光学定理、切割规则与不稳定粒子

刘宏基

2026 年 5 月 8 日

目录

S 矩阵的定义与幺正性

定义 1 (S 矩阵 (S-matrix))

在量子场论中，S 矩阵是用于数学描述散射过程的时间演化算符，它将无限过去的“入态” $|i\rangle$ 映射到无限未来的“出态” $|f\rangle$。其矩阵元素 S_{fi} 代表该散射的概率幅。

初始态散射到所有可能终态的概率总和必须为 1:

$$\sum_f P(i \to f) = \sum_f |\langle f|S|i\rangle|^2 = 1$$

利用终态的完备性关系 $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$，我们得到 S 矩阵必须满足幺正性条件:

S 矩阵幺正性 (Unitarity)

$$S^\dagger S = 1$$

跃迁矩阵与费曼振幅

为了分离出真正发生相互作用的物理过程（排除粒子直接错过的情况），我们将 S 矩阵分解为单位矩阵 1 和代表相互作用的 T 矩阵：

$$S = 1 + iT$$

由于真实物理过程严格遵守能量和动量守恒，我们从 T 矩阵中提取出四维狄拉克 δ 函数，定义洛伦兹不变量——费曼振幅 $\mathcal{M}_{fi}$：

费曼振幅

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\mathcal{M}_{fi}$$

$\mathcal{M}_{fi}$ 正是我们通过费曼图和费曼规则计算的核心物理量。

光学定理的推导 (1/4)

展开幺正性条件

将 $S = 1 + iT$ 代入 $S^\dagger S = 1$：

$$
\begin{aligned}
(1 - iT^\dagger)(1 + iT) &= 1 \\
1 + iT - iT^\dagger + T^\dagger T &= 1 \\
-i(T - T^\dagger) &= T^\dagger T
\end{aligned}
$$

应用于前向散射 (Forward Scattering)

考虑初始态与最终态完全相同的散射情形 $|i\rangle = |p_1, p_2\rangle$，在等式两边取矩阵元：

$$-i\langle i|T - T^\dagger|i\rangle = \langle i|T^\dagger T|i\rangle$$

光学定理的推导 (2/4)

计算等式左边 (LHS)
等式左边 $-i\langle i|T-T^\dagger|i\rangle$ 在数学上等于前向散射振幅虚部的两倍：

$$\text{LHS} = 2\,\text{Im}\langle i|T|i\rangle$$

计算等式右边 (RHS)
在 $T^\dagger$ 和 T 之间插入完备终态基 $\sum_f |f\rangle\langle f|$：

$$\text{RHS} = \sum_f \langle i|T^\dagger|f\rangle\langle f|T|i\rangle = \sum_f |\langle f|T|i\rangle|^2$$

至此，我们得到：

$$2\,\text{Im}\langle i|T|i\rangle = \sum_f |\langle f|T|i\rangle|^2$$

光学定理的推导 (3/4)

现在我们将 T 矩阵元替换为费曼振幅 $\mathcal{M}$：$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\mathcal{M}_{fi}$。
代入等式左边 (LHS)：对于前向散射 ($i = f$)，

$$\mathrm{LHS} = 2\mathrm{Im}\left[(2\pi)^4\delta^4(0)\mathcal{M}_{ii}\right]$$

代入等式右边 (RHS)：

$$|\langle f|T|i\rangle|^2 = \left[(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\right] \times \left[(2\pi)^4\delta^4(0)\right] |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

将 $(2\pi)^4\delta^4(0)$ 约去，在连续极限下，对终态的求和化为对相空间 $d\Pi_f$ 的积分：

$$2\mathrm{Im}\mathcal{M}_{ii} = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

光学定理的推导 (4/4)

我们现在得到了：

$$2\mathrm{Im}\mathcal{M}_{ii} = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

在量子场论中，两体散射的总截面 σ_{tot} 为：

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{4F_{\text{flux}}} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

