1、辐射长度：X_0，表示一个高能电子通过韧致辐射能量损失到原始 $\frac{1}{e}$ 时在介质中所经过的平均路程.

核作用长度：λ_I，表示强子与原子核发生核相互作用，强子通量衰减为初值 $\frac{1}{e}$ 时，所经过的平均路程

详：$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{韧致} = 4\alpha N_A \cdot \frac{Z(Z+1)}{A} z^2 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 E \ln\frac{183}{Z^{1/3}}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0} \quad 则 \langle E\rangle = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

$$\therefore X_0 = \frac{A}{4\alpha N_A Z(Z+1) r_e^2 \ln\frac{183}{Z^{1/3}}} \quad (g/cm^2)$$

$$= \frac{716.4A}{Z(Z+1)\ln(287/\sqrt{Z})}$$

例1. C

$X_{0C} \approx 42.7\ (g/cm^2)$，$\rho \approx 2.2\ g/cm^3$

$$\frac{E}{E_0} = e^{-\frac{2.2\times0.1}{42.7}} \approx 0.995$$

Al

$X_{0Al} \approx 24.0 \quad \rho \approx 2.7$

$$\frac{E}{E_0} = e^{-\frac{2.7\times0.1}{24.0}} \approx 0.989$$

W

$X_{0W} \approx 6.8 \quad \rho \approx 19.3$

$$\frac{E}{E_0} = e^{-\frac{19.3\times0.1}{6.8}} \approx 0.752$$

例2. 多重散射角　高能电子P=1

$$\theta_{plane}^{rms} = \frac{13.6}{\beta cp}\sqrt{\frac{x}{X_0}} \qquad \theta_{space}^{rms} = \sqrt{2}\,\theta_{plane}^{rms} \approx \frac{19.2}{\beta cp}\sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

对于 1GeV/10GeV/100GeV，对应 P 1000MeV/c / 10000MeV/c / 100000MeV/c

以下求 θ_{plane}^{rms}

C：$\frac{x}{X_0} \approx 0.00515$

Al：$\frac{x}{X_0} \approx 0.01125$

W：$\frac{x}{X_0} \approx 0.284$

1GeV	10GeV	100GeV
$\theta_1 = \frac{13.6}{1000}\times\sqrt{0.00515} = 0.00098\ rad$	$\theta_1 = 0.000098\ rad$	$\theta_1 = 9.8\times10^{-6}$
$\theta_2 = 0.00144\ rad$	$\theta_2 = 0.000144\ rad$	$\theta_2 = 1.44\times10^{-5}$
$\theta_3 = 0.00728\ rad$	$\theta_3 = 0.000728\ rad$	$\theta_3 = 7.28\times10^{-5}$

厚介质中，粒子经历了**大量的电离碰撞**，每一次碰撞都会导致粒子损失一小部分能量。由于这些碰撞是随机发生的，且单次能量损失幅度较小，整体的能量损失分布会呈现一定的统计平均性，表现为**高斯分布**。

薄介质中，粒子与介质原子的**碰撞次数有限**，每一次碰撞的能量损失较大，特别是一些异常的大能量损失事件在统计中不可忽略。能量损失的**涨落较大**，呈现出**非对称**的长尾分布，少量但剧烈作用表现为**朗道分布。**

2、泊松过程

一类独立增量、平稳增量的计数随机过程

$N(t)$：$[0,t]$内事件发生总数.

性质：$N(0)=0$

独立：任意不相交时间区间，事件发生次数独立

平稳：时间区间内的事件发生次数仅取决于区间长度，与起点无关

无穷小事件：極短时间内，几乎不可能发生 ≥2 次事件.　　$[N(t)-N(s)]\sim P(\lambda(t-s))$

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\quad(k=0,1,2\cdots)$$

泊松分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\begin{cases}E(X)=\lambda\\ D(X)=\lambda\end{cases}\qquad \begin{matrix}X\sim P(\lambda_1)\\ Y\sim P(\lambda_2)\end{matrix}\cdots\ X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

泊松分布与二项分布

令$\lambda=np$，当n很大，p很小时，二项分布可近似为泊松分布

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\sim\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

泊松分布与高斯分布

当$\lambda\to\infty$

证：$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$\log P=-\lambda+k\log\lambda-\log k!$$

斯特林公式：$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\therefore \ln n!=\frac{1}{2}\ln(2\pi n)+n\ln n-n+o(1)$$

令$k=\lambda+x$

$$\log k=\log(\lambda+x)$$
$$=\log\lambda+\frac{x}{\lambda}-\frac{x^2}{2\lambda^2}+O\left(\frac{x^3}{\lambda^3}\right)$$

$$\therefore k\ln k=(\lambda+x)\cdot\left(\log\lambda+\frac{x}{\lambda}-\frac{x^2}{2\lambda^2}+\cdots\right)$$

$$k\log\lambda-k\log k=-(\lambda+x)\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{x^2}{2\lambda^2}+\cdots\right)$$
$$=-x-\frac{x^2}{2\lambda}+\cdots$$

$$\therefore \log P\approx-\frac{x^2}{2\lambda}-\frac{1}{2}\ln(2\pi\lambda)$$

$$P\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-(k-\lambda)^2/2\lambda}\sim N(0,1)$$

