Derrick 定理与拓扑孤子的存在性

拓扑分类、尺度变分与模型判别

陈冠奇

数理荣誉课结题报告

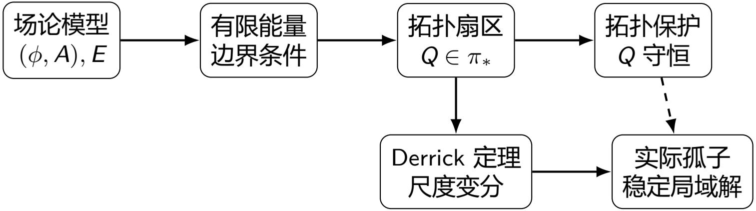
2026 年 6 月 11 日

目录

部分	内容
1	回顾：有限能量、真空流形与拓扑扇区
2	拓扑数：统一定义与典型计算公式
3	Derrick 定理：缩放变分与纯标量场判别
4	规范场论：协变导数、场强与规范-Higgs 能量
5	按维数检验与求解：$d = 1$ kink，$d = 2$ vortex，$d = 3$ monopole
6	Derrick 定理的适用范围、限制与最终图景

主线：拓扑分类 $\Longrightarrow$ 拓扑数固定 $\Longrightarrow$ Derrick 检测 $\Longrightarrow$ 具体模型中的约化求解

报告定位：从拓扑分类到存在性判别



本次报告主题

前两次报告中的拓扑分类是背景；本次报告的主体是

$\boxed{\text{Derrick 定理如何判别静态有限尺度孤子的可能存在性。}}$

核心区分

$$\text{非平凡拓扑扇区} \not\Rightarrow \text{稳定有限能量孤子存在.}$$

回顾：有限能量诱导拓扑分类

标量场 $\phi : \mathbb{R}^d \to Y$，静态能量

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + U(\phi) \right) \mathrm{d}^d x, \qquad U \geq 0.$$

$$\mathcal{V} := \{\phi \in Y : U(\phi) = 0\} \quad \text{真空流形}.$$

有限能量条件：

$$E[\phi] < \infty \quad \Longrightarrow \quad U(\phi(x)) \to 0,\ |\nabla \phi(x)| \to 0 \quad (|x| \to \infty).$$

因此

$$\phi_\infty : S^{d-1}_\infty \to \mathcal{V}, \qquad [\phi_\infty] \in [S^{d-1}, \mathcal{V}].$$

常见情形：

$$[S^{d-1}, \mathcal{V}] \simeq \pi_{d-1}(\mathcal{V}).$$

作用

拓扑分类给出构型空间 $\mathcal{C}$ 的连通分支；拓扑荷标记这些分支，但不保证能量极小解存在。

回顾：kink / vortex / monopole 的拓扑来源

对象	空间维数	拓扑数据	边界含义
kink	$d = 1$	$\pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$	$\phi(-\infty), \phi(+\infty)$ 落在不同真空分支
vortex	$d = 2$	$\pi_1(\mathcal{V})$	$\phi_\infty : S^1_\infty \to \mathcal{V}$，典型为 winding number
monopole	$d = 3$	$\pi_2(\mathcal{V})$	$\phi_\infty : S^2_\infty \to \mathcal{V}$，典型为 degree

共同结构

三类例子都来自同一机制：

$$E < \infty \Longrightarrow \phi_\infty : S^{d-1}_\infty \to \mathcal{V} \Longrightarrow [\phi_\infty] \in [S^{d-1}, \mathcal{V}].$$

下一步需要把这个同伦类具体表示为可计算的拓扑数 Q。

拓扑数：一般定义与本报告特化

设 $\mathcal{C}$ 为有限能量构型空间；在规范理论中应理解为已模去规范等价后的构型空间。

一般定义

拓扑数/拓扑荷是一个在连续变形下不变的离散量：

$$Q:\mathcal{C}\longrightarrow A, \qquad \phi_0\sim\phi_1 \text{ in } \mathcal{C} \implies Q[\phi_0]=Q[\phi_1],$$

