

# 光学定理、切割规则与不稳定粒子

刘宏基

2026 年 6 月 5 日

# 目录

- 1 为什么要用量子场论描述不稳定粒子
- 2 光学定理与切割规则
- 3 不稳定粒子
- 4 极点与分支切割
- 5 总结

# 不稳定粒子的量子力学描述

- **复能量特征值**：为了在量子力学中唯象地描述衰变，引入复数能量：

$$E = E_0 - i\frac{\Gamma}{2}$$

其中  $E_0$  为粒子的静止能量， $\Gamma$  为衰变宽度。

- **指数衰变定律**：概率呈指数下降：

$$P(t) = |\psi(t)|^2 = P(0)e^{-\Gamma t/\hbar}$$

粒子的平均寿命  $\tau = \hbar/\Gamma$ 。

- **布赖特-维格纳分布**：由能量-时间不确定性原理，能量域呈现共振峰：

$$f(E) \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

标准的非相对论量子力学在处理衰变时面临以下的困难：

- **粒子数守恒的限制**：薛定谔方程无法描述“旧粒子的毁灭与新粒子的诞生”。
- **唯象的“复能量”**：能量加上虚部是一种为了契合实验数据而人为引入的数学补丁，无法解释  $\Gamma$  的微观起源。
- **无法解释“自发”衰变**：处于能级状态的不稳定粒子，在没有外部微扰的情况下，缺乏自发破裂的动力学机制。
- **与狭义相对论不兼容**：无法处理质能等价 ( $E = mc^2$ ) 以及高速粒子的相对论时间膨胀效应。

# 量子场论为什么能解决困难

量子场论 (QFT) 化解了上述困难:

- **场取代粒子**: 引入产生算符和湮灭算符。衰变在数学上被完美描述为: 母粒子场的湮灭与产物粒子场的激发, 突破了粒子数守恒的限制。
- **相对论的内在统一**: QFT 使用四维时空动量, 天然具有洛伦兹协变性, 完美契合  $E = mc^2$ , 衰变即静止质量向动能和新粒子质量的转化。
- **真空涨落提供动力**: 量子真空充满不断产生和湮灭的虚粒子。不稳定粒子在飞行时, 必然与真空发生相互作用, 这种不可避免的“真空扰动”触发了衰变。
- **相互作用衍生复极点**: 通过费曼图计算粒子的自能 (Self-Energy), 微观相互作用自然导致传播子在复平面上产生极点:

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - M^2 + iM\Gamma}$$

衰变宽度  $\Gamma$  是从底层相互作用中**严格推导**出来的, 而非唯象假设。

# S 矩阵与么正性

量子理论中，概率守恒意味着在薛定谔绘景下，态的范数守恒。这要求哈密顿量是厄米的 ( $H^\dagger = H$ )，从而推导出 S 矩阵是么正的：

$$S^\dagger S = 1 \quad (1)$$

我们将 S 矩阵分解为平凡部分和非平凡的转移矩阵  $\mathcal{T}$ ：

$$S = 1 + i\mathcal{T} \quad (2)$$

由于  $S^\dagger S = (1 - i\mathcal{T}^\dagger)(1 + i\mathcal{T}) = 1$ ，我们可以得到  $\mathcal{T}$  矩阵的关系：

$$i(\mathcal{T}^\dagger - \mathcal{T}) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} \quad (3)$$

# 广义光学定理 (The Generalized Optical Theorem)

利用费曼图计算的 S 矩阵元定义为:

$$\langle f | \mathcal{T} | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{M}(i \rightarrow f) \quad (4)$$

将上述矩阵元代入么正性条件  $i(\mathcal{T}^\dagger - \mathcal{T}) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}$ , 并插入完备基, 我们得到**广义光学定理**:

## 广义光学定理

$$\mathcal{M}(i \rightarrow f) - \mathcal{M}^*(f \rightarrow i) = i \sum_X \int d\Pi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_X) \mathcal{M}(i \rightarrow X) \mathcal{M}^*(f \rightarrow X) \quad (5)$$

**物理意义:**

微扰论中该定理必须逐阶成立。等式右侧是树图 (tree-level) 矩阵元的平方, 这意味着等式左侧必然包含圈图 (loop)。圈图振幅的虚部是由树图振幅决定的。没有圈图的经典理论会破坏么正性。

