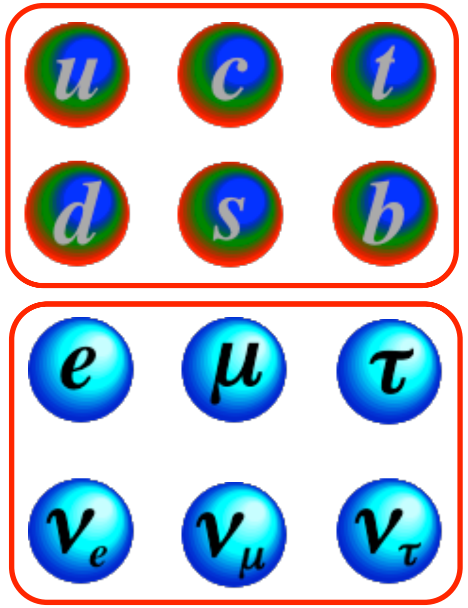

フェルミオン
ボソン
クォーク
u c t
d s b
レプトン
e μ τ
νe νμ ντ
フォトン
γ
電磁相互作用
ウィークボソン
Z W
弱い相互作用
グルーオン
g
強い相互作用
ヒッグスボソン
H
質量の起源
グラビトン
(未発見)
G
重力相互作用

CP非対称を生じるには最低3世代必要

CKM Matrix
(Cabbibo-Kobayashi-Maskawa)

クォーク

レプトン



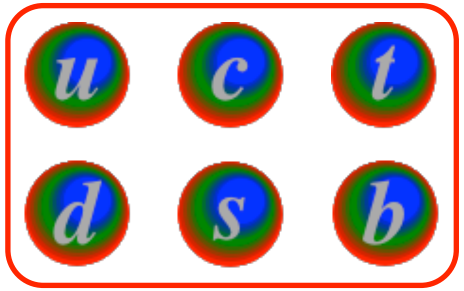
$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}$$

CP非対称を生じるには最低3世代必要

CKM Matrix

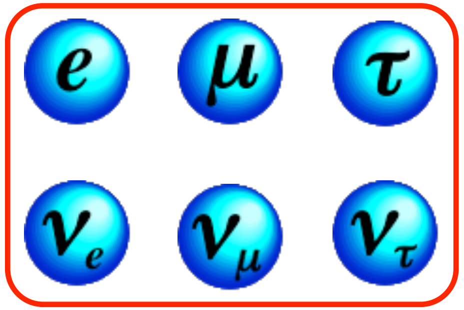
(Cabbibo-Kobayashi-Maskawa)

クォーク



$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}$$

レプトン



$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}$$

MNS Matrix

(Maki-Nakagawa-Sakata)

ニュートリノ間の振動現象
(質量が0だと振動しない)

素粒子標準模型

フェルミオン
ボソン
自発的対称性の破れ
クォーク
u c t
d s b
レプトン
e μ τ
νe νμ ντ
フォトン
γ
電磁相互作用
ウィークボソン
Z W
弱い相互作用
グルーオン
g
強い相互作用
ヒッグスボソン
H
質量の起源
グラビトン
(未発見)
G
重力相互作用

素粒子標準模型

フェルミオン

CP非対称を生じるには最低3世代必要

クォーク

u c t

d s b

レプトン

e μ τ

ν_e ν_μ ν_τ

ニュートリノ間の振動現象

ボソン

自発的対称性の破れ

フォトン	γ	電磁相互作用
ウィークボソン	Z W	弱い相互作用
グルーオン	g	強い相互作用
ヒッグスボソン	H	質量の起源
グラビトン（未発見）	G	重力相互作用

ヒッグス機構

標準模型

ボソン

CP非対称を生じるには最低3世代必要

自発的対称性の破れ

クォーク

u c t

d s b

レプトン

e μ τ

ν_e ν_μ ν_τ

ニュートリノ間の振動現象

フォトン	γ	電磁相互作用
ウィークボソン	Z W	弱い相互作用
グルーオン	g	強い相互作用
ヒッグスボソン	H	源
グラビトン (未発見)	G	重力相互作用

ヒッグス機構

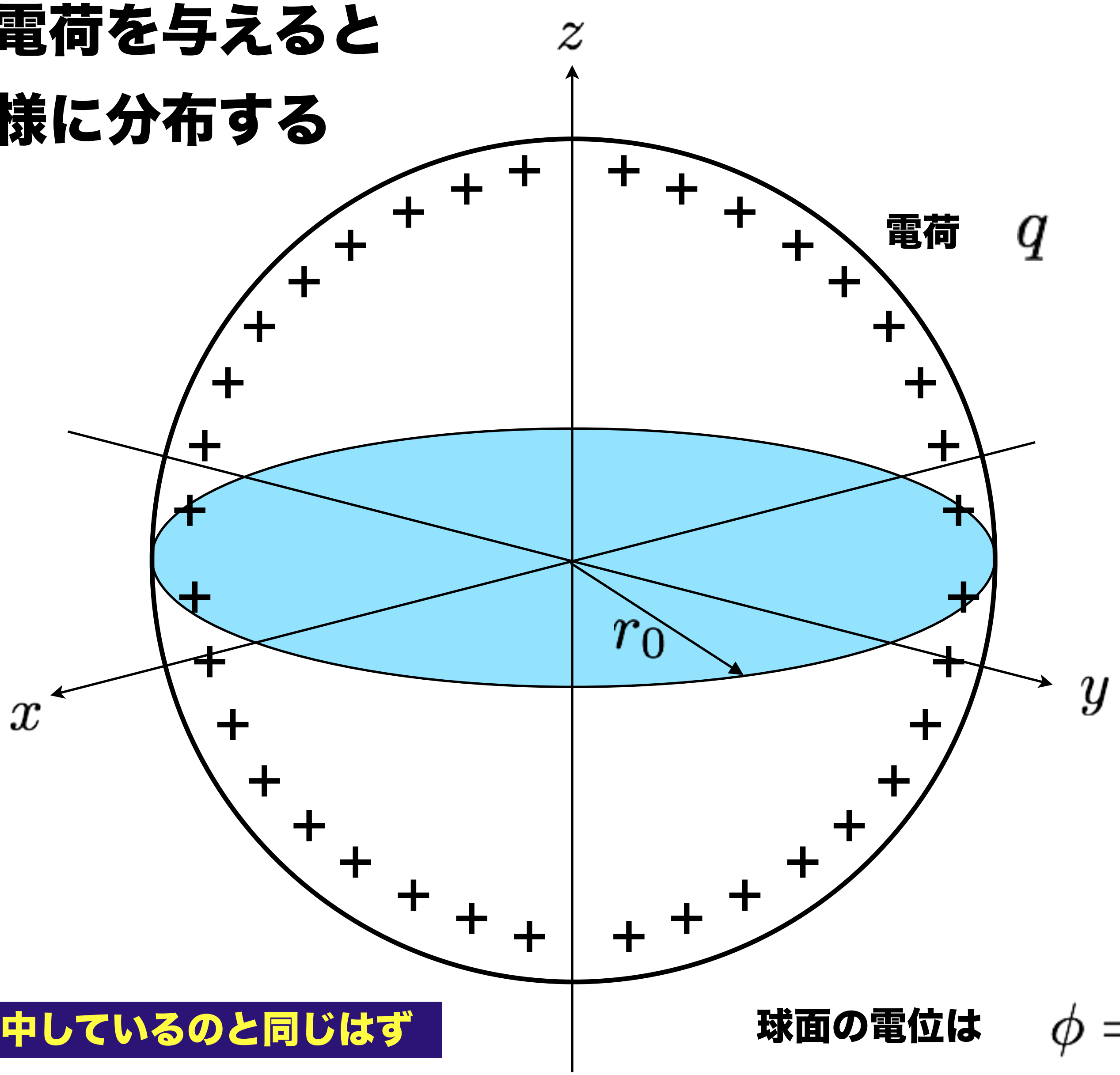
素粒子標準模型

超対称性
フェルミオン
ボソン
CP非対称を生じるには最低3世代必要
自発的対称性の破れ
クォーク
u c t
d s b
レプトン
e μ τ
νe νμ ντ
ニュートリノ間の振動現象
フォトン
γ
電磁相互作用
ウィークボソン
Z W
弱い相互作用
グルーオン
g
強い相互作用
ヒッグスボソン
H
質量の起源
ヒッグス機構
重力波＋量子重力
グラビトン
(未発見)
G
重力相互作用

