

# S 矩阵理论

期末结题汇报：解析性、么正性与 Froissart 界

成员：李子木，杨镇

# 报告结构

- ① 研究背景与方法路线
- ② 分波展开与幺正性
- ③ 因果性与解析性
- ④ Froissart 界证明
- ⑤ 历史意义与现代发展

## Section 1

# 研究背景与方法路线

# 强相互作用困境与 S 矩阵方法

## 历史背景

- 20 世纪中叶, QED 以微扰论和费曼图方法取得巨大成功。
- 电磁相互作用有小耦合常数, 典型量级为

$$e^2 \simeq \frac{1}{137}.$$

- 强相互作用的有效耦合很大, 典型估计

$$g^2 \sim 15,$$

逐阶微扰展开不再可靠。

## 方法转向

不追踪相互作用区内部的微观机制, 而是直接研究可观测的散射结果:

$$|i\rangle_{\text{in}} \longrightarrow |f\rangle_{\text{out}}.$$

参考: Eden et al., *The Analytic S-Matrix*; Itzykson and Zuber, *Quantum Field Theory*, Sec. 5-3.

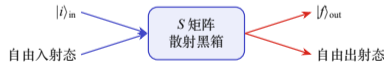
## 研究对象

S 矩阵刻画遥远过去的自由入射态到遥远未来的自由出射态之间的全部散射信息:

$$S_{fi} = \langle f | i \rangle_{\text{in}} = \langle f | S | i \rangle.$$

## 核心目标

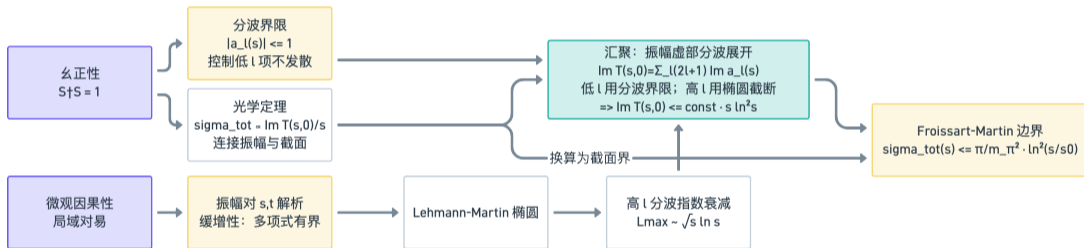
不预先假定具体 Lagrangian, 而是要求散射振幅满足么正性、因果性、Lorentz 不变性等普遍原则, 并由此推出可检验约束。



# 主证明链概览

## 证明路线

本报告沿一条闭合链条展开：么正性给出每个分波的概率上界；因果性给出振幅在  $s, t$  变量中的解析性，并结合 Lehmann 椭圆与 temperedness 的多项式有界性控制有效分波数，最终得到 Froissart–Martin 界。



## 严格前提

**局域场论输入：** Lorentz 不变性与正能谱；质量隙；场算符为 tempered distributions；微因果性  $[\phi(x), \phi(y)] = 0, (x - y)^2 < 0$ 。

**散射论输入：** LSZ 约化可用，外粒子稳定； $S^\dagger S = 1$ ；固定  $t$  振幅多项式有界；只使用 Froissart 界所需解析域。

# 报告结构

- ① 研究背景与方法路线
- ② 分波展开与幺正性
- ③ 因果性与解析性
- ④ Froissart 界证明
- ⑤ 历史意义与现代发展

## Section 2

# 分波展开与么正性

# 么正性条件与光学定理

## 1. 算符层面的宏观约束

概率守恒给出  $S^\dagger S = I$ 。令  $S = I + iT$ ，展开并消去  $I$ ：

$$I + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T = I \quad \Rightarrow \quad i(T^\dagger - T) = T^\dagger T.$$

## 2. 前向矩阵元与总跃迁概率

将初态  $|i\rangle$  夹在等式两边，考察前向散射  $|i\rangle \rightarrow |i\rangle$ ：

$$\langle i | i(T^\dagger - T) | i \rangle = \langle i | T^\dagger T | i \rangle.$$