其中 A 是离散集合或群，$\sim$ 表示在有限能量构型空间内连续变形。最普遍的拓扑信息是连通分支 $[\phi]\in\pi_0(\mathcal{C})$，任何数值型拓扑荷都因子化为

$$\mathcal{C}\twoheadrightarrow\pi_0(\mathcal{C})\xrightarrow{\bar{Q}} A.$$

本报告中的具体实现

对 kink / vortex / monopole，有限能量条件把问题化为边界映射：

$$\partial_\infty:\mathcal{C}\longrightarrow[S^{d-1},\mathcal{V}], \qquad \phi\longmapsto[\phi_\infty].$$

这些同伦类通常可由整数 winding number 或 degree 表示；此时取

$$Q[\phi]:=\mathcal{I}([\phi_\infty])\in\mathbb{Z}.$$

拓扑数：从定义到计算公式

同伦类的可计算表示

设边界映射为 $\gamma : S^n \to M$。若 M 上有归一化的闭 n-形式 Ω_M，则可用

$$\mathcal{I}([\gamma]) = \int_{S^n} \gamma^* \Omega_M$$

表示同伦类的不变量。若 γ_t 是同伦，令 $\Gamma : [0,1] \times S^n \to M$，则

$$\mathcal{I}([\gamma_1]) - \mathcal{I}([\gamma_0]) = \int_{\partial([0,1]\times S^n)} \Gamma^* \Omega_M = \int_{[0,1]\times S^n} \Gamma^* (\,\mathrm{d}\Omega_M) = 0.$$

当 $M = S^n$ 且 Ω_M 是归一化体积形式时，$\mathcal{I}$ 就是映射的 degree。

本报告中的三个特化

$$\begin{aligned}
S^0 \to \{-m, +m\} \quad &: \quad \text{端点所在连通分支的差给出 kink 荷,} \\
S^1 \to S^1 \quad &: \quad \Omega_{S^1} = \mathrm{d}\chi/(2\pi) \quad \Rightarrow \quad \text{winding number,} \\
S^2 \to S^2 \quad &: \quad \Omega_{S^2} = \tfrac{1}{4\pi}\hat{n} \cdot (\,\mathrm{d}\hat{n} \times \,\mathrm{d}\hat{n}) \quad \Rightarrow \quad \text{degree.}
\end{aligned}$$

拓扑数：典型计算公式

维数	边界映射	拓扑数的常用表示
$d=1$	$S^0_\infty=\{-\infty,+\infty\}\to\mathcal{V}$	若 $\mathcal{V}=\{-m,+m\}$，可取 $$Q=\frac{\phi(+\infty)-\phi(-\infty)}{2m}\in\{-1,0,1\}.$$
$d=2$	$\phi_\infty : S^1_\infty\to S^1,\quad \phi_\infty=e^{i\chi(\theta)}$	winding number： $$N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_\theta\chi(\theta)\,\mathrm{d}\theta\in\mathbb{Z}.$$
$d=3$	$\hat{\Phi}_\infty : S^2_\infty\to S^2,\quad \hat{\Phi}=\Phi/\lvert\Phi\rvert$	degree： $$N=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2_\infty}\hat{\Phi}\cdot(\partial_\theta\hat{\Phi}\times\partial_\varphi\hat{\Phi})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\in\mathbb{Z}.$$

拓扑数的作用：把变分问题分块

拓扑数把有限能量构型空间分成不相交的拓扑扇区：

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{Q} \mathcal{C}_Q, \qquad \mathcal{C}_Q := \{\phi \in \mathcal{C} : Q[\phi] = Q\}.$$

守恒性

若 ϕ_s 是连续有限能量变形，则

$$Q[\phi_s] = \text{constant}.$$

因而非零拓扑数阻止构型在有限能量演化中连续退化到真空扇区。

与 Derrick 定理的关系

Derrick 缩放 $\phi^{(\mu)}(x) = \phi(\mu x)$ 不改变无穷远边界映射的同伦类，因此是在固定 Q 的扇区内测试能量是否有有限尺度驻点。