無限大

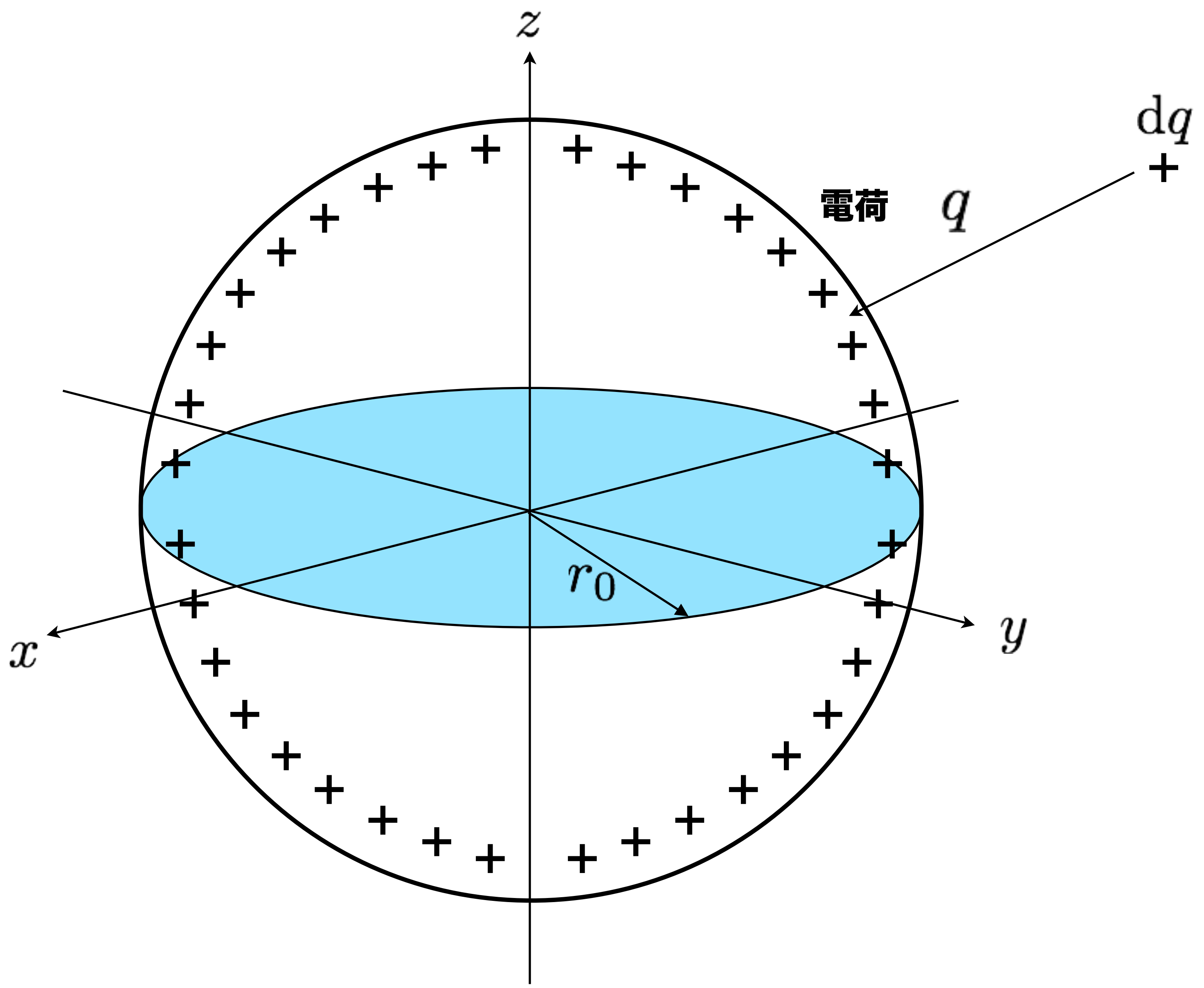
$$\infty$$

導体球に電荷を与えると表面に一様に分布する



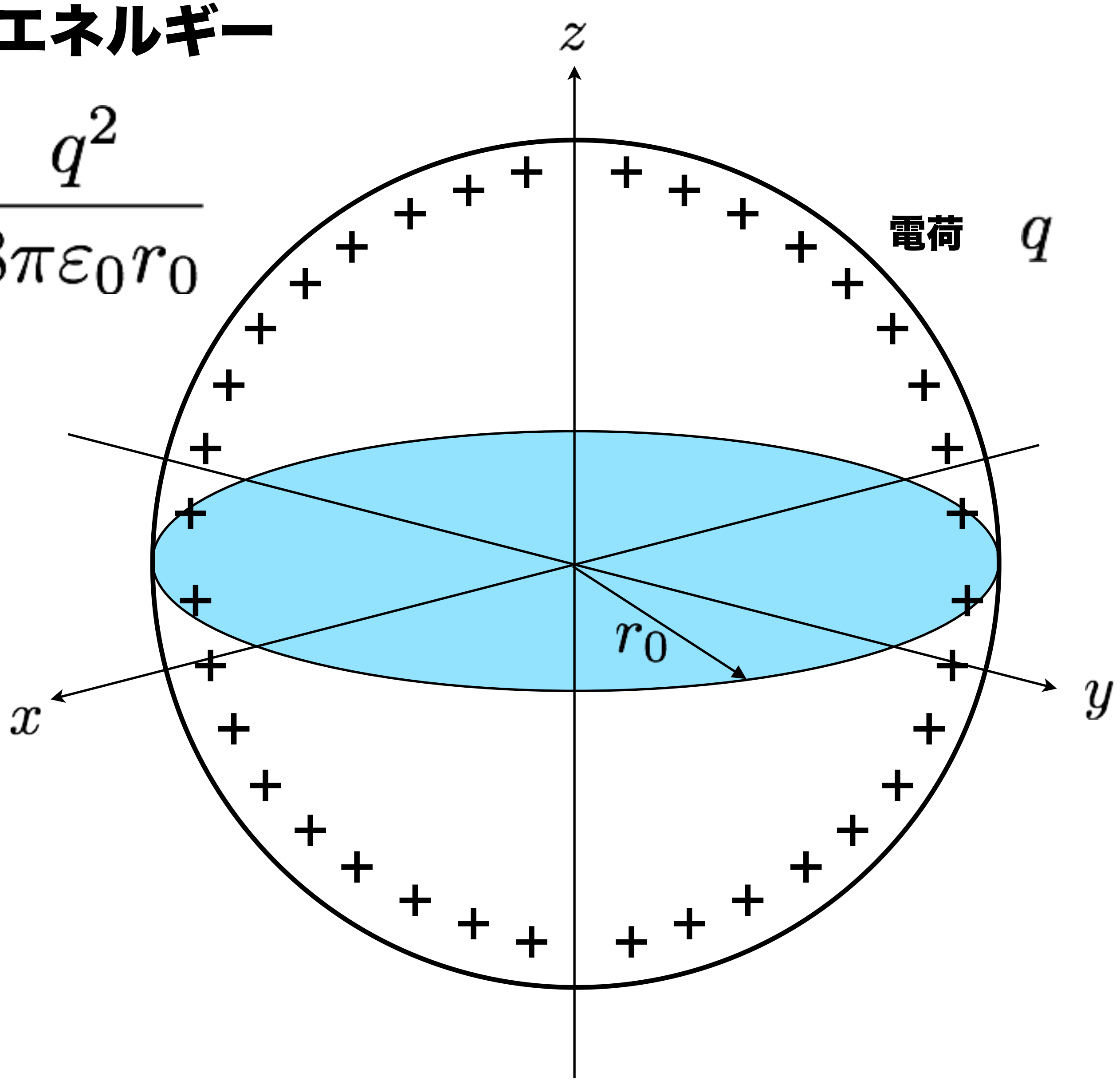
原点に全部集中しているのと同じはず

球面の電位は $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{q}{r_0}$


z
$\mathrm{d}q$
電荷 q
r_0
x
y

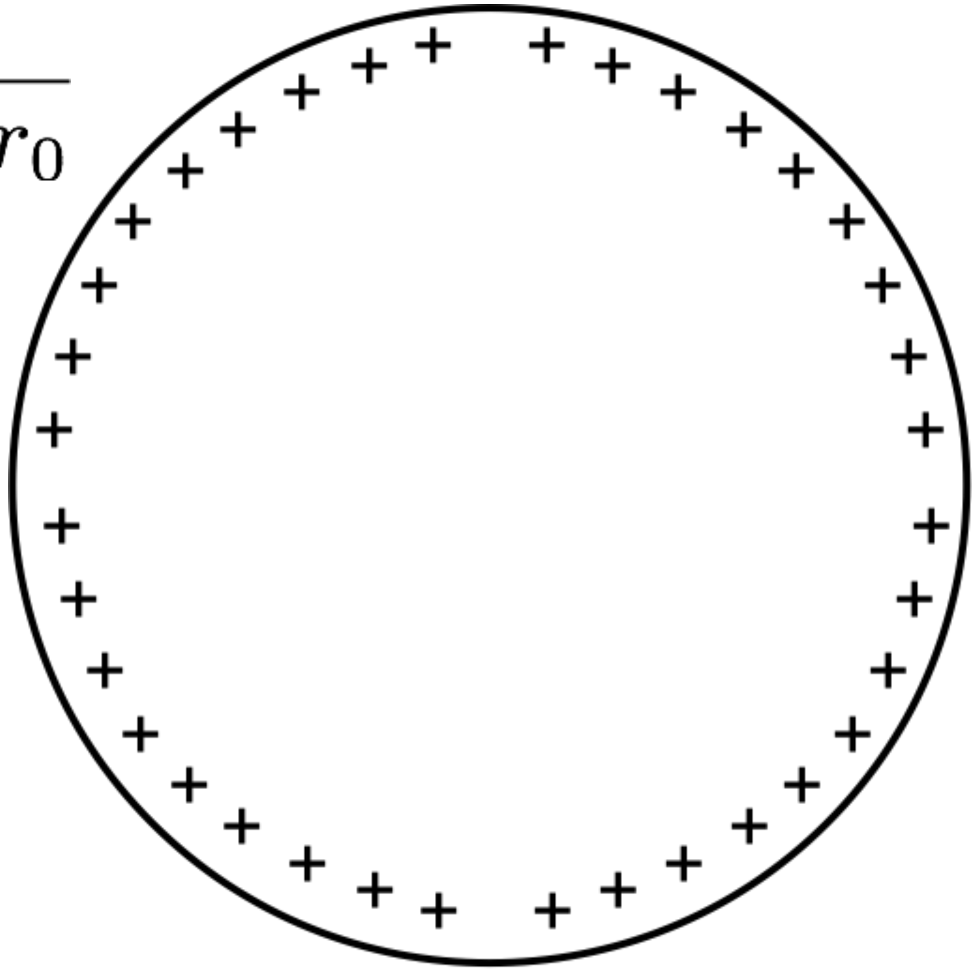
電荷自己エネルギー

$$U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$



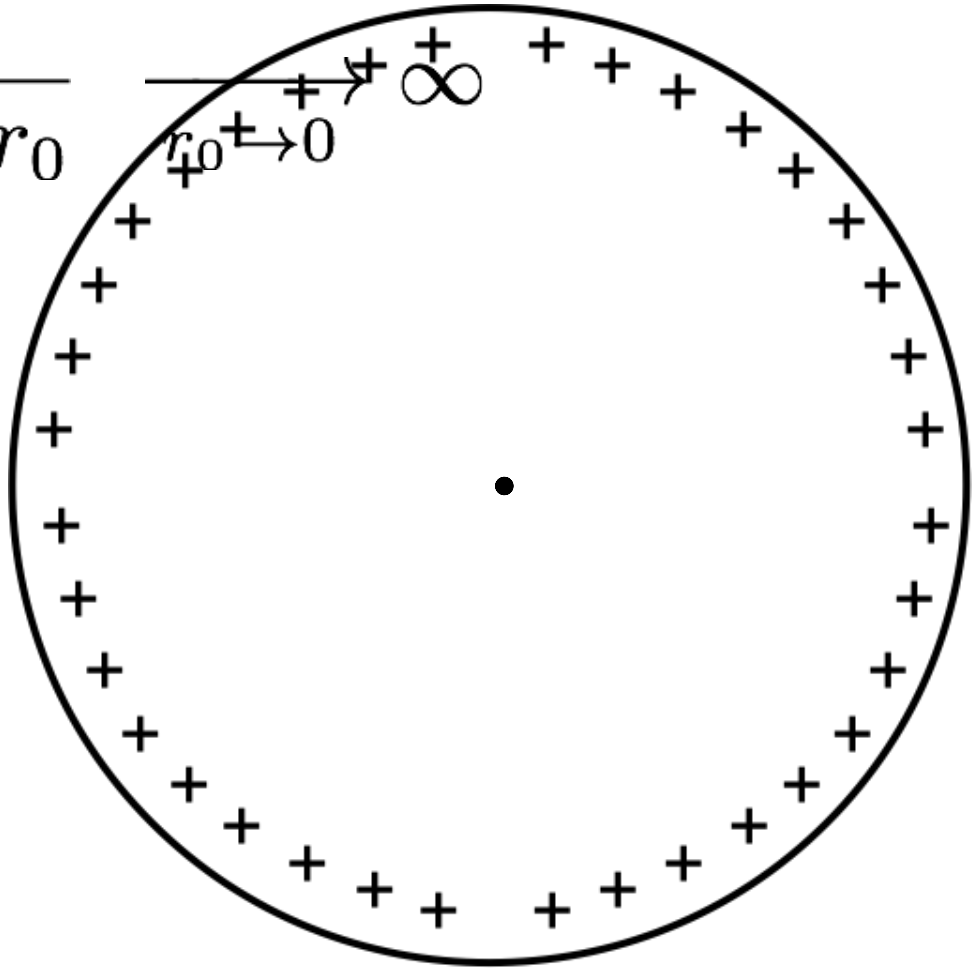
電荷自己エネルギー

$$U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$



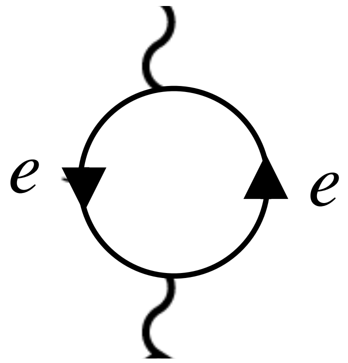
電荷自己エネルギー