左端剥离动量守恒后正比于  $2 \operatorname{Im} \mathcal{T}_{ii}$ ；右端插入完备末态：

$$\langle i | T^\dagger T | i \rangle = \sum_n \langle i | T^\dagger | n \rangle \langle n | T | i \rangle = \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) |\mathcal{T}_{ni}|^2.$$

## 3. 光学定理

根据截面定义，总跃迁概率 = 入射通量  $(2\lambda^{1/2}) \times$  总截面  $(\sigma_{\text{tot}})$ 。因此

$$\operatorname{Im} \mathcal{T}_{ii}(s, 0) = \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \sigma_{\text{tot}}(s).$$

名称来源：经典光学中前向散射与入射波干涉决定“消光”；这里同样由前向振幅虚部控制总散射概率。

# 分波展开的角动量基础

## 初始困境：动量表象下的纠缠

在动量-螺旋度基底  $|p, \lambda\rangle$  下,  $\langle p_{\text{out}} | \mathcal{T} | p_{\text{in}} \rangle$  对入射角与出射角高度非对角, 角变量彼此耦合, 难以直接施加么正性约束。

## 破局思路：利用旋转对称性换基

空间各向同性意味着总角动量  $J$  守恒。用 Wigner- $\mathcal{D}$  函数作为转换系数, 将 helicity 态投影到  $|J, M\rangle$  基底:

$$|J, M; \lambda_a, \lambda_b\rangle = N_J \int d\Omega \mathcal{D}_{\lambda_a - \lambda_b, M}^J(R_{\theta, \varphi}^{-1}) |p_a, \lambda_a; p_b, \lambda_b\rangle.$$

其中  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ , 归一化系数  $N_J = \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2}$ 。

参考: Gribov, *The Theory of Complex Angular Momenta*, Sec. 1; Eden et al., *The Analytic S-Matrix*.

## 核心结论：S 矩阵完成通道解耦

在  $|J, M\rangle$  基底, 不同  $J$  通道互不混合, 散射振幅可写为

$$\mathcal{T}_{fi} = 16\pi \sum_J (2J+1) \mathcal{T}_{\lambda'_a, \lambda'_b; \lambda_a, \lambda_b}^J(s) \mathcal{D}_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda'_a - \lambda'_b}^{J*}(\varphi, \theta, 0).$$

## 物理意义

- 角度依赖被几何项  $\mathcal{D}^J$  吸收。
- 动力学信息隔离在仅依赖能量  $s$  的分波振幅  $\mathcal{T}^J(s)$  中。
- 自旋为零时,  $\mathcal{D}_{00}^J \rightarrow P_\ell(\cos\theta)$ , 退化为勒让德多项式展开。

# 通道幺正性与复平面约束 (Argand 圆)

## 1. 单一通道内的概率守恒

既然通道已解耦，宏观幺正性  $S^\dagger S = I$  必须在每个独立  $J$  通道内成立：

$$\mathcal{T}^J(s) - \mathcal{T}^{J\dagger}(s) = 2i\rho(s)\mathcal{T}^{J\dagger}(s)\mathcal{T}^J(s)$$

其中  $\rho(s)$  为相空间运动学因子。

## 2. 归一化与核心不等式

定义归一化分波振幅

$$a_\ell(s) \equiv \rho(s)\mathcal{T}^J(s), \quad S_\ell(s) = 1 + 2ia_\ell(s).$$

代入幺正性条件，并允许非弹性末态的正贡献，得到

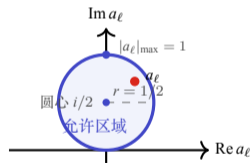
$$\text{Im} a_\ell(s) \geq |a_\ell(s)|^2.$$