$$Q \neq 0 \quad \text{给出拓扑保护；} \qquad e'(1) = 0 \quad \text{给出尺度平衡必要条件。}$$

Derrick 定理：精确定式

缩放族

先只考虑标量场。对静态构型 $\phi(x)$，构造一参数族

$$\phi^{(\mu)}(x) = \phi(\mu x), \qquad \mu > 0.$$

该缩放不改变无穷远处的拓扑类型，但改变构型的空间尺度。

必要条件

若 ϕ 是静态有限能量解，则

$$e(\mu) := E[\phi^{(\mu)}], \qquad e'(1) = 0.$$

若还要求缩放方向稳定，则

$$e''(1) \geq 0.$$

非存在性判据

若任意非真空有限能量构型的 $e(\mu)$ 均无驻点，则不存在非平凡静态有限能量解。

纯标量场：Derrick 缩放与 Virial 条件

$$E[\phi] = E_2 + E_0, \qquad E_2 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \, \mathrm{d}^d x, \quad E_0 = \int_{\mathbb{R}^d} U(\phi) \, \mathrm{d}^d x.$$

$$\phi^{(\mu)}(x) = \phi(\mu x) \quad \Longrightarrow \quad E_2(\mu) = \mu^{2-d} E_2, \quad E_0(\mu) = \mu^{-d} E_0.$$

$$e(\mu) = \mu^{2-d} E_2 + \mu^{-d} E_0.$$

$$e'(1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2-d)E_2 - dE_0 = 0.$$

纯标量场 Derrick 条件

$$(2-d)E_2 = dE_0.$$

对 $E_2, E_0 \geq 0$，该条件在 $d \geq 2$ 中通常强制非真空静态解不存在。

纯标量场：维数判别表

d	$e(\mu)$	$e'(1)=0$	结论
1	$\mu E_2 + \mu^{-1}E_0$	$E_2 = E_0$	允许有限尺度；kink 不被排除
2	$E_2 + \mu^{-2}E_0$	$E_0 = 0$	有势能时排除非平凡有限能量静态解
3	$\mu^{-1}E_2 + \mu^{-3}E_0$	$-E_2 - 3E_0 = 0$	若 $E_2, E_0 \geq 0$，只允许真空
≥ 3	$\mu^{2-d}E_2 + \mu^{-d}E_0$	$(2-d)E_2 = dE_0$	通常排除纯标量有限尺度静态孤子

结论

纯拓扑分类不能克服尺度不稳定；在 $d \geq 2$，普通梯度项与势能项不能形成稳定尺度。

从标量场到内部空间中的场

纯标量场可看成

$$\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

规范场论先把场值空间从 $\mathbb{R}$ 推广为带内积的线性空间 V:

$$\Phi : \mathbb{R}^d \to V, \qquad V \simeq \mathbb{R}^n \text{ 或 } \mathbb{C}^n.$$

因为 V 是线性空间，差商与偏导仍按通常微积分定义：

$$\partial_i \Phi(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+he_i) - \Phi(x)}{h} \in V.$$

结构	作用
$G \subset O(V)$ 或 $U(V)$	保持 V 上内积的线性变换群，称为内部对称群
$g \in G$ 常数	全局内部变换：$\Phi(x) \mapsto g\Phi(x)$
$U(\Phi)$	若 $U(g\Phi) = U(\Phi)$，则势能具有 G-对称性
$\frac{1}{2}\lvert\partial_i\Phi\rvert^2$	因 g 保内积，$\lvert\partial_i(g\Phi)\rvert^2 = \lvert g\partial_i\Phi\rvert^2 = \lvert\partial_i\Phi\rvert^2$

$$E[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|\partial_i\Phi|^2 + U(\Phi)\right) \mathrm{d}^d x$$

是带全局内部对称性的标量场论。

从全局对称性到局域对称性：普通导数的问题

将常数 $g \in G$ 推广为位置依赖的 $g(x)$，即允许每一点独立选择内部空间基：

$$\Phi(x) \mapsto \Phi^{g}(x) := g(x)\Phi(x).$$

这是局域内部坐标变换；物理构型应按这种变换等价。
势能项仍可不变：

$$U(\Phi^{g}(x)) = U(g(x)\Phi(x)) = U(\Phi(x)).$$

但梯度项不再不变：

$$\partial_i\Phi^{g} = \partial_i(g\Phi) = g\,\partial_i\Phi + (\partial_i g)\Phi.$$

多出的 $(\partial_i g)\Phi$ 说明

$$\partial_i\Phi \quad \text{不是与} \quad \Phi \quad \text{同型变换的量。}$$

要求	结果
场按 $\Phi \mapsto g\Phi$ 变换	导数也应按 $D_i\Phi \mapsto gD_i\Phi$ 变换
普通导数失败	需引入额外场 $A_i(x)$，补偿不同点内部基的变化