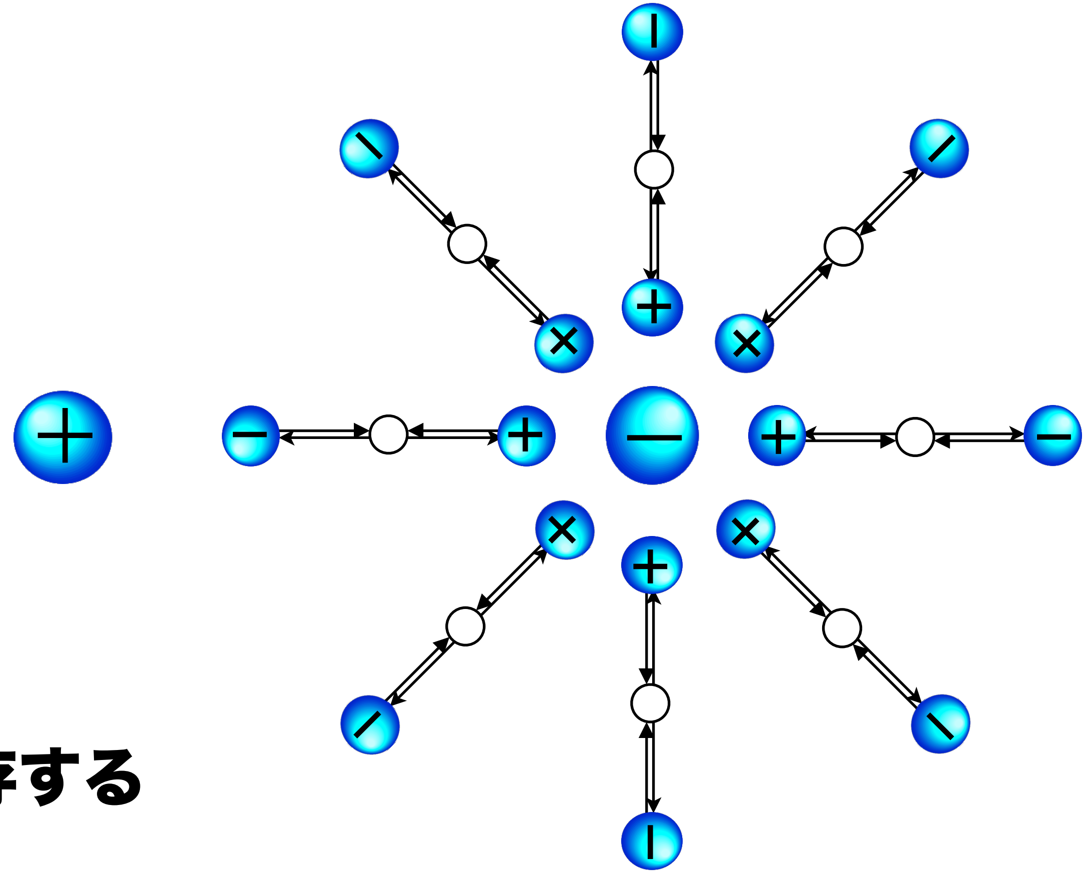
$$U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} \xrightarrow[r_0 \to 0]{} \infty$$



真空偏極

Vacuum Polarization





coupling constant

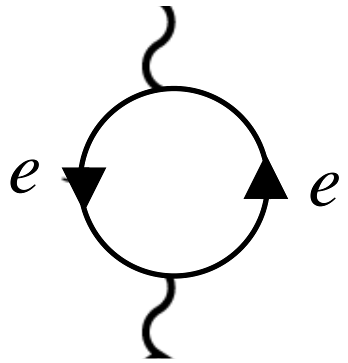
結合定数が距離に依存する

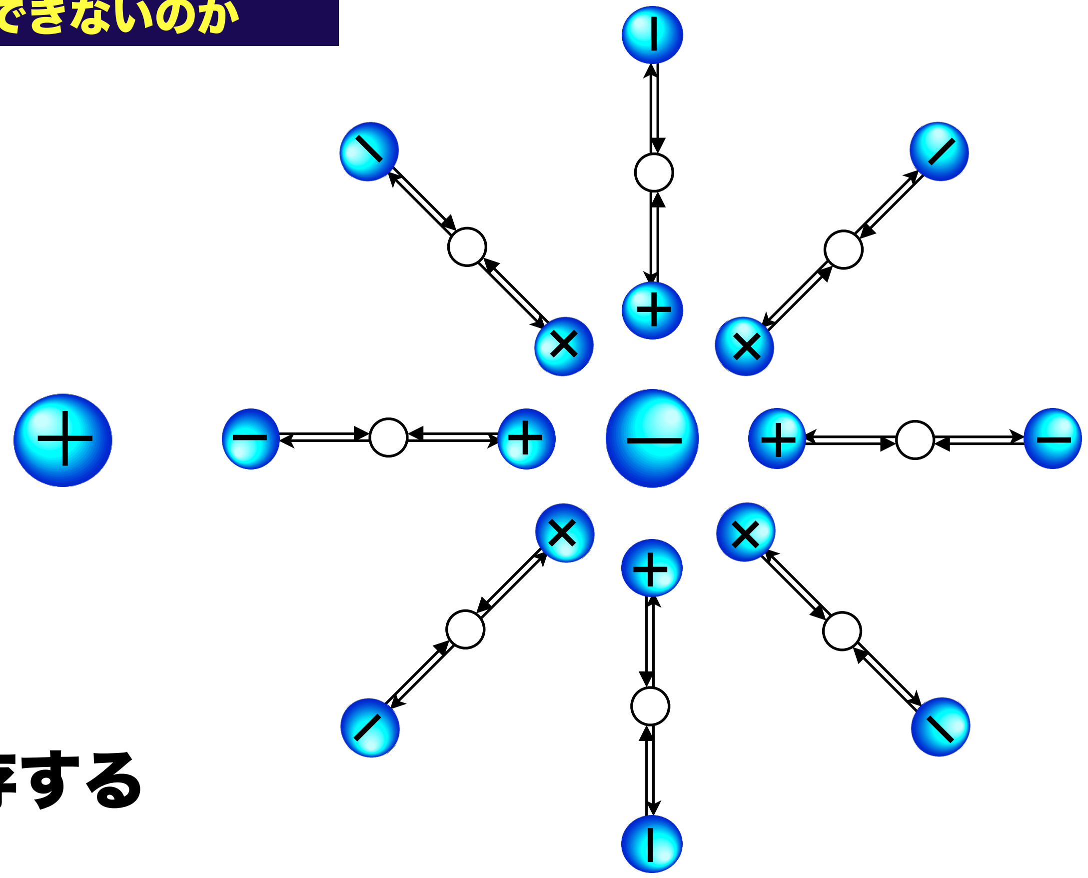
q: 移行運動量

真空偏極

Vacuum Polarization

なぜ重力は統一して説明できないのか





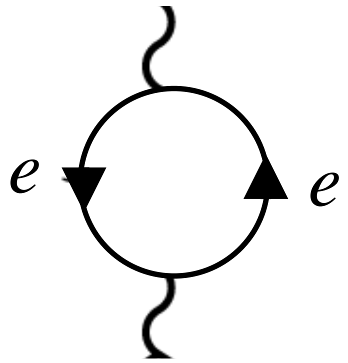
coupling constant
結合定数が距離に依存する
q: 移行運動量

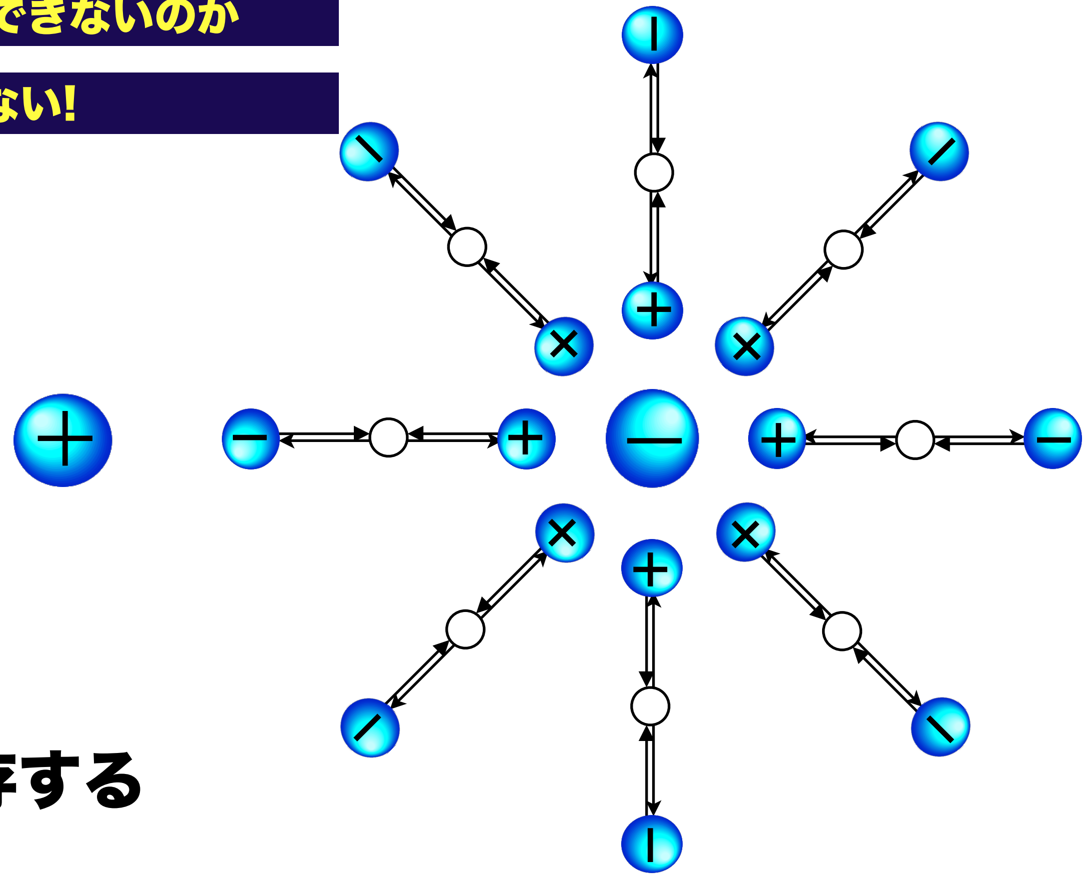
真空偏極

Vacuum Polarization

なぜ重力は統一して説明できないのか

重力は引力しかない!





