Precision QED and Feynman Integrals: The Quest for g-2

陈钰僖

复旦大学物理学系

队员：陈钰僖，林睿菲，宁知微

2026 年 5 月 8 日

目录

电子的电磁顶点函数 $\Gamma^\mu(\mathbf{p}',\mathbf{p})$ 一般可分解为两个形状因子:

$$\Gamma^\mu(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \gamma^\mu \mathbf{F}_1(\mathbf{q}^2) + \frac{\mathbf{i}\sigma^{\mu\nu}\mathbf{q}_\nu}{2\mathbf{m}}\mathbf{F}_2(\mathbf{q}^2)$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$。在静极限 $\mathbf{q} \to 0$ 下，电子的 $\mathbf{g}$ 因子为:

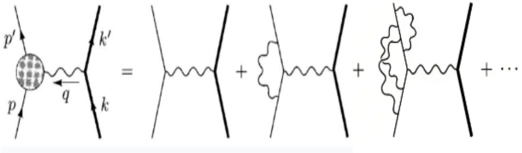
$$\mathbf{g} = 2\left[\mathbf{F}_1(0) + \mathbf{F}_2(0)\right].$$

树图给出 $\mathbf{F}_1(0) = 1$，$\mathbf{F}_2(0) = 0$，故 $\mathbf{g} = 2$。

定义反常磁矩

$$\mathbf{a_e} = \frac{\mathbf{g} - 2}{2} = \mathbf{F}_2(0).$$

本文详细计算 **QED** 单圈修正对 $\mathbf{F}_2(0)$ 的贡献，得到 **Schwinger** 项 $\mathbf{a_e} = \alpha/(2\pi)$。



二、单圈顶角修正的费曼振幅

采用与 **Weinzierl** 书一致的约定:

- 传播子: $\dfrac{1}{-q^2+m^2-i\delta}$ (**Wick** 旋转后为正)
- 积分测度: $\displaystyle\int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}}$
- 维数正规化: $D = 4-2\epsilon$, 并包含整体因子 $e^{l\epsilon\gamma_E}$
- **QED** 费曼规则: 光子传播子 $\dfrac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2}$, 电子传播子 $\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2}$, 顶点 $-ie\gamma^\mu$。

考虑单圈电子 光子顶角修正图 (虚光子交换)。设入射电子动量 p, 出射电子动量 p', 外光子动量 $q = p' - p$。振幅为:

$$i\Gamma^\mu_{(1)}(p', p) = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} (-ie\gamma^\alpha) \frac{i(\not{k}+\not{p}'+m)}{(k+p')^2-m^2} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k}+\not{p}+m)}{(k+p)^2-m^2} \left(-ie\gamma^\beta\right).$$

合并常数因子，两边除以 $\mathbf{i}$ 得:

$$\Gamma^{\mu}_{(1)}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = -\mathbf{i}\mathbf{e}^3 \int \frac{\mathbf{d}^{\mathbf{D}}\mathbf{k}}{\mathbf{i}\pi^{\mathbf{D}/2}} \frac{\gamma^{\alpha}(\not{\mathbf{k}}+\not{\mathbf{p}}'+\mathbf{m})\gamma^{\mu}(\not{\mathbf{k}}+\not{\mathbf{p}}+\mathbf{m})\gamma_{\alpha}}{\mathbf{k}^2[(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2-\mathbf{m}^2][(\mathbf{k}+\mathbf{p}')^2-\mathbf{m}^2]}.$$

为与主流教材 (如 **Peskin & Schroeder**) 的结果直接比较，改用标准 **QFT** 测度 $\int \mathbf{d}^{\mathbf{D}}\mathbf{k}/(2\pi)^{\mathbf{D}}$。经过整体常数重定义，可以得到:

$$\Gamma^{\mu}_{(1)}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \mathbf{e}^2 \int \frac{\mathbf{d}^{\mathbf{D}}\mathbf{k}}{(2\pi)^{\mathbf{D}}} \frac{\gamma^{\alpha}(\not{\mathbf{k}}+\not{\mathbf{p}}'+\mathbf{m})\gamma^{\mu}(\not{\mathbf{k}}+\not{\mathbf{p}}+\mathbf{m})\gamma_{\alpha}}{\mathbf{k}^2[(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2-\mathbf{m}^2][(\mathbf{k}+\mathbf{p}')^2-\mathbf{m}^2]},$$

