

Precision QED and Feynman Integrals: The Quest for g-2

林睿菲

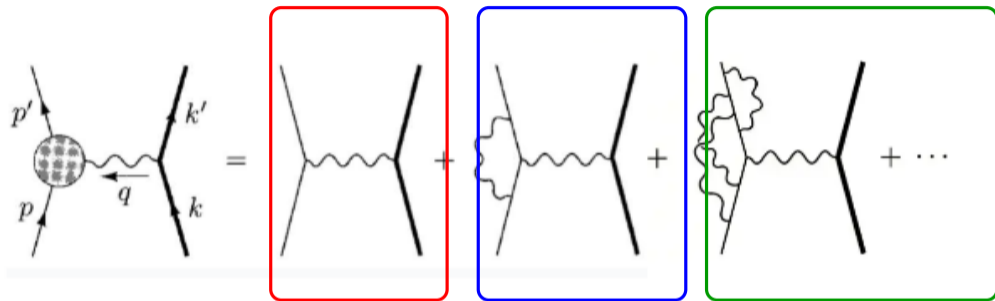
复旦大学物理学系

队员：陈钰僖，林睿菲，宁知微

2026年6月5日

- 1 一、从树图到多圈的微扰展开
- 2 二、高阶积分: **IBP** 与主积分
- 3 三、微分方程与 ϵ -形式
- 4 四、迭代积分与多重对数函数 (**MPLs**)
- 5 五、**Zeta** 值的双重来源与 **Double-Shuffle Relations**
- 6 六、实例: 单圈等质量泡泡图
- 7 七、总结

一、从树图到多圈的微扰展开：从树图到多圈的微扰展开



树图
狄拉克预言 $g = 2$

单圈修正
Schwinger 项

多圈修正
高阶费曼积分

- 树图近似：电子的 **Dirac** 磁矩 $g = 2$ 。
- 单圈计算：反常磁矩 a_e 。
- 多圈修正：
$$\mathbf{a} = \mathbf{C}_1 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + \mathbf{C}_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \mathbf{C}_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \mathbf{C}_4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \mathbf{C}_5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \dots$$

一、从树图到多圈的微扰展开：单圈计算公式回顾

电子电磁顶点函数与形状因子分解

$$\Gamma^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \gamma^\mu \mathbf{F}_1(\mathbf{q}^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} \mathbf{q}_\nu}{2m} \mathbf{F}_2(\mathbf{q}^2)$$

静极限 $\mathbf{q} \rightarrow 0$ 下，电子反常磁矩定义为： $\mathbf{a}_e = \frac{g-2}{2} = \mathbf{F}_2(0)$ 。

单圈电子-光子顶角修正振幅：

$$\Gamma_{(1)}^\mu = e^2 \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha (\mathbf{k} + \mathbf{p}' + m) \gamma^\mu (\mathbf{k} + \mathbf{p} + m) \gamma_\alpha}{\mathbf{k}^2 [(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 - m^2] [(\mathbf{k} + \mathbf{p}')^2 - m^2]}$$

经狄拉克代数收缩、Feynman 参数化与 Wick 旋转，严格求得单圈 Schwinger 项：

$$\mathbf{F}_2(0) = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

二、高阶积分: IBP 与主积分: 平移不变性与 IBP 恒等式

在多圈计算中, 积分家族定义为:

$$\mathbf{I}_{\nu_1 \dots \nu_{n_{\text{int}}}}(\mathbf{D}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_B}) = e^{i\epsilon\gamma_E} (\mu^2)^{\nu - \frac{D}{2}} \int \prod_{r=1}^l \frac{d^D \mathbf{k}_r}{i\pi^{D/2}} \prod_{j=1}^{n_{\text{int}}} \frac{1}{(-\mathbf{q}_j^2 + \mathbf{m}_j^2)^{\nu_j}}$$

维数正规化下积分具有平移不变性 $\int d^D \mathbf{k} f(\mathbf{k}) = \int d^D \mathbf{k} f(\mathbf{k} + \lambda \mathbf{q})$ 。对 λ 展开取一阶项, 严格证明全导数积分为零:

$$\int \frac{d^D \mathbf{k}}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}^\mu} [\mathbf{q}^\mu \cdot \mathbf{f}(\mathbf{k})] = 0$$