在质心系中，入射粒子的**通量因子 (Flux Factor)** $F_{\text{flux}} = E_{cm} p_{cm}$。因此，上面等式右边的相空间积分正好可以替换为截面：

$$\sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}_{fi}|^2 = 4E_{cm} p_{cm} \sigma_{tot}$$

代回原式即得：$\mathrm{Im}\mathcal{M}_{ii} = 2E_{cm} p_{cm} \sigma_{tot}$。

光学定理

定理 2 (光学定理 The Optical Theorem)

前向散射振幅的虚部正比于该初始态对应的总散射截面：

$$Im\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_1, p_2) = 2E_{cm}p_{cm}\sigma_{tot}$$

- E_{cm}：质心系下的总能量。
- p_{cm}：质心系下初始动量的模。

费曼传播子

定义 3 (传播子 Propagator)

描述粒子在时空两点间传播的概率幅。在动量空间中，标量粒子的费曼传播子形式为：

$$G_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- **在壳 (On-shell)**：当 $p^2 = m^2$ 时，分母为 0，传播子出现极点，代表真实的物理粒子。
- **离壳 (Off-shell)**：极点之外代表传递相互作用的虚粒子。

Cutkosky 切割规则

基于上述光学定理的推导，为了提取复数圈图积分的虚部，我们只需应用以下规则：

Cutkosky 替换法则 (The Cutkosky Substitution)

将待切割的内部连线（传播子）替换为确保在壳并保证能量为正的狄拉克 δ 函数：

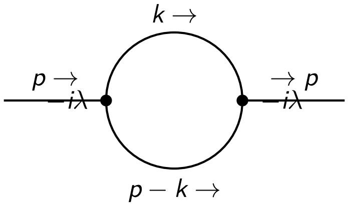
$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \longrightarrow 2\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)$$

规则步骤：

1. 以任何能使所有切割传播子处于壳层状态的方式切割该图，且不违反动量守恒定律。
2. 对被切断的内部传播子应用上述替换。
3. 对切割线右侧的顶点取复共轭。

应用实例：单圈自能图

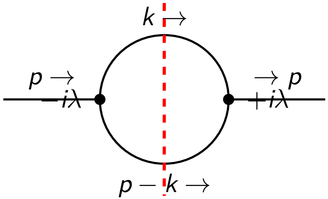
具体例子：考虑 ϕ^3 理论中的标量场单圈自能图 (Self-Energy)。动量为 p 的入射粒子分裂为两个内部动量分别为 k 和 $p-k$ 的虚粒子，随后再重新结合。



$$-i\Sigma(p^2) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-i\lambda)^2 \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}$$

此复变圈积分包含了复杂的实部与虚部，直接计算非常繁琐。

应用实例：单圈自能图 (应用切割规则)



应用规则（替换传播子为 δ 函数，右侧顶点取共轭），表达式变为：

$$
\begin{aligned}
2i\,\mathrm{Im}(-\Sigma(p^2)) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}&(-i\lambda)(+i\lambda) \\
&\times [2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)] \\
&\times [2\pi\delta((p-k)^2 - m^2)\theta(p^0 - k^0)]
\end{aligned}
$$

应用实例

在质心系 $(p = (M, 0, 0, 0))$ 下完成上述 δ 函数相空间积分后，最终结果为：

单圈自能图虚部计算结果

$$\mathrm{Im}(\Sigma(p^2)) = -\frac{\lambda^2}{32\pi}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}\theta(p^2 - 4m^2)$$

- 阶跃函数 $\theta(p^2 - 4m^2)$ 意味着：除非入射能量的平方 p^2 大于 $(2m)^2$，否则虚部严格为零。
- 只有当能量跨越了阈值（足以在现实中制造出两个质量为 m 的实粒子）时，圈图才会获得虚部，表现为不稳定粒子的衰变。

不稳定粒子的复数能量

为了用复分析研究 S 矩阵，物理学家将曼德尔施塔姆变量 $s = E_{cm}^2 = p^2$ 扩展到复能量平面。

- 稳定粒子的波函数演化：$\psi(t) \propto e^{-iMt}$（概率守恒）。
- **不稳定粒子的波函数演化**：存在衰变宽度 Γ，概率呈指数衰减 $P(t) \propto e^{-\Gamma t}$。