其中 $\mathbf{e}^2 = 4\pi\alpha$，$\alpha$ 为精细结构常数。定义分子为:

$$\mathbf{N}^{\mu} = \gamma^{\alpha}(\not{\mathbf{k}}+\not{\mathbf{p}}'+\mathbf{m})\gamma^{\mu}(\not{\mathbf{k}}+\not{\mathbf{p}}+\mathbf{m})\gamma_{\alpha}.$$

三、狄拉克代数化简

将 $\mathbf{N}^\mu$ 展开，其中 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} + \mathbf{p}$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + \mathbf{p}'$。需要计算三类收缩:

$$\begin{aligned}
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\alpha &= (2 - \mathbf{D})\gamma^\mu, \\
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha &= 2\gamma^\nu\gamma^\mu - (2 - \mathbf{D})\gamma^\mu\gamma^\nu + 4\mathbf{g}^{\mu\nu}, \\
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\alpha &= -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu + (4 - \mathbf{D})\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + 2\mathbf{g}^{\mu\nu}\gamma^\rho - 2\mathbf{g}^{\mu\rho}\gamma^\nu - 2\mathbf{g}^{\nu\rho}\gamma^\mu.
\end{aligned}$$

经过详细的狄拉克代数收缩运算（完整推导过程见附录），$\mathbf{N}^\mu$ 最终变形为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^\mu = &-2\not{\mathbf{k}}_1\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_2 + (4 - \mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_2\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_1 + 4\mathbf{k}_2^\mu\not{\mathbf{k}}_1 - 4\mathbf{k}_1^\mu\not{\mathbf{k}}_2 + 2(\mathbf{D} - 2)\gamma^\mu(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\
&+ \mathbf{m}[2\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_2 - (2 - \mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_2\gamma^\mu + 4\mathbf{k}_2^\mu] \\
&+ \mathbf{m}[2\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_1 - (2 - \mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_1\gamma^\mu + 4\mathbf{k}_1^\mu] + \mathbf{m}^2(2 - \mathbf{D})\gamma^\mu.
\end{aligned}$$

四、Feynman 参数化与动量平移

记 $\mathbf{A}=\mathbf{k}^2$, $\mathbf{B}=(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2-\mathbf{m}^2$, $\mathbf{C}=(\mathbf{k}+\mathbf{p}')^2-\mathbf{m}^2$. 利用 **Feynman** 参数公式:

$$\frac{1}{\mathbf{ABC}}=2\int_0^1 \mathbf{dx}\,\mathbf{dy}\,\mathbf{dz}\,\delta(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}-1)\frac{1}{(\mathbf{xA}+\mathbf{yB}+\mathbf{zC})^3}.$$

计算分母中的二次型:

$$\begin{aligned}\mathbf{xA}+\mathbf{yB}+\mathbf{zC}&=\mathbf{xk}^2+\mathbf{y}[(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2-\mathbf{m}^2]+\mathbf{z}[(\mathbf{k}+\mathbf{p}')^2-\mathbf{m}^2]\\&=(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})\mathbf{k}^2+2\mathbf{k}\cdot(\mathbf{yp}+\mathbf{zp}')+\mathbf{y}(\mathbf{p}^2-\mathbf{m}^2)+\mathbf{z}(\mathbf{p}'^2-\mathbf{m}^2).\end{aligned}$$

由于壳上电子 $\mathbf{p}^2=\mathbf{p}'^2=\mathbf{m}^2$，且 $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=1$，故
$\mathbf{xA}+\mathbf{yB}+\mathbf{zC}=\mathbf{k}^2+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{Q}$, $\quad\mathbf{Q}=\mathbf{yp}+\mathbf{zp}'$.
配方：令 $\mathbf{k}=\ell-\mathbf{Q}$，则 $\mathbf{k}^2+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{Q}=\ell^2-\mathbf{Q}^2$。从而

$$\frac{1}{\mathbf{ABC}}=2\int_0^1 \mathbf{dx}\,\mathbf{dy}\,\mathbf{dz}\,\delta(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}-1)\frac{1}{(\ell^2-\mathbf{Q}^2)^3}.$$