这就是分部积分约化 (**Integration-by-Parts, IBP**) 的基石。

二、高阶积分: IBP 与主积分: IBP 的严格代数转化

以等质量两点函数为例, 设 $\mathbf{q}_1 = \mathbf{k} - \mathbf{p}$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{k}$, 取 $\mathbf{q}_{\text{IBP}} = \mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\mathbf{d}^D \mathbf{k}}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}^\mu} \frac{\mathbf{p}^\mu}{(-\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_1} (-\mathbf{q}_2^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_2}} \\ &= \int \frac{\mathbf{d}^D \mathbf{k}}{i\pi^{D/2}} \left[\frac{\nu_1 (2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_1)}{(-\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_1+1} (-\mathbf{q}_2^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_2}} + \frac{\nu_2 (2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_2)}{(-\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_1} (-\mathbf{q}_2^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_2+1}} \right] \end{aligned}$$

代入严格的运动学关系: $2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2^2 - \mathbf{q}_1^2 - \mathbf{p}^2$ 且 $2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^2 - \mathbf{q}_1^2 + \mathbf{p}^2$ 。分子与分母约分, 得到不同指标积分间的递推关系:

$$(\nu_1 - \nu_2) \mathbf{I}_{\nu_1 \nu_2} - \nu_1 \mathbf{I}_{(\nu_1+1)(\nu_2-1)} + \nu_2 \mathbf{I}_{(\nu_1-1)(\nu_2+1)} + \nu_1 \mathbf{xI}_{(\nu_1+1)\nu_2} - \nu_2 \mathbf{xI}_{\nu_1(\nu_2+1)} = 0$$

通过 **Laporta** 算法求解该线性系统, 将所有积分约化为基底向量 $\vec{\mathbf{I}}$ (主积分)。

三、微分方程与 ϵ -形式: 建立微分方程

主积分 $\vec{\mathbf{I}}$ 依赖于无量纲变量 \mathbf{x} 。对 $\vec{\mathbf{I}}$ 求导, 导数作用于传播子仅改变幂次, 新积分仍可通过 **IBP** 约化回 $\vec{\mathbf{I}}$ 。引入外微分算子 $\mathbf{d} = \mathbf{d}\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, 得到一阶偏微分方程组:

$$(\mathbf{d} + \mathbf{A})\vec{\mathbf{I}} = 0$$

基变换的严格推导: 引入可逆矩阵 \mathbf{U} , 定义新基底 $\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{U}\vec{\mathbf{I}}$ 。代入原方程:

$$\mathbf{d}(\mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}}) + \mathbf{A}(\mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}}) = 0$$

利用莱布尼茨法则 $\mathbf{d}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) = (\mathbf{d}\mathbf{X})\mathbf{Y} + \mathbf{X}(\mathbf{d}\mathbf{Y})$, 并左乘 \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}(\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1})\vec{\mathbf{J}} + \mathbf{d}\vec{\mathbf{J}} + \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}} = 0 \implies \mathbf{d}\vec{\mathbf{J}} + (\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1})\vec{\mathbf{J}} = 0$$

令 $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1}$, 得 $(\mathbf{d} + \mathbf{A}')\vec{\mathbf{J}} = 0$ 。

三、微分方程与 ϵ -形式: ϵ -形式的物理意义

ϵ -形式 (Johannes Henn, 2013)

对于 **Fuchsian** 系统, 存在特定变换 \mathbf{U} , 使 ϵ 作为全局因子被完全提取, 且运动学依赖表现为对数微分形式:

$$d\vec{\mathbf{J}} = \epsilon \left(\sum_{k=1}^{N_L} \mathbf{C}_k d \ln(\mathbf{f}_k(\mathbf{x})) \right) \vec{\mathbf{J}}$$

在原始矩阵 \mathbf{A} 中, 运动学变量 \mathbf{x} 与维数正规化参数 ϵ 深度耦合。转化为 ϵ -形式意味着, 我们成功地将费曼积分的“发散结构 (ϵ)”和它的“运动学几何结构 ($d \ln \mathbf{f}_k$)”彻底剥离、解耦了! 这使得逐阶微扰求解成为可能。

四、迭代积分与多重对数函数 (MPLs)

将目标向量按 ϵ 展开 $\vec{J}(\epsilon, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}) \cdot \epsilon^j$ 代入方程, 比较同次幂:

$$d\vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{N_L} \mathbf{C}_k d \ln(\mathbf{f}_k(\mathbf{x})) \right) \vec{J}^{(j-1)}(\mathbf{x})$$

积分得到第 j 阶递推解:

$$\vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \left(\sum_{k=1}^{N_L} \mathbf{C}_k \frac{\mathbf{f}'_k(\mathbf{t})}{\mathbf{f}_k(\mathbf{t})} d\mathbf{t} \right) \vec{J}^{(j-1)}(\mathbf{t}) + \vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}_0)$$