# 衰变率与截面

当初始态和末态相同且为某一特定态  $A$  (前向散射, 即  $|i\rangle = |f\rangle = |A\rangle$ ) 时, 定理可化简。

## 特例 1: 单粒子衰变率

当  $|A\rangle$  为单粒子态时, 振幅虚部与总衰变率  $\Gamma_{\text{tot}}$  成正比:

$$\Gamma(A \rightarrow X) = \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_X) |\mathcal{M}(A \rightarrow X)|^2. \quad (6)$$

$$\text{Im}\mathcal{M}(A \rightarrow A) = m_A \sum_X \Gamma(A \rightarrow X) = m_A \Gamma_{\text{tot}} \quad (7)$$

## 特例 2: 双粒子散射截面 (光学定理)

当  $|A\rangle$  为双粒子态时, 得到经典的光学定理形式: 前向散射振幅的虚部正比于总散射截面。

## 光学定理

$$\text{Im}\mathcal{M}(A \rightarrow A) = 2E_{\text{CM}} |\vec{p}_i| \sum_X \sigma(A \rightarrow X) \quad (8)$$

# 切割规则的推导 (1): 传播子的虚部

考察费曼传播子的虚部:

$$\text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - m^2 - i\epsilon} \right) = \frac{-\epsilon}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \quad (9)$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 上式在  $p^2 \neq m^2$  时为 0。如果对  $p^2$  从 0 到  $\infty$  积分, 结果为  $-\pi$ :

$$\int_0^\infty dp^2 \frac{-\epsilon}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} = -\pi \quad (10)$$

这暗示了一个非常有用的公式:

$$\text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = -\pi \delta(p^2 - m^2) \quad (11)$$

物理意义: 圈图振幅的虚部来源于中间粒子变为“在壳” (*on-shell*) 状态。

## 切割规则的推导 (2): 传播子的极点分离

同样地, 对于能量部分, 我们有类似关系式 (24.26)。定义  $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ , 费曼传播子可以改写并分解为:

$$\begin{aligned}\Pi_F(k) &\equiv \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{2\omega_k} \left[ \frac{1}{k_0 - \omega_k + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 + \omega_k - i\epsilon} \right] \\ &= \Pi_R(k) + \frac{\pi}{\omega_k} \delta(k_0 - \omega_k)\end{aligned}\quad (12)$$

其中  $\Pi_R(k)$  为推迟传播子 (Retarded Propagator):

$$\Pi_R(k) = \frac{i}{2\omega_k} \left[ \frac{1}{k_0 - \omega_k - i\epsilon} - \frac{1}{k_0 + \omega_k - i\epsilon} \right] \quad (13)$$

**关键区别:**

- 费曼传播子  $\Pi_F(k)$  的极点分布在实轴上下两侧 ( $k_0 = \pm\omega_k \mp i\epsilon$ )。
- 推迟传播子  $\Pi_R(k)$  的极点全部位于实轴上方 ( $k_0 = \pm\omega_k + i\epsilon$ )。

## 切割规则的推导 (3): 重写圈图积分

考察单圈积分  $i\mathcal{M}_{\text{loop}}(p^2)$ :

$$i\mathcal{M}_{\text{loop}}(p^2) = \frac{(i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (14)$$

代入分解式展开后, 我们利用围道积分技巧化简:

- 包含  $\Pi_R(k-p)\Pi_R(k)$  的项, 极点全在上半平面。我们在下半平面闭合积分路径, 该项积分为 0。
- 包含两个  $\delta$  函数的项, 因为运动学限制 (在  $\vec{p} = 0$  质心系中无法同时满足), 始终为 0。

去掉这些为 0 的项, 原振幅被化简为:

$$i\mathcal{M}_{\text{loop}}(p^2) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \Pi_F(k-p) \frac{\pi}{\omega_k} \delta(k_0 - \omega_k) + \Pi_F(k) \frac{\pi}{\omega_{k-p}} \delta(k_0 - p_0 - \omega_{k-p}) \right] \quad (15)$$

