1.（1）辐射长度 X0：高能电子在介质中发生韧致辐射损失能量，当电子平均能量降至初始能量的 1/e 时所经过的平均路程，称为辐射长度。他是表征电磁相互作用引起电子能量衰减的特征长度。

因韧致辐射而造成的平均能量损失率由下式给出[1]

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=4\alpha N_{\mathrm{A}}\frac{Z^2}{A}z^2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^2E\ln\frac{183}{Z^{1/3}} \tag{2.1.19}$$

Z 和 A 为物质的原子序数和原子量，z、m 和 E 分别为入射粒子的电荷量(以电子电荷 e 为单位)、质量和能量，α 为精细结构常数。对于电子，其韧致辐射能损可由式(2.1.19)推得

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=4\alpha N_{\mathrm{A}}\frac{Z^2}{A}r_{\mathrm{e}}^2E\ln\frac{183}{Z^{1/3}} \tag{2.1.20}$$

式(2.1.20)要求 $E\gg m_{\mathrm{e}}c^2/\alpha Z^{1/3}$ 成立。

需要强调的是，与电离能损不同，韧致辐射能损正比于入射粒子的能量，而反比于其质量平方。

由于电子是最轻的带电粒子，其韧致辐射能损非常显著。将式(2.1.20)改写为以下形式

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{E}{X_0} \tag{2.1.21}$$

此式定义了一个新的物理量 X_0，称为辐射长度，它表示的是一个高能电子通过韧致辐射能量损失到 1/e（此处 e 为自然对数常数）所经过的平均路程。由式(2.1.20)和(2.1.21)，显然有

$$X_0=\frac{A}{4\alpha N_{\mathrm{A}}Z^2r_{\mathrm{e}}^2\ln(183/Z^{1/3})}[\mathrm{g/cm^2}] \tag{2.1.22}$$

（2）核作用长度 λ：高能强子与介质原子核发生强相互作用的平均自由程，称为核作用长度，是描述强子在介质中发生核级联簇射的特征参数。

高能强子通过介质时与原子核会发生弹性散射和非弹性散射。非弹性散射，即碰撞过程中伴随有次级粒子产生。当能量在 GeV 以上量级时，质子-质子散射的总截面趋于常数，~ 50 mb($1\ \mathrm{mb}=10^{-27}\ \mathrm{cm}^2$)。而在低能区，弹性截面和非弹性截面随能量不同均有较大的变化[13]，见图 2.3.1 所示。

$$\sigma_{\mathrm{total}}=\sigma_{\mathrm{elastic}}+\sigma_{\mathrm{inelastic}} \tag{2.3.1}$$

类似于光子束，可以根据强子束强度在物质中的衰减定义核相互作用长度 λ_I

$$N=N_0\mathrm{e}^{-x/\lambda_I} \tag{2.3.2}$$

λ_I 可以通过强子截面的非弹性部分计算

$$\lambda_I=\frac{A}{N_{\mathrm{A}}\rho\sigma_{\mathrm{inelastic}}}[\mathrm{cm}] \tag{2.3.3}$$

若以 $\mathrm{g/cm^2}$ 为单位，只需将式(2.3.3)乘以密度 ρ 即可。核碰撞长度 λ_T 则和总截面相关

(3)1mm 碳、铝、钨板中电子能量衰减对比：

教材中高能电子能量衰减服从电磁簇射指数衰减规律：E=E0e^(-x/X0)

教材给出的常用介质辐射长度：碳 42.70g/cm^2　铝 24.0g/cm^2　钨 6.8g/cm^2

衰减后：碳 E=0.997661*E0　铝 E=0.995842*E0　钨 E=0.985401*E0

三者中钨的能量衰减最显著，碳的能量衰减最微弱

（4）多重散射角：

式(2.1.16)还可以进一步简化，对于绝大多数实际应用情况，有

$$\theta_{\text{plane}}^{\text{rms}} = \frac{13.6}{\beta cp}\sqrt{\frac{x}{X_0}} \tag{2.1.17}$$