五、Wick 旋转

为了在 **Euclidean** 空间中进行稳定的积分，执行 **Wick** 旋转:

$$\ell^0 = \mathbf{i}\ell_{\mathbf{E}}^0, \quad \vec{\ell} = \vec{\ell}_{\mathbf{E}},$$

则 $\ell^2 = -\ell_{\mathbf{E}}^2$，$\mathbf{d}^{\mathbf{D}}\ell = \mathbf{i}\,\mathbf{d}^{\mathbf{D}}\ell_{\mathbf{E}}$。分母变为 $(\ell^2 - \mathbf{Q}^2)^3 = -(\ell_{\mathbf{E}}^2 + \mathbf{Q}^2)^3$。于是

$$\frac{1}{(\ell^2 - \mathbf{Q}^2)^3} = -\frac{1}{(\ell_{\mathbf{E}}^2 + \mathbf{Q}^2)^3}.$$

代入后，整体积分变为

$$\Gamma^{\mu}_{(1)} = \mathbf{e}^2 \cdot 2 \int_0^1 \mathbf{dxdydz}\, \delta(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}-1) \int \frac{\mathbf{i}\,\mathbf{d}^{\mathbf{D}}\ell_{\mathbf{E}}}{(2\pi)^{\mathbf{D}}} \frac{\mathbf{N}^{\mu}(\ell_{\mathbf{E}})}{[-(\ell_{\mathbf{E}}^2 + \mathbf{Q}^2)^3]},$$

其中 $\mathbf{N}^{\mu}(\ell_{\mathbf{E}})$ 是平移后分子的 **Euclidean** 形式。由于奇次 $\ell_{\mathbf{E}}$ 项积分为零，只需保留偶次项。

六、提取 Pauli 形状因子的参数积分

将 $\Gamma^{\mu}_{(1)}$ 夹在 $\bar{u}(p')$ 和 $u(p)$ 之间，并利用 Dirac 方程 $\not{p}u(p) = mu(p), \bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p')$ 化简。

经过标准投影计算 (详细提取 F_2 的投影步骤及动量积分见附录)，可得单圈对 Pauli 形状因子的贡献为:

参数积分形式

$$F_2(q^2) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{xy\, m^2}{\Delta}, \qquad \Delta = m^2(1-x-y)^2 - xyq^2, \tag{1}$$

其中 $\alpha = e^2/(4\pi)$。

七、计算 $\mathbf{F}_2(0)$ 与结果

取 $\mathbf{q}^2 = 0$，则 $\Delta = \mathbf{m}^2(1-\mathbf{x}-\mathbf{y})^2$。该积分在 $\mathbf{x}+\mathbf{y}=1$ 处发散，引入维数正规化参数 $\epsilon = (4-\mathbf{D})/2$，更精确的表达式为:

$$\mathbf{F}_2(0) = \frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{\mu^2}{\mathbf{m}^2}\right)^{\epsilon}\frac{\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(2-2\epsilon)}\int_0^1 \mathbf{dx}\int_0^{1-\mathbf{x}}\mathbf{dy}\,\frac{\mathbf{xy}}{(1-\mathbf{x}-\mathbf{y})^{2+2\epsilon}}. \qquad \textbf{(2)}$$

定义参数积分部分为 $\mathbf{J}(\epsilon)$，**Gamma** 函数部分为 $\mathbf{G}(\epsilon)$。利用变量代换与 **Beta** 函数积分，并对 **Gamma** 函数在 $\epsilon \to 0$ 处展开（详细纯数学推导见附录），可得:

$$\mathbf{J}(0) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{G}(0) = 1.$$

代入式 **(2)**，得到最终结果:

Schwinger 项

$$\mathbf{F}_2(0) = \frac{2\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

八、g 因子的调整

1. 树图结果 (零阶近似)

在零阶近似下，顶点函数为:

$$\Gamma^{\mu}_{\mathbf{tree}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = -\mathbf{i}\mathbf{e}\gamma^{\mu}$$