## 切割规则的推导 (4): 最终的虚部表达式

在上式中,  $\delta$  函数是实数, 虚部只能由剩余的  $\Pi_F$  提供。利用  $\text{Im}\Pi_F(q) = -\pi\delta(q^2 - m^2)$ , 提取虚部:

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{M}_{\text{loop}}(p^2) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \pi\delta((k-p)^2 - m^2) \frac{\pi}{\omega_k} \delta(k_0 - \omega_k) \right. \\ \left. + \pi\delta(k^2 - m^2) \frac{\pi}{\omega_{k-p}} \delta(k_0 - p_0 - \omega_{k-p}) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

利用运动学条件 (第二项在  $p^\mu$  静止系中消失) 和代数恒等式, 上式最终可写成:

在壳切割形式 (Eq 24.33)

$$2\text{Im}\mathcal{M}_{\text{loop}}(p^2) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-2\pi i)\delta((p-k)^2 - m^2)(-2\pi i)\delta(k^2 - m^2) \quad (17)$$

这正是 Cutkosky 切割规则在数学上的严格来源: 将原有的费曼传播子直接替换为  $-2\pi i\delta(q^2 - m^2)$ 。

# Cutkosky 切割规则 (Cutting Rules)

基于以上发现，Cutkosky 总结了一套计算圈图振幅虚部的高效法则：

## 切割规则 (Box 24.3)

- ① 用任何可能的方式“切穿”费曼图，使得所有被切断的传播子可以在不违背动量守恒的前提下变为“在壳”状态。
- ② 对于每一次切割，将费曼传播子替换为：

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \longrightarrow -2i\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)$$

- ③ 将所有可能的切割方式产生的结果求和。
- ④ 其结果等于该图形的不连续性 (Discontinuity)，即：

$$\text{Disc}(i\mathcal{M}) = -2i\text{Im}\mathcal{M}$$

# 计算单圈自能 $\Sigma(p^2)$ 的虚部

我们要计算标量场中单圈自能图 (Self-Energy Bubble Diagram) 的虚部。

**符号约定注意：**根据费曼规则，自能图的求和定义为  $-i\Sigma(p^2)$ ，而该图对应的散射振幅定义为  $i\mathcal{M}$ 。因此我们有关系式：

$$\text{Im}(\Sigma(p^2)) = -\text{Im}\mathcal{M}$$

应用切割规则 (Cutkosky rules)，带有负号的积分表达式为：

$$2\text{Im}\Sigma = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) \delta((p-k)^2 - m^2) \theta(p^0 - k^0)$$

# 第一步：质心系与被切断的传播子

进入质心参考系，设定外部总动量为  $p^\mu = (\sqrt{p^2}, \vec{0})$ ，其中  $p^2$  是总能量的平方。

利用  $\delta$  函数性质与正能条件  $\theta(k^0)$ ，解剖两个被切开的传播子：

1. 第一个传播子强制虚粒子在壳：

$$\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) = \frac{1}{2\omega_k} \delta(k_0 - \omega_k) \quad (\text{其中 } \omega_k \equiv \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2})$$

2. 积掉  $k_0$  后，第二个传播子的  $\delta$  函数化简为能量守恒约束：

$$\delta((p - k)^2 - m^2) = \frac{1}{2\sqrt{p^2}} \delta\left(\omega_k - \frac{\sqrt{p^2}}{2}\right)$$

## 第二步：化简为一维能量积分

将上述化简代回原积分，并将三维动量测度转为球坐标：

$$d^3\vec{k} = 4\pi|\vec{k}|^2 d|\vec{k}| = 4\pi|\vec{k}|\omega_k d\omega_k$$

代入后，分母的  $\omega_k$  被消去，我们得到了对虚粒子能量  $\omega_k$  的一维积分：

$$2\text{Im}\Sigma(p^2) = -\frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{\pi} \int d\omega_k \frac{|\vec{k}|}{4\sqrt{p^2}} \delta\left(\omega_k - \frac{\sqrt{p^2}}{2}\right)$$

### 第三步：揪出隐藏的阶跃函数

对于质量为  $m$  的真实粒子，其能量  $\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ 。因为动量平方  $|\vec{k}|^2 \geq 0$ ，粒子的能量存在一个下限： $\omega_k \geq m$ 。

$$2\text{Im}\Sigma = -\frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{\pi} \int_m^\infty d\omega_k \frac{\sqrt{\omega_k^2 - m^2}}{4\sqrt{p^2}} \delta\left(\omega_k - \frac{\sqrt{p^2}}{2}\right)$$