弹性散射时取等号；有新粒子产生时取严格大于号。

## 3. 几何约束

设  $a_\ell = x + iy$ ，配方得到

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$



**物理意义：** 幺正性将所有合法物理振幅限制在复平面内圆心为  $i/2$ 、半径为  $1/2$  的圆盘中。

**核心结论：**

$$|a_\ell(s)| \leq 1$$

# 弹性与非弹性通道的分波上界

## 1. Argand 圆盘中的通道分布

弹性散射通道： 概率完全保留，振幅贴在圆盘边界上，

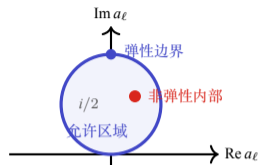
$$\text{Im } a_\ell = |a_\ell|^2.$$

非弹性散射通道： 弹性概率不再为 1，分波  $S_\ell$  写成

$$S_\ell = \eta_\ell e^{2i\delta_\ell}, \quad 0 \leq \eta_\ell \leq 1.$$

非弹性时  $\eta_\ell < 1$ ；粒子产生导致弹性通道概率流失，振幅落入圆盘内部，

$$\text{Im } a_\ell > |a_\ell|^2.$$



## 2. Froissart 界的分波前提

无论发生何种散射，Argand 圆盘距离原点最远点为  $i$ ，因此

$$|a_\ell(s)| \leq 1.$$

## 3. 承上启下：通向 Froissart 界

当前进展：么正性保证每个通道贡献有限， $|a_\ell| \leq 1$ 。

遗留问题：高能下有多少个分波通道  $\ell$  参与贡献？

下一步：引入因果性/解析性，证明高阶分波指数衰减，截断有效通道数。

# 报告结构

- ① 研究背景与方法路线
- ② 分波展开与幺正性
- ③ 因果性与解析性
- ④ Froissart 界证明
- ⑤ 历史意义与现代发展

## Section 3

# 因果性与解析性

# LSZ 约化：从完整相关函数到截肢振幅

## 完整四点函数含有外部传播

以标量  $2 \rightarrow 2$  散射为例，动量空间四点函数在外部粒子接近质量壳时具有极点结构：

$$\tilde{G}_4(p_i) \sim \left[ \prod_{i=1}^4 \frac{iZ}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right] i(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i p_i\right) \mathcal{M}.$$

外部传播子  $i/(p_i^2 - m^2 + i\epsilon)$  描述粒子从远处传播到相互作用区，或从相互作用区传播到探测器。

## LSZ 的作用

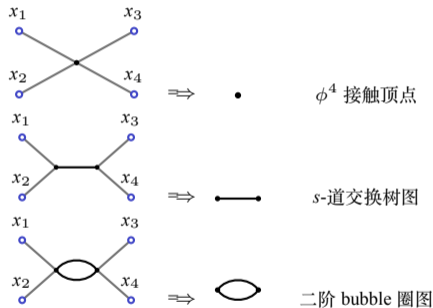
对每条外腿乘以  $(p_i^2 - m^2)$ ，再令  $p_i^2 \rightarrow m^2$ ：

取外部粒子壳上极点 + 去掉外部传播因子。

树图阶可直观理解为：

$$\boxed{\text{完整图} = \text{外腿传播} \times \text{截肢核心}}.$$

## 三个截肢示意例子



费曼图规则中用于  $S$  矩阵元的，是连通截肢图给出的  $i\mathcal{M}$ 。

# LSZ 约化：真实粒子的“在壳”条件如何保卫因果律

## 1. LSZ 约化与“截肢”算符

物理意义：LSZ 约化将包含虚涨落的 Green 函数，提纯为真实粒子的 S 矩阵元：

$$S_{fi} = - \int d^4x d^4y e^{i(q_2 \cdot y - q_1 \cdot x)} (\square_y + m_a^2)(\square_x + m_a^2) \langle p_2 | T \phi^\dagger(y) \phi(x) | p_1 \rangle.$$

截肢算符：红色算符  $(\square + m^2)$  在动量空间对应  $(-q^2 + m^2)$ ；它剪掉外线极点，并强迫外部真实粒子满足 on-shell 条件  $q^2 = m^2$ 。

## 2. 引入因果律的“强行替换”

为了让因果律进入振幅，将时间序积替换为推迟对易子：

$$T \phi^\dagger(y) \phi(x) \longrightarrow \theta(y^0 - x^0) [\phi^\dagger(y), \phi(x)].$$

合法性危机：两者并不相等；差值是不带因果  $\theta$  函数约束的反序项：

$$\begin{aligned} \Delta &= T \phi^\dagger(y) \phi(x) - \theta(y^0 - x^0) [\phi^\dagger(y), \phi(x)] \\ &= \phi(x) \phi^\dagger(y). \end{aligned}$$