因此，树图形状因子为:

$$\mathbf{F}_1^{(0)}(0) = 1, \qquad \mathbf{F}_2^{(0)}(0) = 0$$

由 $\mathbf{g} = 2[\mathbf{F}_1(0) + \mathbf{F}_2(0)]$ 得到:

$$\mathbf{g}^{(0)} = 2(1+0) = 2$$

2. 单圈修正后的形状因子

- **Pauli** 形状因子：单圈贡献为有限值

$$\mathbf{F}_2^{(1)}(0) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

- **Dirac** 形状因子：$\mathbf{F}_1(\mathbf{q}^2)$ 包含紫外发散，但被电荷重整化吸收。

物理电子电荷的定义要求 $\mathbf{F}_1(0) = 1$。即 $\mathbf{F}_1^{(1)}(0)$ 的发散部分被抵消，有限部分通过在壳重整化条件被设定为零。

单圈修正总形状因子

$$\mathbf{F}_1(0) = 1, \qquad \mathbf{F}_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

g 因子的调整
代入 **g** 因子表达式:

$$\mathbf{g} = 2\left[\mathbf{F}_1(0) + \mathbf{F}_2(0)\right] = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) + \mathbf{O}(\alpha^2).$$

因此，电子的 **g** 因子从树图的 $\mathbf{g} = 2$ 变为:

修正后的 g 因子

$$\mathbf{g} = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

这一调整的物理本质是：虚光子云使电子的磁矩略大于狄拉克方程预言的 $\mathbf{g} = 2$。**Pauli** 形状因子 $\mathbf{F}_2(0)$ 直接度量了这种“反常”磁矩，其数值 $\alpha/(2\pi)$ 正是 **Schwinger** 项。
而 $\mathbf{F}_1(0)$ 通过电荷重整化始终保持为 **1**，保证了电子电荷的实验值不被圈图修正改变。
综上所述，单圈 **QED** 修正将 **g** 因子从 **2** 精确调整为 $2(1 + \alpha/(2\pi))$。

本次汇报主要完成了以下工作:

- 基于 **QED** 费曼规则，写出了电子单圈顶角修正的费曼振幅。
- 运用 **Dirac** 矩阵代数化简分子，结合 **Feynman** 参数化与 **Wick** 旋转处理分母。
- 详细执行了 $\mathbf{q}^2 = 0$ 极限下的参数积分，严格推导出 **Schwinger** 项 $\mathbf{a_e} = \frac{\alpha}{2\pi}$。
- 明确了电荷重整化对 **Dirac** 形状因子的作用，并解释了虚光子云导致电子 **g** 因子偏离 **Dirac** 预言值的物理过程。

参考文献

- J. Schwinger, “On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron,” Phys. Rev. 73, 416 (1948).
- S. Weinzierl, “Feynman Integrals,” arXiv:2107.14225 [hep-ph] (2021).

谢谢大家!

汇报人: 陈钰信、林睿菲、宁知微

日期: **2026** 年 **5** 月 **8** 日

将 $\mathbf{N}^\mu$ 展开:

$$\mathbf{N}^\mu = \gamma^\alpha \not{\mathbf{k}}_2 \gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_1 \gamma_\alpha + \mathbf{m}\gamma^\alpha \not{\mathbf{k}}_2 \gamma^\mu \gamma_\alpha + \mathbf{m}\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_1 \gamma_\alpha + \mathbf{m}^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha,$$

利用式 **(5)** 可导出更实用的恒等式 **(**代入 $\not{\mathbf{a}} = \gamma^\nu \mathbf{a}_\nu$**,** $\not{\mathbf{b}} = \gamma^\rho \mathbf{b}_\rho$**)**:

$$\gamma^\alpha \not{\mathbf{a}} \gamma^\mu \not{\mathbf{b}} \gamma_\alpha = -2\not{\mathbf{b}} \gamma^\mu \not{\mathbf{a}} + (4 - \mathbf{D})\not{\mathbf{a}} \gamma^\mu \not{\mathbf{b}} + 4\mathbf{a}^\mu \not{\mathbf{b}} - 4\mathbf{b}^\mu \not{\mathbf{a}} + 2(\mathbf{D} - 2)\gamma^\mu (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