与多重对数函数的对应

高阶解通过对低阶解反复乘以对数核 $\frac{dt}{t-z}$ 积分生成。这精确对应多重对数函数 (MPLs) 的递归定义:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_r; \mathbf{y}) = \int_0^{\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t} - \mathbf{z}_1} \mathbf{G}(\mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_r; \mathbf{t})$$

五、Zeta 值的双重来源与 Double-Shuffle Relations: 来源一

计算 $\mathbf{x} \rightarrow 0$ 边界退化图时，纯动量积分产生 $\Gamma(\mathbf{n} + \epsilon)$ 。引入 **Euler-Zagier sums (Z-sums)**:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_k}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{i}_1 > \mathbf{i}_2 > \dots > \mathbf{i}_k > 0} \frac{1}{\mathbf{i}_1^{\mathbf{m}_1} \dots \mathbf{i}_k^{\mathbf{m}_k}}$$

Gamma 函数的严格展开为:

$$\Gamma(\mathbf{n} + \epsilon) = \Gamma(1 + \epsilon)\Gamma(\mathbf{n})[1 + \epsilon \mathbf{Z}_1(\mathbf{n} - 1) + \epsilon^2 \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{n} - 1) + \dots]$$

其中 $\Gamma(1 + \epsilon)$ 展开天然包含黎曼 **Zeta** 函数值:

$$\Gamma(1 + \epsilon) = 1 - \gamma_{\mathbf{E}}\epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\gamma_{\mathbf{E}}^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (\zeta_2 = \frac{\pi^2}{6})$$

五、Zeta 值的双重来源与 Double-Shuffle Relations: 来源二

多重对数函数的级数表示为 $\mathbf{Li}_{\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ 。当自变量全为 $\mathbf{1}$ 时, 定义为多重 **Zeta** 值 (**MZVs**):

$$\zeta_{\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_k} = \mathbf{Li}_{\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_k}(1, \dots, 1) = \sum_{\mathbf{n}_1 > \mathbf{n}_2 > \dots > \mathbf{n}_k > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_1^{\mathbf{m}_1}} \cdots \frac{1}{\mathbf{n}_k^{\mathbf{m}_k}}$$

Double-Shuffle Relations: **MZVs** 同时具有积分表示和级数表示, 导致两种乘积规则。例如 ζ_2^2 :

- **Shuffle (积分):** $\zeta_2^2 = [-\mathbf{G}(0, 1; 1)]^2 = 2\mathbf{G}(0, 1, 0, 1; 1) + 4\mathbf{G}(0, 0, 1, 1; 1) = 2\zeta_{22} + 4\zeta_{31}$
- **Quasi-shuffle (级数):** $\zeta_2^2 = [\mathbf{Li}_2(1)]^2 = 2\mathbf{Li}_{22}(1, 1) + \mathbf{Li}_4(1) = 2\zeta_{22} + \zeta_4$

六、实例：单圈等质量泡泡图：原始矩阵与基变换

设运动学变量 $\mathbf{x} = -\mathbf{p}^2/\mathbf{m}^2$ 。目标列向量 $\vec{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{10} \\ \mathbf{I}_{11} \end{pmatrix}$ ，原始微分方程 $(\mathbf{d} + \mathbf{A})\vec{\mathbf{I}} = 0$ 中矩阵 \mathbf{A} 为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2\epsilon}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} & \frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}$$

引入变换矩阵 $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -2\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix}$ ，计算 $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1}$ 。

求逆与微分：

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{x}+2}{\epsilon(\mathbf{x}(\mathbf{x}+4))^{3/2}} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}$$

六、实例：单圈等质量泡泡图：严格矩阵计算

计算纯规范项 \mathbf{UdU}^{-1} :

$$\mathbf{UdU}^{-1} = \begin{pmatrix} -2\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{x}+2}{\epsilon(\mathbf{x}(\mathbf{x}+4))^{3/2}} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{x}+2}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} d\mathbf{x}$$

计算共轭项 \mathbf{UAU}^{-1} :

$$\mathbf{AU}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2\epsilon}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} & \frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} & -\frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\epsilon\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} \end{pmatrix} d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{UAU}^{-1} = \begin{pmatrix} -2\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \mathbf{AU}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} & \frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} d\mathbf{x}$$

六、实例：单圈等质量泡泡图： ϵ -形式与迭代求解

相加得到 \mathbf{A}' 并提取 ϵ :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} & -\frac{\epsilon}{\mathbf{x}+4} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{d}\ln(\mathbf{x}+4) + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}\ln\left(2 + \mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}\right)\end{aligned}$$