直接替换会在积分中引入一项非因果差项  $\Delta$ 。

## 3. LSZ 机制的完美封杀

将反序差项  $\Delta$  代回上方 LSZ 公式：

$$\begin{aligned} \Delta S_{fi} &\sim \int d^4x d^4y e^{i(q_2 \cdot y - q_1 \cdot x)} \\ &\quad \times (\square_y + m^2)(\square_x + m^2) \langle p_2 | \Delta | p_1 \rangle. \end{aligned}$$

分部积分后，红色算符作用到外部平面波：

$$(\square_x + m_a^2) e^{-iq_1 \cdot x} = (-q_1^2 + m_a^2) e^{-iq_1 \cdot x} \equiv 0.$$

因为真实粒子必须在壳，LSZ 算符把所有非因果差项乘成 0；替换合法，因果律成功注入。

# 能量域解析性：复动量与指数阻尼

## 1. 振幅核心的重新表达

令  $z = y - x$ ,  $q = (q_1 + q_2)/2$ , 并定义源  $j(x) = (\square + m^2)\phi(x)$ 。振幅核心成为 Fourier-Laplace 型积分:

$$\mathcal{T}(q) = i \int d^4z e^{iq \cdot z} \langle p_2 | \theta(z^0) [j^\dagger(z/2), j(-z/2)] | p_1 \rangle.$$

## 2. 因果性给出的支撑集

微观局域性使对易子在类空间隔消失; 再加上  $\theta(z^0)$ , 积分只在前向光锥内非零:

$$z \in V_+ : \quad z^0 \geq 0, \quad z^2 \geq 0.$$

## 3. Forward Tube 中的解析性

复化动量  $q = q_R + iq_I$ , 则

$$e^{iq \cdot z} = e^{iq_R \cdot z} e^{-q_I \cdot z}.$$

若  $q_I \in V_+$ , 则  $q_I \cdot z \geq 0$ , 指数阻尼保证积分收敛; 振幅在 Forward Tube 内解析。

# 角度域解析性与 Lehmann 椭圆

## 1. 非前向振幅与角变量

对两个入射粒子  $(q_1, p_1)$  做 LSZ 约化, Fourier 指数变为  $e^{i(q_1 - p_1) \cdot x/2}$ , 变量直接关联动量转移  $t$ :

$$\mathcal{T}_{fi} = i \int d^4x e^{i(q_1 - p_1) \cdot x/2} \langle p_2, q_2 | \theta(x^0) [j_\psi(x/2), j_\varphi(-x/2)] | 0 \rangle_c.$$

固定中心能量  $s$  后, 把动量解析性投影到  $x = \cos \theta = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 / \sqrt{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2}$ .

## 2. 小 Lehmann 椭圆: 解析域形状

I-Z 将 tube 解析域翻译成复  $x$  平面中的椭圆边界:

$$\frac{(\operatorname{Re} x)^2}{R^2} + \frac{(\operatorname{Im} x)^2}{R^2 - \mathbf{q}^2} = \frac{1}{\mathbf{q}^2}.$$

这说明解析域在复  $x$  平面内由椭圆围住; 其焦点是  $x = \pm 1$ , 半长轴为  $a = R/|\mathbf{q}| > 1$ , 物理散射区间  $-1 \leq x \leq 1$  位于椭圆内部。

## 3. 椭圆边界: 谱条件给出半长轴

椭圆开口大小由最近的谱阈值控制:

$$\frac{R^2}{\mathbf{q}^2} = 1 + \frac{(M_1^2 - m_a^2)(M_2^2 - m_b^2)}{\mathbf{q}^2 [s - (M_1 - M_2)^2]}.$$

这里  $M_1, M_2$  是相应中间态的最低不变量质量。质量隙保证  $R^2/\mathbf{q}^2 > 1$ ; 椭圆离物理区越远, 高阶分波衰减越强。

