S 矩阵理论

开题汇报：解析性、幺正性与 Froissart 界

成员：李子木，杨镇

Outline

1. 因果性与散射振幅的解析性
2. 分波振幅的幺正性
3. Froissart Theorem

符号与物理量说明

符号	数学定义	物理意义
s，t，u	Mandelstam 变量 (如 $s=(p_1+p_2)^2$)	s: 质心系总能量平方；t: 动量转移平方
$A(s,t)$	散射振幅	描述粒子碰撞发生概率分布
$f(\omega)$	能量空间前向散射振幅	宏观响应 $R(t)$ 的傅里叶变换，承载解析性
$a_\ell(s)$	第 ℓ 阶无量纲分波振幅	将 $A(s,t)$ 按角动量 ℓ 投影后的分量，受幺正性约束
$S_\ell(s)$	S 矩阵的第 ℓ 分波阵元	描述特定角动量下，入射波向出射波演化的相移与吸收
$\sigma_{\text{tot}}(s)$	总散射截面	粒子发生任何形式相互作用的总概率强度
k_s，b，ℓ	k_s: 质心系动量, b: 碰撞参数	三者满足经典对应关系 $\ell\sim k_s b$

Outline

1. 因果性与散射振幅的解析性
2. 分波振幅的幺正性
3. Froissart Theorem

Section 1

因果性与散射振幅的解析性

1.1 微观因果性

类空空间

在相对论中，类空分离的两个点 $(x-y)^2<0$ 之间无法进行光速或亚光速通信。

量子测量的约束

要求在类空分离的时空点上，场算符互相对易：

$$[\phi(x),\phi(y)]=0,\quad (x-y)^2<0$$

如果不满足对易性会怎样？

- 若 $[\phi(x),\phi(y)]\neq 0$，则在 x 处的测量动作会**瞬间干扰** y 处的量子态概率分布。
- 这意味着我们可以利用这种干扰进行**超光速通信**，违背狭义相对论。

1.2 LSZ 归约公式与推迟响应

问题：因果律约束的是“场算符”，但实验中测量的是“散射振幅 $A(s,t)$”。如何将二者联系起来？

LSZ 归约公式 (Lehmann-Symanzik-Zimmermann)

LSZ 的核心思想是：在多点关联函数中，每个外部粒子都对应一个单粒子极点。通过在动量空间中提取这些极点的留数，可以将相互作用场的关联函数与物理散射过程联系起来。

- **推迟响应函数**：在物理过程的响应必然发生在扰动之后。结合 LSZ 公式，振幅的核心可以写为一个推迟响应函数 $R(t)$：

$$R(t) \propto \theta(t) \int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle 0|[\phi(t,\mathbf{x}),\phi(0)]|0\rangle \tag{1}$$

- **因果性的体现**：由于阶跃函数 $\theta(t)$ 以及微观因果性，$R(t)$ **在** $t<0$ **时严格为零**；
  $t^2-|\mathbf{x}|^2<0$ **时场算符对易**

1.3 从时空域的到能量复平面

根据前一页，前向散射振幅 $f(\omega)$ 表现为推迟函数的傅里叶变换。由于 $t < 0$ 时积分为零，**积分下限被强行截断为 0**：

$$f(\omega) \propto \int_{\mathbf{0}}^{\infty} R(t) e^{i\omega t} dt \tag{2}$$

解析延拓

将能量解析延拓至复平面 $\omega = \omega_R + i\omega_I$：

$$e^{i\omega t} = e^{i(\omega_R + i\omega_I)t} = e^{i\omega_R t} \cdot \mathbf{e}^{-\omega_{\mathbf{I}}\mathbf{t}}$$

- 只要处于**上半复平面**（即 $\omega_I > 0$），且积分限 $t > 0$，则 $e^{-\omega_I t}$ 就是一个强力的**指数衰减因子**。
- 这保证了积分在 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ 区域内绝对收敛，无发散奇点。

1.4 Titchmarsh 定理与色散关系

Titchmarsh 定理 (严格的数学映射)

上一页的物理直觉在数学上被 Titchmarsh 定理严格证明。对于平方可积函数，以下表述**完全等价**：

时空域：因果性 $\Longleftrightarrow$ **频域：解析性**

信号是推迟的：

$$R(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

傅里叶变换 $f(\omega)$：

1. 在 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ 内全纯（解析）。
2. 实部与虚部满足 Hilbert 变换。

