第一题

辐射长度和核作用长度分别是什么，简单比较经过1毫米厚的碳、铝、钨板后电子的能量衰减到原来的多少，对于 1 GeV、10 GeV、100 GeV 的电子，经过这些物质时，多重散射角分别为多大？简单介绍粒子穿过厚、薄介质时，电离能量损失的分布有何不同，为什么？

1. 辐射长度 X_0 (Radiation Length)

辐射长度是高能电子在介质中通过**韧致辐射** (Bremsstrahlung) 损失能量的特征尺度。定义为：高能电子的能量因韧致辐射衰减到原来的 $1/e$（约 36.8%）所经过的平均距离。高能光子的电子对产生平均自由程 $\lambda_{\text{pair}} = \frac{9}{7} X_0$（即 X_0 是其 $7/9$）。X_0 是设计电磁量能器的最核心参数。

近似公式：

$$X_0\ [\text{g/cm}^2] \approx \frac{716.4\, A}{Z(Z+1)\ \ln(287/\sqrt{Z})}$$

$$X_0\ [\text{cm}] = X_0\ [\text{g/cm}^2]/\rho \qquad (\rho\ \text{为材料密度})$$

2. 核作用长度 λ_I (Nuclear Interaction Length)

核作用长度是描述**强子**（质子、中子、π介子等）在介质中发生**强相互作用**（核相互作用）的特征长度。定义为：强子在介质中发生一次非弹性核相互作用的**平均自由程**。由于强作用截面远小于电磁截面，λ_I 通常远大于 X_0。λ_I 是设计强子量能器的关键参数。

3. 1 mm 厚碳、铝、钨板的电子能量衰减

高能电子能量按指数衰减：$E(t) = E_0\, e^{-t/X_0}$。对 $t = 1\ \text{mm} = 0.1\ \text{cm}$：

碳：$t/X_0 = 0.1/18.8 = 0.00532 \ \rightarrow\ E/E_0 \approx 99.5\%$ （损失约 0.5%）

铝：$t/X_0 = 0.1/8.9 = 0.0112 \ \rightarrow\ E/E_0 \approx 98.9\%$ （损失约 1.1%）

钨：$t/X_0 = 0.1/0.35 = 0.286 \ \rightarrow\ E/E_0 \approx 75.2\%$ （损失约 24.8%）

4. 多重散射角 (Multiple Coulomb Scattering)

带电粒子穿过介质时，与原子核库仑场发生多次小角度弹性散射——**多重库仑散射**。散射角投影分布的 RMS 值由 Highland 公式给出：

$$\theta_0 = \frac{13.6\ \text{MeV}}{\beta p c} \sqrt{\frac{t}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln\left(\frac{t}{X_0}\right)\right]$$

对高能电子（$\beta \approx 1,\ p \approx E/c$），简化为 $\theta_0 \approx \frac{13.6\ \text{MeV}}{E} \sqrt{t/X_0}\, C$，其中 $C = 1 + 0.038 \ln(t/X_0)$。

1 mm 厚度下的中间参数：

碳：$\sqrt{t/X_0} = 0.073,\ C \approx 0.80 \ \rightarrow\ \theta_0\ [\text{mrad}] \approx 0.80\,/\,E\ [\text{GeV}]$

铝：$\sqrt{t/X_0} = 0.106,\ C \approx 0.83 \ \rightarrow\ \theta_0\ [\text{mrad}] \approx 1.20\,/\,E\ [\text{GeV}]$

钨：$\sqrt{t/X_0} = 0.535,\ C \approx 0.95 \ \rightarrow\ \theta_0\ [\text{mrad}] \approx 6.92\,/\,E\ [\text{GeV}]$

材料	$E = 1$ GeV	$E = 10$ GeV	$E = 100$ GeV
碳 (C)	0.80 mrad (0.046°)	0.080 mrad (0.0046°)	0.0080 mrad
铝 (Al)	1.20 mrad (0.069°)	0.120 mrad (0.0069°)	0.0120 mrad
钨 (W)	6.92 mrad (0.40°)	0.692 mrad (0.040°)	0.0692 mrad

5. 厚、薄介质电离能量损失分布差异

薄介质（厚度 $\ll$ 射程，碰撞次数少）：电离能量损失服从 **Landau 分布（朗道分布）**——高度不对称，右偏，有向高能损失方向的长拖尾。**原因**：大多数碰撞为远距离小能量转移，但偶尔的近距离大能量转移碰撞产生 δ 电子，造成少数事例能量损失极大。由于总碰撞次数少，这种大涨落无法被"平均掉"。物理本质：单次碰撞的能量损失分布本身就具有长拖尾特征；在碰撞次数少时，中心极限定理不适用。