其中 z 已取为 1。θ_{plane} 考虑的是二维情况，当需要考虑三维情况时，有

$$\theta_{\text{space}}^{\text{rms}} = \sqrt{2}\,\theta_{\text{plane}}^{\text{rms}} = \frac{19.2}{\beta cp}\sqrt{\frac{x}{X_0}} \tag{2.1.18}$$

能量越高，多重散射角越小，1GeV 电子散射角最大，100GeV 散射角最大，相同能量下，散射角钨>铝>碳

（5）电离能量损失的分布;

厚介质：粒子发生大量的电离碰撞，单次涨落相互抵消，能量损失分布收敛为高斯分布

薄介质：粒子在介质中相互作用少，大部分粒子能量损失小，单次大能量损失事件不可忽略，能量损失涨落大，服从朗道分布，非对称长尾图形。

2.（1)泊松过程：一种描述连续时间内随机事件发生次数的计数过程

性质：1.平稳性：在时间区间[t,t+Δt]内，事件发生概率只与Δt 有关，与 t 无关

2.无后效性：不相交的时间区间内，事件发生的次数相互独立

3.稀有性：在极短时间Δt 内，事件发生的次数在 2 次及以上的概率是Δt 的高级无穷小

(2) 泊松分布的性质及应用：

泊松分布

设 $X \sim P(\lambda)$　$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$

性质：

期望与方差：E(X)=λ，D(X)=λ;

可加性：独立泊松变量的和仍为泊松变量（后续用母函数证明）;

当 n 很大、p 很小时，二项分布 B(n,p) 近似泊松分布 P(np);

当 λ 很大时，泊松分布近似高斯分布 N(λ,λ)。

应用：

描述单位时间 / 空间内稀有事件发生的次数，如：路口的车流量、放射性衰变的粒子数、产品的缺陷数等。

（3）泊松分布与二项分布、高斯分布的关系

1.与二项分布的关系：二项分布在 n 趋近于正无穷，p 趋近于 0，np=λ 条件下的极限是泊松分布

2.与高斯分布的关系：泊松分布在均值 λ>>1 时的正态近似，大量独立随机变量叠加的极限分布

（4）母函数的性质及应用：

母函数（概率生成函数）定义：

对于离散型随机变量 X．$G_X(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)s^k$

性质：1、独立变量和的母函数＝各变量母函数的乘积

若 X．Y 独立．则 $G_{X+Y}(s)=G_X(s)\,G_Y(s)$

2、可通过母函数求期望、方差：

$E(X)=G_X'(1)$

$E(X^2)=G_X''(1)+G_X'(1)$

应用：

证明独立随机变量的可加性（利用性质 1）

快速计算期望、方差、高阶矩：

对母函数求导 E(X)=G′(1)　E(X^2)=G′′(1)+G′(1) D(X)=E(X^2)−[E(X)]^2

分析探测器计数统计特性：推导多探测器信号叠加后的总计数分布

简化复杂统计模型

利用母函数证明2个泊松分布的随机变量的和仍是泊松分布：

设 $X\sim P(\lambda)$　$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$G_X(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot s^k$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot s^k$

$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!}$

高等数学中 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$

$\Rightarrow G_X(s)=e^{\lambda(s-1)}$　$\longrightarrow$

2个泊松

设 $X\sim P(\lambda_1)$ $Y\sim P(\lambda_2)$ 且 X、Y 独立

$G_X(s)=e^{\lambda_1(s-1)}$　$G_Y(s)=e^{\lambda_2(s-1)}$

据性质2 $G_{X+Y}(s)=G_X(s)\cdot G_Y(s)=e^{\lambda_1(s-1)}\cdot e^{\lambda_2(s-1)}$

$=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$

得证 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

3.由图像可得服从朗道分布