物理意义：这就自然导出了 ***Kramers-Kronig* 色散关系**，让我们得以通过测量虚部来推导整个振幅的实部。

Outline

1. 因果性与散射振幅的解析性
2. 分波振幅的幺正性
3. Froissart Theorem

Section 2

分波振幅的幺正性

2.1 S 矩阵分波振幅的对角化与定义

1. 旋转对称性与对角化

在球对称系统中，角动量守恒导致 S 矩阵在**角动量基底**下是对角化的：

$$S_\ell = \eta_\ell e^{2i\delta_\ell}; \quad 0 \le \eta_\ell \le 1$$

其中 δ_ℓ 为纯弹性散射时的相移（Phase Shift）。

2. 分波振幅 $a_\ell(s)$ 的引入

剥离掉不发生相互作用的“背景项”（$S_\ell = 1$），定义无量纲的分波振幅 $a_\ell(s)$：

$$S_\ell(s) = 1 + 2ia_\ell(s) \implies a_\ell = \frac{S_\ell - 1}{2i}$$

3. 散射振幅 $A(s,t)$ 的分波展开

整个散射体系的宏观振幅可按角动量 ℓ 展开：

$$A(s,t) \propto \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) a_\ell(s) P_\ell(\cos\theta_s)$$

注：P_ℓ 为勒让德多项式，$a_\ell(s)$ 是包含核心动力学信息的系数。

Takeaway. 将复杂的 $A(s,t)$ 转化为一个个独立的正交通道 $a_\ell(s)$，是应用幺正性约束的前提。

2.2 幺正性约束：Argand 图与物理极限

1. 从概率守恒到几何约束

量子力学概率守恒（幺正性）要求 $|S_\ell|^2 \le 1$：

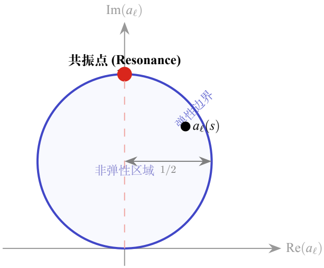
$$
\begin{aligned}
|1 + 2ia_\ell|^2 &\le 1 \\
1 - 4\mathrm{Im}(a_\ell) + 4|a_\ell|^2 &\le 1 \\
|\mathbf{a}_\ell|^2 &\le \mathrm{Im}(\mathbf{a}_\ell)
\end{aligned}
$$

整理得复平面上的圆方程标准式：

$$
\mathrm{Re}(a_\ell)^2 + \left(\mathrm{Im}(a_\ell) - \frac{1}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2
$$

2. 物理区域划分

- **圆周上**：纯弹性散射 ($|S_\ell| = 1$)
- **圆内部**：非弹性过程 ($|S_\ell| < 1$)



核心结论：无论相互作用多强，$\mathrm{Im}(\mathbf{a}_\ell) \le \mathbf{1}$ 永远成立。

Outline

1. 因果性与散射振幅的解析性
2. 分波振幅的幺正性
3. Froissart Theorem

Section 3

Froissart Theorem

问题 3：Froissart Theorem

研究对象

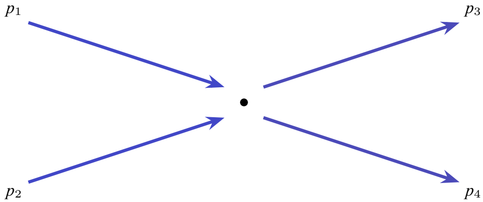
高能强子散射（hadron-hadron scattering）。

关注量

总截面 $\sigma_{\text{tot}}(s)$，即弹性与非弹性散射的总概率强度。

核心问题

当 $s \to \infty$ 时，$\sigma_{\text{tot}}(s)$ 最多增长多快?



$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2$$

Froissart 定理

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \lesssim C \ln^2 \frac{s}{s_0}$$