综上

$$\text{二项分布}\ \xrightarrow[\substack{n\text{足够大}\\ p\text{足够小}}]{\lambda=np}\ \text{泊松分布}\ \xrightarrow[\lambda\to\infty]{\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-(k-\lambda)^2/2\lambda}}{}^{\sim N}\ \text{高斯分布}$$

母函数性质及应用

定义：已知$P(X=k)=p_k$

定义 $G_X(s)=E(s^X)$

$=\sum p_k\cdot s^k$

性质：$G(1)=1$

$E(X)=G'(1)$

$D(X)=G''(1)+G'(1)-G'(1)^2$

$G_{X+Y}(s)=G_X\cdot G_Y$ (独立)

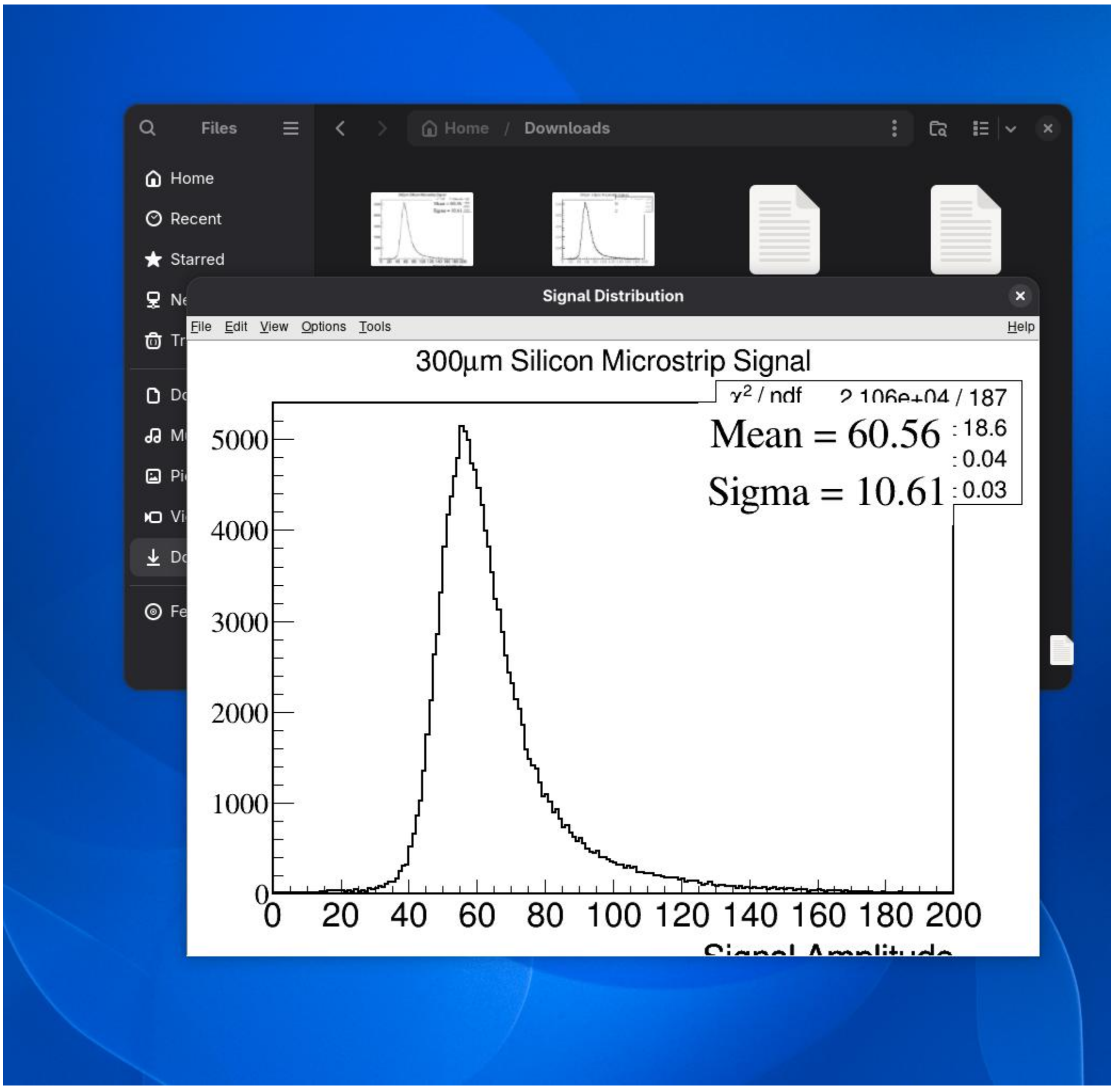
例：设 $X\sim P(\lambda_1)$

$Y\sim P(\lambda_2)$

$$
\begin{aligned}
G_{X+Y}&=G_X\cdot G_Y\\
&=\left(\sum\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot s^k\right)\cdot\left(\sum\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}\cdot s^k\right)\\
&=\left(e^{-\lambda_1}\cdot\sum\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot s^k\right)\cdot\left(e^{-\lambda_2}\cdot\sum\frac{\lambda_2^k}{k!}s^k\right)\\
&=\left(e^{-\lambda_1}\cdot e^{\lambda_1 s}\right)\cdot\left(e^{-\lambda_2}\cdot e^{\lambda_2 s}\right)\\
&=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}
\end{aligned}
$$

其母函数形式与单泊松分布结果($e^{\lambda(s-1)}$)同形式

服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.



其形式为朗道分布，不对称有重尾