令 ω_1, ω_2 为对数项。展开 $\vec{\mathbf{J}}$ ，代入边界 $\vec{\mathbf{J}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。第 **1** 阶积分：

$$\mathbf{d}\begin{pmatrix} \mathbf{J}_1^{(1)} \\ \mathbf{J}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \omega_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_2 \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{d}\left(\mathbf{J}_2^{(1)}\right) = \omega_2$$

$$\mathbf{J}_2^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \omega_2 = \ln\left(\frac{2 + \mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}}{2}\right)$$

一阶解精确给出权重为 **1** 的多重对数函数。

七、总结

本次汇报主要完成了以下工作:

- 利用 **IBP** 恒等式将海量标量积分约化为少数主积分，并为其建立了封闭的微分方程组。
- 详细阐述了如何通过基变换将方程化为 ϵ -形式，迭代求解并自然导出多重对数函数与 **Zeta** 值。
- 解出主积分后，将其代回 **IBP** 约化时得到的线性组合关系中，即可将所有原始的复杂费曼积分精确表示为多重对数函数的组合，从而完成高阶物理振幅的计算。

- S. Weinzierl, “Feynman Integrals,” UNITEXT for Physics, Springer (2022).
- J. M. Henn, “Multiloop integrals in dimensional regularization made simple,” Phys. Rev. Lett. 110, 251601 (2013).

谢谢大家!

队员: 陈钰僖、林睿菲、宁知微

日期: 2026年6月5日

1. 物理图像与 IBP 约化的数学基础

1.1 洛伦兹不变性与无量纲运动学变量

费曼积分在经过张量约化并积分掉所有圈动量 \mathbf{k}_i 后，必须是一个洛伦兹标量。在相对论中，用一组外动量矢量 \mathbf{p}_i 构造标量的唯一方法，就是作它们的内积 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ 或者平方 $\mathbf{p}_i^2 = \mathbf{m}^2$ 。因此，费曼积分本质上只依赖于这些洛伦兹不变量。为了简化微分方程的结构，我们通常提取出一个总的质量或能量标度 μ^2 ，将这些不变量组合成无量纲的运动学变量集 $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ （例如 $\mathbf{x} = -\mathbf{p}^2/\mathbf{m}^2$ ）。引入无量纲变量的作用在于剥离平凡的量纲依赖，使得积分纯粹反映物理过程的几何与拓扑性质。

1.2 分部积分约化 (IBP) 的核心恒等式

在多圈计算中，我们会遇到成千上万个具有不同传播子幂次的积分。物理学家引入了分部积分约化 (**Integration-By-Parts Reduction, IBP**) 来化简它们。积分家族定义为：

$$\mathbf{I}_{\nu_1 \dots \nu_{n_{\text{int}}}}(\mathbf{D}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_{\text{B}}}) = e^{i\epsilon\gamma_E} (\mu^2)^{\nu - \frac{\text{ID}}{2}} \int \prod_{r=1}^l \frac{d^D \mathbf{k}_r}{i\pi^{D/2}} \prod_{j=1}^{n_{\text{int}}} \frac{1}{(-\mathbf{q}_j^2 + \mathbf{m}_j^2)^{\nu_j}}$$

附录：高阶费曼积分复杂性与推导完整版 II

在维数正规化下，积分具有平移不变性 $\int d^D \mathbf{k} f(\mathbf{k}) = \int d^D \mathbf{k} f(\mathbf{k} + \lambda \mathbf{q})$ 。对等式右边关于 λ 展开并取一阶项 ($\mathcal{O}(\lambda)$ 必须为零)，严格证明了全导数积分为零：

$$\int \frac{d^D \mathbf{k}}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}^\mu} [\mathbf{q}^\mu \cdot \mathbf{f}(\mathbf{k})] = 0$$

1.3 IBP 的严格代数转化实战

以书中单圈等质量两点函数为例。设 $\mathbf{q}_1 = \mathbf{k} - \mathbf{p}$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{k}$ ，取 $\mathbf{q}_{\text{IBP}} = \mathbf{p}$ 。将求导算子 $\mathbf{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}^\mu}$ 作用于被积函数：

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{d^D \mathbf{k}}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}^\mu} \left[\frac{\mathbf{p}^\mu}{(-\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_1} (-\mathbf{q}_2^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_2}} \right] \\ &= \int \frac{d^D \mathbf{k}}{i\pi^{D/2}} \left[\frac{\nu_1 (2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_1)}{(-\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_1+1} (-\mathbf{q}_2^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_2}} + \frac{\nu_2 (2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_2)}{(-\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_1} (-\mathbf{q}_2^2 + \mathbf{m}^2)^{\nu_2+1}} \right] \end{aligned}$$