coupling constant

結合定数が距離に依存する

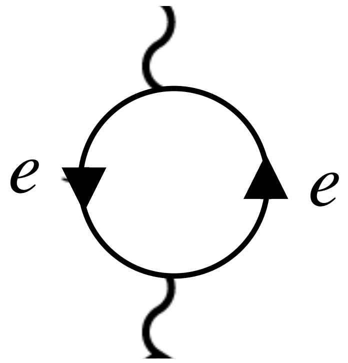
q: 移行運動量

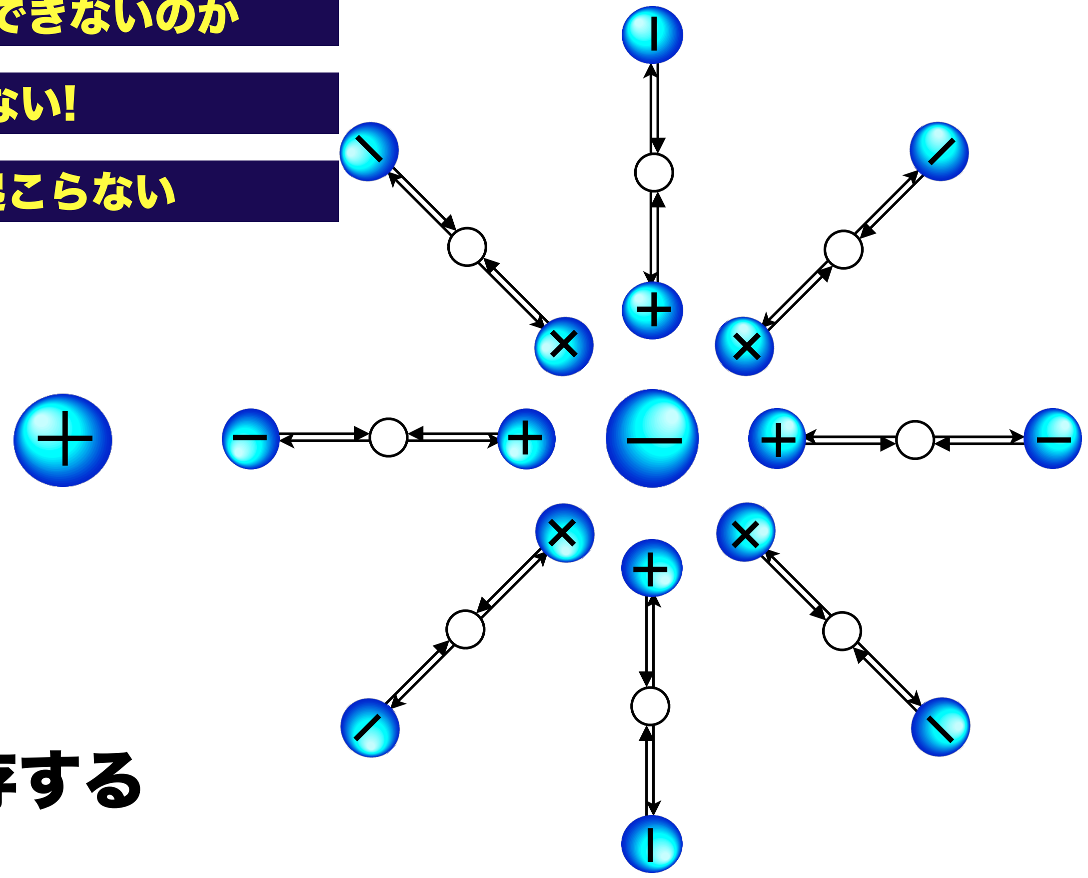
真空偏極
Vacuum Polarization

なぜ重力は統一して説明できないのか

重力は引力しかない!

打ち消し合いが一切起こらない

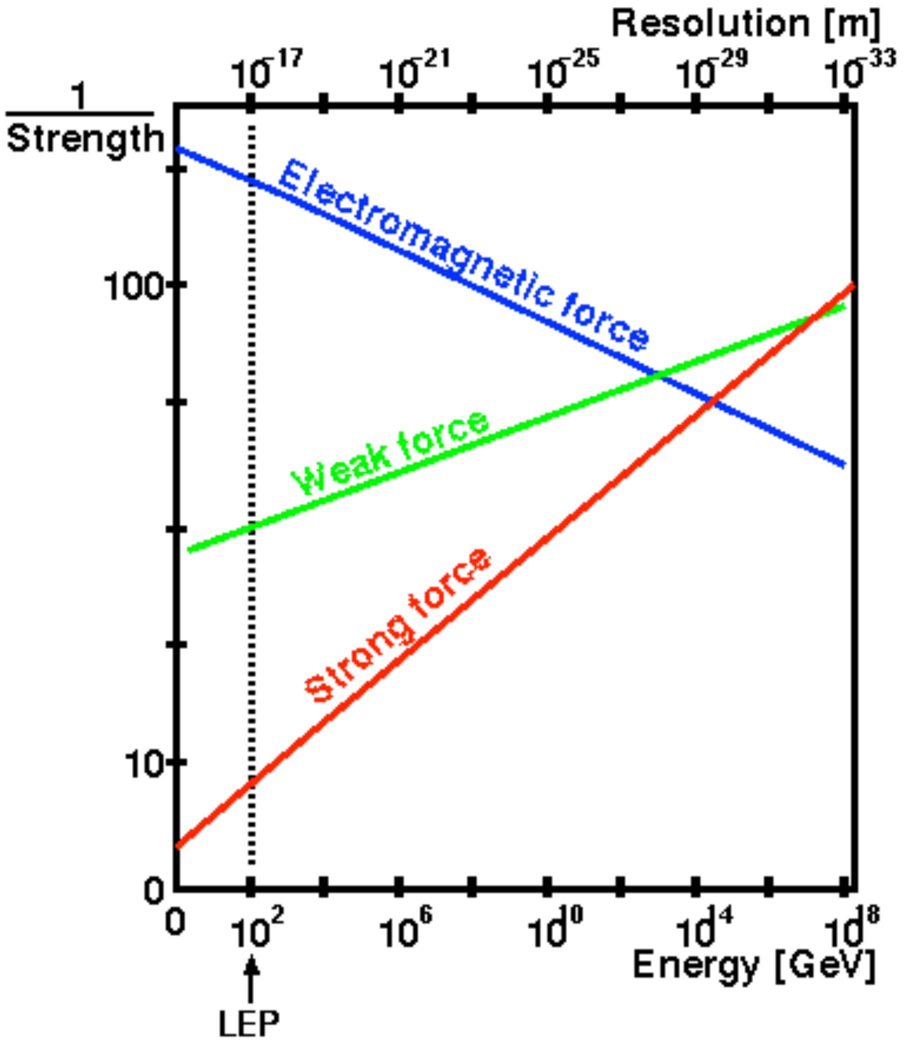




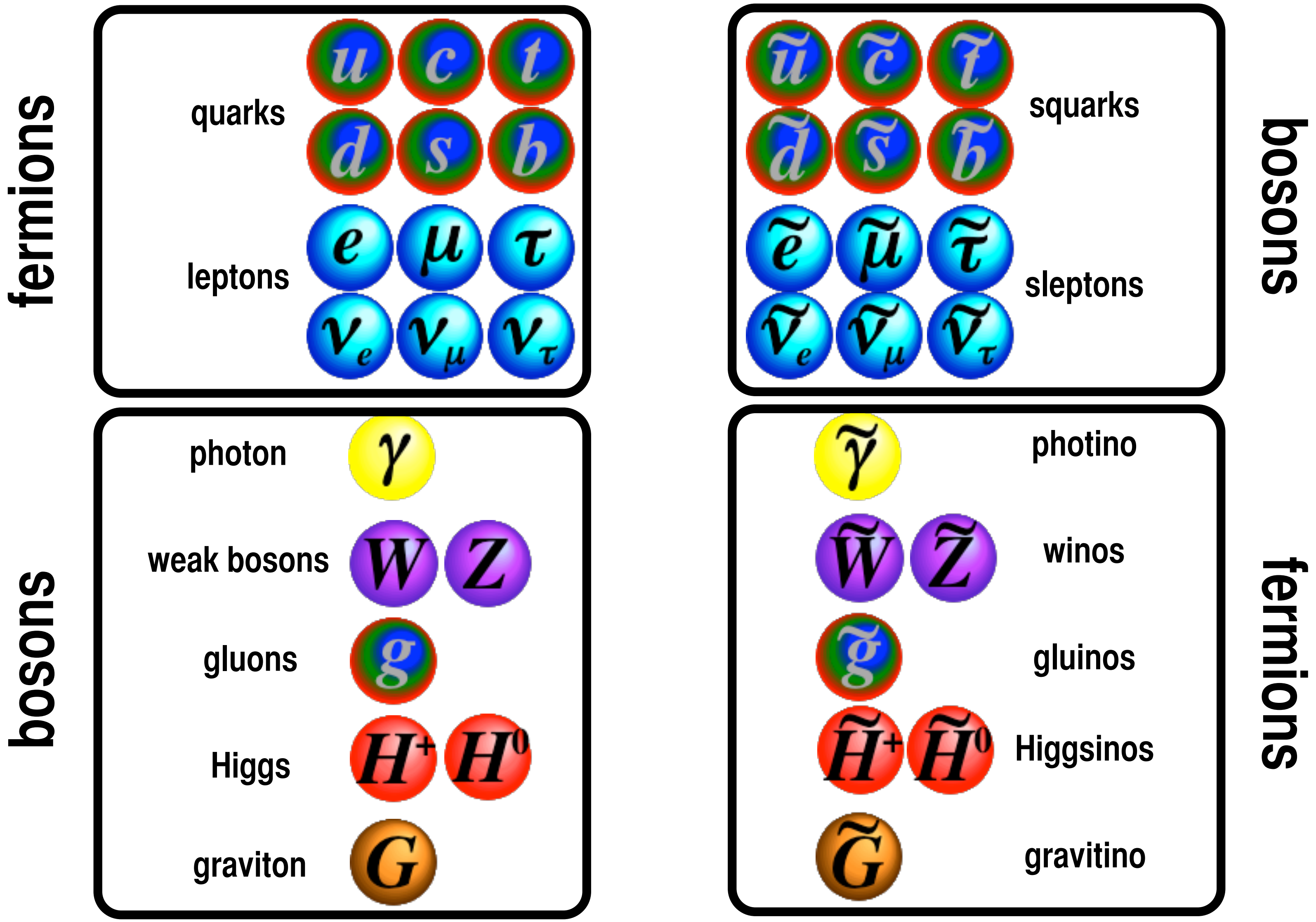
coupling constant
結合定数が距離に依存する
q: 移行運動量

Q依存の結合定数

Running Coupling Constant



超対称性　Supersymmetry (SUSY)



Standard Model (SM)

	spin	Fermions		spin	Bosons	
mixed⇒	1/2	leptons	$e,\ \nu$			
mixed⇒	1/2	quarks	$u,\ d$			
				0	Higgs bosons	H
				1	gauge bosons	$\gamma, W^{\pm}, Z^0, g$
				2	graviton	G

Standard Model (SM)

	spin	Fermions		spin	Bosons	
mixed⇒	1/2	leptons	$e,\ \nu$			
mixed⇒	1/2	quarks	$u,\ d$			
				0	Higgs bosons	H
				1	gauge bosons	$\gamma, W^{\pm}, Z^0, g$
				2	graviton	G

Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM)