应用此式于第一项，取 $\mathbf{a} = \mathbf{k}_2$**,** $\mathbf{b} = \mathbf{k}_1$:

$$\gamma^\alpha \not{\mathbf{k}}_2 \gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_1 \gamma_\alpha = -2\not{\mathbf{k}}_1 \gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_2 + (4 - \mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_2 \gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_1 + 4\mathbf{k}_2^\mu \not{\mathbf{k}}_1 - 4\mathbf{k}_1^\mu \not{\mathbf{k}}_2 + 2(\mathbf{D} - 2)\gamma^\mu (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)$$

附录 A: 狄拉克代数化简详细过程

利用收缩公式计算第二项:

$$\gamma^\alpha \not{\mathbf{k}}_2 \gamma^\mu \gamma_\alpha = [2\gamma^\mu\gamma^\nu - (2-\mathbf{D})\gamma^\nu\gamma^\mu + 4\mathbf{g}^{\mu\nu}]\mathbf{k}_{2\nu} = 2\gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_2 - (2-\mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_2\gamma^\mu + 4\mathbf{k}_2^\mu$$

类似地，第三项:

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_1 \gamma_\alpha = 2\gamma^\mu \not{\mathbf{k}}_1 - (2-\mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_1\gamma^\mu + 4\mathbf{k}_1^\mu$$

第四项得 $\mathbf{m}^2(2-\mathbf{D})\gamma^\mu$。因此,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\mu = &-2\not{\mathbf{k}}_1\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_2 + (4-\mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_2\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_1 + 4\mathbf{k}_2^\mu\not{\mathbf{k}}_1 - 4\mathbf{k}_1^\mu\not{\mathbf{k}}_2 + 2(\mathbf{D}-2)\gamma^\mu(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2) \\ &+ \mathbf{m}[2\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_2 - (2-\mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_2\gamma^\mu + 4\mathbf{k}_2^\mu] \\ &+ \mathbf{m}[2\gamma^\mu\not{\mathbf{k}}_1 - (2-\mathbf{D})\not{\mathbf{k}}_1\gamma^\mu + 4\mathbf{k}_1^\mu] + \mathbf{m}^2(2-\mathbf{D})\gamma^\mu. \end{aligned}$$

附录 B: 计算 $F_2(0)$ 的详细积分过程

计算参数积分 $J(\epsilon)$:

$$J(\epsilon) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, \frac{xy}{(1-x-y)^{2+2\epsilon}}.$$

令 $t = 1 - x - y$，则 $x \in [0, 1-t]$，$y = 1 - x - t$。先对 x 积分:

$$\begin{aligned}\int_0^{1-t} x(1-x-t)\, dx &= \int_0^{1-t} [x(1-t) - x^2] dx \\ &= (1-t)\frac{(1-t)^2}{2} - \frac{(1-t)^3}{3} = \frac{(1-t)^3}{6}.\end{aligned}$$

因此

$$J(\epsilon) = \int_0^1 dt\, t^{-2-2\epsilon} \cdot \frac{(1-t)^3}{6} = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{-2-2\epsilon}(1-t)^3 dt.$$

附录 B: 计算 $F_2(0)$ 的详细积分过程

利用 **Beta** 函数:

$$\int_0^1 \mathbf{t}^{\mathbf{a}-1}(1-\mathbf{t})^{\mathbf{b}-1}\mathbf{dt} = \mathbf{B}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\Gamma(\mathbf{a})\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{a}+\mathbf{b})},$$

取 $\mathbf{a}-1=-2-2\epsilon \Rightarrow \mathbf{a}=-1-2\epsilon$， $\mathbf{b}-1=3 \Rightarrow \mathbf{b}=4$， 得

$$\int_0^1 \mathbf{t}^{-2-2\epsilon}(1-\mathbf{t})^3\mathbf{dt} = \mathbf{B}(-1-2\epsilon,4) = \frac{\Gamma(-1-2\epsilon)\Gamma(4)}{\Gamma(3-2\epsilon)}.$$