为得到这种衰减，波函数的演化项必须包含实数指数：

$$\psi(t) \propto e^{-iMt}e^{-\Gamma t/2} = e^{-i(M-i\Gamma/2)t}$$

不稳定粒子的复数质量

不稳定粒子等效于拥有复数能量/质量 $E = M - i\Gamma/2$。

$$p^2 = \left(M - i\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \approx M^2 - iM\Gamma$$

自能虚部与衰变宽度的联系

考虑经过量子修正的“全传播子”（包含自能 Σ）：

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}$$

寻找物理极点需令分母为零：$p^2 - m_0^2 - \mathrm{Re}(\Sigma) - i\mathrm{Im}(\Sigma) = 0$。

- $\mathrm{Re}(\Sigma)$：将裸质量修正为实验室测得的真实物理质量 $M^2 = m_0^2 + \mathrm{Re}(\Sigma)$。
- $\mathrm{Im}(\Sigma)$：对应复平面上的极点偏离。

自能虚部与衰变宽度的联系

$$\mathrm{Im}(\Sigma(M^2)) = -M\Gamma$$

这表明，通过 Cutkosky 规则算出的图的虚部，直接给出了粒子的衰变宽度 Γ。

时间响应函数与因果律

物理系统对外界微扰的反应由时间响应函数 (Time Response Function) 决定。在量子场论中，这对应于推迟格林函数 (Retarded Green's function)，它描述了在时空点 y 的扰动对时空点 x 的因果影响：

$$R(t) \propto i\theta(t)\langle[\phi(x), \phi(y)]\rangle$$

因果律 (Causality)

结果绝不能先于原因发生。因此，若在 $t = 0$ 施加脉冲扰动，系统在负时间的响应必须严格为零：

$$R(t) = 0 \quad \text{对于} \quad t < 0$$

响应函数 $R(t)$ 在能量域的傅里叶变换 $R(E)$，直接对应于散射振幅（LSZ 约化公式）。

能量域的解析性：蒂奇马什定理

为了得到能量域的散射振幅，我们对时间响应做傅里叶变换。由于 $R(t) = 0\,(t < 0)$，积分下限从 $-\infty$ 变为 0：

$$R(E) = \int_0^\infty R(t) e^{iEt} dt$$

假设能量延拓为复数 $E = E_R + iE_I$。如果处于上半平面 $(E_I > 0)$：

$$e^{iEt} = e^{i(E_R + iE_I)t} = e^{iE_R t} e^{-E_I t}$$

因为积分限 $t > 0$ 且 $E_I > 0$，项 $e^{-E_I t}$ 是一个指数衰减因子。

定理 4 (蒂奇马什定理 Titchmarsh's Theorem)

由于衰减因子的存在，该积分在复能量 E 的上半平面绝对收敛。这保证了散射振幅在上半平面完全解析且无极点。

传播子极点与第一黎曼面

根据 LSZ 约化公式，散射振幅的极点与传播子的极点是完全一致的。

稳定粒子极点

稳定粒子的质量是实数，极点方程为 $p^2 = M^2$。
这个极点严格位于第一黎曼面的实轴上（边界上），这完全符合因果律，并且它就是代表真实的物理粒子！

不稳定粒子极点

不稳定粒子具有复数坐标 $p^2 = M^2 - iM\Gamma$。
它脱离了实轴。如果允许它出现在第一黎曼面上，由于跨过实轴会导致波函数时间演化变为 $e^{-i(M+i\Gamma/2)t}$，这代表粒子的概率会随时间增加 $(e^{+\Gamma t/2})$。

参考文献

[1] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, Section 24.1 (The Optical Theorem) and Section 24.2 (Unstable Particles).

[2] S. Willenbrock, *Unstable Particles in Quantum Field Theory*, arXiv:2511.16941 (Pedagogical introduction to poles and branch cuts).

[3] R. E. Cutkosky, *Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes*, J. Math. Phys. **1**, 429 (1960).

感谢聆听

Q&A