强子散射的标准常数写法常写成 π / m_π^2；本报告强调增长律与物理机制。

Takeaway. Froissart 定理给出的是高能总截面的模型无关上界，而不是具体数值预测。

3.2 从 S 矩阵到前向振幅

S 矩阵起点

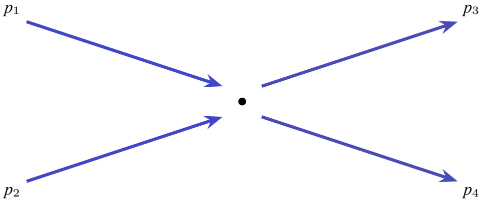
$$S = 1 + iA, \qquad S^\dagger S = 1$$

- A 是散射振幅。
- $S^\dagger S = 1$ 表示概率守恒。

光学定理

$$\Im A(s,0) = v\, s\, \sigma_{\mathrm{tot}}(s)$$

前向散射 $t = 0$ 时，振幅虚部直接控制总截面。



$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2$$

Mandelstam 变量

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2$$

逻辑链

$$S\text{-matrix} \to A(s,t) \to A(s,0)$$
$$\to \Im A(s,0) \to \sigma_{\mathrm{tot}}(s)$$

3.3 分波展开：把前向振幅写成各角动量通道的求和

分波展开

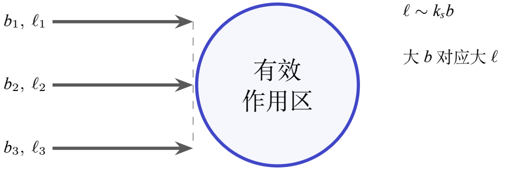
$$A(s,t) \propto \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)a_\ell(s)P_\ell(\cos\theta_s)$$

- $f_\ell(s)$ 是第 ℓ 个分波振幅。
- 高能下，ℓ 可理解为不同碰撞半径通道。

前向散射

$$t=0, \qquad P_\ell(1)=1$$

$$\Im A(s,0)=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\Im a_\ell(s)$$



直观图像

$\ell \sim k_s b$，所以大 ℓ 对应更“擦边”的碰撞。

Takeaway. 总截面的上界问题，已经转化为对各分波求和的估计。

3.4 三个关键约束：幺正性限制高度，解析性限制宽度

约束 1：幺正性

$$\Im a_\ell(s) \le O(1)$$

单个角动量通道的概率不能无限大。

约束 2：解析性

$$|a_\ell(s)| \lesssim c(s) e^{-\alpha_0 \ell}$$

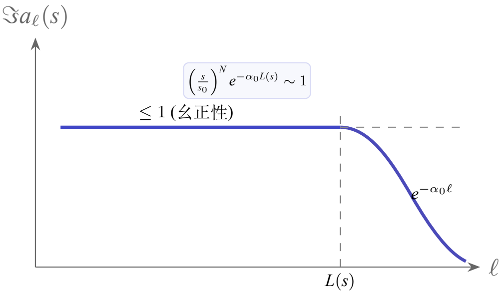
$$\alpha_0 \simeq \frac{\sqrt{t_0}}{k_s}$$

最近 t-道奇点给出指数衰减。

约束 3：多项式有界

$$c(s) \lesssim \left(\frac{s}{s_0}\right)^N$$

前因子随能量增长，但只按幂律增长。



合并后的估计

$$\Im a_\ell(s) \lesssim \min\left\{ O(1), \left(\frac{s}{s_0}\right)^N e^{-\alpha_0 \ell} \right\}$$

3.5 从有效分波数到 $\ln^2 s$：Froissart 上界的最终形式

Step 1: 定义 $L(s)$

$$\left(\frac{s}{s_0}\right)^N e^{-\alpha_0 L} \sim 1$$

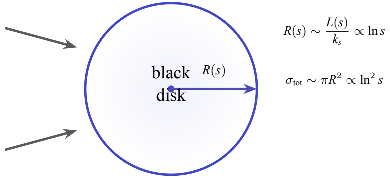
$$L(s) \sim \frac{N}{\alpha_0} \ln \frac{s}{s_0} \sim \frac{N k_s}{\sqrt{t_0}} \ln \frac{s}{s_0}$$

Step 2: 对有效分波求和

$$\Im A(s,0) = \sum_\ell (2\ell+1) \Im a_\ell(s)$$

$$\Im A(s,0) \lesssim \sum_{\ell \le L} (2\ell+1) \sim L^2$$

Takeaway. $R(s) \propto \ln s, \quad \sigma_{\text{tot}}(s) \propto \ln^2 s.$



Step 3: 代入高能极限

$$k_s^2 \sim \frac{s}{4}$$

$$\Im A(s,0) \lesssim s \ln^2 \frac{s}{s_0}$$

Step 4: 光学定理

$$\Im A(s,0) = v\, s\, \sigma_{\text{tot}}(s)$$

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \lesssim C \ln^2 \frac{s}{s_0}$$

感谢聆听！

欢迎老师和同学们批评指正