椭圆域是 Legendre 分波展开的自然收敛域; 边界离物理区越远, 高阶分波  $a_\ell(s)$  的指数衰减越强。

# 多复变解析域：正反粒子通道与能量鸿沟

## 1. 从上半平面到四维 Forward Tube

前面的一维直觉来自指数阻尼  $e^{-q_I \cdot z}$ 。因果律把对易子的支撑限制在未来光锥  $z \in V_+$ ，即  $z^0 > 0$ ,  $z^2 > 0$ ；要让所有支撑点上都有  $q_I \cdot z \geq 0$ ，虚动量也必须位于 **未来时间类光锥**：

$$q_I \in V_+ : \quad q_I^0 > 0, \quad q_I^2 > 0.$$

因而振幅  $\mathcal{T}(q)$  在四维复动量空间的管状区域  $T_+ = \{q + iq_I \mid q_I \in V_+\}$  中解析。

## 2. 反粒子替换与 Backward Tube

Feynman–Stueckelberg 图像中，反粒子等价于 **时间上逆行**、动量反向的正粒子。对应地，将推迟函数替换为超前函数：

$$\theta(z^0) \longrightarrow -\theta(-z^0).$$

此时支撑转到过去光锥；为保持  $e^{-q_I \cdot z}$  衰减，必须取  $q_I \in V_-$ ，即  $q_I^0 < 0$ 。于是

$$\overline{\mathcal{T}}(q) : \quad \text{Im } q \in V_-, \quad T_- = \{q + iq_I \mid q_I \in V_-\}.$$

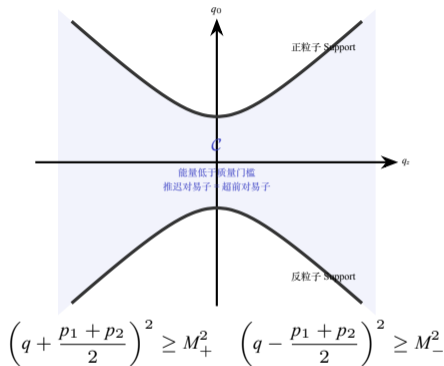
## 3. 实轴上的非物理间隙 $\mathcal{C}$

退回实轴  $q_I = 0$  时，谱条件给出质量阈值：正粒子物理区需要  $E \geq m$ ，反粒子物理区需要  $E \leq -m$ 。

$$-m < E < m.$$

在这段区间内，**能量不足以激发任何真实单粒子态**；对易子 Fourier 变换没有谱支撑，因此形成分隔正反粒子物理区的实重合区域  $\mathcal{C}$ 。

# 楔边定理 (Edge of the Wedge) 与交叉对称性



## 1. 谱条件与质量鸿沟

真空上方存在质量阈值：不存在质量无限小的物理态。若系统总能量低于最轻粒子的产生阈值，图中蓝色横向无界区域  $C$  内就没有可上壳的谱支撑。

## 2. 振幅重合

在  $C$  内，完整对易子的 Fourier 变换严格为零；因此代表正粒子的推迟对易子与代表反粒子的超前对易子具有相同边界值。

## 3. 楔边定理的裁决

若  $\mathcal{T}$  在  $T_+$  解析、 $\overline{\mathcal{T}}$  在  $T_-$  解析，且二者在  $C$  上重合，则它们必是同一解析函数的互相延拓：

$$\mathcal{D}_{\text{EOW}} \supset T_+ \cup T_- \cup C.$$

**交叉对称性** 正粒子散射与反粒子散射是同一个复解析函数在不同物理边界上的取值。

参考：Eden et al., *The Analytic S-Matrix*; Itzykson and Zuber, *Quantum Field Theory*, Sec. 5-3; Gell-Mann, Goldberger and Thirring, Phys. Rev. 95, 1612 (1954).

