

第一部分：辐射长度、核作用长度与电子穿过物质

1. 辐射长度 (X_0) 与核作用长度 (λ_I)

- **辐射长度**：高能电子在物质中通过轫致辐射损失能量的特征长度。经过一个辐射长度后，电子的平均能量降为原来的 $1/e$ (约 37%)。它也是描述电磁级联 (簇射) 发展的基本尺度。
- **核作用长度**：强子 (如质子、 π 介子) 在物质中发生非弹性核相互作用的平均自由程。经过一个核作用长度后，强子总数衰减到 $1/e$ 。它通常显著大于同种物质的辐射长度。

2. 电子经过 1 毫米厚碳、铝、钨板的能量衰减

对于 1GeV 及以上的电子，其能量远大于各材料的临界能量 (轫致辐射损失与电离损失相等时的能量)，电离损失可忽略，能量衰减由轫致辐射主导：

$$E \approx E_0 e^{-d/X_0}$$

取物理厚度 $d = 1 \text{ mm} = 0.1 \text{ cm}$ ，常用辐射长度：

- 碳 (石墨)： $X_0 \approx 18.8 \text{ cm}$
- 铝： $X_0 \approx 8.9 \text{ cm}$
- 钨： $X_0 \approx 0.35 \text{ cm}$

计算剩余能量比例 $e^{-0.1/X_0}$ (与入射能量无关)：

- 碳： $\exp(-0.1/18.8) \approx 0.995$ ，剩余约 **99.5%**
- 铝： $\exp(-0.1/8.9) \approx 0.989$ ，剩余约 **98.9%**
- 钨： $\exp(-0.1/0.35) \approx 0.751$ ，剩余约 **75%**

3. 多重散射角估计

对于高能电子 ($\beta \approx 1$)，使用 Highland 公式的近似形式 (忽略对数修正)：

$$\theta_0 \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{E} \sqrt{\frac{d}{X_0}}$$

其中 E 为入射电子能量， $d = 0.1 \text{ cm}$ 。

材料	$\sqrt{d/X_0}$	θ_0	1 GeV	10 GeV	100 GeV
碳	0.073	~ 1.0	mrاد	0.10 mrad	0.010 mrad
铝	0.106	~ 1.4	mrاد	0.14 mrad	0.014 mrad
钨	0.535	~ 7.3	mrاد	0.73 mrad	0.073 mrad

4. 薄介质与厚介质中电离能量损失的分布差异

- **薄介质：**带电粒子穿过薄吸收体时，碰撞次数少，能量损失分布为 **朗道分布**。曲线不对称，具有向高能端的拖尾（高能 δ 电子使少数事例沉积很大能量），最可几能量损失小于平均损失。
- **厚介质：**穿过厚吸收体时，碰撞次数足够多，根据中心极限定理，能量损失分布趋近于 **高斯分布**，对称且波动相对变小。
- **原因：**薄介质中发生单次大能量转移的概率虽低，但不可忽略，直接导致分布不对称；厚介质中大量独立碰撞的叠加使总能量损失平均化，从而呈现出对称的高斯形状。

第二部分：泊松过程、泊松分布与母函数

1. 泊松过程

具有独立增量和平稳增量的计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，满足 $N(0) = 0$ ，且在任意长为 Δt 的区间内，事件数服从参数为 $\lambda \Delta t$ 的泊松分布。常用描述：放射性衰变、电话呼叫到达、排队系统等。

2. 泊松分布的性质与应用

- 分布列: $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$
- 性质: 均值 $E[X] = \lambda$, 方差 $\text{Var}(X) = \lambda$ (均值等于方差); 可加性: 独立泊松变量之和仍为泊松变量。
- 应用: 稀有事件计数、质量控制、生物统计、排队论、核物理中的计数实验等。

3. 与二项分布、高斯分布的关系

- 与二项分布: 当二项分布 $B(n, p)$ 中 $n \rightarrow \infty$ 、 $p \rightarrow 0$, 且 $np = \lambda$ 保持不变时, 二项分布趋近于泊松分布 $P(\lambda)$ 。即泊松分布是罕见事件的极限。
- 与高斯分布: 当泊松分布的参数 λ 很大 (通常 $\lambda > 20$), 泊松分布可由均值为 λ 、方差为 λ 的正态分布 $N(\lambda, \lambda)$ 很好地近似 (连续性修正后)。