代入严格的运动学关系： $2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2^2 - \mathbf{q}_1^2 - \mathbf{p}^2$ 且 $2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^2 - \mathbf{q}_1^2 + \mathbf{p}^2$ 。分子上的动量内积被转化为分母包含的项。分子与分母约分，导致积分的指标 ν_1 和 ν_2 发生升高或降低，最终得到递推关系式：

$$(\nu_1 - \nu_2)\mathbf{I}_{\nu_1\nu_2} - \nu_1\mathbf{I}_{(\nu_1+1)(\nu_2-1)} + \nu_2\mathbf{I}_{(\nu_1-1)(\nu_2+1)} + \nu_1\mathbf{xI}_{(\nu_1+1)\nu_2} - \nu_2\mathbf{xI}_{\nu_1(\nu_2+1)} = 0$$

这意味着，**IBP** 恒等式会生成一个极其庞大的线性差分方程组。借助计算机代数系统（如 **FIRE, Kira**）和 **Laporta** 算法，我们可以将成千上万个复杂的费曼积分，表达为少数几个线性独立的积分的线性组合。这几个构成了该积分家族完备基底的独立积分，被称为主积分（**Master Integrals**）。我们将这 N 个主积分排成一个列向量 $\vec{\mathbf{I}} = (\mathbf{I}_{10}, \mathbf{I}_{11})^T$ 。

附录：高阶费曼积分复杂性与推导完整版 IV

2. 微分方程的建立与外微分代数

既然所有积分都可以用主积分 $\vec{\mathbf{I}}$ 表示，我们只需研究 $\vec{\mathbf{I}}$ 随运动学变量 \mathbf{x}_j 的变化。当对某个主积分 \mathbf{I}_k 关于 \mathbf{x}_j 求偏导数 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{I}_k$ 时，导数穿过积分号作用在传播子上，仅仅会改变传播子的幂次。而由于 $\vec{\mathbf{I}}$ 是完备基底，任何改变了幂次的积分，都可以通过 **IBP** 恒等式重新写回 $\vec{\mathbf{I}}$ 的线性组合。因此，必然存在一个依赖于 \mathbf{x} 和 ϵ 的矩阵 $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_j}$ ，使得：

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \vec{\mathbf{I}} + \mathbf{A}_{\mathbf{x}_j} \vec{\mathbf{I}} = 0$$

为了用一种与坐标选择无关的几何语言表达，我们引入外微分算子 \mathbf{d} 。全微分定义为 $\mathbf{d} = \sum_j \mathbf{d}\mathbf{x}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}$ 。将上式同乘 $\mathbf{d}\mathbf{x}_j$ 并求和：

$$\sum_j \mathbf{d}\mathbf{x}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \vec{\mathbf{I}} + \left(\sum_j \mathbf{A}_{\mathbf{x}_j} \mathbf{d}\mathbf{x}_j \right) \vec{\mathbf{I}} = 0$$

令 $\mathbf{A} = \sum_j \mathbf{A}_{x_j} \mathbf{d}x_j$ (这是一个矩阵值的微分 **1**-形式), 我们得到极其紧凑的微分方程:

$$(\mathbf{d} + \mathbf{A})\vec{\mathbf{I}} = 0$$

这里的 \mathbf{d} 是全微分算子, $\mathbf{d}x$ 被吸收进了微分形式 \mathbf{A} 中。

3. 基变换的严格推导与 ϵ -形式的物理意义

直接求解上述耦合方程组十分困难。关键突破在于寻找一个可逆的基变换矩阵 $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \epsilon)$ ，定义新基底 $\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{U}\vec{\mathbf{I}}$ 。

基变换公式的严格推导：由 $\vec{\mathbf{I}} = \mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}}$ ，代入方程得：

$$\mathbf{d}(\mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}}) + \mathbf{A}(\mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}}) = 0$$

根据外微分的莱布尼茨法则 $\mathbf{d}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) = (\mathbf{d}\mathbf{X})\mathbf{Y} + \mathbf{X}(\mathbf{d}\mathbf{Y})$ ：

$$(\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1})\vec{\mathbf{J}} + \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{d}\vec{\mathbf{J}}) + \mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}} = 0$$

等式两边同左乘矩阵 \mathbf{U} ，并利用 $\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$ ：

$$\mathbf{U}(\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1})\vec{\mathbf{J}} + \mathbf{d}\vec{\mathbf{J}} + \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}\vec{\mathbf{J}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d}\vec{\mathbf{J}} + (\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1})\vec{\mathbf{J}} = 0$$

令 $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1}$ ，得到新基底下的方程 $(\mathbf{d} + \mathbf{A}')\vec{\mathbf{J}} = 0$ 。