# 报告结构

- ① 研究背景与方法路线
- ② 分波展开与幺正性
- ③ 因果性与解析性
- ④ Froissart 界证明
- ⑤ 历史意义与现代发展

## Section 4

# Froissart 界证明

# Froissart 界的逻辑全貌：寻找强相互作用的速度极限

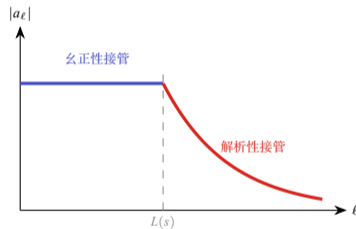
## 核心问题与目标转化

当碰撞能量  $s \rightarrow \infty$  时，总截面  $\sigma_{\text{tot}}(s)$  最多能长多快？光学定理把问题转化为前向散射振幅：

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \propto \frac{1}{s} \text{Im } \mathcal{T}(s, 0), \quad \mathcal{T}(s, 0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) a_{\ell}(s).$$

## 分波展开下的三方博弈

- **幺正性**：概率守恒限制低  $\ell$  分波， $|a_{\ell}| \leq 1$ ；“最黑”也只能完全吸收。
- **解析性**：Lehmann 椭圆限制角变量解析域，迫使高  $\ell$  分波指数衰减。
- **因果性**：局域场论的 temperedness 要求振幅随能量至多多项式增长， $A(s, t) \lesssim s^N$ 。



$$\text{Im } \mathcal{T}(s, 0) = O(s \ln^2 s) \Rightarrow \sigma_{\text{tot}}(s) = O(\ln^2 s)$$

## 截断逻辑

幺正性管住低  $\ell$ ；解析性压低高  $\ell$ ；二者交界给出有效角动量

$$L(s) = O(k_s \ln s).$$

求和时主要只数  $\ell \leq L(s)$  的有效分波数。

# Lehmann 椭圆与高角动量压制

## 角变量解析域与分波级数

固定  $s$ ，写角变量并展开为 Legendre 级数：

$$z = \cos \theta = 1 + \frac{t}{2k_s^2}, \quad A(s, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) a_{\ell}(s) P_{\ell}(z).$$

$A(s, z)$  在以  $z = \pm 1$  为焦点的 Lehmann 椭圆中解析；最近交叉道奇点为  $t_0$  时，椭圆边界可写为

$$z_0 = \cosh \alpha_0 = 1 + \frac{t_0}{2k_s^2}.$$

## 椭圆收敛边界

椭圆边界上

$$P_{\ell}(\cosh \alpha) \sim \frac{e^{(\ell+1/2)\alpha}}{\sqrt{2\pi\ell \sinh \alpha}}.$$

因为级数在椭圆内收敛，分波系数必须补偿  $P_{\ell}$  的指数增长：

$$|a_{\ell}(s)| \lesssim B(s) e^{-\alpha_0 \ell}.$$

## 物理图像：解析性带来的空间截断

高角动量对应大冲量参数  $b \sim \ell/k_s$ 。Lehmann 椭圆说明相互作用有由  $t_0$  控制的有限解析半径，因此距离过远的分波会被指数级关断；下一步要证明  $B(s)$  至多按多项式增长。

## 高能极限

高能时  $k_s^2 \sim s/4$ ，且  $\alpha_0$  很小：

$$\cosh \alpha_0 \simeq 1 + \frac{\alpha_0^2}{2}, \quad \alpha_0 \simeq \frac{\sqrt{t_0}}{k_s}.$$

所以 Lehmann 椭圆给出的是高角动量的指数压低；但前因子  $B(s)$  仍可能随能量增长。

# 截断逻辑：有效最大角动量

## 吸收部正性：总和与控制项

固定  $0 < t < t_0$ , 令  $z = 1 + t/(2k_s^2) > 1$ . 么正性给  $\text{Im } a_\ell(s) \geq 0$ , 且  $P_\ell(z) > 0$ :

$$\text{Im } A(s, t) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) \text{Im } a_\ell P_\ell(z) \geq (2\ell + 1) \text{Im } a_\ell P_\ell(z).$$

## 有效截断与相互作用半径

指数项终将压过多项式增长。令解析性界降到么正性界同一量级:

$$\left(\frac{s}{s_0}\right)^N e^{-\alpha_0 L} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad L(s) \simeq \frac{N}{\alpha_0} \ln \frac{s}{s_0}.$$

代入  $\alpha_0 \simeq \sqrt{t_0}/k_s$ :

$$L(s) = O\left(\frac{k_s}{\sqrt{t_0}} \ln s\right).$$

等价地, 高能有效半径

$$R_{\text{eff}}(s) \sim \frac{L(s)}{k_s} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t_0}} \ln s\right).$$