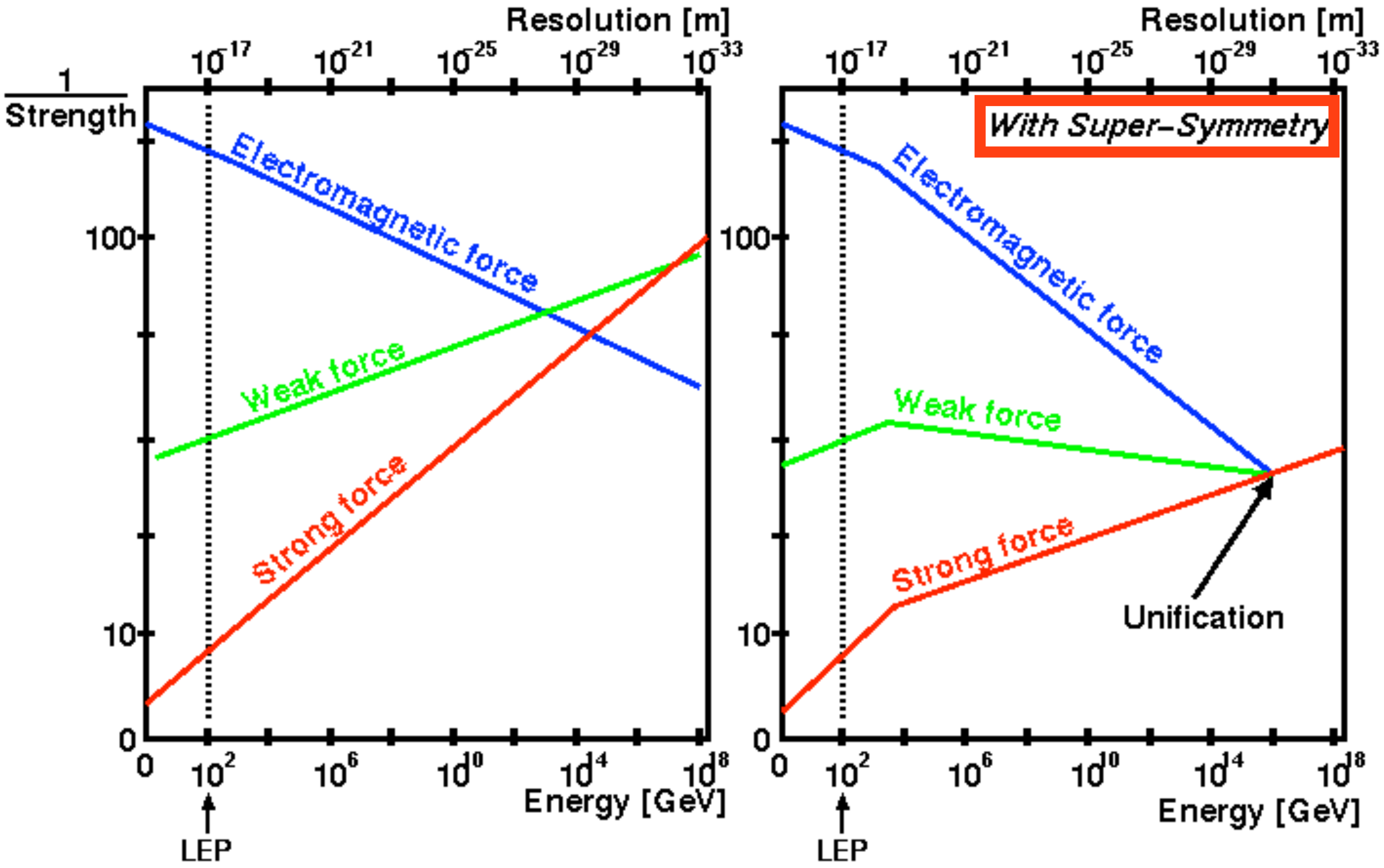
	spin	Fermions		spin	Bosons	
	1/2	leptons	$e,\ \nu$	0	sleptons	$\tilde{e},\ \tilde{\nu}$
	1/2	quarks	$u,\ d$	0	squarks	$\tilde{u},\ \tilde{d}$
mixed⇒	1/2	higgsino	$\tilde{h}, \tilde{H}, \tilde{A}, \tilde{H}^{\pm}$	0	Higgs bosons	$h, H, A, H^{\pm}$
mixed⇒	1/2	gaugino	$\tilde{\gamma}, \tilde{W}^{\pm}, \tilde{Z}^0, \tilde{g}$	1	gauge bosons	$\gamma, W^{\pm}, Z^0, g$
	3/2	gravitino	$\tilde{G}$	2	graviton	G

$\tilde{\gamma}, \tilde{Z}^0, \tilde{h}^0, \tilde{H}^0 \to \tilde{\chi}^0$ neutralinos

$\tilde{W}^{\pm}, H^{\pm} \to \tilde{\chi}^{\pm}$ charginos

Q依存の結合定数

Running Coupling Constant



素粒子標準模型


超対称性
フェルミオン
ボソン
CP非対称を生じるには最低3世代必要
自発的対称性の破れ
クォーク
u c t
d s b
レプトン
e μ τ
ν_e ν_μ ν_τ
ニュートリノ間の振動現象
フォトン
γ
電磁相互作用
ウィークボソン
Z W
弱い相互作用
グルーオン
g
強い相互作用
ヒッグスボソン
H
質量の起源
ヒッグス機構
弦理論
重力波＋量子重力
グラビトン
(未発見)
G
重力相互作用

素粒子標準模型

超対称性
フェルミオン
ボソン
CP非対称を生じるには最低3世代必要
自発的対称性の破れ
クォーク
u c t
d s b
レプトン
e μ τ
ν_e ν_μ ν_τ
ニュートリノ間の振動現象
フォトン
γ
電磁相互作用
ウィークボソン
Z W
弱い相互作用
グルーオン
g
強い相互作用
超弦理論
(余剰次元)
ヒッグスボソン
H
質量の起源
ヒッグス機構
弦理論
重力波+量子重力
グラビトン
(未発見)
G
重力相互作用

余剰次元

extra-dimension

PROPERTI 相互作用の強さ RACTIONS

Property \ Interaction	G 重力 al	弱い力 ctrowe	電磁力 ic	Fundam	強い力 idual
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge	See Residual Strong Interaction Note
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically charged	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W^+ W^- Z^0	γ	Gluons	Mesons
Strength relative to electromag for two u quarks at: 10^{-18} m	10^{-41}	0.8	1	25	Not applicable to quarks
3×10^{-17} m	10^{-41}	10^{-4}	1	60	
for 二つの陽子	10^{-36}	10^{-7}	1	Not applicable to hadrons	20

何故重力だけが極端に弱い？

余剰次元

extra-dimension

PROPERTI 相互作用の強さ RACTIONS

Property / Interaction	Gr 重力 al	弱い力 ctrowe	電磁力 ic	Fundam 強い力	idual
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge	See Residual Strong Interaction Note
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically charged	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W^+ W^- Z^0	γ	Gluons	Mesons
Strength relative to electromag for two u quarks at: 10^{-18} m	10^{-41}	0.8	1	25	Not applicable to quarks
3×10^{-17} m	10^{-41}	10^{-4}	1	60	
for 二つの陽子	10^{-36}	10^{-7}	1	Not applicable to hadrons	20

何故重力だけが極端に弱い？

なぜ重力は統一して説明できないのか

余剰次元

extra-dimension

何故重力だけが極端に弱い？

PROPERTI 相互作用の強さ RACTIONS

Interaction / Property	Gr 重力 al	弱い力 ctrowe	電磁力 ic	Fundam 強い力	idual
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge	See Residual Strong Interaction Note
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically charged	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W^+ W^- Z^0	γ	Gluons	Mesons
Strength relative to electromag for two u quarks at: 10^{-18} m	10^{-41}	0.8	1	25	Not applicable to quarks
3×10^{-17} m	10^{-41}	10^{-4}	1	60	
for 二つの陽子	10^{-36}	10^{-7}	1	Not applicable to hadrons	20