厚介质（碰撞次数非常多）：电离能量损失趋近 **Gauss 分布（高斯分布/正态分布）**——对称的钟形曲线。**原因**：中心极限定理——粒子经历大量独立同分布的碰撞过程，无论单次碰撞能量损失分布如何，大量独立随机变量之和趋近正态分布，大涨落被平均化。

过渡区域由 **Vavilov 分布**描述，引入参数 $\kappa = \xi/T_{\max}$：$\kappa \to 0$ 趋近 Landau；$\kappa \to \infty$ 趋近 Gauss。

第二题

泊松过程、泊松分布的性质和应用以及和二项分布、高斯分布的关系；母函数的性质及应用，例：利用母函数证明两个泊松分布的随机变量的和仍是泊松分布。

1. 泊松过程 (Poisson Process)

强度为 λ（$\lambda > 0$）的**齐次泊松过程** $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足四个条件：

① $N(0) = 0$ —— 零时刻没有事件发生。
② **独立增量性** —— 不相交时间区间内的事件数相互独立。
③ **平稳增量性** —— 长度为 τ 的区间内事件数的分布只依赖于 τ，与起点无关。
④ **普通性** —— 在 Δt 内，$P(\text{发生 1 次}) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$，$P(\geq 2\text{ 次}) = o(\Delta t)$。

关键性质：

事件间隔时间服从指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$：$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$（无记忆性）。
第 n 个事件到达时间服从 Erlang 分布 $\text{Gamma}(n, \lambda)$。
叠加性：多个独立泊松过程之和仍为泊松过程（强度相加）。
稀释性：以概率 p 随机分流后的子过程仍为独立泊松过程。

物理应用：放射性核衰变计数、探测器脉冲计数、宇宙线缪子到达时间、符合测量中的随机符合、排队论、保险精算等。

2. 泊松分布 (Poisson Distribution)

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，概率质量函数：

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

基本性质：

期望 $E[X] = \lambda$，方差 $\text{Var}(X) = \lambda$ —— **均值 = 方差**是泊松分布的独有特征。
概率母函数 (PGF)：$G(s) = E[s^X] = e^{\lambda(s-1)}$
矩母函数 (MGF)：$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
偏度 $= 1/\sqrt{\lambda}$（右偏），峰度 $= 1/\lambda$；众数 $= \lfloor \lambda \rfloor$
可加性：独立泊松变量之和仍为泊松，参数相加（见后文证明）。

3. 与二项分布、高斯分布的关系

(a) 二项分布 $\to$ 泊松分布（泊松极限定理）

当 $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$（常数）时， $\text{Binomial}(n, p) \to \text{Poisson}(\lambda)$ 。这是"小概率事件定律"——大量独立试验，每次成功概率极低，成功总次数近似泊松分布。

推导：令 $\lambda = np$，

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

实用条件：$n \geq 20$, $p \leq 0.05$。

(b) 泊松分布 $\to$ 高斯分布

当 λ 很大时（$\lambda > 20$）， $\text{Poisson}(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$ 。由中心极限定理保证： $\text{Poisson}(\lambda)$ 可视为 λ 个独立 $\text{Poisson}(1)$ 之和，λ 大时趋近正态分布。核物理中计数误差常用 $\sqrt{N}$ 估计（ $\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{N}$ ）。

$$\text{Binomial}(n, p) \xrightarrow{n \to \infty,\ p \to 0 np \to \lambda} \text{Poisson}(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} N(\lambda, \lambda)$$

4. 母函数（概率生成函数 PGF）

定义：对非负整数离散随机变量 X，

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, s^k, \qquad |s| \leq 1$$

核心性质：

$G(1) = 1$（归一化）； $G(0) = P(X=0)$ 。

$E[X] = G'(1)$； $\text{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$ 。

$E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = G^{(k)}(1)$ （k 阶导数给出 k 阶阶乘矩）。

唯一性定理：PGF 唯一确定概率分布。两个相同 PGF 的随机变量必有相同分布。

独立和的 PGF：若 X 与 Y 独立，则 $G_{X+Y}(s) = G_X(s)\, G_Y(s)$ 。

5. 母函数证明：独立泊松变量之和仍为泊松分布

命题： $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ ， $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ ， X 与 Y 独立。证明 $Z = X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。

证明：

第一步 —— 写出泊松分布的母函数。对 $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ ：

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!} = e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 s} = e^{\lambda_1 (s-1)}$$