协变导数：用连接补偿局域基的变化

$$\text{局域变换：}\qquad \Phi^g(x) = g(x)\Phi(x), \qquad g : \mathbb{R}^d \to G.$$

$$\text{普通导数的问题：}\qquad \partial_i \Phi^g = g\partial_i \Phi + (\partial_i g)\Phi.$$

$$\text{目标：}\qquad (D_i\Phi)^g = D_i^g \Phi^g = gD_i\Phi.$$

引入矩阵值场

$$A_i(x) \in \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G), \qquad D_i\Phi := \partial_i\Phi + A_i\Phi.$$

关键代入式：

$$\partial_i(g\Phi) + A_i^g g\Phi = g\partial_i\Phi + gA_i\Phi.$$

由此得到连接的变换律：

$$\boxed{A_i^g = gA_ig^{-1} - (\partial_i g)g^{-1}.}$$

含义

A_i 不是普通标量场；它的非齐次变换项 $-(\partial_i g)g^{-1}$ 正是用来抵消 $\partial_i(g\Phi)$ 中多出的 $(\partial_i g)\Phi$。

场强 F：协变导数不对易产生曲率

设

$$D_i = \partial_i + A_i.$$

对任意 Φ 计算交换子：

$$[D_i, D_j]\Phi = (\partial_i A_j - \partial_j A_i + A_i A_j - A_j A_i)\Phi.$$

定义

$$\boxed{F_{ij} := \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j].}$$

于是

$$[D_i, D_j]\Phi = F_{ij}\Phi.$$

性质	含义
$F^g_{ij} = gF_{ij}g^{-1}$	F 协变变换，故 $\lvert F_{ij}\rvert^2$ 可作为规范不变能量密度
$F = 0$	局部上 $A_i = -(\partial_i g)g^{-1}$，只是纯规范选择
$F \neq 0$	沿无穷小闭合回路平行移动有净变化；规范场具有自身能量

规范场论的能量：从不变性原则得到

从带全局内部对称性的标量场能量出发：

$$E[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} |\partial_i \Phi|^2 + U(\Phi) \right) \mathrm{d}^d x, \qquad U(g\Phi) = U(\Phi).$$

要求	允许的最低阶正定项
局域规范不变性	$\partial_i \Phi$ 不协变，必须替换为 $D_i\Phi$，故 $$\frac{1}{2}|\partial_i \Phi|^2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}|D_i\Phi|^2.$$
规范场自身可有能量	$F_{ij} \mapsto gF_{ij}g^{-1}$，故 $\frac{1}{2}|F_{ij}|^2$ 是规范不变的正定二次项
排除 $\lvert A_i\rvert^2$	$A_i^g = gA_ig^{-1} - (\partial_i g)g^{-1}$，含非齐次项，$\lvert A_i\rvert^2$ 通常不是规范不变项
标量势能	保留 G-不变势能 $U(\Phi)$，即 $U(g\Phi) = U(\Phi)$

因而最低阶静态规范-Higgs 能量为

$$\boxed{E[A, \Phi] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|F_{ij}|^2 + \frac{1}{2}|D_i\Phi|^2 + U(\Phi) \right) \mathrm{d}^d x.}$$

规范场论的能量分解与有限能量条件

$$E = E_4 + E_2 + E_0, \qquad E_4 = \int \frac{1}{2}|F_{ij}|^2, \quad E_2 = \int \frac{1}{2}|D_i\Phi|^2, \quad E_0 = \int U(\Phi).$$

条件/结构	数学表述与作用
真空流形	$\mathcal{V} = \{\Phi : U(\Phi) = 0\}$，通常取 $U \geq 0$ 且真空能量为 0
有限能量边界	$F \to 0$，$D\Phi \to 0$，$\Phi_\infty \in \mathcal{V}$
规范等价	物理构型是 (A, Φ) 的规范等价类；边界拓扑也应按规范等价理解
Derrick 差异	纯标量场：$E = E_2 + E_0$；规范-Higgs 场：$E = E_4 + E_2 + E_0$