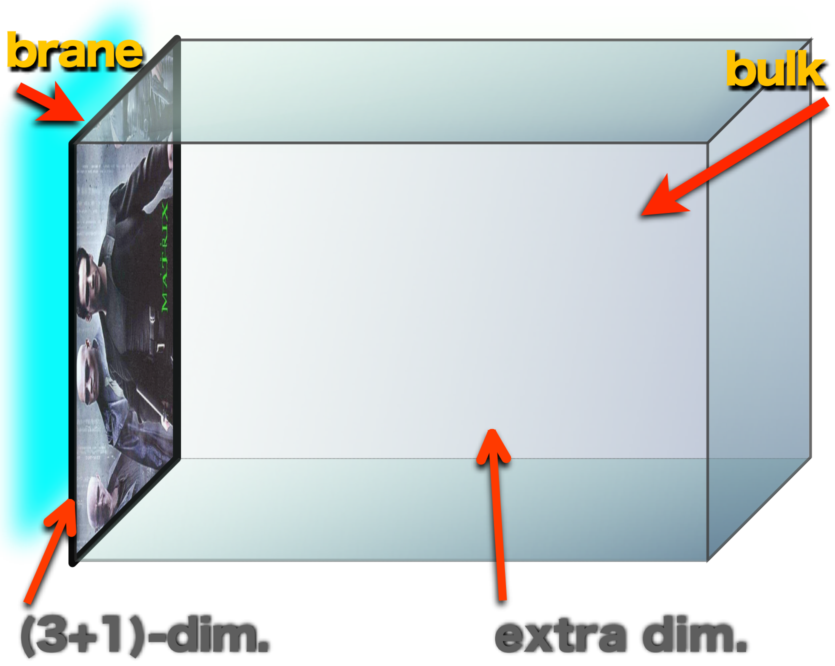
なぜ重力は統一して説明できないのか

あまりにも弱すぎる

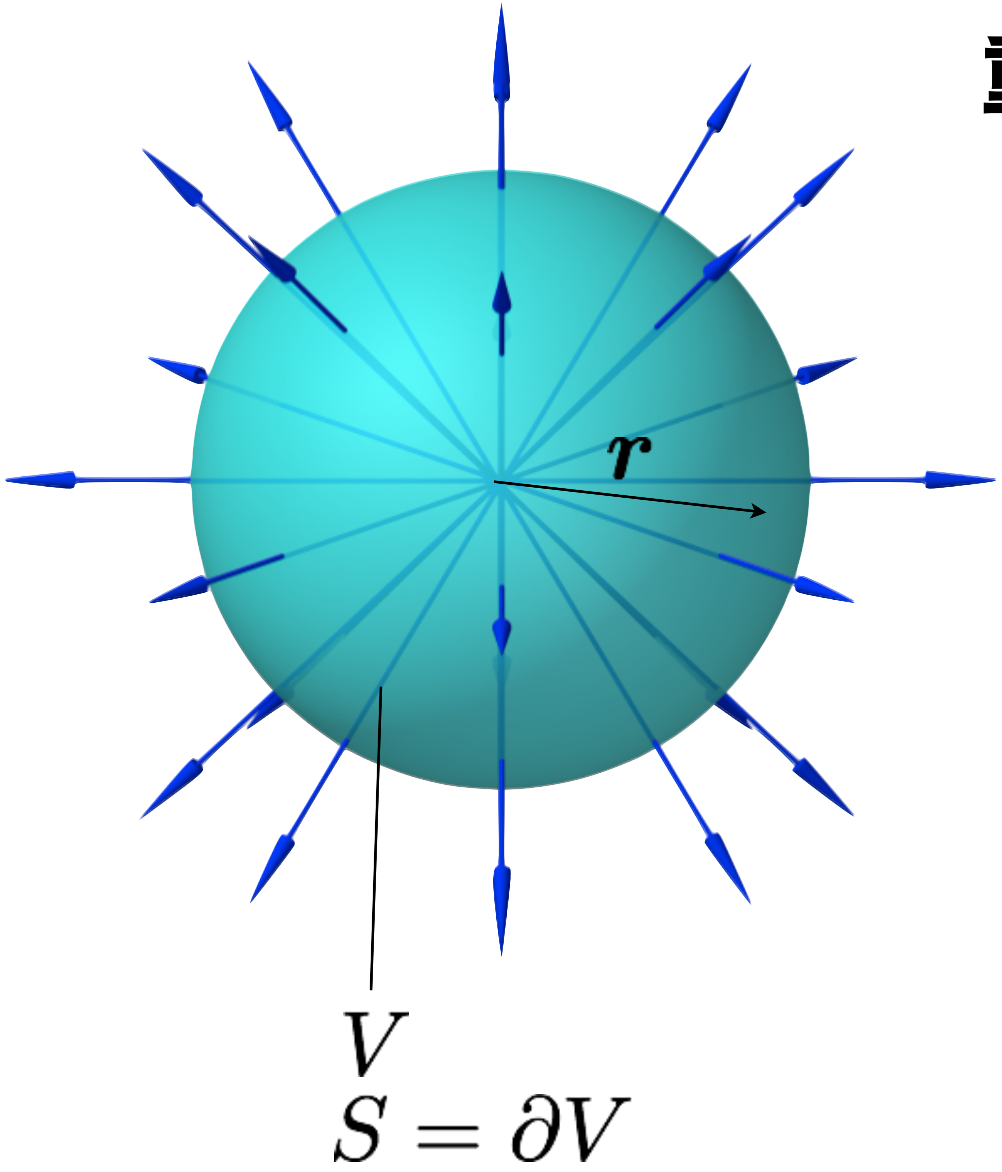
何故重力だけが極端に弱い？

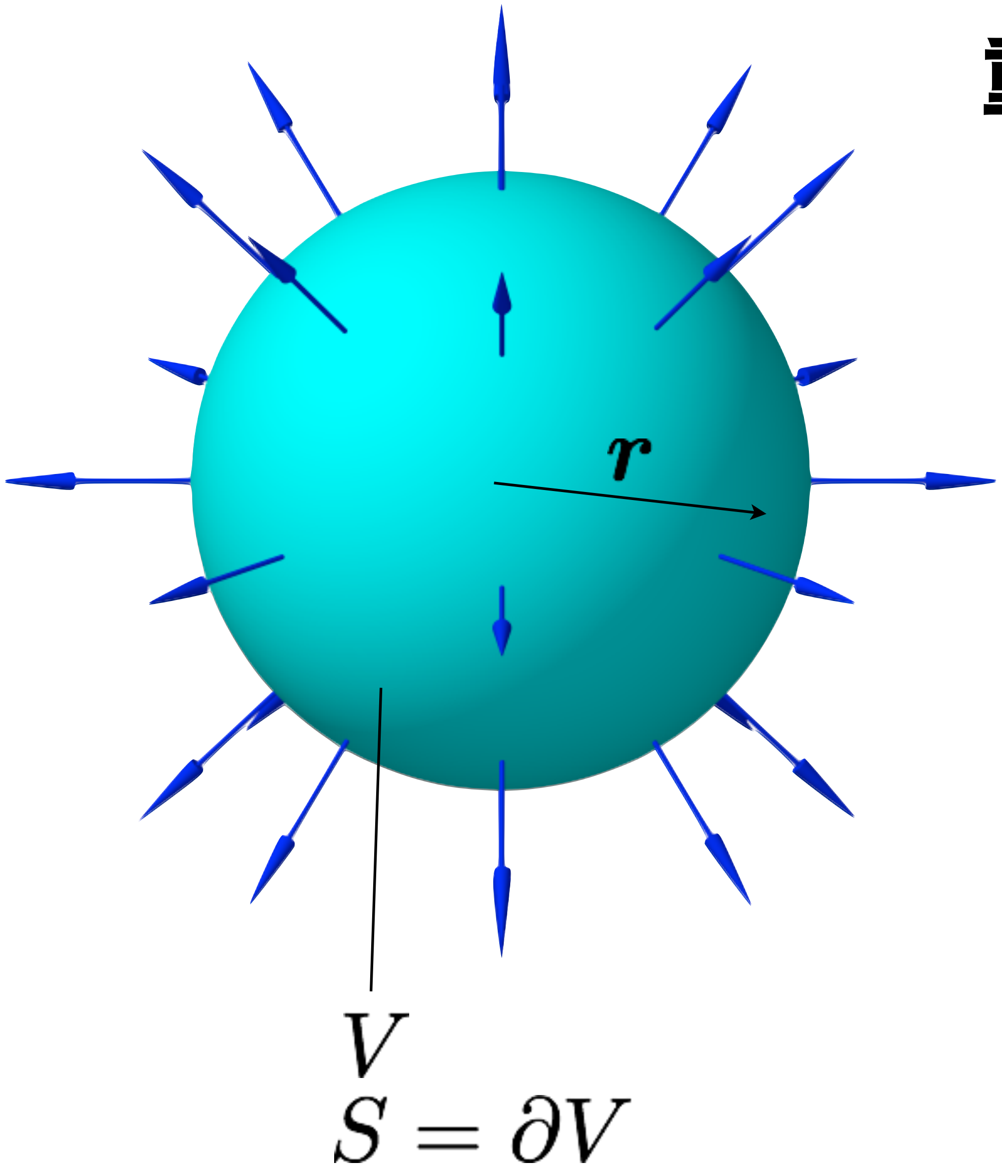
一个想法
一つのアイデア

余剰次元
extra-dimension



重力の強さ∝1/r²

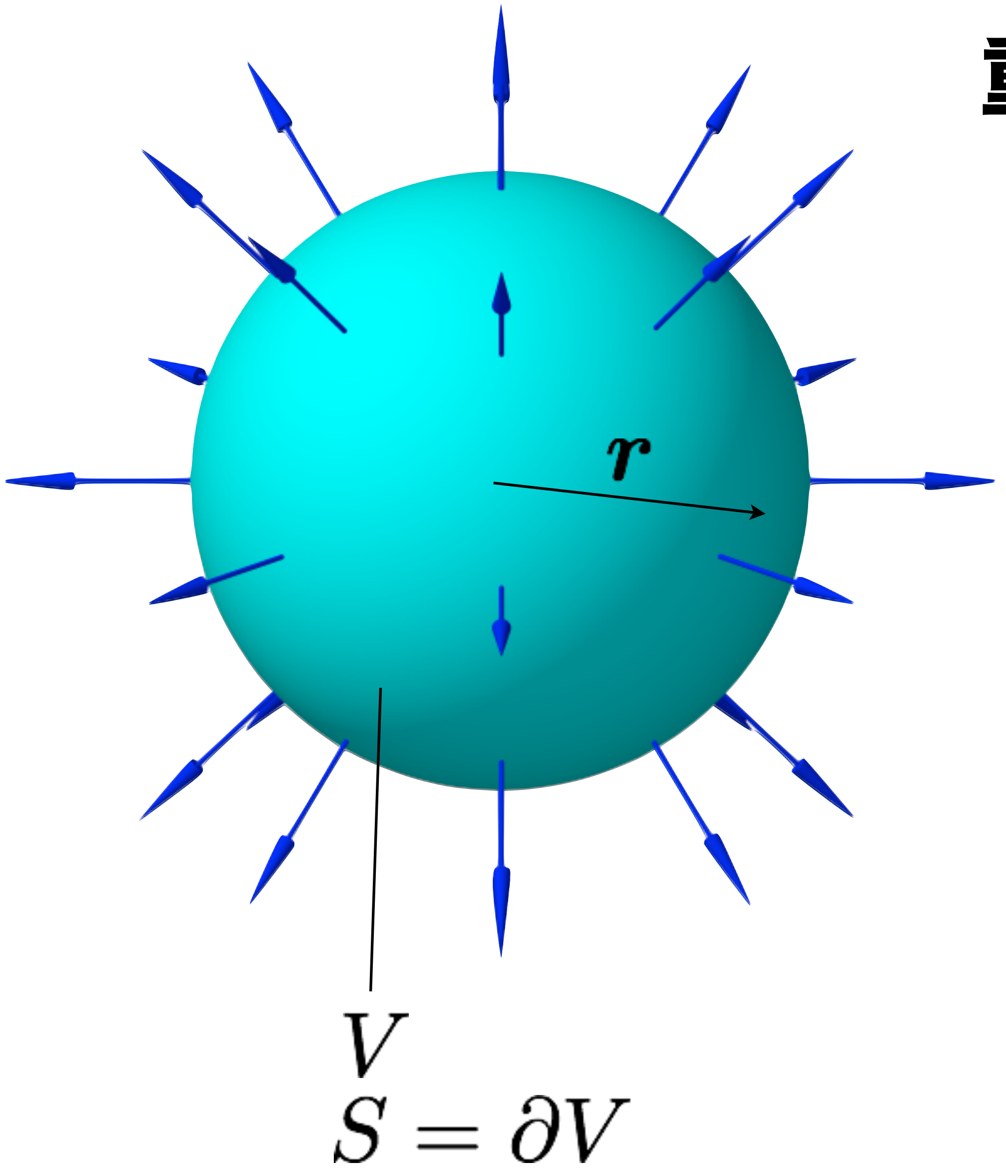




重力の強さ∝1/r²

力線は途切れない

球の表面積 = 4π r²

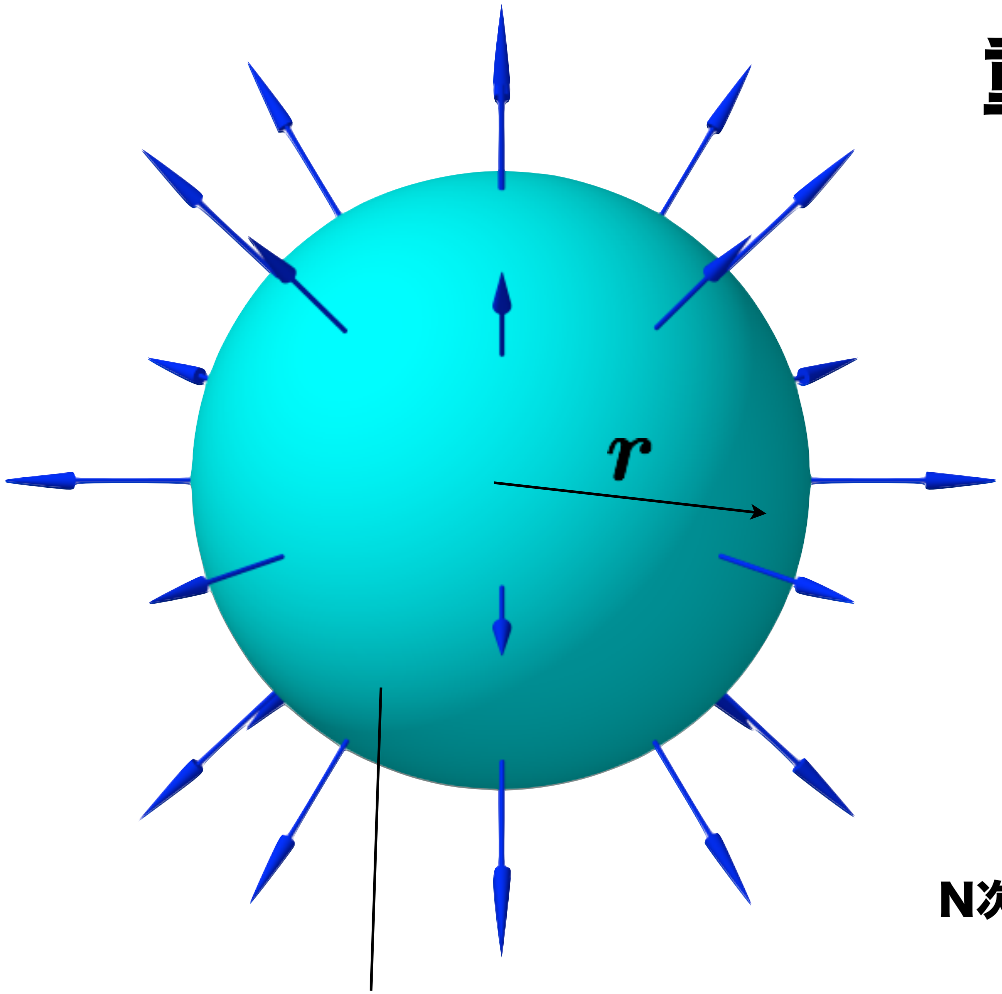


重力の強さ∝1/r²

力線は途切れない

球の表面積 = $4\pi r^2$

3次元の球



$$S = \partial V$$

重力の強さ∝1/r²