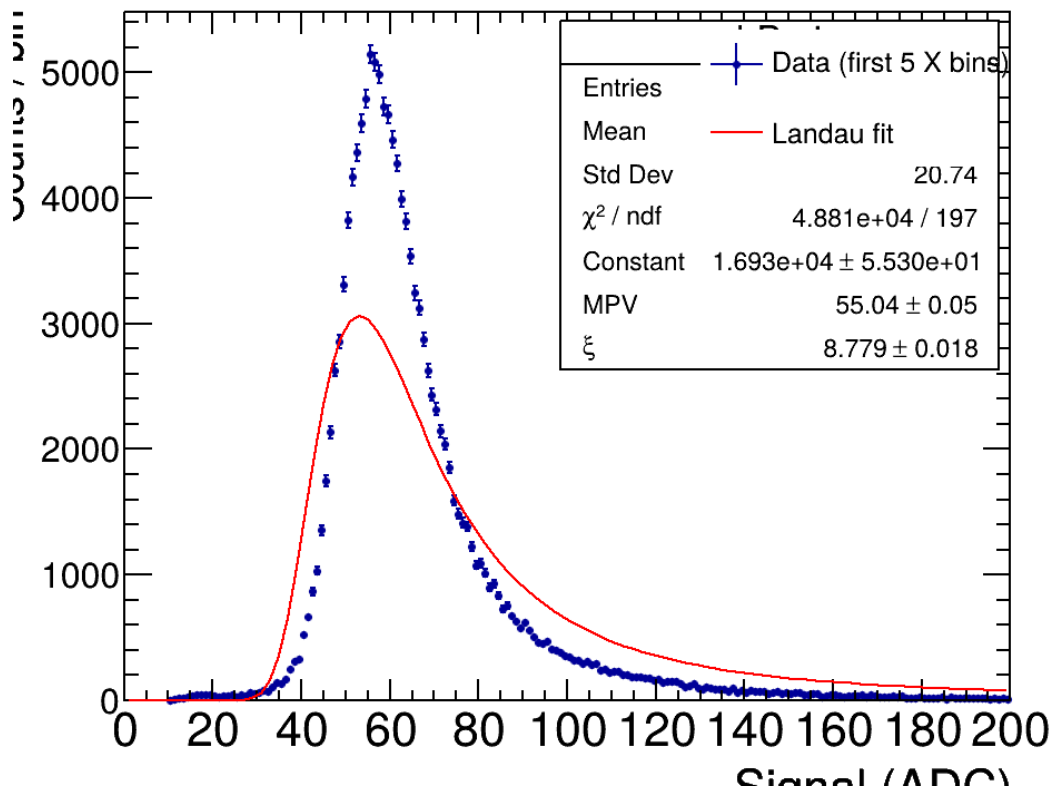
4. 母函数 (概率生成函数) 的性质及应用

- 定义: 对于非负整值随机变量 X , 其概率生成函数 $G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) s^k$ 。
- 性质:
 1. $G_X(1) = 1$;
 2. 均值和方差可由导数求得: $E[X] = G'_X(1)$, $\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$;
 3. 若 X 与 Y 独立, 则 $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ 。即独立和的母函数等于母函数之积。
- 证明两独立泊松变量之和仍为泊松变量

设随机变量 $X \sim P(\lambda_1)$ $Y \sim P(\lambda_2)$ 且 X, Y 相互独立
 定义母函数为 $G_X(s) = e^{\lambda_1(s-1)}$ $G_Y(s) = e^{\lambda_2(s-1)}$
 $\therefore E[s^X \cdot s^Y] = E[s^X] \cdot E[s^Y]$
 代入 $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$
 $\therefore X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

第三部分:

300 μm Si strip signal (first 5 X bins)



该信号服从朗道分布，另附查找的朗道分布资料

当最小电离粒子（MIP，比如带电 π 介子、 μ 子）穿过 $300\mu\text{m}$ 厚的硅微条探测器时，其能量沉积过程由 Bethe-Bloch 公式描述，在薄介质中会呈现朗道分布的特征：

1. 不对称性：分布有一个陡峭的峰值（最概然值，MPV），但右侧带有长长的“尾巴”，这是因为粒子偶尔会发生大能量损失（如 δ 电子产生），但这种概率很低。
2. 图中蓝色数据点的形状，完美符合朗道分布的特征：峰值在 ~ 55 ADC 附近，左侧快速上升，右侧缓慢衰减，和理论预期完全一致。

补充：如果是更厚的硅介质（如几毫米），能量损失分布才会逐渐趋近于高斯分布，但 $300\mu\text{m}$ 属于薄介质，因此必须用朗道分布描述。

附：粒子探测器一书内容晦涩，我看了很久也很难理解，主要问题是物理概念的大多不熟悉，也尽自己全力来理解了，上面第一二部分的作业也只能大致对概念部分进行简单理解。后面会更加努力的。

以下是在 ai 的辅助下进行理解并做了知识点整理