规范场 Derrick 缩放：统一判据

$$\Phi^{(\mu)}(x) = \Phi(\mu x), \qquad A_i^{(\mu)}(x) = \mu A_i(\mu x).$$

$$F_{ij}^{(\mu)}(x) = \mu^2 F_{ij}(\mu x), \qquad D_i\Phi^{(\mu)}(x) = \mu D_i\Phi(\mu x).$$

$$e(\mu) = \mu^{4-d}E_4 + \mu^{2-d}E_2 + \mu^{-d}E_0.$$

$$e'(1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (4-d)E_4 + (2-d)E_2 - dE_0 = 0.$$

维数	缩放能量	机制
$d=2$	$\mu^2 E_4 + E_2 + \mu^{-2}E_0$	规范曲率项与势能项可平衡；vortex 不被排除
$d=3$	$\mu E_4 + \mu^{-1}E_2 + \mu^{-3}E_0$	正负幂可平衡；monopole 不被排除

例子组织：按维数先做 Derrick 检测

维数	候选模型	缩放能量	Derrick 结论与后续任务
$d=1$	纯标量场	$\mu E_2 + \mu^{-1} E_0$	可有驻点 $E_2 = E_0$；继续求解 kink 场方程
$d=2$	纯标量场	$E_2 + \mu^{-2} E_0$	有势能时排除有限尺度；若要 vortex，需引入规范场
$d=2$	Abelian gauge-Higgs	$\mu^2 E_B + E_D + \mu^{-2} E_0$	E_B 与 E_0 可平衡；继续求解 vortex 方程
$d=3$	纯标量场	$\mu^{-1} E_2 + \mu^{-3} E_0$	无非真空有限尺度静态解；需额外尺度项
$d=3$	Yang–Mills–Higgs	$\mu E_4 + \mu^{-1} E_2 + \mu^{-3} E_0$	正负幂可平衡；继续求解 monopole 方程

流程：Derrick 检测 $\Rightarrow$ 未被排除 $\Rightarrow$ 写场方程/约化方程并求解。

$d=1$：纯标量场通过 Derrick 检测

$$E[\phi]=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}(\phi')^2+U(\phi)\right)\mathrm{d}x=E_2+E_0.$$

$$\phi^{(\mu)}(x)=\phi(\mu x)\quad\Longrightarrow\quad e(\mu)=\mu E_2+\mu^{-1}E_0.$$

$$e'(1)=0\quad\Longleftrightarrow\quad E_2=E_0.$$

条件	含义
$\mathcal{V}=\{\phi:U(\phi)=0\}$ 至少有两个连通分支	可有 kink 边界条件 $\phi(-\infty)\neq\phi(+\infty)$
Derrick 条件可满足	一维纯标量 kink 不被尺度变分排除
后续	求二阶 Euler–Lagrange 方程 $\phi''=U'(\phi)$

$d = 1$：求解 ϕ^4 kink

取

$$U(\phi) = \lambda(m^2 - \phi^2)^2, \qquad \mathcal{V} = \{-m, +m\}.$$

场方程为

$$\phi'' = U'(\phi) = -4\lambda\phi(m^2 - \phi^2).$$

kink 边界条件：

$$\phi(-\infty) = -m, \qquad \phi(+\infty) = m.$$

$$\phi_K(x) = m\tanh\big(\sqrt{2\lambda}\, m(x-a)\big).$$

与 Derrick 条件的关系

该解满足 virial relation $E_2 = E_0$，即正好通过 $d = 1$ 的 Derrick 必要条件。

$d=2$：纯标量 vortex 被排除，规范场通过检测

纯标量二维模型：

$$E = E_2 + E_0, \qquad e(\mu) = E_2 + \mu^{-2} E_0.$$

$$e'(1) = 0 \iff E_0 = 0,$$

因而有非零势能贡献的有限尺度静态解被 Derrick 排除。若取 $U=0$ 的 global vortex，远场 $|\nabla\phi|^2 \sim r^{-2}$，仍有

$$E_{\mathrm{far}} \sim \int^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \infty.$$

引入 Abelian 规范场：

$$D_i\phi = \partial_i\phi - i a_i \phi, \qquad B = F_{12}.$$

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} |D_i\phi|^2 + \frac{\lambda}{8} (1 - |\phi|^2)^2 \right) \mathrm{d}^2 x.$$

$$e(\mu) = \mu^2 E_B + E_D + \mu^{-2} E_0, \qquad e'(1) = 0 \iff E_B = E_0.$$

所以二维 vortex 需要规范场提供 E_B 与势能平衡。Derrick 判据只说明“可能不被排除”，具体求解仍需选定场论模型；下一页取标准 Abelian Higgs 模型。