规范变换与解耦的数学基础：对于绝大多数计算多重对数函数的费曼积分，其微分方程具有“正则奇点”，即构成 **Fuchsian** 系统。代数几何理论表明，对于此类系统，总是存在代数变换 \mathbf{U} ，使得新矩阵 \mathbf{A}' 满足 ϵ -形式：

$$\mathbf{A}' = -\epsilon \sum_{\mathbf{k}=1}^{N_L} \mathbf{C}_{\mathbf{k}} \mathbf{d} \ln(\mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})) \implies \mathbf{d}\vec{\mathbf{J}} = \epsilon \left(\sum_{\mathbf{k}=1}^{N_L} \mathbf{C}_{\mathbf{k}} \mathbf{d} \ln(\mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})) \right) \vec{\mathbf{J}}$$

其中 $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$ 为常数矩阵， $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{d} \ln(\mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}))$ 被称为“字母”。

物理意义：参数 ϵ 在量子场论中表征紫外/红外发散的极点。转化为 ϵ -形式意味着，发散结构 (ϵ) 与运动学几何结构 ($\mathbf{d} \ln \mathbf{f}_{\mathbf{k}}$) 实现了完全的因子化解耦。这使得将 $\vec{\mathbf{J}}$ 展开为 ϵ 的泰勒级数并进行逐阶微扰求解成为可能。

4. 迭代积分与多重对数函数 (MPLs) 的必然联系

将级数展开 $\vec{J}(\epsilon, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}) \cdot \epsilon^j$ 代入 ϵ -形式方程, 比较 ϵ 的同次幂, 得到递推关系:

$$d\vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{N_L} \mathbf{C}_k d \ln(\mathbf{f}_k(\mathbf{x})) \right) \vec{J}^{(j-1)}(\mathbf{x})$$

对其进行积分, 得到第 j 阶的解:

$$\vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \left(\sum_{k=1}^{N_L} \mathbf{C}_k \frac{d\mathbf{f}_k(\mathbf{t})}{\mathbf{f}_k(\mathbf{t})} \right) \vec{J}^{(j-1)}(\mathbf{t}) + \vec{J}^{(j)}(\mathbf{x}_0)$$

上式表明，高阶费曼积分的解是通过对低阶解反复乘以对数核并进行积分而生成的。在数学上，这种特定的迭代积分结构正是多重对数函数（**Multiple Polylogarithms, MPLs**）的严格定义：

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_r; \mathbf{y}) = \int_0^{\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t} - \mathbf{z}_1} \mathbf{G}(\mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_r; \mathbf{t})$$

这严格论证了在计算高阶费曼图时，多重对数函数作为 ϵ -形式微分方程迭代微扰解的天然数学语言，其出现具有必然性。

附录：高阶费曼积分复杂性与推导完整版 X

计算此类退化图时，纯动量积分会产生 **Gamma** 函数。在欧几里得空间中，标准动量积分的严格公式为：

$$\int \frac{d^D \mathbf{k}_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{k}_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\mathbf{n} - D/2)}{\Gamma(\mathbf{n})} \Delta^{D/2 - \mathbf{n}}$$

代入 $D = 4 - 2\epsilon$ ，假设 $\mathbf{n} = 2$ （泡泡图），分子变为 $\Gamma(\epsilon)$ 。根据 Weinzierl 教材 Eq(9.11)， Γ 函数的展开需要引入 **Euler-Zagier sums (Z-sums)**：

$$\mathbf{Z}_{m_1 \dots m_k}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \geq i_1 > i_2 > \dots > i_k > 0} \frac{1}{i_1^{m_1} \dots i_k^{m_k}}$$

Γ 函数的严格展开式为：

$$\Gamma(\mathbf{n} + \epsilon) = \Gamma(1 + \epsilon)\Gamma(\mathbf{n})[1 + \epsilon \mathbf{Z}_1(\mathbf{n} - 1) + \epsilon^2 \mathbf{Z}_{11}(\mathbf{n} - 1) + \dots]$$

其中利用 $\Gamma(1 + \epsilon)\Gamma(1 - \epsilon) = \frac{\pi\epsilon}{\sin \pi\epsilon}$ ，在 $\epsilon \rightarrow 0$ 处对 $\Gamma(1 + \epsilon)$ 进行泰勒展开：

$$\Gamma(1 + \epsilon) = 1 - \gamma_E \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

根据黎曼 **Zeta** 函数定义 $\zeta(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{n}^{\mathbf{s}}}$ ，已知 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ 。因此，展开式中出现的 $\frac{\pi^2}{6}$ 即为 ζ_2 。这些 **Zeta** 值作为边界积分常数，被固定在解析解中。