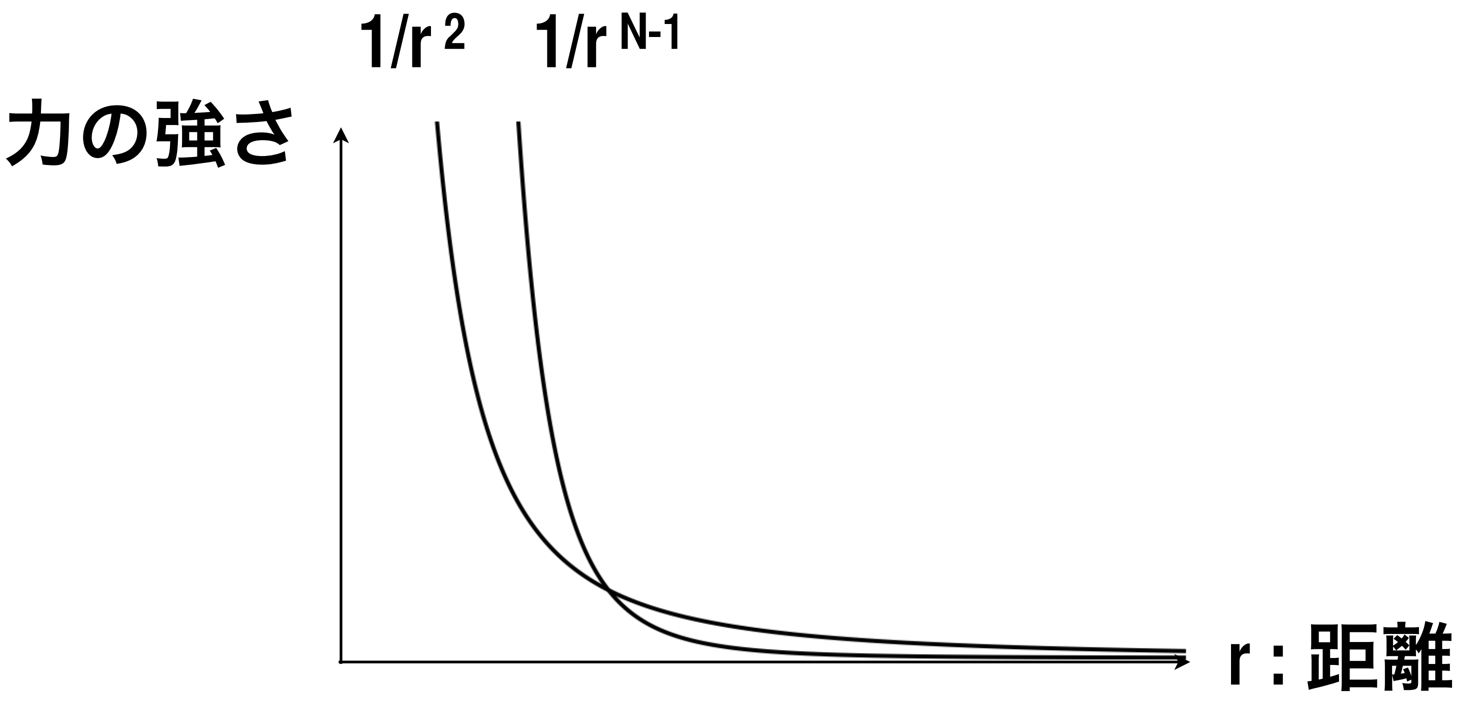
力線は途切れない

球の表面積 = 4π r²

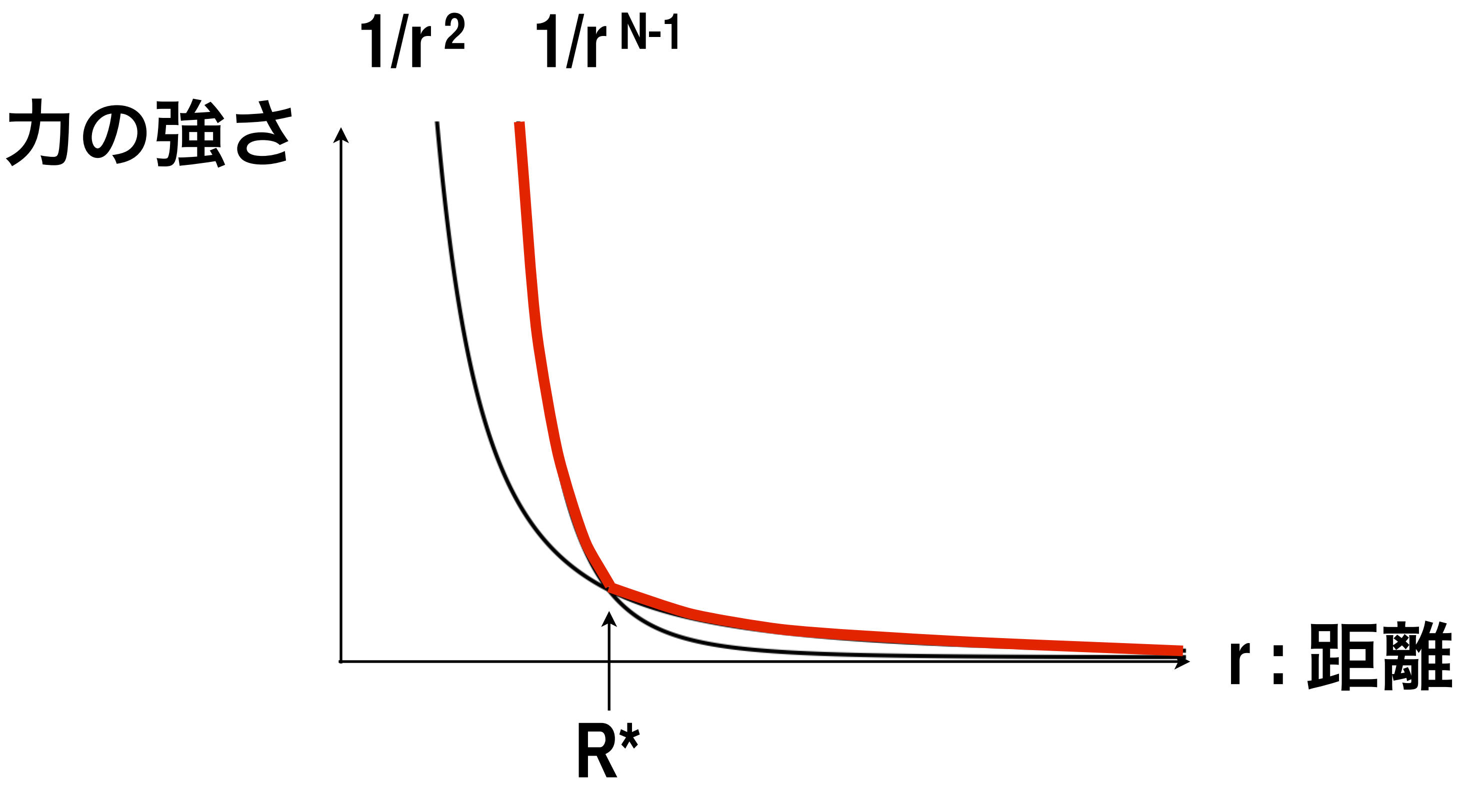
3次元の球

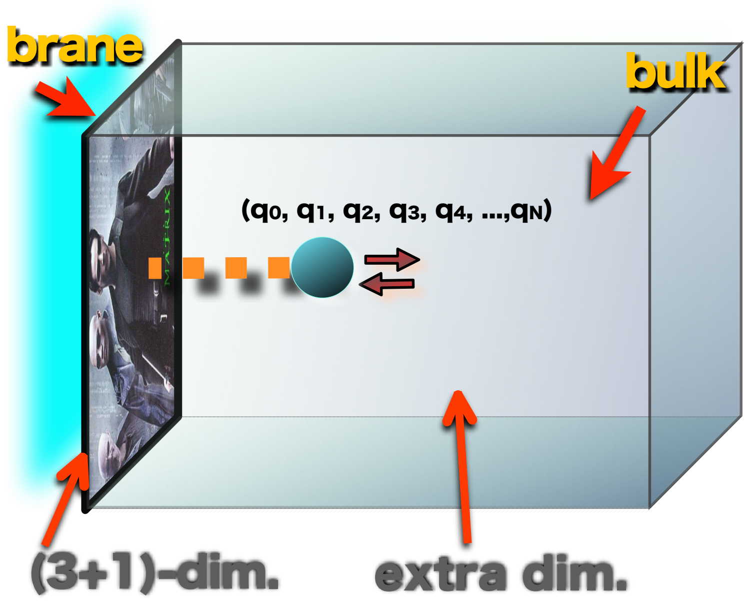
N次元の球の表面積 $$S_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} r^{N-1}$$

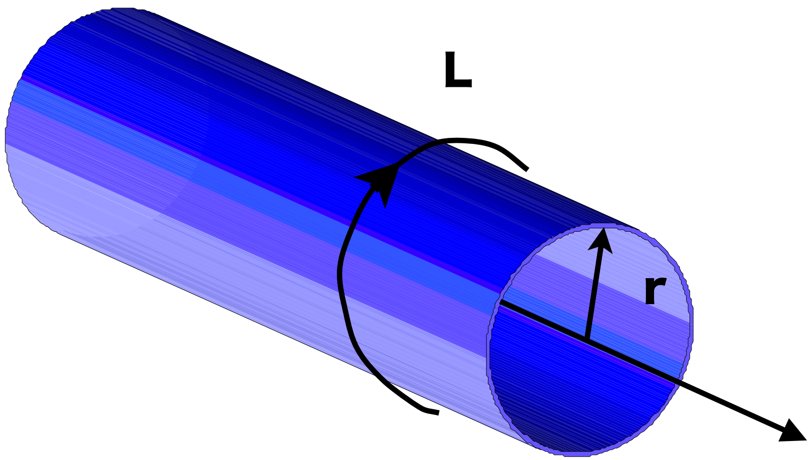
重力の強さ∝1/r^{N-1}



1/r 2
1/r N-1
力の強さ
r : 距離


1/r 2
1/r N-1
力の強さ
r : 距離
R*


brane
bulk
(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, ...,q_N)
(3+1)-dim.
extra dim.