$d=2$：求解 Abelian Higgs vortex（一）

步骤 1：固定具体模型与 $U(1)$ 记号

选二维 Abelian Higgs / Ginzburg–Landau 模型：

$$E=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{2}B^2+\frac{1}{2}|D_i\phi|^2+\frac{\lambda}{8}(1-|\phi|^2)^2\right)\,\mathrm{d}^2x.$$

以下径向方程只属于该模型，不是一般规范场论的通式。

统一规范记号	Abelian Higgs 特化
G，V，Φ	$G=U(1)$，$V=\mathbb{C}$，$\Phi=\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$
$A_i\cdot\Phi$	A_i 作为乘法 $-ia_i$，故 $D_i\phi=\partial_i\phi-ia_i\phi$
规范变换律	$g=e^{i\chi}$ 时，由 $A_i^g=A_i-(\partial_i g)g^{-1}$ 得 $\phi^g=e^{i\chi}\phi$，$a_i^g=a_i+\partial_i\chi$
F_{ij}	矩阵曲率为 $-i(\partial_i a_j-\partial_j a_i)$，记实磁场 $F_{ij}=\partial_i a_j-\partial_j a_i$
B	二维中唯一磁场分量 $B=F_{12}$

$d=2$：Abelian Higgs vortex 约化假设的来源

步骤 2：由有限能量确定无穷远拓扑数据

有限能量要求

$$|\phi|\to 1,\qquad D\phi\to 0,\qquad B\to 0\qquad (r\to\infty).$$

因而无穷远圆周上有

$$\phi_\infty : S^1_\infty \longrightarrow \{|\phi|=1\}\simeq S^1,\qquad N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_\theta \arg\phi_\infty \,\mathrm{d}\theta\in\mathbb{Z}.$$

在绕数 N 的扇区取代表 $\phi_\infty(\theta)=e^{iN\theta}$，并令模长只随 r 变：

$$\phi(r,\theta)=f(r)e^{iN\theta},\qquad f(0)=0,\quad f(\infty)=1.$$

规范场必须抵消无穷远的相位绕转

写 $a=a_r\,\mathrm{d}r+a_\theta\,\mathrm{d}\theta$。以下是在一个规范选择下取代表；取径向规范 $a_r=0$，则

$$D_\theta\phi=(\partial_\theta-ia_\theta)\phi=i(N-a_\theta)\phi.$$

由于能量中含 $r^{-2}|D_\theta\phi|^2$，有限能量要求 $D_\theta\phi\to 0$，故 $a_\theta\to N$。圆对称下令

$$a_\theta(r)=N\alpha(r),\qquad a=N\alpha(r)\,\mathrm{d}\theta,\qquad \alpha(0)=0,\quad \alpha(\infty)=1.$$

于是二维场方程被约化为两个径向未知函数 $f(r),\alpha(r)$。

$d=2$：求解 Abelian Higgs vortex（二）

步骤 3：把约化假设代入协变导数与磁场

在极坐标中，

$$D_r\phi = f' e^{iN\theta}, \qquad D_\theta\phi = iN(1-\alpha)fe^{iN\theta}.$$

因极坐标度量含 $r^2\,\mathrm{d}\theta^2$，

$$|D\phi|^2 = |D_r\phi|^2 + \frac{1}{r^2}|D_\theta\phi|^2 = f'^2 + \frac{N^2(1-\alpha)^2}{r^2}f^2.$$

同时

$$B = \frac{1}{r}\partial_r a_\theta = \frac{N}{r}\alpha'(r).$$

$d=2$：求解 Abelian Higgs vortex（三）

步骤 4：代入能量，得到径向变分问题

用上一页的

$$|D\phi|^2 = f'^2 + \frac{N^2(1-\alpha)^2}{r^2} f^2, \qquad B = \frac{N}{r}\alpha'(r).$$

$$E = 2\pi \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\frac{N^2\alpha'^2}{r^2} + \frac{1}{2}f'^2 + \frac{1}{2}\frac{N^2(1-\alpha)^2}{r^2} f^2 + \frac{\lambda}{8}(1-f^2)^2 \right] r\,\mathrm{d}r.$$

