



第八届粒子物理天问论坛

基于重夸克有效场论研究 DD 散射

报告人：杨勤鹤

湖南大学物理与微电子科学学院

广西师范大学 桂林 2026/8/27-30



目录

研究背景

理论框架

格点结果的拟合

总结



研究背景

- 实验上发现比如 $T_{cc}^+(3875)$, $X(3872)$ 等奇特强子态被认为是 DD^* 的束缚态。
- 利用 D 介子散射的振幅分析方法去获取奇特态的性质是一种十分重要的方法。

获得 D 介子之间散射的精确散射振幅变得至关重要。

研究目的

- 通过振幅分析确定 DD 散射的分波振幅



研究背景

对于 DD 散射过程目前没有直接可获得的实验数据。

S.-S.Pan, F.-K. Guo [Phys.Rev.D114,034505(2026)] 最近发表的文章通过格点 QCD 方法抽取了 $m_\pi \approx 207$ MeV 和 305 MeV 的 S 波和 P 波相移。

- 在格点计算中，标准 Lüscher 形式中已经考虑的无限体效应，所以抽取的格点相移是对应于无限体的。直接拟合相移不需要考虑有限体效应 ([Nucl.Phys.B354,531(1991)])。
- 目前已经有一些工作利用传统的方法 (例如 K 矩阵参数化) 拟合格点获得的相移 ([Phys.Rev.D114 (2026)1,014066])。

通过格点相移的约束，确定接触势中待定的低能常数，从而将 DD 散射的分波振幅确定下来。



Lagrangian

重夸克有效场论中, D 介子与轻标量介子的相互作用量
([Phys.Rept.281(1997)145-238])

$$\mathcal{L}^{(Q)} = i\langle H_b^{(Q)} v^\mu D_{\mu ba} \bar{H}_a^{(Q)} \rangle + ig \langle H_b^{(Q)} \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{ba}^\mu \bar{H}_a^{(Q)} \rangle$$

其中

$$H_a^{(Q)} = \frac{1 + \not{v}}{2} (P_a^{*(Q)} \gamma^\mu - P_a^{(Q)} \gamma_5), \quad \bar{H}_a^{(Q)} = \gamma^0 H_a^{(Q)\dagger} \gamma^0$$

展开后

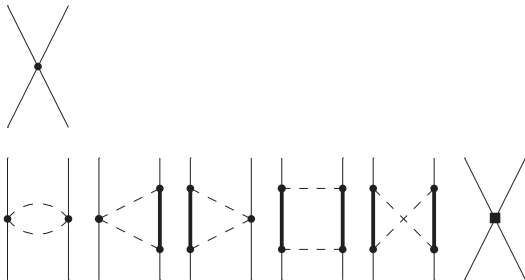
$$\mathcal{L}_{DD\varphi\varphi} = -\frac{iv^\nu}{2f_0^2} P_b^{(Q)} (\mathcal{M} \partial_\nu \mathcal{M} - \partial_\nu \mathcal{M} \mathcal{M})_{ba} P_a^{(Q)\dagger}$$

$$\mathcal{L}_{D^*D\varphi} = -\frac{\sqrt{2}g}{f_0} P_{b\mu}^{*(Q)} (\partial^\mu \mathcal{M})_{ba} P_a^{(Q)\dagger} - \frac{\sqrt{2}g}{f_0} P_b^{(Q)} (\partial^\mu \mathcal{M})_{ba} P_{a\mu}^{*(Q)\dagger}$$



DD 散射费曼图

至 NLO 所包含的费曼图



- 只考虑 $SU(2)$ 情形，即只考虑 π 交换
- 由于没有 $DD\pi$ 相互作用顶点，没有单 π 交换的贡献。
- 加粗的线代表 D^* 粒子



轻标量介子交换势

利用编时微扰论的方法

足球图的贡献

$$V^F(q) = -\frac{1}{1024f_0^4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{(\omega_+ - \omega_-)^2}{\omega_+ \omega_- (\omega_+ + \omega_-)} \mathcal{I}_{DD \rightarrow DD}^F$$

其中 $\omega_{\pm} = \sqrt{(l \pm q)^2 + 4m_{\pi}^2}$, $\mathcal{I}_{DD \rightarrow DD}^F$ 同位旋因子

三角图的贡献

$$V^T(q; \Delta) = -\frac{g^2}{32f_0^4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{l^2 - q^2}{(\omega_+ + 2\Delta)(\omega_- + 2\Delta)(\omega_+ + \omega_-)} \mathcal{I}_{DD \rightarrow DD}^T$$

相较以前 $N\bar{N}$ 散射的三角图贡献 ([JHEP 08 (2024) 208]), 保留了圈积分中的质量差 Δ

- 重子之间的质量差数幂为 $\mathcal{O}(p^2)$, 直到 NLO 的计算质量差可以被忽略。
- D^* 和 D 的质量差 $\Delta = m_{D^*} - m_D = 141.385 \text{ MeV}$ 和 π 介子质量相近。
- 需要考虑圈积分中质量差带来的修正