根据  $\delta$  函数的性质，只有当它的根（即  $\omega_k = \frac{\sqrt{p^2}}{2}$ ）落入积分区间  $[m, \infty)$  内时，积分才不为零。这在数学上等价于乘以一个阶跃函数：

$$\theta\left(\frac{\sqrt{p^2}}{2} - m\right) \implies \theta(p^2 - 4m^2)$$

# 最终结果的得出

在  $\delta$  函数成立的条件下, 取  $\omega_k = \frac{\sqrt{p^2}}{2}$ :

$$|\vec{k}| = \sqrt{\omega_k^2 - m^2} = \frac{\sqrt{p^2}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}$$

将各项合并, 附加上积分区间带来的阶跃函数, 并将等式两边除以 2:

## 单圈自能图虚部计算结果

$$\text{Im}(\Sigma(p^2)) = -\frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4m^2)$$

# 由自能得到全传播子与散射振幅

- 传播子本身是不可观测的，我们无法直接从真空中产生一个粒子。相反，传播子是构建**散射振幅**的基本组成部分。
- 计入自能修正  $\Sigma(p^2)$  后，**全传播子 (Full Propagator)** 的表达式为：

$$D(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}$$

- 其中单圈自能图的虚部计算结果为：

$$\text{Im}(\Sigma(p^2)) = -\frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4m^2)$$

- 复极点说明：**由于自能  $\Sigma(p^2)$  包含虚部，全传播子的极点不再位于实轴上，而是移动到了复平面（记作  $p^2 = \mu^2$ ）。因此，中间不稳定粒子的全传播子使散射振幅  $\mathcal{M}$  获得一个**复极点**：

$$\mathcal{M} \sim D(p^2) \sim \frac{1}{p^2 - \mu^2} \quad (18)$$

# 散射振幅的时间依赖关系

- 在不稳定粒子的静止系中 ( $\vec{p} = 0$ ), 方程 (6) 可改写为:

$$\mathcal{M} \sim \frac{1}{p_0^2 - \mu^2} = \frac{1}{(p_0 - \mu)(p_0 + \mu)} \quad (19)$$

- 为得到散射振幅的时间依赖关系, 我们对能量进行 (逆) 傅里叶变换:

$$\mathcal{M} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{ie^{-ip_0 t}}{(p_0 - \mu)(p_0 + \mu)} \quad (20)$$

## 自能虚部与指数衰减 ( $t > 0$ )

- 当  $t > 0$  时, 大半圆上的积分被指数衰减抑制, 将积分围道闭合在下半平面。利用留数定理, 计算  $p_0 = \mu$  处极点的贡献:

$$\mathcal{M} \sim e^{-i\mu t} = e^{-i\text{Re } \mu t} e^{\text{Im } \mu t} \quad (21)$$

- 概率由散射振幅的模平方给出, 表现出指数衰减:

$$|\mathcal{M}|^2 \sim e^{2\text{Im } \mu t} \quad (22)$$

- 引入衰变率  $\Gamma$ , 可得  $2\text{Im } \mu = -\Gamma$ , 因此极点的虚部表示为:

$$\text{Im } \mu = -\Gamma/2$$

# 反粒子行为与粒子寿命 ( $t < 0$ )

- 当  $t < 0$  时，将积分围道闭合在上半平面，得到  $p_0 = -\mu$  处极点的贡献，该极点与反粒子的传播相关。

- 根据留数定理，可得：

$$\mathcal{M} \sim e^{i\text{Re } \mu t} e^{-\text{Im } \mu t} \quad (23)$$

- 对应的概率演化为：

$$|\mathcal{M}|^2 \sim e^{\Gamma t} \quad (t < 0) \quad (24)$$

- 物理结论：**由于  $t$  为负，这同样对应指数衰变，证明了粒子与反粒子具有相同的寿命。

# 复极点的位置

- 不稳定粒子的振荡频率由  $e^{-iEt}$  决定，与稳定粒子相同。
- 在粒子的静止系中，其能量即为质量，因此实部为：

$$\operatorname{Re} \mu = m \quad (25)$$

- 综合实部与虚部，我们得出极点位置公式：

$$\mu = m - \frac{i}{2}\Gamma \quad (26)$$

# 衰变宽度与布赖特-维格纳公式

- 在  $p_0 = \mu$  附近的共振极点区域，忽略  $p_0 = -\mu$  处的反粒子极点，将散射振幅近似为（其中  $E = p_0$ ）：

$$\mathcal{M} \sim \frac{1}{E - \mu} \quad (27)$$

- 代入  $\mu = m - i\Gamma/2$ ，得到共振区域的截面（正比于  $|\mathcal{M}|^2$ ）：

$$|\mathcal{M}|^2 \sim \frac{1}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (28)$$

- 这就是著名的布赖特-维格纳 (Breit-Wigner) 公式。该共振形状的半高全宽为  $\Gamma$ ，这也是衰变率  $\Gamma$  常常被称为“宽度”的原因。

# 两粒子中间态的相空间

- 在实轴上高于两粒子中间态阈值处，么正性要求自能  $\Pi(p^2)$  的虚部与相空间成正比。
- 两粒子的相空间与  $q^{2L+1}$  成正比，其中质心系动量  $q$  的表达式为：

$$q = \frac{1}{2\sqrt{p^2}} \sqrt{\left[p^2 - (m_1 + m_2)^2\right] \left[p^2 - (m_1 - m_2)^2\right]} \quad (29)$$

- 注意到  $q$  的表达式中包含平方根，这导致动量  $q$  是一个**多值函数**。

# 多值函数与分支切割的产生

- 由于  $q$  是多值函数，自能  $\Pi(p^2)$  同样也是多值函数。
- 这导致在复  $p^2$  平面上出现特殊的奇点——**分支点 (Branch Points)**：
- **正常阈值分支点**：位于  $p^2 = (m_1 + m_2)^2$ ，其分支切割沿正实轴延伸至无穷远。
- **阈分支点**：位于  $p^2 = (m_1 - m_2)^2$ ，其分支切割沿负实轴延伸。
- 每出现一个新的多粒子阈值，就会产生一个新的分支点和相应的分支切割。

# 黎曼面的引入

- 分支切割将传播子的不同分支连续地连接起来，形成黎曼面 (Riemann Sheets)。
- 对于包含单平方根的双值函数，我们定义两个叶面：
- **第一叶 (物理叶)**：由  $\text{Im } q > 0$  定义。物理轴即位于第一叶上，恰好在分支切割的上方。
- **第二叶 (非物理叶)**：由  $\text{Im } q < 0$  定义。
- 不稳定粒子的极点  $p^2 = \mu^2$  以及复共轭极点  $p^2 = \mu^{2*}$  均不在第一黎曼面上，而是位于第二黎曼面上。我们可以通过从第一叶的物理轴出发，向下穿过分支切割，连续地到达第二叶上的极点位置。
- 物理意义：由于物理状态被限制在第一叶的实轴附近，极点“隐藏”在第二叶中，解释了为何不稳定粒子无法作为渐近自由态被直接观测到。

# 第一黎曼面（物理叶）的严格限制

- 在量子场论和 S 矩阵理论中，**第一黎曼面被定义为“物理叶”**。我们所有现实实验中测量的物理量（如质心能量平方  $p^2$ ）都对应在这个面上。
- **稳定粒子的极点**：根据微观因果性和基本公理，物理叶上的极点只能存在于实轴上（且在多粒子阈值以下）。它们对应寿命无限长的渐近自由态，能量必须是实数。
- **为什么物理叶不能有复极点？** 如果物理叶复平面上存在极点  $p^2 = m^2 - im\Gamma$ ，在进行傅里叶变换回到时空时，会导致物理振幅随时间发生**破坏因果律的非物理指数增长**，或违反么正性。