对真正静态解，Derrick 关系 $E_B = E_0$ 在此具体化为

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{N^2\alpha'^2}{r^2}\, r\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{\lambda}{8}(1-f^2)^2\, r\,\mathrm{d}r.$$

对该一维泛函取变分，得到 $f(r), \alpha(r)$ 的耦合二阶 ODE。

$d=2$：求解 Abelian Higgs vortex（四）

步骤 5：施加正则性与有限能量边界条件

$$f(0)=0,\quad \alpha(0)=0;\qquad f(\infty)=1,\quad \alpha(\infty)=1.$$

求解对象

vortex 解就是上述边值问题的解；除特殊情形外没有简单闭式解，通常用数值方法求 f,α。

$d = 3$：纯标量场被排除，规范-Higgs 通过检测

纯标量三维模型：

$$e(\mu) = \mu^{-1} E_2 + \mu^{-3} E_0, \qquad e'(1) = -E_2 - 3E_0 < 0$$

对非真空构型无驻点，故纯标量有限尺度静态孤子被 Derrick 排除。
Yang–Mills–Higgs 能量：

$$E = E_4 + E_2 + E_0,$$

$$E_4 \sim \int_{\mathbb{R}^3} |F_{ij}|^2 \, \mathrm{d}^3 x, \quad E_2 \sim \int_{\mathbb{R}^3} |D_i \Phi|^2 \, \mathrm{d}^3 x, \quad E_0 = \int_{\mathbb{R}^3} U(\Phi) \, \mathrm{d}^3 x.$$

$$e(\mu) = \mu E_4 + \mu^{-1} E_2 + \mu^{-3} E_0.$$

$$e'(1) = 0 \iff E_4 = E_2 + 3E_0.$$

正负幂可以平衡，故't Hooft–Polyakov monopole 不被 Derrick 排除。

$d=3$：求解't Hooft–Polyakov monopole（一）

步骤 1：选定 Yang–Mills–Higgs 模型

取 $G=SU(2)$，Higgs 场在伴随表示，规范耦合常数取为 1：

$$A_i = A_i^a T_a, \qquad \Phi = \Phi^a T_a,$$

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + \epsilon_{abc} A_i^b A_j^c, \qquad D_i\Phi^a = \partial_i \Phi^a + \epsilon_{abc} A_i^b \Phi^c.$$

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} D_i\Phi^a D_i\Phi^a + \frac{\lambda}{4} (\Phi^a\Phi^a - v^2)^2 \right] \mathrm{d}^3 x.$$

有限能量给出的拓扑数据

$$|\Phi| \to v, \qquad D\Phi \to 0, \qquad F \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

因此

$$\mathcal{V} = \{|\Phi| = v\} \simeq S^2, \qquad \hat{\Phi}_\infty : S_\infty^2 \to S^2, \qquad N = \deg(\hat{\Phi}_\infty) \in \mathbb{Z}.$$

以下只求 $N=1$ 的球对称代表；$N>1$ 多单极子一般存在，但通常不保持球对称，不能由本报告的径向 ODE 约化得到，需解完整场方程或作更高阶对称约化。

$d=3$：monopole 约化假设的来源

步骤 2：由 $N=1$ 边界数据确定 Higgs 方向

$N=1$ 的最简单代表是 hedgehog 映射

$$\hat{\Phi}_\infty(\hat{x}) = \hat{x}.$$

令模长只随 r 变，得到

$$\Phi^a(x) = vH(r)\hat{x}^a, \qquad H(0)=0, \quad H(\infty)=1.$$

这里 $H(0)=0$ 是为了避免 $\hat{x}=x/r$ 在原点的方向奇异。

规范场抵消 $\hat{x}$ 的角向变化

$$\partial_i \hat{x}^a = \frac{1}{r}(\delta_{ia} - \hat{x}_i\hat{x}^a).$$

有限能量要求 $D_i\Phi \to 0$，故规范场在无穷远需补偿上式。以下是在 hedgehog gauge 中取代表；按上页 $D_i\Phi^a = \partial_i\Phi^a + \epsilon_{abc}A_i^b\Phi^c$ 的约定，

$$A_i^a \to \epsilon_{aij}\frac{x^j}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad D_i\hat{x}^a \to 0.$$