## 多项式与指数的平衡

temperedness 给固定  $t$  的多项式有界:

$$\text{Im } A(s, t) \lesssim \left(\frac{s}{s_0}\right)^N.$$

结合解析性给出的指数压制:

$$\text{Im } a_\ell(s) \lesssim \left(\frac{s}{s_0}\right)^N e^{-\alpha_0 \ell}.$$

# 分波求和与 Froissart–Martin 界

## 有效分波求和

前向散射有  $P_\ell(1) = 1$ 。低  $\ell$  用  $|a_\ell| \leq 1$ ，高  $\ell$  已指数衰减：

$$\text{Im } \mathcal{T}(s, 0) \lesssim \sum_{\ell=0}^{L(s)} (2\ell + 1) \sim L(s)^2.$$

## 高能估计

$$L(s) = O\left(\frac{k_s}{\sqrt{t_0}} \ln s\right), \quad k_s^2 \sim \frac{s}{4} \Rightarrow \text{Im } \mathcal{T}(s, 0) = O\left(s \ln^2 \frac{s}{s_0}\right).$$

由光学定理  $\text{Im } \mathcal{T}(s, 0) \propto s \sigma_{\text{tot}}(s)$ ：

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = O\left(\ln^2 \frac{s}{s_0}\right).$$

更强定理：Martin 的严格化给出

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq \frac{4\pi}{t_0} \ln^2 \frac{s}{s_0} + O(\ln s), \quad t_0 = 4m_\pi^2 \Rightarrow \frac{4\pi}{t_0} = \frac{\pi}{m_\pi^2}.$$

其中  $t_0$  是最近的  $t$ -道质量阈值；有质量隙时，总截面增长最多对应  $R_{\text{eff}}^2 \sim \ln^2 s$ 。

参考：Froissart, Phys. Rev. 123, 1053 (1961); Martin, Nuovo Cimento 42, 930 (1966); Martin, Lect. Notes Phys. 558, 127 (2000).

# 报告结构

- ① 研究背景与方法路线
- ② 分波展开与幺正性
- ③ 因果性与解析性
- ④ Froissart 界证明
- ⑤ 历史意义与现代发展

## Section 5

# 历史意义与现代发展

# 历史意义与现代发展

## 直接推论与实验关联

- **Pomeranchuk 定理**: crossing 与楔边定理把粒子/反粒子过程接成同一解析函数, 高能下

$$\sigma_{\text{tot}}(pp) - \sigma_{\text{tot}}(p\bar{p}) \rightarrow 0.$$

- **色散关系**: Cauchy 公式把振幅实部和虚部相连;

$$\text{Re } \mathcal{T} \sim \text{P} \int \frac{\text{Im } \mathcal{T}(s')}{s' - s} ds'.$$

而  $\text{Im } \mathcal{T}$  可由光学定理和总截面数据确定。

## 理论遗产: Bootstrap 与现代振幅方法

- **Veneziano 振幅**: 1968 年用 Euler Beta 函数同时实现解析性、crossing 与 Regge 行为; 后来被解释为一维弦的散射振幅, 成为弦理论源头。
- **现代在壳方法**: 回到 S 矩阵思想, 只用在壳态、解析性和么正切割; BCFW、Parke-Taylor 公式、Amplituhedron 让多胶子振幅从大量费曼图压缩成紧凑结构。

结语: S 矩阵理论没有替代 QFT, 却展示了从因果性、么正性和解析性出发约束自然的力量。

# 参考文献

- [1] Eden, Landshoff, Olive and Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*.
- [2] Itzykson and Zuber, *Quantum Field Theory*, Section 5-3.
- [3] V.N. Gribov, *The Theory of Complex Angular Momenta*, Section 1.
- [4] Gell-Mann, Goldberger and Thirring, *Use of Causality Conditions in Quantum Theory*, Phys. Rev. 95, 1612 (1954).
- [5] Froissart, *Asymptotic Behavior and Subtractions in the Mandelstam Representation*, Phys. Rev. 123, 1053 (1961).
- [6] Martin, *Extension of the Axiomatic Analyticity Domain of Scattering Amplitudes by Unitarity*, Nuovo Cimento 42, 930 (1966).

谢谢大家