# 不稳定粒子对应第二黎曼面上的极点

- 既然物理叶的实轴和复平面上都容不下极点，它去哪了？
- 从第一叶的物理实轴出发，向下穿过从阈值延伸的分支切割，我们就通过解析延拓连续地进入了第二黎曼面。
- 跨越割线后，平方根符号翻转（自能变为  $\Pi_{II}(p^2)$ ），第二叶上的方程：

$$p^2 - m_0^2 - \Pi_{II}(p^2) = 0$$

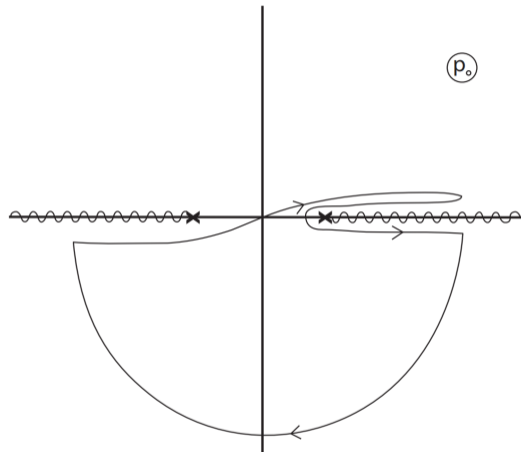
允许存在复数解  $p^2 = \mu^2 = m^2 - im\Gamma$ 。这就是不稳定粒子的复极点。

# 第一叶上的围道积分与不连续性

- 对传播子进行傅里叶变换时，我们将积分围道闭合在第一叶上。
- 由于极点都在第二叶上，围道并未直接包围任何极点。此时，积分为沿分支切割的**不连续性 (Discontinuity)** 的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0 t} G(p_0) = \int_{thr}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0 t} \text{Disc } G(p_0) \quad (30)$$

- 尽管没有直接包围极点，但第二叶上的极点（和复共轭极点）会在第一叶的分支切割上下方造成显著的“峰”和“谷”，从而产生巨大的不连续性。



图：积分围道

# 从不连续性提取指数衰减

- 我们可以利用这些靠近切割线的极点，将不连续性  $\text{Disc } G(p_0)$  近似表示为：

$$\text{Disc } G(p_0) \sim \frac{i}{p_0 - \mu} - \frac{i}{p_0 - \mu^*} = \frac{\Gamma}{(p_0 - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (31)$$

- 将其代入傅里叶变换，并将积分下限扩展至负无穷（阈值左侧贡献可忽略），即可通过围道积分得到最终的指数时间依赖关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0 t} \frac{\Gamma}{(p_0 - m)^2 + \Gamma^2/4} = e^{-imt} e^{-(\Gamma/2)|t|} \quad (32)$$

# 总结

- **光学定理与物理意义**：光学定理表明前向散射振幅的虚部正比于总截面 ( $\text{Im}\mathcal{M} \propto \sum \sigma$ )。本质上是 S 矩阵的幺正性。光学定理还给出了散射振幅虚部与衰变率的关系  $\text{Im}\mathcal{M}(A \rightarrow A) = m_A \Gamma_{\text{tot}}$ 。
- **应用 Cutkosky 规则计算自能虚部**：通过切割费曼图并将传播子替换为在壳条件  $-2i\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)$ ，可以计算出单圈自能图虚部为  $\text{Im}(\Sigma(p^2)) = -\frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4m^2)$ 。
- **虚部、衰变宽度  $\Gamma$  与寿命  $\tau$** ：自能的虚部导致全传播子极点移至复平面  $\mu = m - i\Gamma/2$ 。傅里叶变换到时间域后，散射概率呈现指数衰减  $|\mathcal{M}|^2 \sim e^{-\Gamma t}$ ，由此推导出了粒子的寿命  $\tau = 1/\Gamma$ 。
- **不稳定粒子与第二黎曼面**：微观因果律禁止第一黎曼面（物理叶）的复平面上存在极点。不稳定粒子的复极点只能隐藏在跨越能量阈值分支切割（Branch Cut）后的第二黎曼面上，其在物理实轴上的投影即为可观测的布赖特-维格纳共振峰。

- [1]Matthew D.Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model,Section 24.1 (The Optical Theorem)and Section 24.2 (Unstable Particles).
- [2]Scott Willenbrock, Unstable Particles in Quantum Field Theory, [arXiv:2511.16941](Pedagogical introduction to poles and branch cuts).
- [3]R.E.Cutkosky,Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes.
- [4]Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber, Quantum Field Theory,Section 6-3 .

# 谢谢