同理， $G_Y(s) = e^{\lambda_2 (s-1)}$ 。

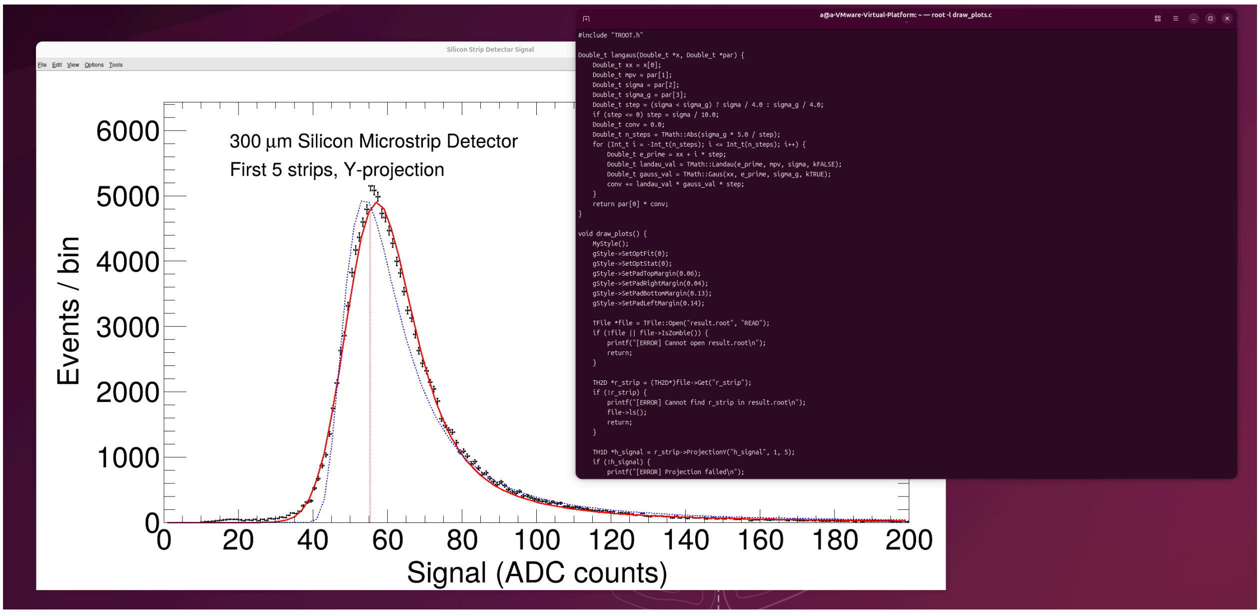
第二步 —— 利用独立变量之和的 PGF 性质：

$$G_Z(s) = G_{X+Y}(s) = G_X(s)\, G_Y(s) = e^{\lambda_1(s-1)}\, e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$$

第三步 —— 由唯一性定理：$e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$ 正是 $\text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$ 的母函数形式。根据母函数唯一性定理， $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。

推广：n 个独立泊松变量 $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ 之和 $\sim \text{Poisson}(\sum \lambda_i)$ 。这一性质在粒子探测中有核心应用——多探测器总计数、多时段累计计数、多信号源叠加计数，均仍服从泊松分布。

第三题


Silicon Strip Detector Signal
File Edit View Options Tools
300 μm Silicon Microstrip Detector
First 5 strips, Y-projection
Events / bin
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Signal (ADC counts)
a@a-VMware-Virtual-Platform: ~ — root -l draw_plots.c
#include "TROOT.h"
Double_t langaus(Double_t *x, Double_t *par) {
Double_t xx = x[0];
Double_t mpv = par[1];
Double_t sigma = par[2];
Double_t sigma_g = par[3];
Double_t step = (sigma < sigma_g) ? sigma / 4.0 : sigma_g / 4.0;
if (step <= 0) step = sigma / 10.0;
Double_t conv = 0.0;
Double_t n_steps = TMath::Abs(sigma_g * 5.0 / step);
for (Int_t i = -Int_t(n_steps); i <= Int_t(n_steps); i++) {
Double_t e_prime = xx + i * step;
Double_t landau_val = TMath::Landau(e_prime, mpv, sigma, kFALSE);
Double_t gauss_val = TMath::Gaus(xx, e_prime, sigma_g, kTRUE);
conv += landau_val * gauss_val * step;
}
return par[0] * conv;
}
void draw_plots() {
MyStyle();
gStyle->SetOptFit(0);
gStyle->SetOptStat(0);
gStyle->SetPadTopMargin(0.06);
gStyle->SetPadRightMargin(0.04);
gStyle->SetPadBottomMargin(0.13);
gStyle->SetPadLeftMargin(0.14);
TFile *file = TFile::Open("result.root", "READ");
if (!file || file->IsZombie()) {
printf("[ERROR] Cannot open result.root\n");
return;
}
TH2D *r_strip = (TH2D*)file->Get("r_strip");
if (!r_strip) {
printf("[ERROR] Cannot find r_strip in result.root\n");
file->ls();
return;
}
TH1D *h_signal = r_strip->ProjectionY("h_signal", 1, 5);
if (!h_signal) {
printf("[ERROR] Projection failed\n");