5.2 途径二：多重 Zeta 值 (MZVs) 与双洗牌关系 (Double-Shuffle Relations)

当获得完整的多重对数函数表达式后，需将其代入特定的物理极限进行求值（例如粒子产生的阈值极限 $\mathbf{x} \rightarrow 1$ ）。多重对数函数 \mathbf{G} 等价于级数形式的 $\mathbf{Li}_{\mathbf{m}_1 \dots \mathbf{m}_k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ 。代入极限 $\mathbf{x}_i \rightarrow 1$ 时，级数演变为：

$$\mathbf{Li}_{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \dots \mathbf{m}_k}(1, 1, \dots, 1) = \sum_{\mathbf{n}_1 > \mathbf{n}_2 > \dots > \mathbf{n}_k > 0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{n}_1^{\mathbf{m}_1} \mathbf{n}_2^{\mathbf{m}_2} \dots \mathbf{n}_k^{\mathbf{m}_k}} \equiv \zeta_{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \dots \mathbf{m}_k}$$

该纯数字的无穷级数求和，在数学上被严格定义为多重 Zeta 值 (Multiple Zeta Values, MZVs)。

MZVs 展现出极其丰富的代数结构，最著名的即为双洗牌关系 (Double-Shuffle Relations)。由于 MZVs 同时具有积分表示和级数表示，它们在相乘时遵循两种完全不同的组合规则。以 ζ_2^2 为例：

规则一：Shuffle (积分洗牌关系)

附录：高阶费曼积分复杂性与推导完整版 XIII

基于迭代积分表示法。当两个迭代积分相乘时，其积分路径的组合遵循洗牌代数（**Shuffle Algebra**）。假设我们要将词 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ 与 $\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ 洗牌，所有保持各自内部相对顺序的组合共有 $\binom{4}{2} = 6$ 种：

$$\mathbf{w}_1 \sqcup \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$$

代入 $\zeta_2 = -\mathbf{G}(0, 1; 1)$ ，即 $\mathbf{a}_1 = 0, \mathbf{a}_2 = 1$ 且 $\mathbf{b}_1 = 0, \mathbf{b}_2 = 1$ ：

$$\begin{aligned}\zeta_2^2 &= [-\mathbf{G}(0, 1; 1)] \times [-\mathbf{G}(0, 1; 1)] \\ &= \mathbf{G}(0, 1, 0, 1; 1) + \mathbf{G}(0, 0, 1, 1; 1) + \mathbf{G}(0, 0, 1, 1; 1) \\ &\quad + \mathbf{G}(0, 0, 1, 1; 1) + \mathbf{G}(0, 0, 1, 1; 1) + \mathbf{G}(0, 1, 0, 1; 1) \\ &= 2\mathbf{G}(0, 1, 0, 1; 1) + 4\mathbf{G}(0, 0, 1, 1; 1)\end{aligned}$$

映射回 **Zeta** 值，我们得到积分洗牌结果：

$$\zeta_2^2 = 2\zeta_{22} + 4\zeta_{31}$$

附录：高阶费曼积分复杂性与推导完整版 XIV

规则二： **Quasi-shuffle** (级数洗牌关系)

基于无穷级数表示法。当两个无穷级数相乘时，我们需要对离散的求和指标进行区域划分。

$$\zeta_2^2 = \mathbf{Li}_2(1) \times \mathbf{Li}_2(1) = \left(\sum_{\mathbf{n}_1 > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_1^2} \right) \left(\sum_{\mathbf{n}_2 > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_2^2} \right) = \sum_{\mathbf{n}_1 > 0, \mathbf{n}_2 > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_1^2 \mathbf{n}_2^2}$$

二维求和区域 ($\mathbf{n}_1 > 0, \mathbf{n}_2 > 0$) 可以严格划分为三个互不重叠的子区域: $\mathbf{n}_1 > \mathbf{n}_2 > 0$, $\mathbf{n}_2 > \mathbf{n}_1 > 0$, 以及对角线 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 > 0$ 。

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}_1 > 0, \mathbf{n}_2 > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_1^2 \mathbf{n}_2^2} &= \sum_{\mathbf{n}_1 > \mathbf{n}_2 > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_1^2 \mathbf{n}_2^2} + \sum_{\mathbf{n}_2 > \mathbf{n}_1 > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_2^2 \mathbf{n}_1^2} + \sum_{\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 > 0} \frac{1}{\mathbf{n}_1^2 \mathbf{n}_1^2} \\ &= \mathbf{Li}_{22}(1, 1) + \mathbf{Li}_{22}(1, 1) + \sum_{\mathbf{n} > 0} \frac{1}{\mathbf{n}^4} \\ &= 2\mathbf{Li}_{22}(1, 1) + \mathbf{Li}_4(1) \end{aligned}$$