$\Gamma(4)=6, \Gamma(-1-2\epsilon)=\frac{\Gamma(1-2\epsilon)}{(-1-2\epsilon)(-2-2\epsilon)}, \Gamma(3-2\epsilon)=(2-2\epsilon)(1-2\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon),,$ 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbf{t}^{-2-2\epsilon}(1-\mathbf{t})^3\mathbf{dt} &= \frac{6}{(1+2\epsilon)(2+2\epsilon)}\cdot\frac{1}{(2-2\epsilon)(1-2\epsilon)} \\ &= \frac{6}{(1+2\epsilon)(2+2\epsilon)(2-2\epsilon)(1-2\epsilon)}.\end{aligned}$$

附录 B: 计算 $F_2(0)$ 的详细积分过程

从而

$$\mathbf{J}(\epsilon) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{(1+2\epsilon)(2+2\epsilon)(2-2\epsilon)(1-2\epsilon)} = \frac{1}{(1+2\epsilon)(2+2\epsilon)(2-2\epsilon)(1-2\epsilon)}.$$

取 $\epsilon \to 0$，得 $\mathbf{J}(0) = \frac{1}{4}$。
现在计算 **Gamma** 因子:

$$\mathbf{G}(\epsilon) = \frac{\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(2-2\epsilon)}.$$

利用 $\Gamma(2+\epsilon) = (1+\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)$，$\Gamma(2-2\epsilon) = (1-2\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)$，得

$$\mathbf{G}(\epsilon) = \frac{(1+\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{(1-2\epsilon)\Gamma(1-2\epsilon)}.$$

由 $\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)=\frac{\pi\epsilon}{\sin\pi\epsilon}=1+\frac{\pi^2}{6}\epsilon^2+\mathbf{O}(\epsilon^4)$，故 $\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2=\Gamma(1-\epsilon)\big(1+\mathbf{O}(\epsilon^2)\big)$。直接代入 $\epsilon=0$ 得 $\mathbf{G}(0)=1$。因此

$$\left(\frac{\mu^2}{\mathbf{m}^2}\right)^{\epsilon}\mathbf{G}(\epsilon)\xrightarrow{\epsilon\to 0}1.$$

1.1 投影算符

为完整起见，此处给出提取 F_2 的投影步骤以及动量积分的执行细节。在 $\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)$ 中，利用 Gordon 恒等式

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p).$$

因此，若将 $\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)$ 写成

$$\bar{u}(p')\left[\gamma^\mu A(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}B(q^2)\right]u(p),$$

则 $B(q^2) = F_2(q^2)$。为提取 B，可计算:

$$B(q^2) = \frac{1}{4m}\,\mathrm{tr}\left[(\not{p}' + m)\Gamma^\mu(\not{p} + m)\cdot\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]$$

经过狄拉克代数运算，该投影将 N^μ 中与 $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ 成比例的部分分离出来。

1.2 动量积分

在 **Wick** 旋转后，积分变为

$$\int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^3}, \qquad \int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^3},$$

其中 $\Delta = Q^2 -$ (来自平移的常数)。利用标准公式（**Weinzierl** 书 **(2.133)** 的 **Euclidean** 版）:

$$\int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^3} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3 - D/2)}{\Gamma(3)} \Delta^{D/2-3},$$

$$\int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^3} = \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3 - D/2)}{\Gamma(3)} \Delta^{D/2-2}.$$

代入 $D = 4 - 2\epsilon$，展开后与 **Feynman** 参数积分结合，并提取 $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ 的系数，最终得到式 **(9)**。

附录 D: 符号说明

符号说明

- $\mathbf{g}_{\mu\nu}$：Minkowski 度规 $(+,-,-,-)$
- γ^μ：Dirac 矩阵，满足 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\mathbf{g}^{\mu\nu}$
- $\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$
- $\mathbf{D} = 4-2\epsilon$：时空维数，ϵ 维数正规化参数
- $\Gamma(\mathbf{z})$：Gamma 函数
- $\alpha = \mathbf{e}^2/(4\pi)$：精细结构常数

致谢
本推导参考了 Weinzierl 教材《Feynman Integrals》中的符号约定和参数化技巧，以及 Peskin & Schroeder 的 QFT 教材。