Anomalies

When quantum mechanics break classical symmetries

报告人：孙浩淳；组员：仲锐涛、孙浩淳

复旦大学

2026 年 4 月 10 日

目录

研究背景

- 物理动机：费米子路径积分
  在规范场背景 $A \in \mathscr{A}$ 下，费米子路径积分形式上给出
  $$Z(A) = \int \mathscr{D}\psi \, e^{-S(\psi, A)} \sim \det(D_A),$$
  其中 D_A 是耦合规范场的狄拉克算符。
  因此有效作用量定义为
  $$W(A) = -\log\det(D_A).$$

- 数学问题：相位是否可以一致定义
  由于 $\det(D_A)$ 一般只在局部上定义，其相位可能随 A 的变化产生不一致性，因此需要研究其在参数空间 $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ 上的整体结构。

- 几何化结构：determinant line bundle
  这些局部的行列式空间拼接成一个复线丛
  $$\pi : \mathscr{L} \to \mathscr{A}/\mathscr{G}, \quad \mathscr{L}_A = \det(D_A).$$
  在引入 Hermitian 结构后，该线丛具有自然的 $U(1)$ 结构群。

研究方向：物理侧

- 核心对应：
  - 反常 $\longleftrightarrow$ 线丛的非平凡性
  - 规范不变性 $\longleftrightarrow$ 全局截面的存在性
  - anomaly cancellation $\longleftrightarrow$ 线丛可平凡化
- 物理图像：
  - 全局反常可以理解为：路径积分相位在规范场空间中无法全局一致选择。
  - 局部反常可以理解为：路径积分相位即使在局部也无法一致选择。

研究方向：数学侧

Statement：全局 Anomaly 等价于对应 Determinant line bundle 的非平凡性。局部 Anomaly 等价于 Determinant line bundle 联络曲率的局部表达不平凡。

- 关键数学结论：

定理

线丛 L 是平凡的，当且仅当存在一个处处不为零的全局截面 $s : \mathscr{A}/\mathscr{G} \to L$.

我们将证明以下方法可以被用以判断非平凡性，并展示一些例子

- Cech cocycle 非平凡。
- 第一陈类 $c_1(\mathscr{L}) \neq 0$。
- Holonomy 非平凡。

关于局部反常，我们将使用指标定理进行研究。

总结

本课题预期展示物理概念——反常与几何拓扑的统一性。

- 反常并非计算上的偶然，而是由几何对象（如 determinant line bundle）的整体性质所刻画，其本质可理解为在规范场空间上的拓扑障碍。
- 全局反常与局部反常分别对应不同层次的几何结构：前者体现为线丛的非平凡性，后者则由曲率刻画，统一于指标定理与族指标理论框架之中。

参考文献

- J. Harvey, *TASI 2003 Lectures on Anomalies*, hep-th/0509097.
- D. Tong, *Lectures on Gauge Theory*, (Chapter on Anomalies), Lecture notes.
- R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 82, Springer.
- D. Huybrechts, *Complex Geometry: An Introduction*, Springer, 2005.

Thank you!