L
r

基本的な力

強い力(強い核力)

電磁気力

弱い力(弱い核力)

重力

基本的な相互作用

強い相互作用

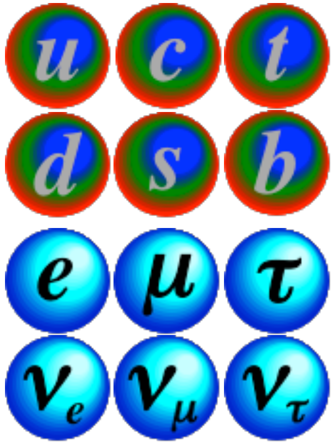
電磁相互作用

弱い相互作用

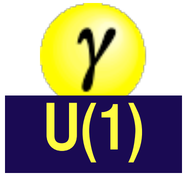
重力相互作用

基本的な相互作用

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi$$



強い相互作用



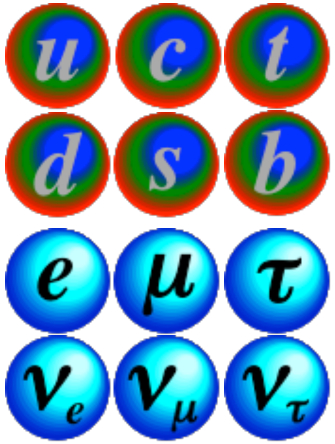
電磁相互作用

$$-g_1 \bar{\psi} \not{F} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

弱い相互作用

重力相互作用

基本的な相互作用



$$\mathscr{L} = \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi$$

強い相互作用

電磁相互作用

$$-g_1 \bar{\psi} B\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

弱い相互作用

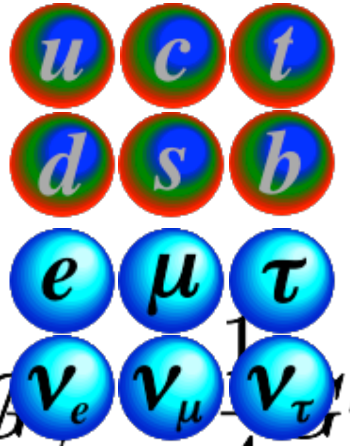
$$-g_2 \bar{\psi} W\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

重力相互作用

電弱理論

ワインバーグ=サラム理論

基本的な相互作用



$$\mathscr{L} = \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi$$

強い相互作用 $\quad -g_3 \bar{\psi} G\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$

$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{電磁相互作用} \\ \textbf{弱い相互作用}\end{array}}$

電磁相互作用 $\quad -g_1 \bar{\psi} B\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$

弱い相互作用 $\quad -g_2 \bar{\psi} W\!\!\!\!/ \psi - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$

重力相互作用

基本的な相互作用

H Higgs

$$\mathscr{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

g **強い相互作用** $-g_3 \bar{\psi} \not{G} \psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$

γ Z SU(2)

電磁相互作用 $-g_1 \bar{\psi} \not{B} \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$

W **弱い相互作用** $-g_2 \bar{\psi} \not{W} \psi - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$

重力相互作用

基本的な相互作用

Higgs

$$\mathscr{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

強い相互作用 $$-g_3 \bar{\psi} \not{G} \psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

電磁相互作用 $$-g_1 \bar{\psi} \not{B} \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

弱い相互作用 $$-g_2 \bar{\psi} \not{W} \psi - \frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

重力相互作用

素粒子標準理論

10^{12}eVまでの現象を記述できる

ゴールはたぶん10^{28}eV

基本的な相互作用

Higgs

$$\mathscr{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

SU(5)

強い相互作用

電磁相互作用

弱い相互作用

$$-g_{\mathrm{GUT}} \bar{\psi} \not{X} \psi - \frac{1}{4} X^{\mu\nu} X_{\mu\nu}$$

大統一理論

GUT: Grand Unified Theory

重力相互作用

基本的な相互作用

強い相互作用

電磁相互作用

弱い相互作用

重力相互作用

超重力理論

TOE: Theory of Everything

基本的な相互作用

強い相互作用

電磁相互作用

弱い相互作用

重力相互作用

TOE: Theory of Everything

基本的な相互作用

強い相互作用

電磁相互作用

弱い相互作用

重力相互作用

M理論

Kaluza-Klein理論

弦理論

超弦理論

概括　　　　まとめ

概括

当固有的对称性被打破时，
就会发生一种恢复对称性的运动

まとめ

本来あるべき対称性が破れると
対称性を回復する運動が生じる

概括

当固有的对称性被打破时,
就会发生一种恢复对称性的运动

真正的对称性是什么？

まとめ

本来あるべき対称性が破れると
対称性を回復する運動が生じる

本来あるべき対称性とは何か？

概括

まとめ

当固有的对称性被打破时,
就会发生一种恢复对称性的运动

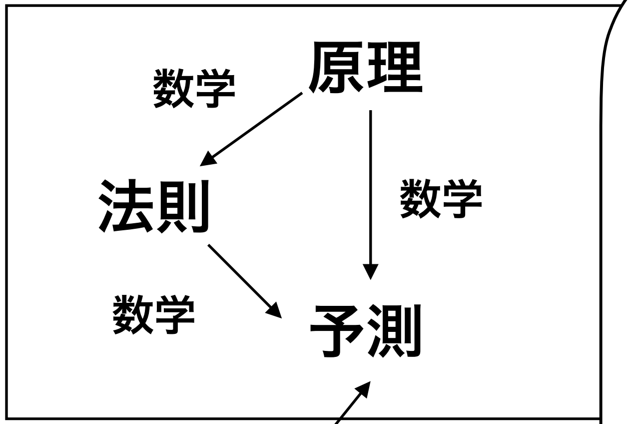
本来あるべき対称性が破れると
対称性を回復する運動が生じる

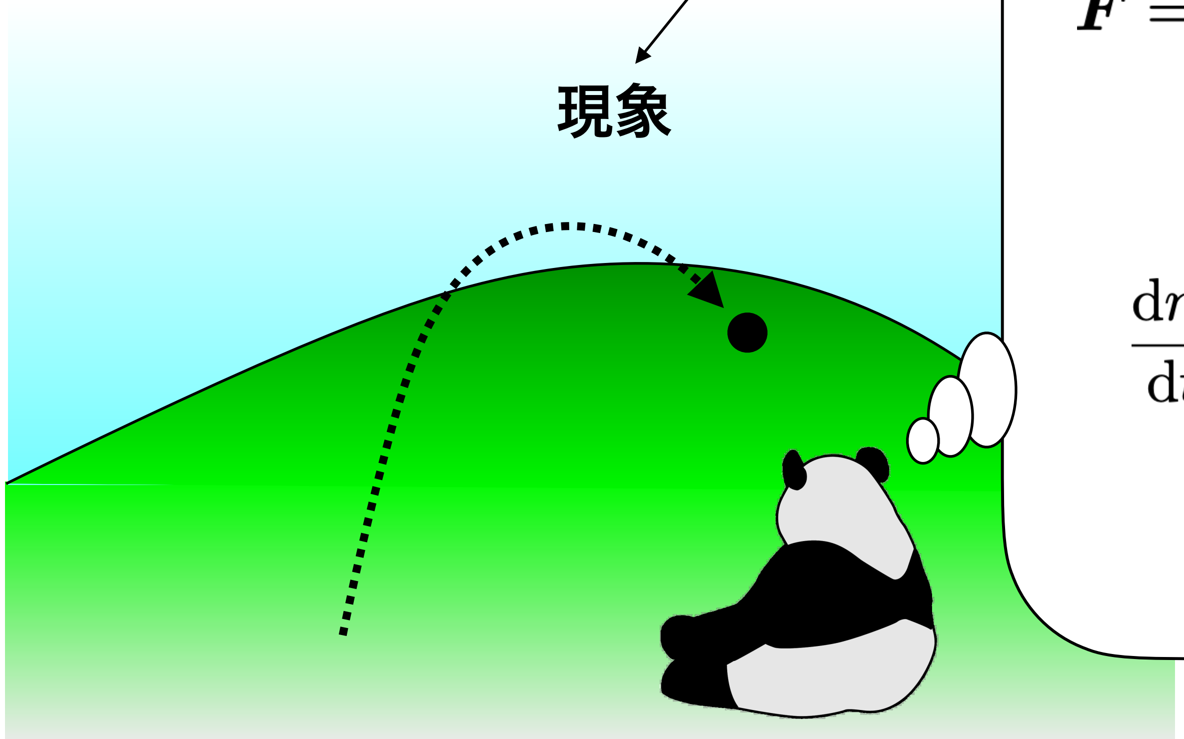
真正的对称性是什么？

本来あるべき対称性とは何か？

我不知道这样是否正确,
但现在就是这样。

正しいかどうかわかりませんが
今はこうです





$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

力　　質量

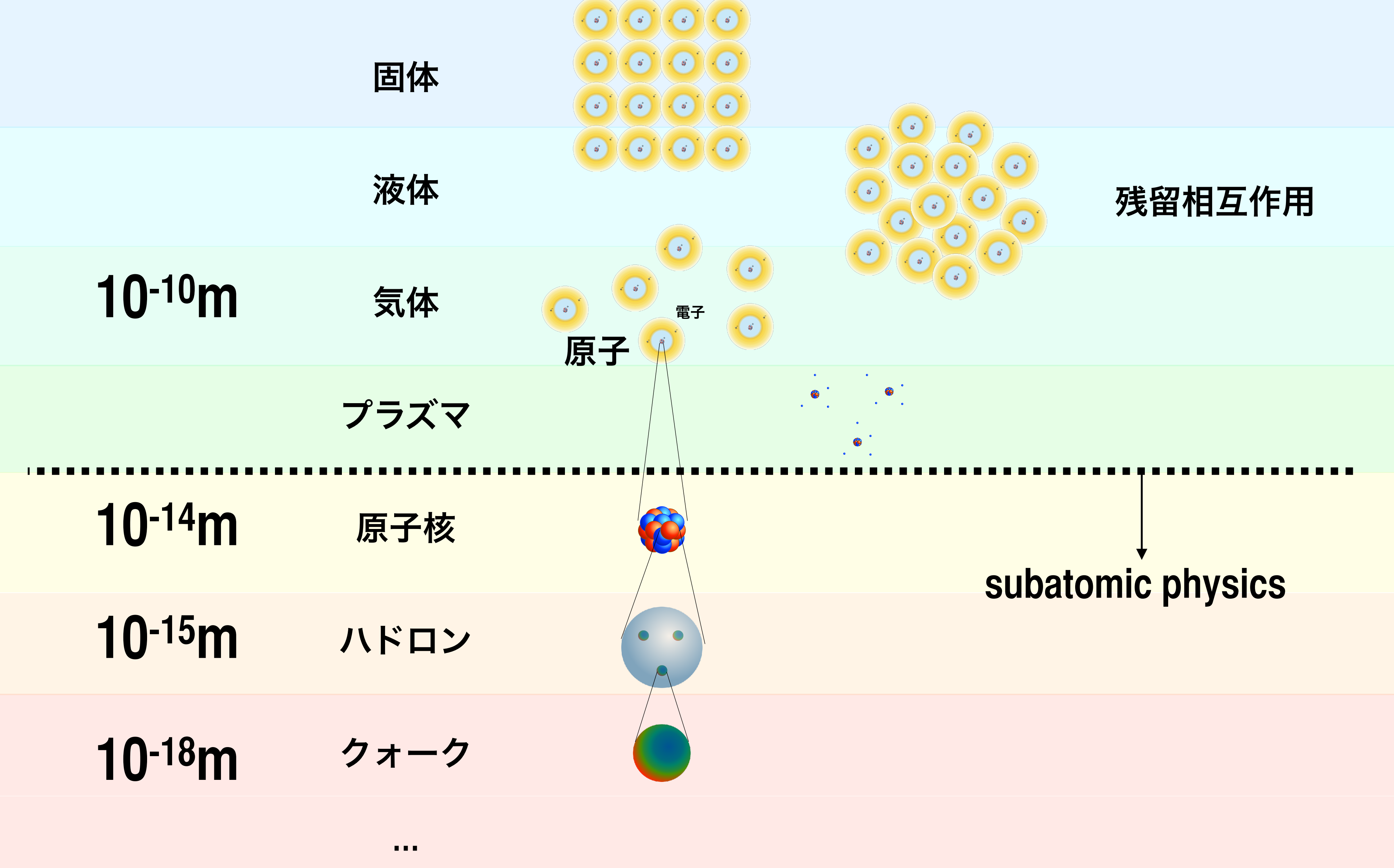
$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{wind}}\right)$$

重力　　空気抵抗?

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0 \quad ?$$

α は定数?

物質の階層構造


固体
液体
残留相互作用
10^{-10}m
気体
電子
原子
プラズマ
10^{-14}m
原子核
subatomic physics
10^{-15}m
ハドロン
10^{-18}m
クォーク
...