轻标量介子交换势

箱图的贡献

$$V^{PB}(q; \Delta) = -\frac{1}{8} \frac{g^4}{f_0^4} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{I}_{DD \rightarrow DD}^{PB}(l^2 - q^2)^2}{\omega_+ \omega_- (\omega_+ + 2\Delta)(\omega_- + 2\Delta)(\omega_+ + \omega_-)}$$

$$V^{CB}(q; \Delta) = -\frac{\mathcal{I}_{DD \rightarrow DD}^{CB}}{8} \frac{g^4}{f_0^4} \times$$

$$\int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{((\omega_+ + 2\Delta)^2 + \omega_+ \omega_- - 4\Delta^2 + (\omega_- + 2\Delta)^2)(l^2 - q^2)^2}{\omega_+ \omega_- (\omega_+ + 2\Delta)^2 (\omega_- + 2\Delta)^2 (\omega_+ + \omega_-)}$$

同位旋因子表

	足球图	左三角图	右三角图	平行箱图	交叉箱图
$I = 0$	-24	3	3	$\frac{9}{16}$	$-\frac{3}{16}$
$I = 1$	8	-1	-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$



圈积分的计算

圈积分的正规化方法

- 圈积分中的粒子能量 $\omega_{\pm} = \sqrt{(l \pm q)^2 + 4m_{\pi}^2}$ 为根号形式，需要将其转化为平方。
- 利用维数正规化分离发散部分和有限部分。

一个重要的积分

$$\frac{1}{(a+c)(b+c)(a+b)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(a^2 + \lambda^2)(b^2 + \lambda^2)(c^2 + \lambda^2)}$$



能量平方化

以三角图贡献为例

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega_+ + 2\Delta)(\omega_- + 2\Delta)(\omega_+ + \omega_-)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(\omega_+^2 + \lambda^2)(\omega_-^2 + \lambda^2)(4\Delta^2 + \lambda^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\omega_+^2 + \lambda^2)(\omega_-^2 + \lambda^2)} \\ &\quad - \frac{4\Delta^2}{\pi} \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\omega_+^2 + \lambda^2)(\omega_-^2 + \lambda^2)(4\Delta^2 + \lambda^2)} \end{aligned}$$

- 第一项为忽略质量的贡献;
- 第二项为质量差带来的修正。



维数正规化

■ 将三维动量积分，推广至 $D - 1$ 维。

费曼参数化和 $D - 1$ 维动量积分

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4\Delta^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{4\Delta^2 + \lambda^2} \mu^{4-d} \int \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} \frac{l^2 - q^2}{(\omega_+^2 + \lambda^2)(\omega_-^2 + \lambda^2)} \\
 & = -\frac{4\Delta^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{4\Delta^2 + \lambda^2} \mu^{4-d} \int \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}} \frac{l^2 - q^2}{((l + q)^2 + 4m_\pi^2 + \lambda^2)((l - q)^2 + 4m_\pi^2 + \lambda^2)} \\
 & = -\frac{2\Delta^2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{\mu^{4-d}(d-1)\Gamma(\frac{3-d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(4\Delta^2 + \lambda^2)[M^2 + \lambda^2]^{\frac{3-d}{2}}} \\
 & + \frac{16\Delta^2 q^2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)\mu^{4-d}\Gamma(\frac{5-d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(4\Delta^2 + \lambda^2)[M^2 + \lambda^2]^{\frac{5-d}{2}}}
 \end{aligned}$$

其中 $M^2 = 4x(1-x)q^2 + 4m_\pi^2$



圈积分的维数正规化

对 λ 积分得到, ($d = 4 - \epsilon$)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta^2}{2} \int_0^1 dx \frac{\mu^{4-d}(d-1)\Gamma(\frac{3-d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \csc\left(\frac{\pi d}{2}\right) \left[2\Delta^{d-4} \left(4 - \frac{M^2}{\Delta^2}\right)^{\frac{d-3}{2}} - \frac{\sqrt{\pi}(M^2)^{\frac{d}{2}-1} {}_2F_1(\frac{1}{2}, 1; \frac{d}{2}; \frac{M^2}{4\Delta^2})}{\Delta^2 \Gamma(\frac{3-d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})} \right] \\
 & + \frac{16\Delta^2 q^2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)\mu^{4-d}\Gamma(\frac{5-d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{(4\Delta^2 + \lambda^2)[4x(1-x)q^2 + 4m^2 + \lambda^2]^{\frac{5-d}{2}}} \\
 & = -\frac{\Delta^2}{4\pi^2} \left[6R + 4 + 6 \ln\left(\frac{4\Delta^2}{\mu^2}\right) + 3 \int_0^1 dx \left\{ {}_2F_1^{(0,0,1,0)}\left(\frac{1}{2}, 1; 2; z\right) + 2 \left\{ \ln(z) + \sqrt{1-z} \left[\ln\left(\frac{4}{z} - 4\right) - 1 \right] \right\} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{q^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[{}_2F_1^{(0,0,1,0)}\left(\frac{1}{2}, 1; 1; z\right) - \frac{1}{\sqrt{1-z}} \ln\left(\frac{4}{z} - 4\right) \right] + O(\epsilon^1) \right]
 \end{aligned}$$