球对称且正则的插值写作

$$A_i^a = \epsilon_{aij}\frac{x^j}{r^2}\big(1-K(r)\big), \qquad K(0)=1, \quad K(\infty)=0.$$

$d=3$：求解't Hooft–Polyakov monopole（二）

步骤 3：把约化假设代入协变导数与曲率

对

$$\Phi^a = vH(r)\hat{x}^a, \qquad A_i^a = \epsilon_{aij}\frac{x^j}{r^2}\left(1-K(r)\right),$$

可得

$$\frac{1}{2}D_i\Phi^a D_i\Phi^a = \frac{v^2}{2}H'^2 + \frac{v^2K^2H^2}{r^2},$$

$$\frac{1}{4}F_{ij}^aF_{ij}^a = \frac{K'^2}{r^2} + \frac{(1-K^2)^2}{2r^4}.$$

步骤 4：代入能量，得到径向变分问题

$$E = 4\pi\int_0^\infty \left[K'^2 + \frac{(1-K^2)^2}{2r^2} + \frac{v^2}{2}r^2H'^2 + v^2K^2H^2 + \frac{\lambda v^4}{4}r^2(H^2-1)^2\right]\mathrm{d}r.$$

$d=3$：求解't Hooft–Polyakov monopole（三）

步骤 5：施加正则性与有限能量边界条件

$$H(0)=0,\quad K(0)=1;\qquad H(\infty)=1,\quad K(\infty)=0.$$

$$\Phi^a\sim v\hat{x}^a,\qquad A_i^a\sim\epsilon_{aij}\frac{x^j}{r^2}\qquad(r\to\infty).$$

求解对象

对径向能量泛函取变分，得到 $H(r),K(r)$ 的耦合二阶 ODE。monopole 解就是该边值问题的解；除特殊极限外通常需数值求解。

与 Derrick 检测的关系

Derrick 只说明 E_4,E_2,E_0 的尺度幂次可以平衡；这里的约化假设与边值问题才是具体构造 monopole 解的步骤。

Derrick 定理的适用范围与限制

项目	内容
适用对象	平直空间上的静态有限能量场构型；考察空间缩放方向
给出的信息	非存在性判据；virial relation；能量项尺度平衡关系
不能给出的信息	不能证明孤子存在；不能保证全局极小；不能替代场方程分析
可绕过的方式	一维势能/梯度平衡；二维无势 sigma model；规范场；高阶导数项；非静态或非有限能量对象

Derrick 不通过 $\Rightarrow$ 排除静态有限能量孤子; Derrick 通过 $\not\Rightarrow$ 孤子必然存在.

最终图景

层次	数学内容
有限能量	$\phi(x) \to \mathcal{V}$，产生 $\phi_\infty : S^{d-1}_\infty \to \mathcal{V}$
拓扑分类	$[\phi_\infty] \in [S^{d-1}, \mathcal{V}]$，典型为 π_0, π_1, π_2
拓扑保护	连续有限能量演化中 $Q[\phi]$ 不变
Derrick 判据	缩放能量 $e(\mu)$ 必须有驻点；否则排除静态解
稳定解	通过场方程、径向约化、数值极小化等实际获得

拓扑负责“不能消失”，Derrick 定理负责“能否稳定成有限尺度”。

拓扑孤子存在性 $=$ 拓扑扇区 $+$ 尺度稳定 $+$ 场方程解。

未展开内容与后续方向

本报告只回答 Derrick 定理如何限制静态有限能量孤子；以下问题仍可继续展开：

方向	可报告内容
多孤子结构	$N > 1$ vortex / monopole；模空间、相互作用、对称性约化与数值解
动力学	从静态解到低能散射、模空间近似、稳定性与小扰动谱
更高维模型	Skyrmion、instanton、sigma model；Derrick 判据与高阶项的作用

本报告的定位：先用 Derrick 定理建立尺度稳定性的必要条件。

参考文献

N. Manton and P. Sutcliffe,
Topological Solitons,
Cambridge University Press, 2004.

G. H. Derrick,
Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,
Journal of Mathematical Physics, 5, 1252–1254, 1964.