映射回 **Zeta** 值，当指标相等时幂次相加 ($2 + 2 = 4$)，我们得到级数洗牌结果：

$$\zeta_2^2 = 2\zeta_{22} + \zeta_4$$

推导结论：非平凡代数关系的诞生

因为同一个物理量 (ζ_2^2) 用两种严密的数学方法展开得到了两个不同的表达式，这两个表达式必须绝对相等：

$$2\zeta_{22} + 4\zeta_{31} = 2\zeta_{22} + \zeta_4$$

两边消去 $2\zeta_{22}$ ，我们就得到了一个纯代数约束关系：

$$\zeta_4 = 4\zeta_{31}$$

6. 完整实例：单圈等质量泡泡图的严格计算

步骤 **A**: 原始微分方程矩阵 **A**

设无量纲运动学变量 $\mathbf{x} = -\mathbf{p}^2/\mathbf{m}^2$ 。通过 **IBP** 约化，该拓扑具有两个主积分 $\vec{\mathbf{I}} = (\mathbf{I}_{10}, \mathbf{I}_{11})^T$ 。对 \mathbf{x} 求导并应用 **IBP**，得到原始微分方程 $(\mathbf{d} + \mathbf{A})\vec{\mathbf{I}} = 0$ ，其中联络矩阵 **A** 为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2\epsilon}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} & \frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}$$

步骤 **B**: 基变换与矩阵乘法

引入变换矩阵 **U**，定义新基底 $\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{U}\vec{\mathbf{I}}$:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -2\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix}$$

计算规范变换 $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1}$ 。首先求逆矩阵和微分：

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{x}+2}{\epsilon(\mathbf{x}(\mathbf{x}+4))^{3/2}} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}$$

计算纯规范项 $\mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1}$ ：

$$\mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -2\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{x}+2}{\epsilon(\mathbf{x}(\mathbf{x}+4))^{3/2}} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{x}+2}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}$$

计算共轭项 \mathbf{UAU}^{-1} :

$$\mathbf{AU}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2\epsilon}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} & \frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} \end{pmatrix} \mathbf{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} & -\frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\epsilon\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} \end{pmatrix} \mathbf{dx}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{UAU}^{-1} &= \begin{pmatrix} -2\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} & -\frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\epsilon\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} \end{pmatrix} \mathbf{dx} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} & \frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \mathbf{dx} \end{aligned}$$

附录：高阶费曼积分复杂性与推导完整版 XIX

将两项相加得到 \mathbf{A}' :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{d}\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} & \frac{\mathbf{x}+2-\epsilon\mathbf{x}}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} - \frac{\mathbf{x}+2}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}} & -\frac{\epsilon}{\mathbf{x}+4} \end{pmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}\end{aligned}$$

将其改写为对数微分形式:

$$\mathbf{A}' = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{d}\ln(\mathbf{x}+4) + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}\ln\left(2 + \mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)}\right)$$

令 $\omega_1 = \mathbf{d}\ln(\mathbf{x}+4)$, $\omega_2 = \mathbf{d}\ln(2 + \mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x}+4)})$, 方程化为严格的 ϵ -形式:

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{J}} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \omega_1 \vec{\mathbf{J}} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_2 \vec{\mathbf{J}}$$

附录：高阶费曼积分复杂性与推导完整版 **XX**

步骤 **C**: 泰勒展开与迭代求解

将 $\vec{J} = \vec{J}^{(0)} + \epsilon \vec{J}^{(1)} + \epsilon^2 \vec{J}^{(2)} + \dots$ 代入。已知边界条件 $\vec{J}^{(0)} = (1, 0)^T$ 。第 **1** 阶 (ϵ^1):

$$d\vec{J}^{(1)} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \omega_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_2 \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

对 $J_2^{(1)}$ 积分 (路径从 $\mathbf{0}$ 到 \mathbf{x}):

$$J_2^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \omega_2 = \int_0^{\mathbf{x}} d \ln \left(2 + \mathbf{t} + \sqrt{\mathbf{t}(\mathbf{t} + 4)} \right) = \ln \left(\frac{2 + \mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}(\mathbf{x} + 4)}}{2} \right)$$

此结果即为权重为 **1** 的多重对数函数。若继续迭代计算第 **2** 阶 (ϵ^2)，方程右侧将出现 $\omega_1 J_2^{(1)}$ ，积分后必然产生形如 $\int \frac{dt}{t-z} \ln(\dots)$ 的结构，从而严格生成权重为 **2** 的多重对数函数 (**Dilogarithm, Li₂**)。