其中

$$z = \frac{M^2}{4\Delta^2}, \quad R = -\frac{2}{\epsilon} + \gamma_E - \ln(4\pi) - 1$$



接触势

DD 散射接触相互作用可参数化为

$$\begin{aligned}V_0^{\text{Con}} &= C_S, \\V_2^{\text{Con}} &= C_1 \mathbf{q}^2 + C_2 \mathbf{k}^2\end{aligned}$$

对于无自旋介子情形分波公式为

$$V_J(p, p') = 2\pi \int_{-1}^1 V(p, p', x) P_J(x) dx$$

经过分波分解后

$$\begin{aligned}V_{1S_0} &= 4\pi C_S + \pi(4C_1 + C_2)(p^2 + p'^2) = \tilde{C}_{1S_0} + C_{1S_0}(p^2 + p'^2) \\V_{1P_1} &= -\frac{2\pi}{3}(4C_1 - C_2)pp'^2 = C_{1P_1}pp'\end{aligned}$$

更高阶分波贡献为零



散射方程和 S 矩阵元

李普曼-施温格方程 [E.Epelbaum,Eur.Phys.J.A 51(2015)5]

$$T_{LL}(p', p; p) = V_{LL}(p', p) + \int_0^\infty \frac{dk k^2}{(2\pi)^3} \\ \times V_{LL}(p', k) \frac{m_D}{p^2 - k^2 + i\epsilon} T_{LL}(k, p; p)$$

正规化

$$f(p, p'; \Lambda) = \exp \left(-\frac{p^6 + p'^6}{\Lambda^6} \right)$$

S 矩阵元

$$S_{LL}(p) = 1 - i\pi k m_D T_{LL}(p', p; p)$$

对于弹性散射

$$S_{LL}(p) = e^{2i\delta_L}$$



格点的结果

[S.-S.Pan, F.-K. Guo.

Phys.Rev.D114,034505(2026)]

对应于 $m_\pi \approx 305$ MeV 和 207 MeV 的非物理参数

m_π (MeV)	207	305
M_D (MeV)	1966.0	1900.4
M_{D^*} (MeV)	2073.8	2008.7
f_π (MeV)	100.7	90.6
g	0.581	0.554

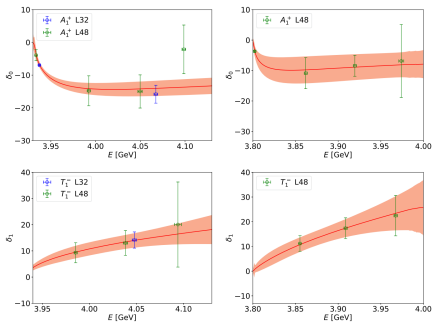


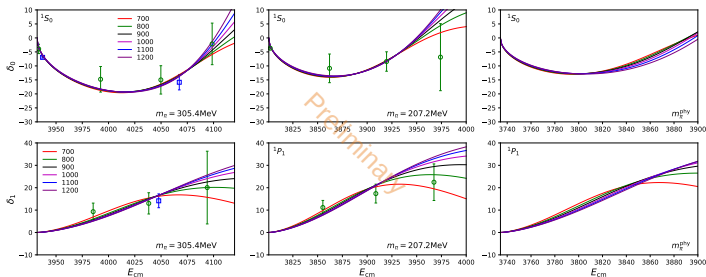
FIG. 7. S - (top row) and P -wave (bottom row) DD scattering phase shifts for the $Z = 1$ case. The left and right panels are the results for $m_\pi \approx 305$ MeV and 207 MeV, respectively. The red lines denote the phase shifts calculated from the fits using ERE parametrization, with the bands representing the combined statistical and systematic uncertainties.

$$g_c = g_0 \left(1 - \frac{4g_0^2 m_\pi^2}{(4\pi f)^2} \log(m_\pi^2) + \alpha m_\pi^2 + \beta \frac{\alpha^2}{\alpha_{3.9}^2} \right)$$

[Phys.Lett.B 721 (2013) 94-100]



相移的拟合结果



低能常数的外推

$$C_i = C_i^{\text{phy}} \frac{1 + am_\pi^2}{1 + a(m_\pi^{\text{phy}})^2}$$



总结

- 基于重夸克有效场论相互作用拉氏量，利用编时微扰论构造 DD 散射相互作用势。
- 考虑轻标量介子交换势中圈积分的 D^* 和 D 质量差的贡献。
- 拟合格点给出的 S 波和 P 相移，确定了接触势中的待定低能常数。



Thank you for your patience!