

一、

1. 辐射长度 X_0 : 高能电子因轫致辐射损失能量, 能量衰减到初始值 $1/e$ 时穿过的介质厚度, 是电磁相互作用特征长度。

$$X_0 = \frac{716.4A}{Z(Z+1)\ln(287/\sqrt{Z})} [g/cm^2]$$

2. 核作用长度: 强子 (质子、 π 等) 因强相互作用 (非弹性), 粒子数衰减到初始值 $1/e$ 时的介质厚度, 是强相互作用特征长度。

核碰撞长度 λ_T : $\lambda_T = \frac{A}{N_A \rho \sigma_{total}} [cm]$

□ 反映总相互作用的贡献

核相互作用长度 λ_I : $\lambda_I = \frac{A}{N_A \rho \sigma_{非弹}} [cm]$

□ 反映非弹性散射的贡献

3. 高能电子能量衰减:

$$E = E_0 e^{-x/X_0}$$

$$\langle E \rangle = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

钨:

$$X = 19.3 * 0.1 = 1.93$$

$$E/E_0 = \exp(-1.93/6.76) = 0.752$$

铝:

$$X = 2.70 * 0.1 = 0.27$$

$$E/E_0 = \exp(-0.27/24.0) = 0.989$$

碳:

$$X = 2.25 * 0.1 = 0.225$$

$$E/E_0 = \exp(-0.225/42.7) = 0.995$$

4. 多重散射角:

$$\theta_{plane}^{rms} = \sqrt{\langle \theta_{plane}^2 \rangle} = \frac{13.6}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left(1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0} \right)$$

能量	碳散射角	铝散射角	钨散射角	规律
1 GeV	~0.046°	~0.068°	~0.40°	钨 ≫ 铝 > 碳
10 GeV	缩小 10 倍	缩小 10 倍	缩小 10 倍	能量×10, 散射角÷10
100 GeV	几乎无散射	几乎无散射	微弱散射	极高能电子散射可忽略

5. 电离能量损失:

1. 分布差异

薄介质: 朗道分布, 严重不对称, 高能拖尾很长, 峰值 < 平均值。

厚介质: 高斯分布, 对称, 峰值 ≈ 平均值。

2. 物理原因 (按课件原话)

薄介质: 碰撞次数少, 单次硬碰撞产生高能 δ 电子, 统计涨落极大, 形成长尾朗道分布。

厚介质：碰撞次数极多，根据中心极限定理，涨落平均，趋近对称高斯分布。

二、

1. 泊松过程：

定义：单位时间内随机事件发生的概率恒定，不同时间区间内事件相互独立，区间内发生多次事件概率远低于单次，常用于描述衰变、信号计数、粒子探测事例数等随机过程。

2. 泊松分布：

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3. 性质

均值与方差相等

可加性：独立泊松变量之和仍为泊松分布

当值很大时，泊松分布近似高斯分布

当试验次数 n 极大、单次概率 p 极小时，二项分布 $B(n,p)$ 近似泊松分布

4. 应用

粒子探测器计数、放射性衰变计数、宇宙线事例数、信号噪声统计。

5. 与二项分布、高斯分布的关系

1. 二项分布→泊松分布：

$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np = \lambda$ 固定时，二项分布收敛为泊松分布；

2. 泊松分布→高斯分布： $\lambda \gg 10$ 时，泊松分布可由高斯分布近似，简化计算。

6. 母函数

泊松分布母函数：

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda(t-1)}$$

例：

设 $X \sim P(x_1), Y \sim P(x_2)$ ，相互独立

$G[X+Y](t) = G[X](t) * G[Y](t)$

$= \exp[x_1(t-1)] * \exp[x_2(t-1)]$

$= \exp(x_1+x_2)(t-1)$

对应参数 x_1+x_2 的泊松分布

三、

